



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

— Α' ΛΥΚΕΙΟΥ —

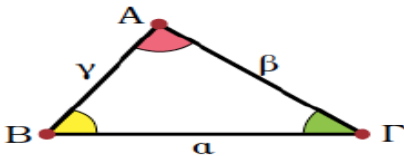
2ο ΓΥΚΕΙΟ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ

ΤΡΙΓΩΝΑ

Κύρια Στοιχεία Τριγώνου

■ Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει :

- α) Τρεις κορυφές, τα σημεία A, B, Γ
- β) Τρεις πλευρές, τα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma A$ ή α, β, γ
- γ) Τρεις γωνίες, τις $\widehat{BA\Gamma}, \widehat{AB\Gamma}, \widehat{A\Gamma B}$ ή $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$

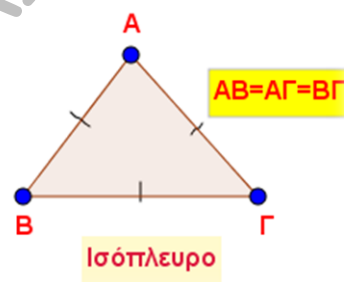
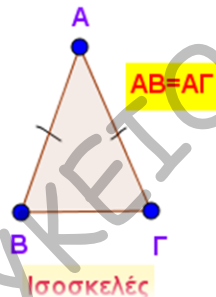
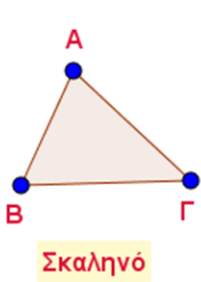


Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου αποτελούν τα κύρια στοιχεία του τριγώνου

Είδη Τριγώνου

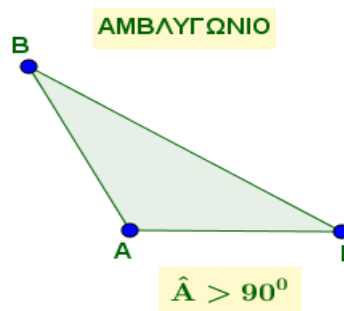
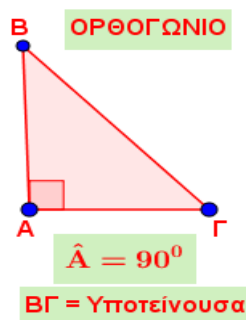
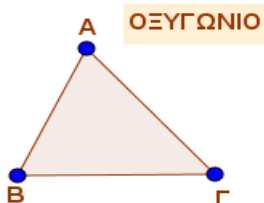
■ Τα είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές του είναι :

- α) **Σκαληνό**, είναι το τρίγωνο που έχει όλες του τις πλευρές άνισες.
- β) **Ισοσκελές**, είναι το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές του ίσες.
- γ) **Ισόπλευρο**, είναι το τρίγωνο που έχει όλες του τις πλευρές ίσες.



■ Τα είδη τριγώνου ως προς τις γωνίες του είναι :

- α) **Οξυγώνιο**, είναι το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- β) **Αμβλυγώνιο**, είναι το τρίγωνο που έχει μια γωνία αμβλεία.
- γ) **Ορθογώνιο**, είναι το τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή. Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία, ονομάζεται υποτείνουσα και οι άλλες δύο πλευρές λέγονται κάθετες.



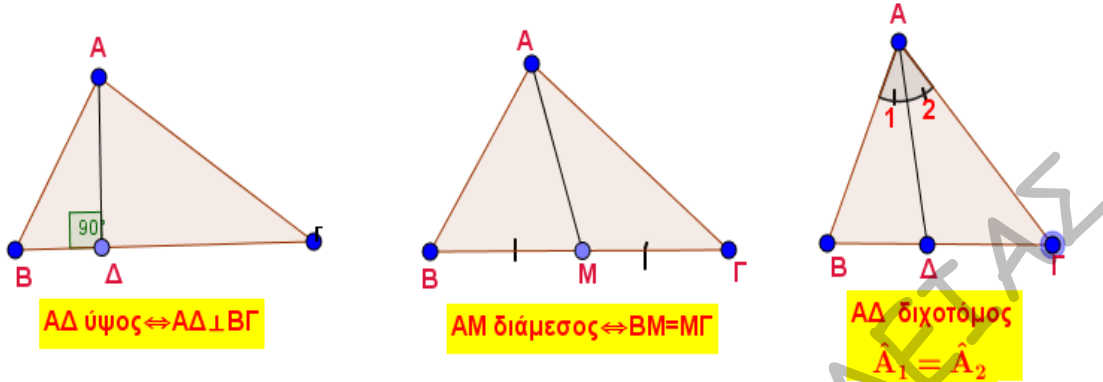
Δευτερεύοντα Στοιχεία Τριγώνου

Διάμεσος : Λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β, γ συμβολίζονται με $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

Διχοτόμος : Λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με την απέναντι πλευρά και χωρίζει τη γωνία της κορυφής σε δύο ίσες γωνίες.

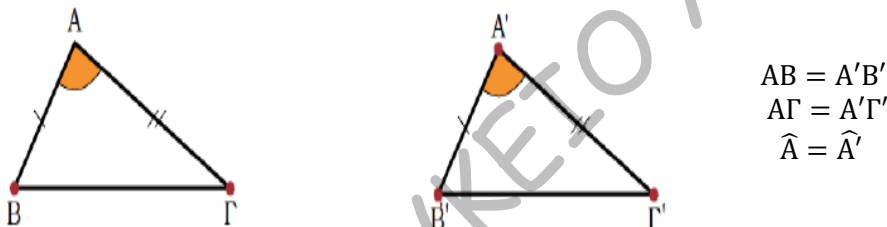
Οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β, γ συμβολίζονται με $\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$.

Ύψος : Λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που αντιστοιχούν στις πλευρές α, β, γ συμβολίζονται με $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$.



1ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων Π-Γ-Π

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.



Ιδιότητες Ισοσκελών Τριγώνων

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο :

- α) Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- β) Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, φέρνω τη διχοτόμο AM .

α) Θα αποδείξουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Συγκρίνω τα τρίγωνα ABM και $A\Gamma M$:

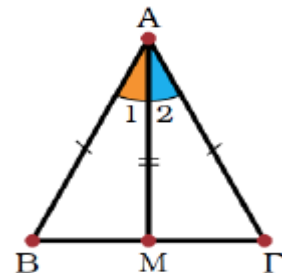
1. $AB = A\Gamma$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
2. AM κοινή πλευρά
3. $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ αφού η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$

Οπότε από το 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Π-Γ-Π),

τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, οπότε και $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

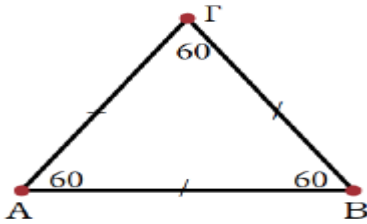
β) Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα ($ABM = A\Gamma M$), τότε όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα και $BM = M\Gamma$, οπότε η AM είναι και διάμεσος.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι και $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma}$ και αφού $\widehat{AMB} + \widehat{AM\Gamma} = 180^\circ$ ως παραπληρωματικές γωνίες, θα είναι $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} = 90^\circ$, άρα το AM είναι και ύψος.



Ιδιότητα Ισοπλεύρων Τριγώνων

Οι γωνίες ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες .



$$AB\Gamma \text{ ισοπλευρο} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$$

Ιδιότητα Μεσοκάθετου Ευθυγράμμου Τμήματος

Κάθε σημείο της μεσοκάθετου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

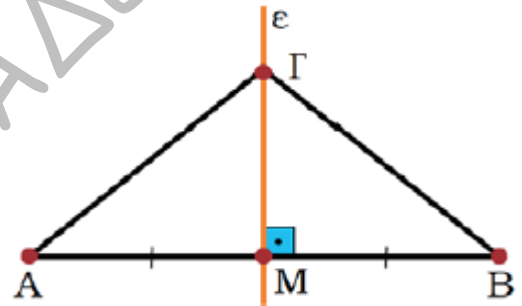
Απόδειξη

Αν Γ τυχαίο σημείο της μεσοκάθετου (ϵ) ενός ευθυγράμμου τμήματος AB , τότε θα αποδείξουμε ότι $\Gamma A = \Gamma B$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\Delta G M$ και $\Delta B M$:

- 1) $AM = MB$ αφού M μέσο του τμήματος AB
- 2) GM κοινή πλευρά
- 3) $\angle GMA = \angle GMB = 90^\circ$

Οπότε από το 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων(Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα και $\Gamma A = \Gamma B$.



Ιδιότητα Τόξων Κύκλων

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες .

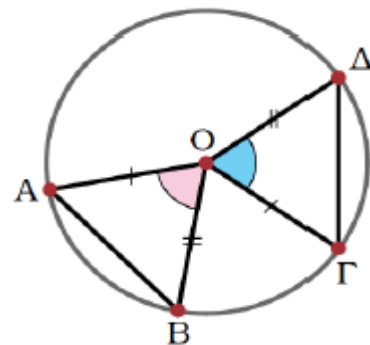
Απόδειξη

Αν τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα θα αποδείξουμε και οι αντίστοιχες χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες . Φέρνουμε τις ακτίνες OA , OB , OG , OD .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$:

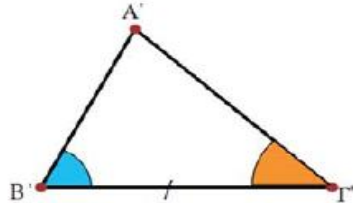
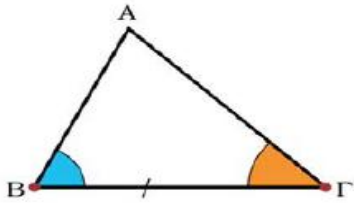
- 1) $OA = OG$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου
- 2) $OB = OD$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου
- 3) $\widehat{AOB} = \widehat{G\Gamma\Delta}$ ως επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα ίσα τόξα AB και $\Gamma\Delta$.

Οπότε από το 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων(Π-Γ-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα και $AB = \Gamma\Delta$.



2ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων Γ-Π-Γ

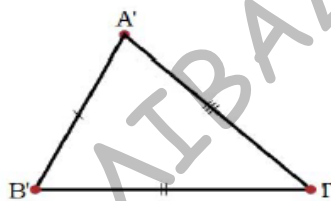
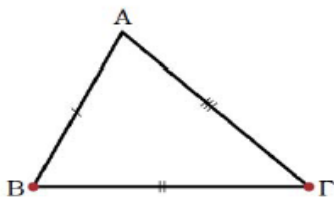
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



$$\begin{aligned} B\Gamma &= B'\Gamma' \\ \widehat{B} &= \widehat{B'} \\ \widehat{\Gamma} &= \widehat{\Gamma'} \end{aligned}$$

3ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων Γ-Γ-Γ

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ AG &= A'G' \\ BG &= B'G' \end{aligned}$$

Πόρισμα Ι

Η διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι και ύψος και διχοτόμος.

Απόδειξη

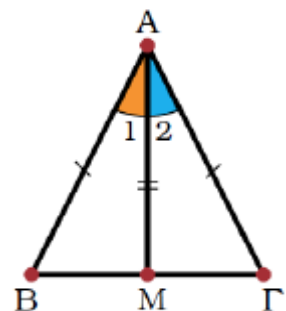
Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με AM διάμεσος.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABM και $A\Gamma M$:

- 1) $AB = A\Gamma$, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
- 2) AM κοινή πλευρά
- 3) $BM = M\Gamma$ αφού AM διάμεσος του τριγώνου

Οπότε από το 3ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Π-Π-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ οπότε AM διχοτόμος.

Επίσης από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι και $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma}$ και αφού $\widehat{AMB} + \widehat{AM\Gamma} = 180^\circ$ ως παραπληρωματικές γωνίες, θα είναι $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} = 90^\circ$, άρα το AM είναι και ύψος.

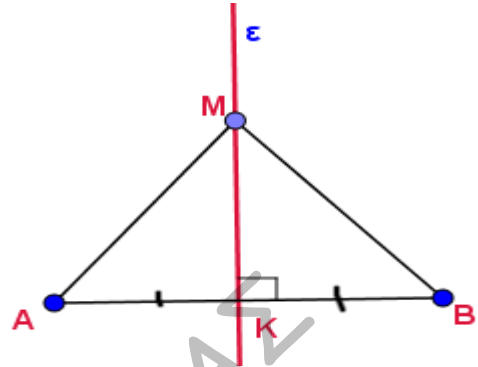


Πόρισμα II

Κάθε σημείου που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του .

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB και σημείο M για το οποίο ισχύει $MA = MB$ και K το μέσο του AB .
Αφού $MA = MB$, το τρίγωνο MAB είναι ισοσκελές και αφού η MK είναι διάμεσός του, η MK θα είναι και ύψος, άρα η MK είναι η μεσοκάθετος του AB .



Πόρισμα III

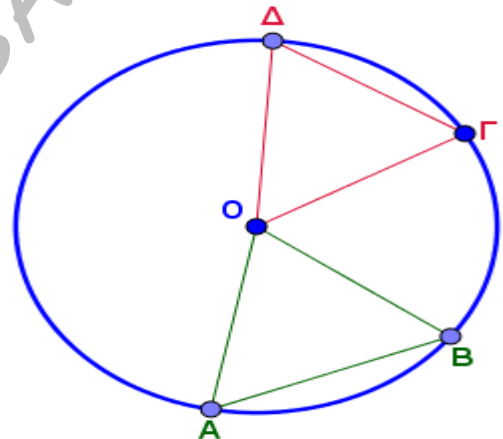
Αν ο χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα .

Απόδειξη

Αν οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες, συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$:

- 1) $OA = O\Gamma$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου
- 2) $OB = O\Delta$ ως ακτίνες του ίδιου κύκλου
- 3) $AB = \Gamma\Delta$ από υπόθεση

Οπότε από το 3^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων (Π-Π-Π), τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα $\widehat{AOB} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ και αφού είναι επίκεντρες, θα είναι ίσα και τα αντίστοιχα τόξα AB και $\Gamma\Delta$.



Πόρισμα IV

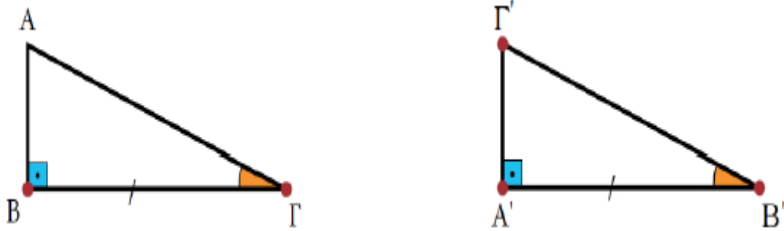
Αν ο χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μεγαλύτερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα .

Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

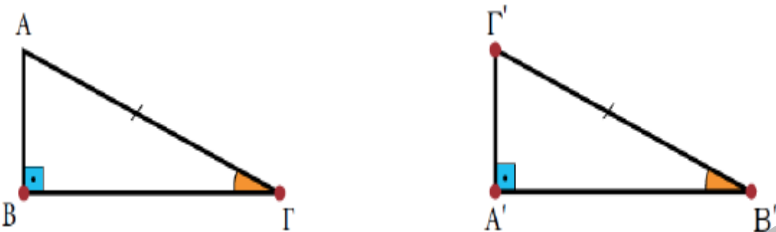
- 1) Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μια προς μια, είναι ίσα .



2) Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μια προς μια , είναι ίσα .



3) Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια ίσες , τότε είναι ίσα .



4) Δύο ορθογώνια τρίγωνα , που έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μια προς μια , τότε είναι ίσα .



Ανακεφαλαίωση

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν :

- Δύο ομόλογες πλευρές τους μια προς μια ίσες .
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μια .

Πόρισμα I

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στην βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής .

Πόρισμα II

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

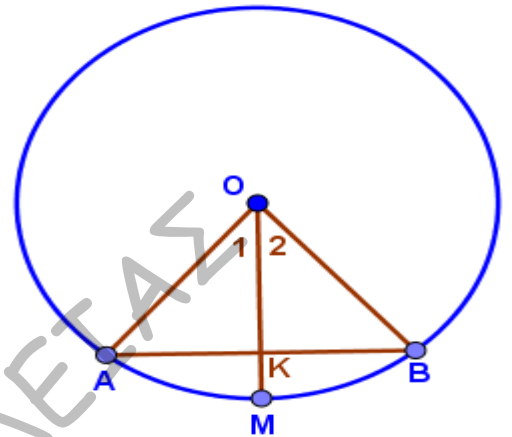
Απόδειξη

Θεωρούμε μια χορδή AB και την κάθετη OK της AB , που τέμνει τον κύκλο στο σημείο M .

Το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές (αφού $OA = OB$ ως ακτίνες), και το τμήμα OK είναι ύψος του, τότε θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος.

Αφού OK διάμεσος, τότε K μέσο της AB , άρα η κάθετος διχοτομεί την χορδή.

Αφού OK διχοτόμος θα είναι $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$, οι οποίες είναι επίκεντρες στον κύκλο, άρα τα τόξα στα οποία βαίνουν AM και MB θα είναι ίσα. Οπότε η κάθετος διχοτομεί και το τόξο της.



Θεώρημα

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

ΟΡΘΟ: Αν οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες, θα αποδείξουμε ότι και τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και $OL\Gamma$:

1) $OA = O\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου

2) $AK = \Gamma L$ ως μισά των ίσων χορδών AB και $\Gamma\Delta$.

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και $OL\Gamma$ είναι ίσα, οπότε $OK = OL$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Αν τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα, τότε θα αποδείξουμε ότι και οι χορδές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.

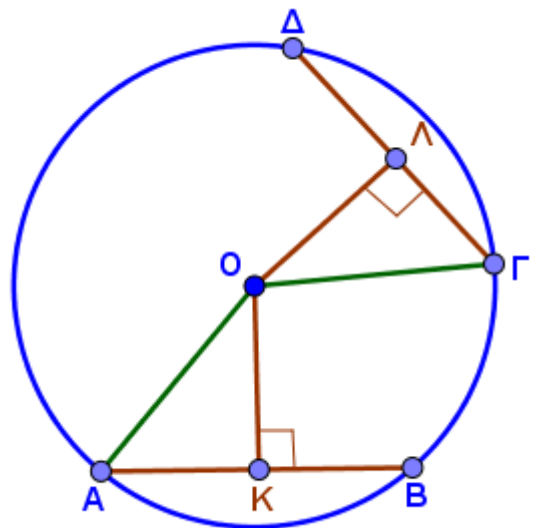
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και $OL\Gamma$:

1) $OA = O\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου

2) $OK = OL$ από υπόθεση

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα OKA και $OL\Gamma$ είναι ίσα,

οπότε $AK = \Gamma L \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$



Ασκήσεις στα Τρίγωνα

Ασκήσεις στο Κριτήριο Π-Γ-Π

1.1 Στις προεκτάσεις των πλευρών BA , GA των πλευρών ενός τριγώνου $ABΓ$ θεωρούμε τμήματα $AD = AB$, $AE = AG$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = ΓΔ$ (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.38)

1.2 Σε ισόπλευρο τρίγωνο $ABΓ$ προεκτείνουμε τις πλευρές AB , $ΒΓ$, GA και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα $BK = ΓΛ = AM$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $KΛM$ είναι ισόπλευρο (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.38)

1.3 Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι. (Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.38)

1.4 Έστω τρίγωνο $ABΓ$ και AD η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα $AE = AB$ και $AZ = AG$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{Γ}E = A\hat{Z}B$. (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.38)

1.5 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του BA , GA θεωρούμε ίσα τμήματα AD , AE αντίστοιχα. Αν M το μέσο της βάσης $BΓ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MΔE$ είναι ισοσκελές. (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.38)

1.6 Δίνεται κύκλος κέντρου O και χορδή του AB . Προεκτείνουμε την AB και προς τα δύο άκρα, κατά ίσα τμήματα AG και BD αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $O\hat{Γ}A = O\hat{Δ}B$ (Σχολικό / 3 / Αποδεικτικές / σ.38)

1.7 Στις ίσες πλευρές AB , AG ενός ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $AD = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} AG$. Αν M το μέσο της $BΓ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΔME$ είναι ισοσκελές.

1.8 Στην προέκταση της διαμέσου AD τριγώνου $ABΓ$ παίρνουμε τμήμα $ΔE = AD$. Να αποδείξετε ότι :

α) $EΓ = AB$

β) τα τρίγωνα $ABΓ$ και $BEΓ$ είναι ίσα.

1.9 Να αποδείξετε ότι τα μέσα ενός ισοσκελούς τριγώνου, σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

1.10 Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα $ABΓ$ ($AB = AG$) και $A'B'Γ'$ ($A'B' = A'Γ'$).

α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Αν ισχύει $AG = A'Γ'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα

1.11 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA κατά τμήμα $AD = AG$ και την πλευρά GA κατά τμήμα $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AEΔ$ είναι ίσα.

1.12 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AG$) και η διχοτόμος του AD . Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και AG κατά ίσα τμήματα BE και $ΓZ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BΔE$ και $ΓΔZ$ είναι ίσα.

1.13 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AG$) και M μέσο της $BΓ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και AG κατά ίσα τμήματα BD και $ΓE$ αντίστοιχα. Αν Z είναι τυχαίο σημείο της AM , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ZΔE$ είναι ισοσκελές.

1.14 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AG$) και M μέσο της $BΓ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και AG κατά ίσα τμήματα BD και $ΓE$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $BE = ΓΔ$.

1.15 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία Δ , E αντίστοιχα ώστε $A\Delta = AE$. Αν M μέσο του DE , να δείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές
- β) η AM είναι διχοτόμος της $\hat{A}$

1.16 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δύο άκρα της, θεωρούμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $\hat{B}_{\text{εξωτ.}} = \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}}$
- β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα .
- γ) η διάμεσος AM του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος στο τρίγωνο ADE

1.17 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{K}$. Στην προέκταση της BA παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $A\Lambda = BM$. Να δείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές
- β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$

1.18 Δίνεται γωνία $\alpha\hat{O}\gamma$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες $O\alpha$ και $O\gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε, $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $MA = MB$
- β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}MB$

1.19 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του BA , ΓA θεωρούμε τα σημεία E και Δ έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $BE = \Gamma\Delta$
- β) $B\Delta = \Gamma E$
- γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

1.20 Σε μια χορδή AB ενός κύκλου κέντρου O παίρνουμε σημεία Γ και Δ για τα οποία είναι $A\Gamma = B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $A\hat{O}\Gamma = \Delta\hat{O}B$. Τι είδους τρίγωνο είναι το $O\Gamma\Delta$;

1.21 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε την $A\Gamma$ κατά ίσο τμήμα $\Gamma\Delta$ και την ΓB κατά ίσο τμήμα BE . Να αποδείξετε ότι $AE = B\Delta$

1.22 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διάμεσοί του BM και ΓN .

- α) Να αποδείξετε ότι $BM = \Gamma N$
- β) Προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA κατά ίσα τμήματα $A\Delta$ και $A E$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα BMA και ΓNE είναι ίσα .

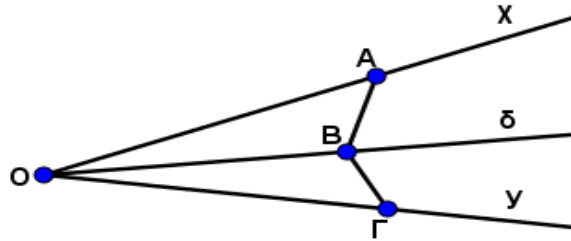
Ασκήσεις στα Κριτήρια Γ-Π-Γ και Π-Π-Π

1.23 Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες .
(Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.43)

1.24 Σε ένα κυρτό τετράπλευρο είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$
(Σχολικό / 3 / Αποδεικτικές / σ.43)

1.25 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε την διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα .
(Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.43)

- 1.26** Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\chi\hat{O}y$. Να αποδείξετε ότι :
- τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ είναι ίσα.
 - η ΑΓ είναι κάθετη στην Οδ .



- 1.27** Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

β) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$

(Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.43)

- 1.28** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ και την προέκταση της ΒΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΓΕΔ είναι ίσα .

- 1.29** Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α'Μ' και η διχοτόμος Β'Δ' του Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ'. Να αποδείξετε ότι :

α) $BD = B'D'$

β) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$

γ) τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα

δ) $A\Theta = A'\Theta'$ και $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$

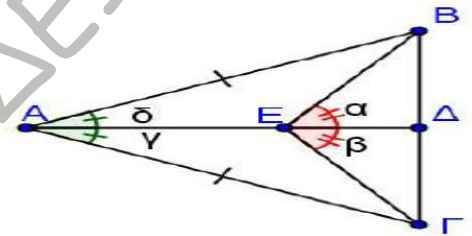
(Σχολικό / 1 / Σύνθετα Θέματα / σ.43)

- 1.30** Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) του διπλανού σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα .

β) το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές

γ) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ



- 1.31** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = KG$. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα

β) η ΑΚ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}G$

γ) η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{K}G$

- 1.32** Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα $A\Delta = AB$, $A\epsilon = AG$ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα .

β) η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς την κορυφή Α διχοτομεί την πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΔΑΕ

- 1.33** Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Μ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $MB = MG$. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα

β) η ΑΜ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{M}G$

1.49 Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα
 β) τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$.

1.50 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρνουμε τις αποστάσεις $M\Delta$ και ME του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $M\Delta = ME$ β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

1.51 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Φέρνουμε τις αποστάσεις MK και $M\Lambda$ του σημείου M από τις ίσες πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $MK = M\Lambda$ β) η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $K\hat{M}\Lambda$

1.52 Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Σχολικό / 1 / Σύνθετα Θέματα / σ.48)

2ο ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΒΑΔΕΙΑΣ

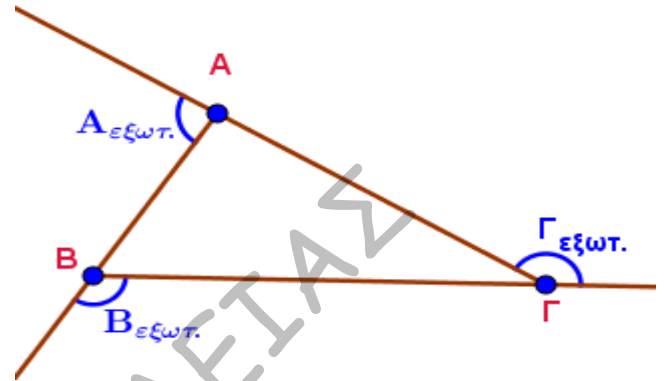
ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σχέση Εξωτερικής και Απέναντι Γωνίας

■ Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμιά από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου .

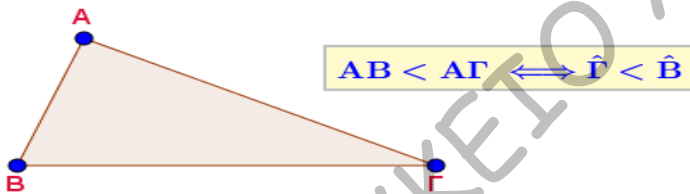
Στο παραπάνω σχήμα ισχύουν οι σχέσεις :

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\text{εξωτ}} &> \hat{B} \text{ και } \hat{A}_{\text{εξωτ}} > \hat{\Gamma} \\ \hat{B}_{\text{εξωτ}} &> \hat{A} \text{ και } \hat{B}_{\text{εξωτ}} > \hat{\Gamma} \\ \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} &> \hat{B} \text{ και } \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} > \hat{A} \quad .\end{aligned}$$



Ανισοτικές Σχέσεις Πλευρών και Γωνιών

■ Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοιες άνισες γωνίες και το αντίστροφο .



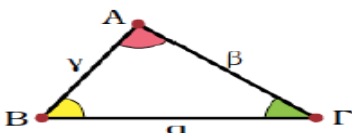
Πορίσματα

- 1) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία , τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου .
- 2) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες , τότε είναι ισοσκελές .
- 3) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες , τότε είναι ισόπλευρο .

Τριγωνική Ανισότητα

■ Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την διαφορά τους

$$\text{Ισχύει: } \beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma .$$

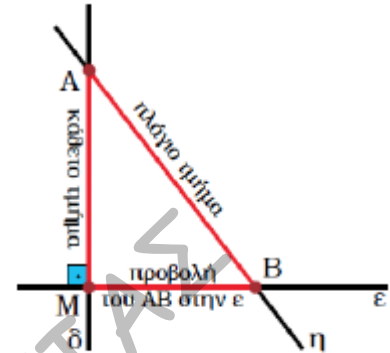


Εφαρμογή

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.

Κάθετες και Πλάγιες

■ Αν από σημείο A , εκτός ευθείας (ε) , φέρουμε προς την (ε) την κάθετο (δ) και την πλάγια (η) που τέμνουν στα M και B αντίστοιχα, τότε το M ονομάζεται προβολή του A πάνω στην (ε) ή ίχνος της καθέτου και το B ονομάζεται ίχνος της (η) πάνω στην (ε) .

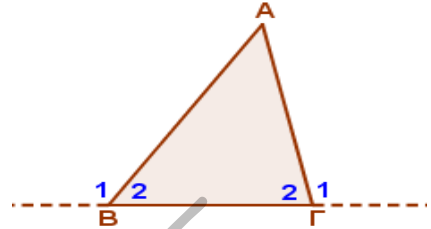


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ανισοτικές Σχέσεις σε ένα Τρίγωνο

2.1 Στο διπλανό σχήμα είναι $\widehat{B}_1 > \widehat{\Gamma}_1$.

Να αποδείξετε ότι $\widehat{B}_1 > 90^\circ$ (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.63)



2.2 Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι: $AM < AB$

(Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.63)

2.3 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ.

Να αποδείξετε ότι $AD < DB$ (Σχολικό / 6 / Εμπέδωσης / σ.63) (Τράπεζα Θεμάτων)

2.4 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$ να δείξετε ότι $\widehat{A} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$;

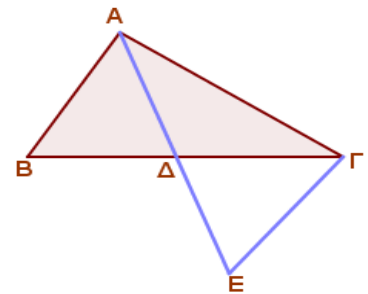
(Σχολικό / 1 / Αποδευκτικές / σ.64)

2.5 Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $DE = AD$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $AB = GE$

β) $AD < \frac{AB + AG}{2}$



2.6 Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την Α.

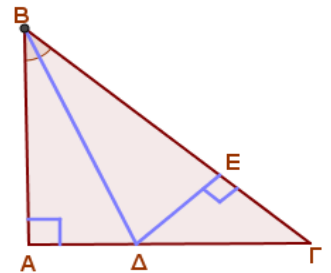
Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας της $\widehat{B}$, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η

γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\widehat{B}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $AD = DE$

β) $AD < DG$

γ) $AG > AB$



2.7 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 23. Αν είναι $AB = 2x + 2$, $AG = x + 3$ και $BΓ = 3x$. Να διατάξετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ από την μικρότερη στη μεγαλύτερη.

2.8 Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 15. Αν είναι $AB = x$, $AG = 2x - 2$ και $BΓ = 2x - 3$. Να διατάξετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ από την μικρότερη στη μεγαλύτερη.

2.9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ να αποδείξετε ότι $DB < DG$

2.10 Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τυχαίο σημείο P στην πλευρά $B\Gamma$. Να δείξετε ότι $GP < AP$

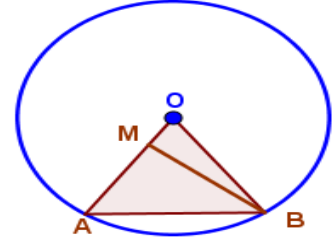
2.11 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος του AD και σημείο E του τμήματος GD . Να αποδείξετε ότι :

α) $AB > BD$

β) $AG > GE$

2.12 Στον διπλανό κύκλο κέντρου O το σημείο M βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και O .

Να αποδείξετε ότι $MB < MA$



2.13 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AG και τυχαίο σημείο E του τμήματος BD .

Να αποδείξετε ότι $\widehat{B\hat{E}\Gamma} > \widehat{A}$

2.14 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B}_{\text{εξωτ.}} < \widehat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}}$

β) Αν οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών B και Γ τέμνονται στο Δ , να αποδείξετε ότι $AB > \Delta\Gamma$

Ισοσκελή Τρίγωνα

2.15 Αν σε κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = B\Gamma$ και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $AD = \Gamma\Delta$.

Τι συμπεραίνετε για την BD ;

(Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.63)

2.16 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και O εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Οι BO και ΓO τέμνουν τις AG και AB στα Λ και M αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι $BO = \Gamma O$ και $OL = OM$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Σχολικό / 7 / Εμπέδωσης / σ.63)

2.17 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και K, Λ τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο σημείο Δ , τότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

(Σχολικό / 8 / Εμπέδωσης / σ.63)

2.18 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές

β) η AI είναι η διχοτόμος της $\widehat{A}$

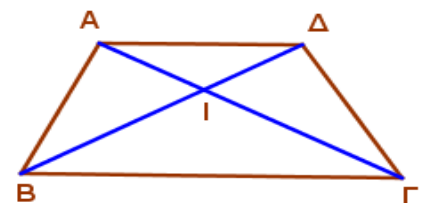
(Σχολικό / 9 / Εμπέδωσης / σ.63)

2.19 Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι $AB = \Gamma\Delta$ και $AG = B\Delta$

Να αποδείξετε ότι :

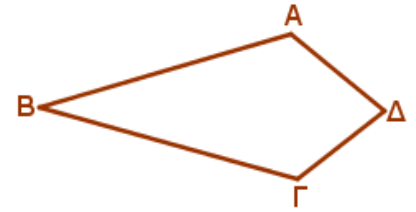
α) το τρίγωνο $IB\Gamma$ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ABI και $\Gamma\Delta I$ είναι ίσα.



2.20 Έστω κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ για το οποίο ισχύει $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ Να αποδείξετε ότι :

- α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$
- β) το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές
- γ) η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$



2.21 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και I το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $B\Gamma I$ είναι ισοσκελές
- β) οι γωνίες $A\hat{I}\Gamma$ και $A\hat{I}B$ είναι ίσες
- γ) η ευθεία AI είναι μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$

2.22 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε κάθετα τμήματα $M\Delta$ και ME στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- α) αν $M\Delta = ME$ τότε τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ΓEM είναι ίσα, καθώς και το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β) αν $AB = A\Gamma$, τότε $M\Delta = ME$

2.23 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τις διαμέσους του BK και $\Gamma\Lambda$ οι οποίες τέμνονται στο Θ . Να αποδείξετε ότι :

- α) οι διάμεσοι BK και $\Gamma\Lambda$ είναι ίσες.
- β) τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $A\Gamma\Theta$ είναι ίσα.

Ανισοτικές Σχέσεις σε δύο Τρίγωνα

2.24 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M μέσο της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι : $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$ (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.64)

2.25 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και Δ ένα σημείο της διαμέσου του AM . Να αποδείξετε ότι :

- α) $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$
- β) $B\Delta < \Gamma\Delta$

2.26 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ, E των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε $\Delta E < B\Gamma$

Τριγωνική Ανισότητα

2.27 Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές :

- α) $\alpha = 3, \beta = 5, \gamma = 9$
- β) $\alpha = 4, \beta = 6, \gamma = 8$

2.28 Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = \frac{7\gamma}{5}$ και $\beta = \frac{\gamma}{3}$

2.29 Να αποδείξετε ότι κάθε χορδή ενός κύκλου, που δεν διέρχεται από το κέντρο του, είναι μικρότερη από την διάμετρο του κύκλου.

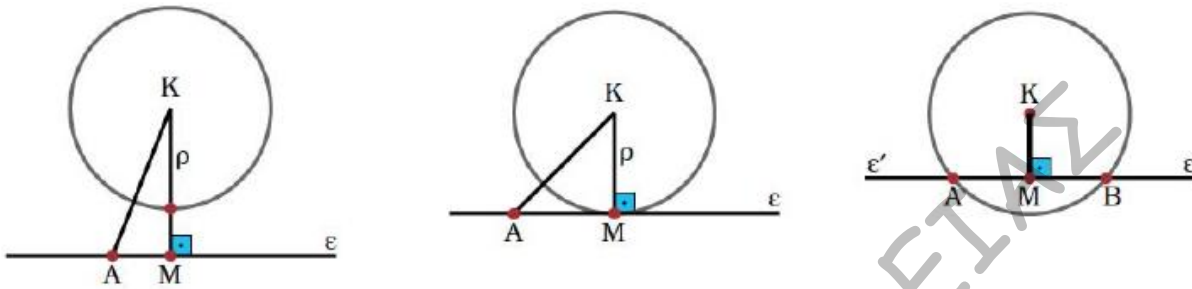
2.30 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, προεκτείνουμε τη BA κατά τμήμα $A\Delta$ και την ΓA κατά τμήμα $A E$. Να αποδείξετε ότι $B\Delta + \Gamma E > B\Gamma + \Delta E$

2.31 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ παίρνουμε ένα σημείο Δ στην πλευρά $B\Gamma$. Από το Δ φέρνουμε καθέτους στις πλευρές του AB και $A\Gamma$, οι οποίες τις τέμνουν στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $EZ < B\Gamma$

ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ

Σχετικές Θέσεις Ευθείας – Κύκλου

■ Θεωρούμε έναν κύκλο (K, ρ) , μια ευθεία (ϵ) και την απόσταση $\delta = KM$, δηλαδή την απόσταση του κέντρου από την ευθεία (ϵ)



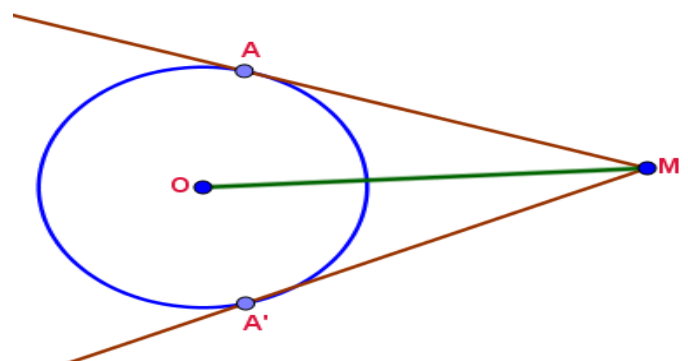
- 1) Η ευθεία (ϵ) είναι εξωτερική του κύκλου (κανένα κοινό σημείο) αν και μόνο αν $\delta > \rho$.
- 2) Η ευθεία (ϵ) εφαπτάται του κύκλου (ένα κοινό σημείο) αν και μόνο αν $\delta = \rho$.
- 3) Η ευθεία (ϵ) τέμνει τον κύκλο (δύο κοινά σημεία) αν και μόνο αν $\delta < \rho$.

Παρατηρήσεις

- α) Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.
- β) Η εφαπτόμενη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.
- γ) Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Εφαπτόμενα Τμήματα

Από το σημείο M φέρνουμε δύο εφαπτομένες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A και A' . Τα ευθύγραμμα τμήματα MA και MA' λέγονται εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου από το σημείο M και η ευθεία MO λέγεται διακεντρική ευθεία του σημείου M .



Θεώρημα

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους .

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι $PA = PB$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα POA , POB :

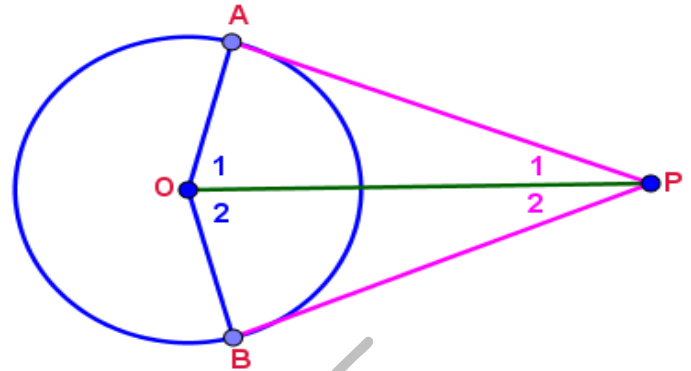
- 1) PO κοινή πλευρά
- 2) $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ αφού η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτόμενη .

- 3) $OA = OB$ ως ακτίνες του κύκλου

Οπότε από το 1^ο Κριτήριο Ισότητας Τριγώνων

(Π-Γ-Π) , τα τρίγωνα είναι ίσα ,

άρα όλα τα στοιχεία τους είναι ίσα , άρα και $PA = PB$



Παρατηρήσεις

α) Η διακεντρική ευθεία είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής .

β) Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί την γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και την γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1 Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στον μικρό κύκλο είναι ίσες. (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.69)

3.2 Δίνεται κύκλος (O, ρ) , μια διάμετρος του AB και οι εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου στα A, B . Αν μια Τρίτη εφαπτομένη του κύκλου ε τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Γ, Δ να δείξετε $\Gamma\hat{O}\Delta = 90^\circ$ (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.69)

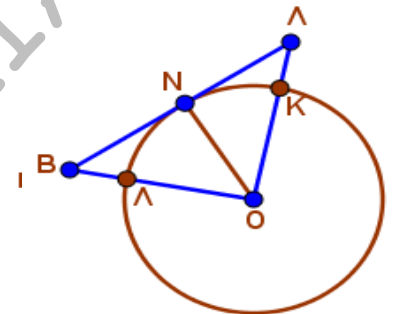
3.3 Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μιας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο. (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.69)

3.4 Από σημείο M εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρουμε τις εφαπτομένες MA, MB του κύκλου. Προεκτείνουμε το OB κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AMB} = 3\widehat{B\Gamma}$ (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.69)

3.5 Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενη του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B τέτοια, ώστε $NA = NB$.

Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

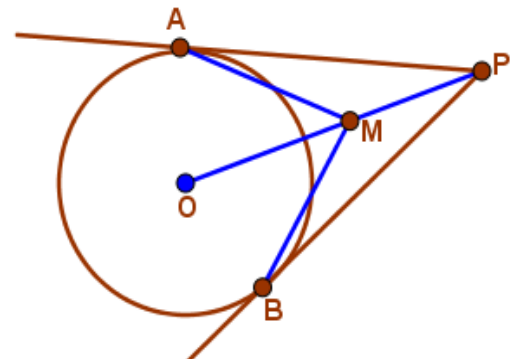
- α) το τρίγωνο AOB είναι ισοσκελές
- β) το σημείο N είναι το μέσο του τόξου $K\Lambda$



3.6 Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB .

Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα PAM και PBM είναι ίσα.
- β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες.



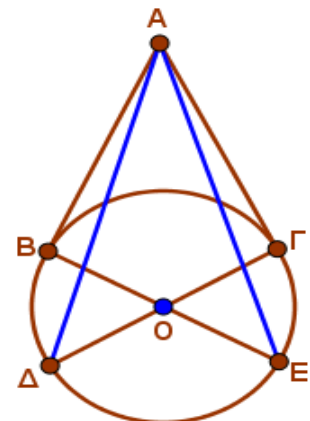
3.7 Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ .

Από σημείο A εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG .

Τα σημεία E και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα
- β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα



3.8 Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

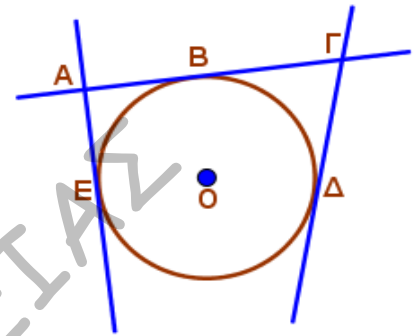
- α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- β) $\Gamma A = \Delta B$
- γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$

3.9 Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του M . Από το M φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε τα MA και MB κατά ίσα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία MO είναι μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.

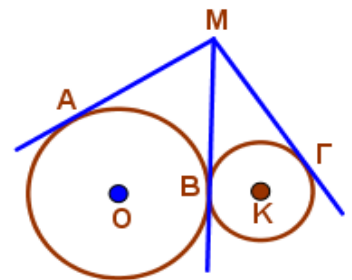
3.10 Στο διπλανό σχήμα οι $A\Gamma$, AE και $\Gamma\Delta$ είναι εφαπτόμενες του κύκλου με κέντρο το O .

Να αποδείξετε ότι :

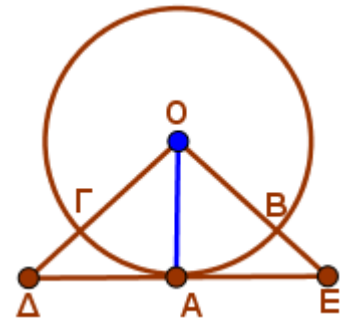
- α) $AE + \Gamma\Delta = A\Gamma$
- β) $A\Delta + E\Gamma < 3A\Gamma$



3.11 Στο διπλανό σχήμα τα MA , MB , MG είναι εφαπτόμενα τμήματα των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι $MA = MG$



3.12 Στο διπλανό σχήμα η ΔE εφάπτεται του κύκλου κέντρου O στο σημείο A . Αν $A\Delta = AE$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

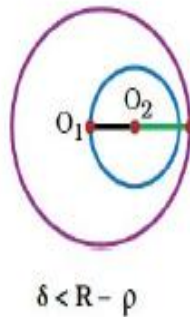
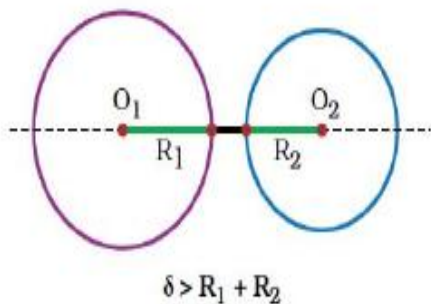


ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Σχετική Θέση Δύο Κύκλων

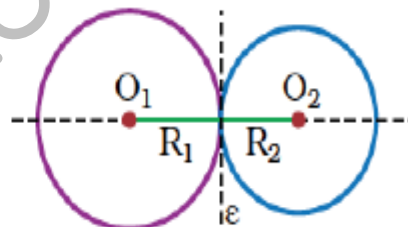
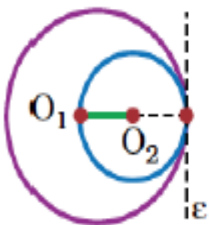
■ Θεωρούμε δύο κύκλους (O_1, R_1) , (O_2, R_2) . Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα των δύο κύκλων ονομάζεται διάκεντρος και συμβολίζεται με δ .

1) Κύκλοι χωρίς κανένα κοινό σημείο



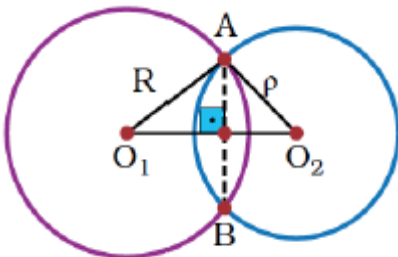
- α) Ο κύκλος με ακτίνα R_1 βρίσκεται εξωτερικά του κύκλου με ακτίνα R_2 αν και μόνο αν ισχύει $\delta > R_1 + R_2$
 β) Ο κύκλος με ακτίνα R_2 βρίσκεται εσωτερικά του κύκλου με ακτίνα R_1 αν και μόνο αν ισχύει $\delta < R_1 - R_2$

2) Κύκλοι με ένα κοινό σημείο (Εφαπτόμενοι Κύκλοι)



- α) Ο κύκλος με ακτίνα R_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου με ακτίνα R_1 αν και μόνο αν ισχύει $\delta = R_1 - R_2$
 β) Ο κύκλος με ακτίνα R_1 εφάπτεται εξωτερικά του κύκλου με ακτίνα R_2 αν και μόνο αν ισχύει $\delta = R_1 + R_2$

3) Κύκλοι με δύο κοινά σημεία (Τεμνόμενοι Κύκλοι)



Οι κύκλοι τέμνονται αν και μόνο αν $R_1 - R_2 < \delta < R_1 + R_2$.

Το ευθύγραμμο τμήμα AB που ενώνει τα κοινά σημεία των δύο κύκλων λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

Στην περίπτωση που οι κύκλοι είναι ίσοι τότε η κοινή χορδή είναι η μεσοκάθετος της διακέντρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1 Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (K, ρ) και $(\Lambda, 2\rho)$ αν :

α) $K\Lambda = \frac{\rho}{2}$ β) $K\Lambda = \rho$ γ) $K\Lambda = 2\rho$ δ) $K\Lambda = 3\rho$ ε) $K\Lambda = 4\rho$ (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.71)

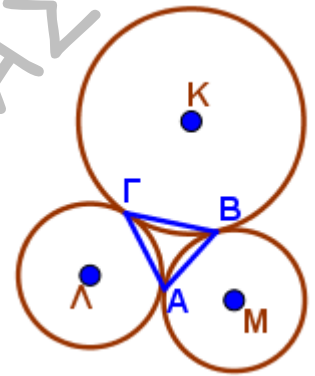
4.2 Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 3)$ και $(\Lambda, 5)$. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου των δύο κύκλων αν αυτοί :

α) εφάπτονται εξωτερικά
β) εφάπτονται εσωτερικά

4.3 Δίνονται δύο κύκλοι $(K, 4)$ και $(\Lambda, 7)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων , όταν :

α) $\delta = 13$ β) $\delta = 11$ γ) $\delta = 6$ δ) $\delta = 3$ ε) $\delta = 1$

4.4 Στο διπλανό σχήμα οι κύκλοι με κέντρα K, Λ και M εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο . Επίσης οι κύκλοι με κέντρα Λ και M είναι ίσοι . Αν A, B, Γ είναι τα σημεία επαφής , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές .



4.5 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) με $K\Lambda > 2\rho$. Έστω M σημείο της μεσοκάθετης της διακέντρου $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι από το M άγονται ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς τους δύο κύκλους .

4.6 Δύο κύκλοι με κέντρα K και Λ εφάπτονται εξωτερικά στο λσημείο A . Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη (ϵ) των δύο κύκλων εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ . Αν η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνει την (ϵ) στο M , να αποδείξετε ότι :

α) το M είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$
β) $\angle K\tilde{M}\Lambda = 90^\circ$

4.7 Να αποδείξετε ότι αν τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο , τότε τα σημεία επαφής αποτελούν κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου .

4.8 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (K, ρ) και (Λ, ρ) με $K\Lambda > 2\rho$. Μια τυχαία ευθεία διέρχεται από το μέσο M της διακέντρου $K\Lambda$ και τέμνει τον κύκλο (K, ρ) στα σημεία A, B και τον κύκλο (Λ, ρ) στα σημεία Γ, Δ . Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

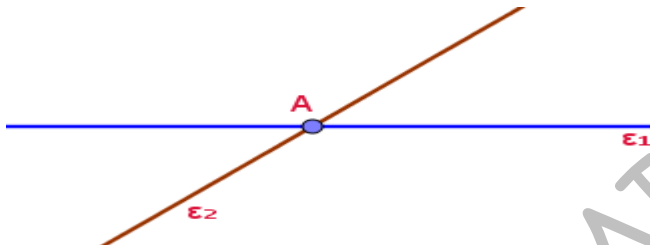
Σχετική Θέση Δύο Ευθειών

Οι σχετικές θέσεις δύο ευθειών, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι :

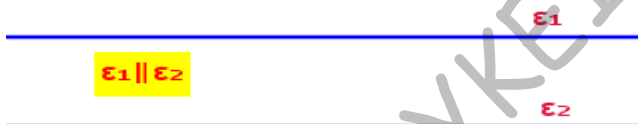
α) Ταυτίζονται



β) Τέμνονται, έχουν δηλαδή ένα κοινό σημείο



γ) Δεν τέμνονται. Στην περίπτωση αυτή οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και λέγονται παράλληλες. Για να δηλώσουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες γράφουμε $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$



Τέμνουσα δύο Ευθειών

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 του επιπέδου οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ϵ_3 .

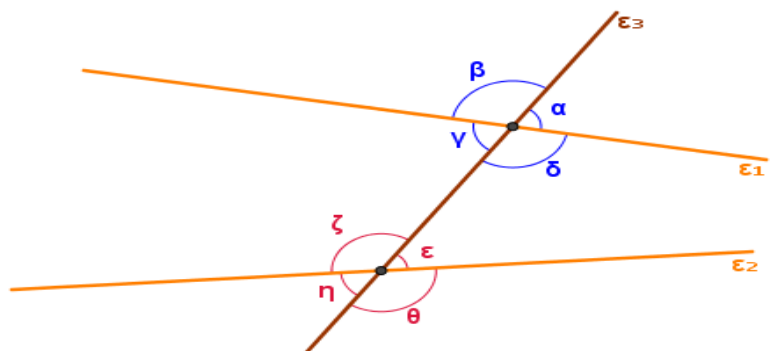
Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.

α) Οι γωνίες $\gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ λέγονται εντός.

β) Οι γωνίες $\alpha, \beta, \eta, \theta$ λέγονται εκτός.

γ) Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ϵ_3 λέγονται επί τα αυτά μέρη.

δ) Δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της τέμνουσας ϵ_3 λέγονται εναλλάξ.

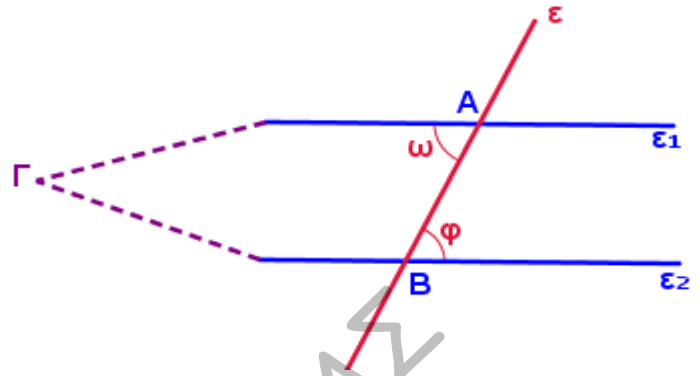


Θεώρημα Ύπαρξης Παραλλήλων

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\omega = \varphi$. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δεν είναι παράλληλες, τότε θα τέμνονται σε ένα σημείο Γ . Η γωνία φ τότε θα είναι εξωτερική του τριγώνου $AB\Gamma$ άρα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική ω . Αυτό όμως είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει $\omega = \varphi$. Άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.



Πορίσματα

- 1) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.
- 2) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.

Αίτημα Παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μια μόνο παράλληλη προς αυτή.

Ιδιότητες Παραλλήλων Ευθειών

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν :

- α) τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
- β) τις εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
- γ) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

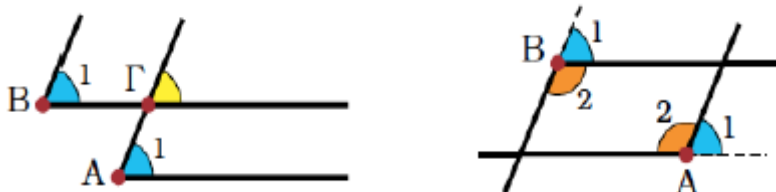
Προτάσεις

- 1) Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες προς μια τρίτη ευθεία, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες.
- 2) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και μια τρίτη ευθεία τέμνει τη μια από αυτές, τότε θα τέμνει και την άλλη.
- 3) Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από τις δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα είναι κάθετη και στην άλλη.
- 4) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Γωνίες με πλευρές Παράλληλες

Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες μια προς μια, τότε :

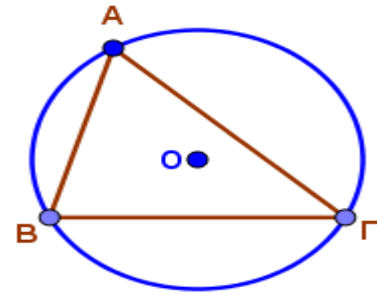
- α) είναι ίσες αν και οι δύο γωνίες είναι οξείες ή αμβλείες
- β) είναι παραπληρωματικές αν η μια είναι οξεία και η άλλη είναι αμβλεία.



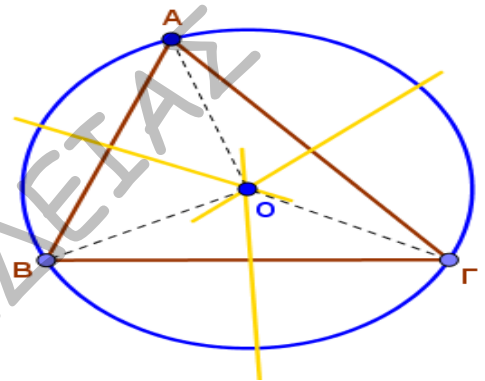
Αξιοσημείωτοι Κύκλοι Τριγώνου

Ο Περιγεγραμμένος Κύκλος

α) Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου, λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



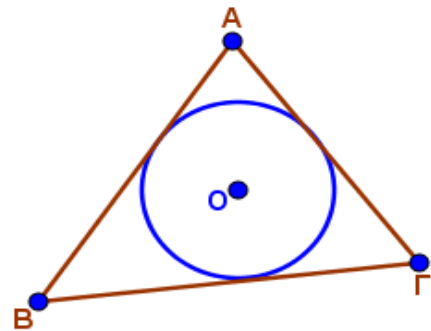
β) Οι τρεις μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



γ) Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου, λέγεται περίκεντρο.

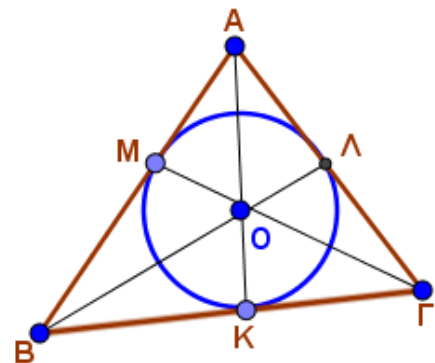
Ο Εγγεγραμμένος Κύκλος

α) Ο κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τριγώνου και εφάπτεται των πλευρών του, λέγεται εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



β) Οι διχοτόμοι των γωνιών τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

γ) Το σημείο τομής των διχοτόμων λέγεται έγκεντρο.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με δοσμένη Παράλληλία

5.1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.87)

5.2 Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και σημείο A της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το A προς την Ox τέμνει την Oy στο B , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.87)

5.3 Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και η διχοτόμος της Od . Από σημείο A της Oy φέρνουμε παράλληλη προς την Od που τέμνει την προέκταση της Ox στο B . Να αποδείξετε ότι $OA = OB$ (Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.87)

5.4 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AM . Φέρνουμε $Gx \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το A και παίρνουμε σε αυτή τμήμα $\Gamma\Delta = AB$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της $\widehat{M\hat{A}\Gamma}$ (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.87)

5.5 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος του. Από την κορυφή B φέρνουμε BE παράλληλη στην $A\Delta$ που τέμνει την προέκταση της ΓA στο E . Να δείξετε ότι: $EG = AB + A\Gamma$ (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.87)

5.6 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η εξωτερική του διχοτόμος Ax . Από την κορυφή B φέρνουμε $B\Delta \parallel Ax$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ . Να δείξετε ότι: $\Delta\Gamma = A\Gamma - AB$ (Σχολικό / 3 / Αποδεικτικές / σ.88)

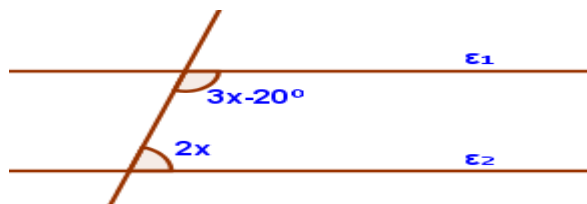
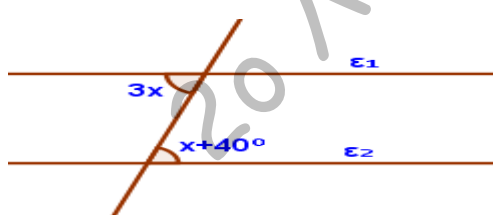
5.7 Από το έγκεντρο I , τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ευθεία παράλληλη της $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$ (Σχολικό / 4 / Αποδεικτικές / σ.88)

5.8 Από το έγκεντρο I , τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε $I\Delta \parallel AB$ και $IE \parallel A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔIE ισούται με τη $B\Gamma$. (Σχολικό / 5 / Αποδεικτικές / σ.88)

5.9 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), $A\Delta$ η διχοτόμος του και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του $B\Gamma$, που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

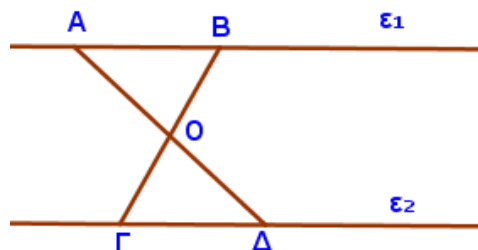
- α) το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές
- β) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $A\Delta Z$ είναι ίσα.

5.10 Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ να βρείτε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα:

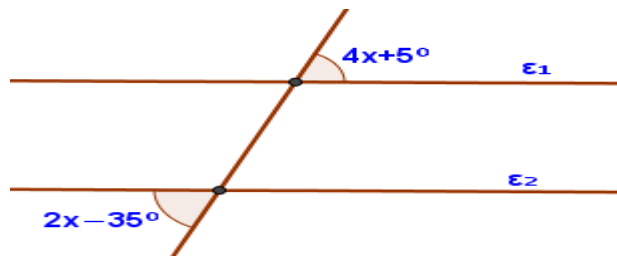
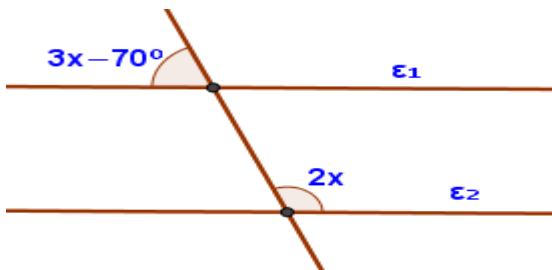


5.11 Σε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ θεωρούμε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα AOB και $\Gamma O\Delta$ είναι ίσα.
- β) $A\Gamma = B\Delta$



5.12 Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ να βρείτε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα :



5.13 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και ευθεία $\varepsilon \parallel B\Gamma$ που διέρχεται από το A . Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) διχοτομεί την $\hat{A}_{\text{εξωτ}}$.

5.14 Δίνεται κύκλος κέντρου O , μια διάμετρός του AB και μια χορδή του $A\Gamma$. Φέρουμε ευθεία $\varepsilon \parallel A\Gamma$, που διέρχεται από το O και τέμνει το τόξο $B\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του $B\Gamma$.

5.15 Από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος AB φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Ax και By . Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του AB , και στις Ax , By τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, ώστε $A\Delta = A\Gamma$ και $BE = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\Gamma E$ είναι ορθή. (Σχολικό / 2 / Σύνθετα Θέματα / σ.88)

Χωρίς Δοσμένη Παραλληλία

5.16 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και Δ σημείο της πλευράς AB . Αν ο κύκλος $(\Delta, \Delta B)$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο E , να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel A\Gamma$ (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.87)

5.17 Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA ενός τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ (Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.87) (Τράπεζα Θεμάτων)

5.18 Δίνεται κύκλος (O, ρ) και M μέσο της χορδής του AB . Φέρνουμε $Ox \perp OM$. Να αποδείξετε ότι $Ox \parallel AB$. (Σχολικό / 6 / Εμπέδωσης / σ.87)

5.19 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma E = \Gamma B$, κάθετο στην $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η BE είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$.

5.20 Δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρνουμε ευθεία (ε) που διέρχεται από το A και τέμνει τον κύκλο (K, R) στο B και τον κύκλο (Λ, ρ) στο Γ . Να αποδείξετε ότι $KB \parallel \Lambda\Gamma$.

5.21 Δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο αυτόν MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $M\Gamma = MA$ και την OM κατά τμήμα $M\Delta = OM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και $M\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

β) Να αιτιολογήσετε ότι $OA \parallel \Gamma\Delta$.

Άθροισμα Γωνιών Πολυγώνων

Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου

Το άθροισμα γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές .

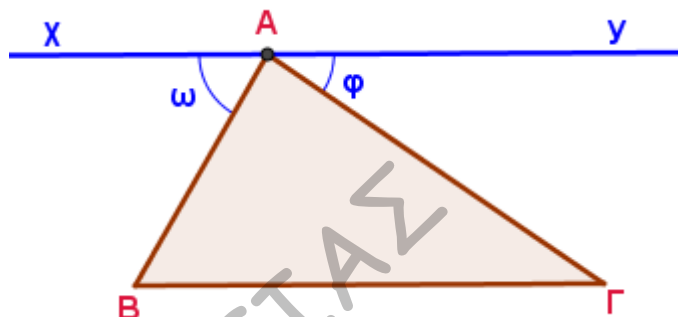
Απόδειξη

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Από μια κορυφή του , την A φέρνουμε παράλληλη ευθεία xy προς την βάση του τριγώνου $B\Gamma$. Τότε :

■ $\hat{B} = \hat{\omega}$ (1) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων xy και $B\Gamma$

■ $\hat{\Gamma} = \hat{\phi}$ (2) ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων xy και $B\Gamma$

Ισχύει όμως : $\hat{A} + \hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ από τις σχέσεις (1) και (2) .



Ιδιότητα Εξωτερικής Γωνίας Τριγώνου

Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου .

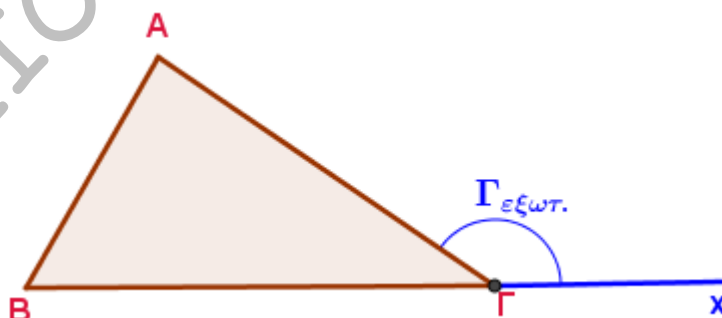
Απόδειξη

Ισχύουν οι σχέσεις : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ (1)

και $\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = 180^\circ$ (2)

Οι σχέσεις (1) και (2) έχουν τα δεύτερα μέλη ίσα , άρα :

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = \hat{A} + \hat{B}$.



Πορίσματα

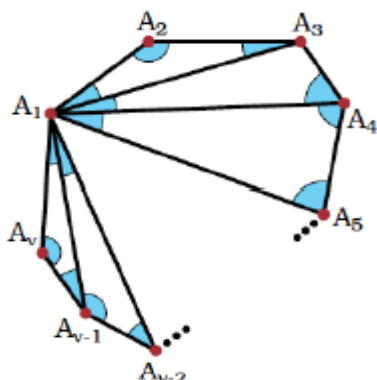
α) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία , τότε θα έχουν και τις τρίτες τους γωνίες ίσες .

β) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές .

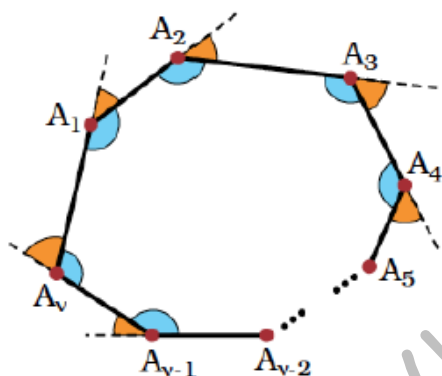
γ) Κάθε γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 60° .

Άθροισμα Γωνιών Κυρτού n -γώνου

1) Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n -γώνου είναι ίσο με $(2n - 4) \cdot 90^\circ$ ή $(n - 2) \cdot 180^\circ$



2) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κάθε κυρτού πολυγώνου είναι ίσο με 360°



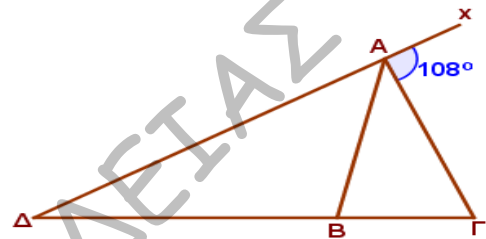
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6.1 Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ της άλλης γωνίας του . Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις)
(Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.92)

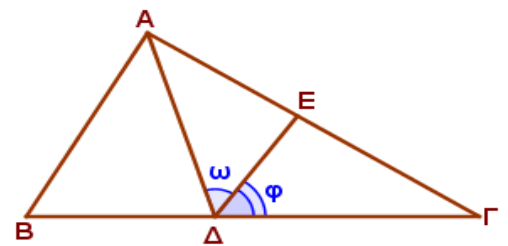
6.2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν I το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $B\hat{I}\Gamma$
(Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.92)

6.3 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία $\hat{A}$ είναι τετραπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = 144^\circ$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του .
(Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.92)

6.4 Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = A\Gamma = \Delta B$ και $x\hat{A}\Gamma = 108^\circ$.
Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$
(Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.92)



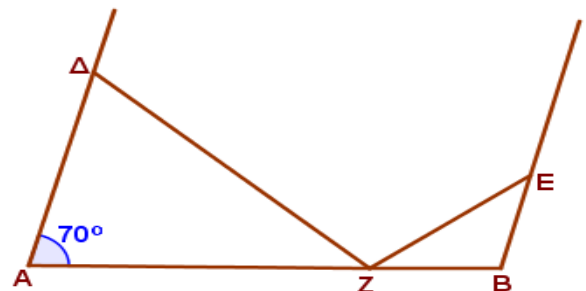
6.5 Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\Delta\Delta$ διχοτόμος , $\Delta E \parallel AB$.
Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° από τη γωνία $\hat{\Gamma}$
να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ .
(Σχολικό / 6 / Εμπέδωσης / σ.92)



6.6 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 60^\circ$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 20^\circ$.
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$
β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος BE τέμνονται στο K , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου AEK .

6.7 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} = 75^\circ$ και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$.
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$
β) Αν τα ύψη AD και FE τέμνονται στο K , να βρείτε τη γωνία $A\hat{K}\Gamma$

6.8 Στο διπλανό σχήμα οι AD και BE είναι παράλληλες .
Επίσης είναι $AD = AZ$, $BE = BZ$, $\hat{A} = 70^\circ$
α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΔAZ και BZE
β) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z\hat{E} = 90^\circ$



6.9 Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

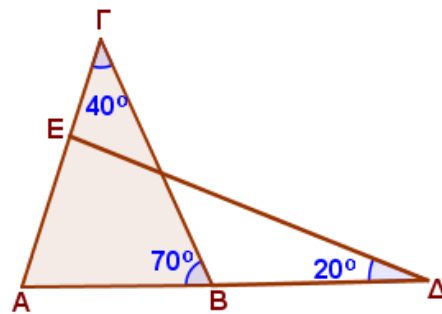
α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}_{\text{εξωτ.}}$ και $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}}$ τέμνονται στο I , να βρείτε τη γωνία $B\hat{I}\Gamma$

6.10 Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι :

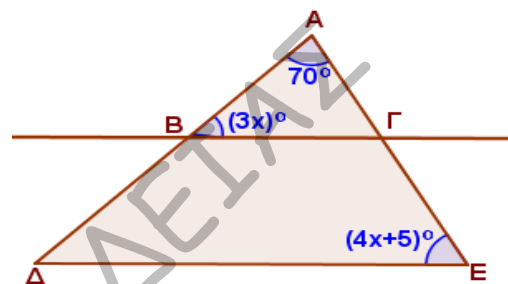
α) το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές

β) η γωνία $A\hat{E}\Delta = 90^\circ$



6.11 Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Gamma$ παράλληλη στην ΔE .

Να βρείτε το x .

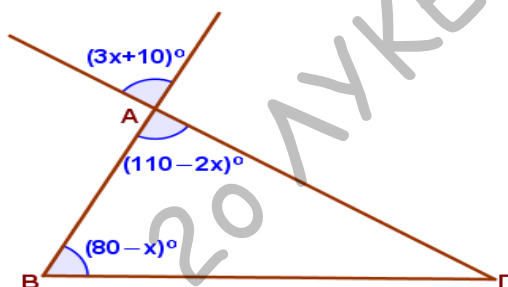


6.12 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 40^\circ$. Έστω Δ τυχαίο σημείο της πλευράς $A\Gamma$ από το οποίο φέρουμε κάθετη ΔE στην $B\Gamma$. Να υπολογίσετε :

α) τις γωνίες του τριγώνου $\Delta E\Gamma$

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου $A\Delta E B$

6.13 Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος



6.14 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) στο οποίο ισχύει $\hat{A} = \hat{B} + 30^\circ$.

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Αν οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο I , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $I\Gamma\Delta$.

6.15 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 78^\circ$. Στις προεκτάσεις της βάσης του παίρνουμε τμήματα $B\Delta = AB$ και $\Gamma E = A\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Delta E$.

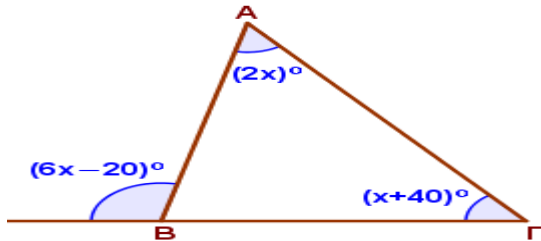
6.16 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσός του AD τέτοια, ώστε $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Θεωρούμε σημείο E στην $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $AD = AE$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{D}\Gamma$

6.17 Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος



6.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\widehat{A} = 40^\circ$. Στην προέκταση της ΓB παίρνουμε τμήμα $BD = AB$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Να βρείτε τη γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$

6.19 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} - \widehat{B} = 36^\circ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

6.20 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $BD, \Gamma E$ οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Αν O το σημείο τομής των διχοτόμων, να αποδείξετε ότι $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma_{\text{εξ.}}}$.

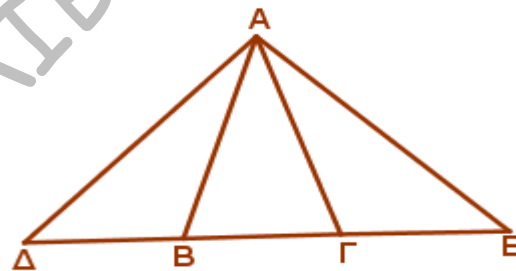
6.21 Στο διπλανό σχήμα ισχύουν :

$\Delta B = BA = A\Gamma = \Gamma E$ και $\widehat{BA\Gamma} = 40^\circ$

Να αποδείξετε ότι :

α) $\widehat{AB\Delta} = \widehat{A\Gamma E} = 110^\circ$

β) το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.



6.22 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\widehat{A} = 50^\circ$. Έστω Δ το σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοιο, ώστε $BD = B\Gamma$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{A}$

6.23 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύει : $\frac{\widehat{A_{\text{εξ.}}}}{2} = \frac{\widehat{B_{\text{εξ.}}}}{3} = \frac{\widehat{\Gamma_{\text{εξ.}}}}{4}$

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Αν το ύψος AD και η διχοτόμος BE τέμνονται στο K , να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου AKE .

6.24 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 80^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 20^\circ$ και AD η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$

β) Φέρνουμε από το Δ ευθεία παράλληλη στην AB , που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{A\Delta E}$, $\widehat{E\Delta\Gamma}$

6.25 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

α) Να δείξετε ότι τα μέσα Δ και E των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση $B\Gamma$.

β) Αν $\widehat{A} = \widehat{B} + 75^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

6.26 Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\widehat{B}_{\text{εξωτ.}} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$. Να δείξετε ότι : $AB = AG$ (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.92)

6.27 Από τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ABΓ φέρουμε $\Delta E \perp AG$.

Να αποδείξετε ότι : $\widehat{A} = 2\widehat{E\Delta\Gamma}$ (Σχολικό / 5 / Αποδεικτικές / σ.92)

6.28 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) . Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και η $\Delta E \parallel AB$.

Αν ισχύει : $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} + 20^\circ$:

α) να βρείτε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου ABΓ .

β) να βρείτε τις γωνίες $\widehat{A\Delta E}$ και $\widehat{\Gamma\Delta E}$

γ) να δείξετε ότι το τρίγωνο AΕΔ είναι ισοσκελές .

6.29 Σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύουν : $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} - \widehat{B} = 36^\circ$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές .

6.30 Δίνεται κύκλος (Ο , ρ) και AB μια διάμετρος του . Αν ΓΔ είναι μια χορδή του έτσι , ώστε : $\widehat{A\hat{O}\Gamma} = \widehat{B\hat{O}\Delta}$

Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta \parallel AB$

6.31 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) και Δ , Ε τα μέσα των πλευρών AB και AG ώστε να ισχύει $\Delta\Delta = AE$

Να αποδείξετε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$

6.32 Σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύουν : $\widehat{A} = 3\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma} + \widehat{A} = 2\widehat{B}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\widehat{B} = 60^\circ$

β) Αν το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του BE τέμνονται στο σημείο Ζ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο

6.33 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) με $\widehat{A} = 80^\circ$. Παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ και κατόπιν τα σημεία Δ και Ζ στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι , ώστε $B\Delta = BE$ και $\Gamma E = \Gamma Z$. Να βρείτε :

α) τις γωνίες των τριγώνων BΔΕ και ΓΖΕ

β) τη γωνία $\widehat{\Delta\hat{E}Z}$

6.34 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ η διχοτόμος της $\widehat{A}$. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την ΑΓ στο Ε .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΓ είναι ορθογώνιο

β) Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{A\hat{D}E}$

γ) Αν η γωνία $\widehat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη της γωνίας $\widehat{\Gamma}$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{E\hat{D}\Gamma}$

6.35 Για τις γωνίες ενός κυρτού τετραπλεύρου ABΓΔ ισχύει ότι : $\frac{\widehat{A}}{3} = \frac{\widehat{B}}{4} = \frac{\widehat{\Gamma}}{5} = \frac{\widehat{\Delta}}{6}$.

Να βρείτε τις γωνίες του ABΓΔ

6.36 Σε κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ είναι $\widehat{A} = 120^\circ$ και $\widehat{B} = 100^\circ$. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{\Gamma}$ και $\widehat{\Delta}$ τέμνονται στο Ε , να βρείτε τη γωνία $\widehat{\Delta\hat{E}\Gamma}$

6.37 Το άθροισμα γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου είναι 900° . Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του .

(Σχολικό / 7 / Εμπέδωσης / σ.92)

6.38 Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ενός κυρτού πολυγώνου που έχει άθροισμα γωνιών :

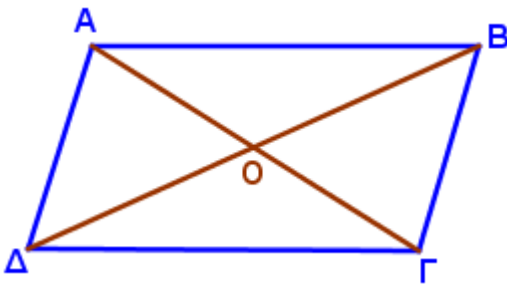
α) 12 ορθές β) 720°

6.39 Καθεμιά από τις γωνίες ενός κυρτού πολυγώνου είναι ίση με 144° . Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου .

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Το Παραλληλόγραμμο

Ορισμός : Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες .



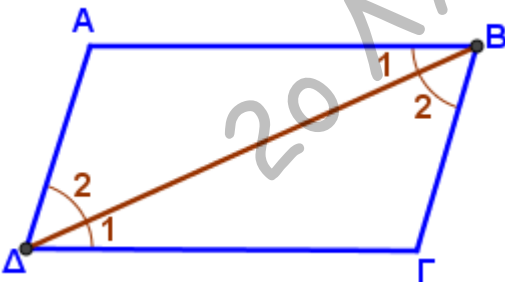
$$ABCD \text{ παραλληλόγραμμο} \Leftrightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

- Τα ευθύγραμμα τμήματα AB και CD λέγονται διαγώνιες του παραλληλογράμμου και το σημείο τομής τους λέγεται κέντρο του παραλληλογράμμου .
- Η απόσταση των δύο απέναντι παραλλήλων πλευρών του λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου .
- Το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του .

Ιδιότητες Παραλληλογράμμου

A) Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες .

Απόδειξη

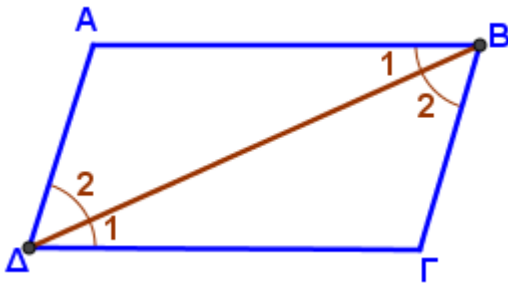


Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABC και CDA :

- 1) AC κοινή πλευρά
 - 2) $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AB \parallel CD$
 - 3) $\hat{A}_2 = \hat{C}_2 = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AD \parallel BC$
- άρα από το Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα ABC και CDA είναι ίσα, οπότε θα είναι $AB = CD$ και $AD = BC$.

Β) Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

Απόδειξη

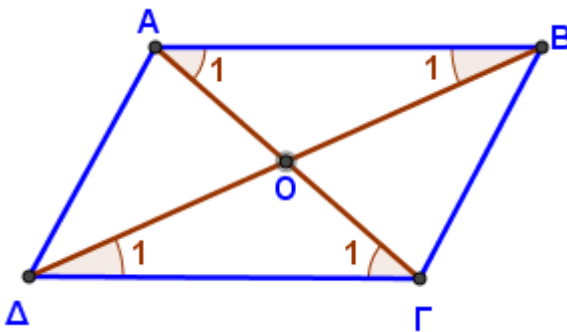


Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ :

- 1) ΑΔ κοινή πλευρά
 - 2) $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = \hat{\omega}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$
 - 3) $\hat{A}_2 = \hat{B}_2 = \hat{\phi}$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AD \parallel \Gamma B$
- άρα από το Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \hat{\omega} + \hat{\phi}$.

Γ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε ότι Ο μέσο των ΑΓ, ΒΔ.

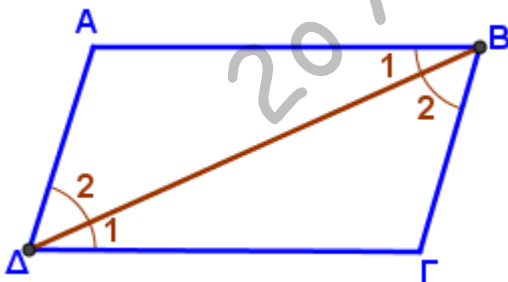
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ :

- 1) $AB = \Gamma\Delta$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου
 - 2) $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$
 - 3) $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες αφού $AD \parallel \Gamma B$
- άρα από το Γ-Π-Γ, τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε θα είναι $AO = OG$ και $BO = OD$.

Κριτήρια Παραλληλογράμμου

Α) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες.

Απόδειξη



Αν $AB = \Gamma\Delta$ και $AD = \Gamma B$ θα αποδείξουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αποδεικνύοντας ότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ :

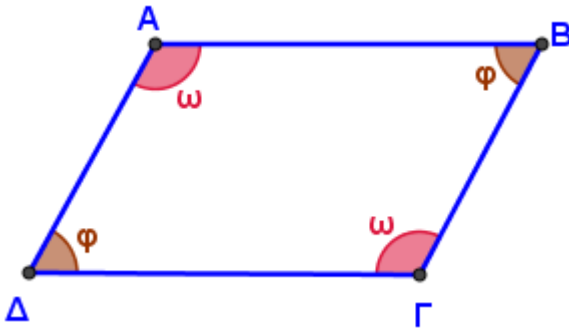
- 1) $AB = \Gamma\Delta$ από υπόθεση
- 2) $AD = \Gamma B$ από υπόθεση
- 3) ΒΔ κοινή πλευρά

άρα από το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα,

οπότε θα είναι και $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$, $\hat{B}_2 = \hat{A}_2$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα θα πρέπει $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD \parallel \Gamma B$, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Β) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι γωνίες του είναι ανά δύο ίσες.

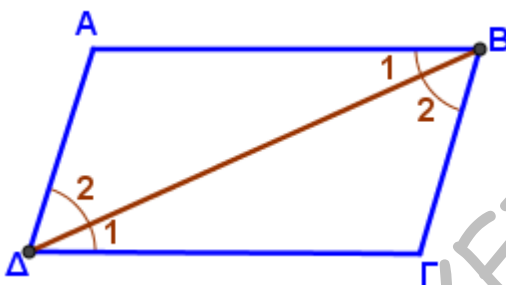
Απόδειξη



Έστω ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$.
 Ισχύει : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 360^\circ \Leftrightarrow \omega + \varphi = 180^\circ$ δηλαδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180^\circ$ οι οποίες είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες άρα $AD \parallel GB$
 Επίσης $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ οι οποίες είναι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες άρα $AB \parallel GD$
 Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Γ) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

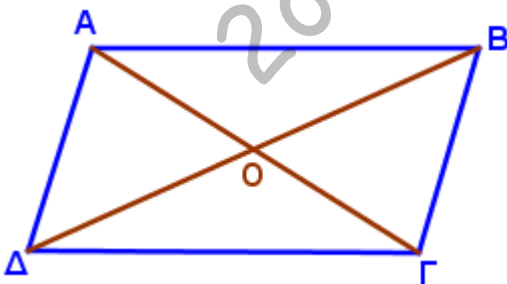
Απόδειξη



Έστω ότι $AB \parallel GD$. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma\Delta$:
 1) BD κοινή πλευρά
 2) $AB = \Gamma\Delta$ από υπόθεση
 3) $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ ως εντός εναλλάξ αφού $AB \parallel \Gamma\Delta$
 άρα από το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα άρα και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$
 οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $AD \parallel GB$. Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Δ) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη



Έστω ότι $OA = OG$ και $OB = OD$.
 Συγκρίνω τα τρίγωνα OAB και $OG\Delta$:
 1) $OA = OG$ από υπόθεση
 2) $OB = OD$ από υπόθεση
 3) $\hat{AOB} = \hat{GOD}$ ως κατακορυφήν γωνίες
 άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $\hat{ABO} = \hat{G\Delta O}$ οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$
 Ομοίως και τα τρίγωνα $AO\Delta$ και $BO\Gamma$ είναι ίσα, άρα $\hat{\Delta AO} = \hat{B\Gamma O}$

οι οποίες είναι εντός εναλλάξ, άρα $AD \parallel B\Gamma$
 Οπότε το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

Έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται
- Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

- Οι απέναντι πλευρές ανά δύο ίσες μια προς μια
- Οι απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες μια προς μια
- Δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες
- Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με δοσμένο το παραλληλόγραμμο

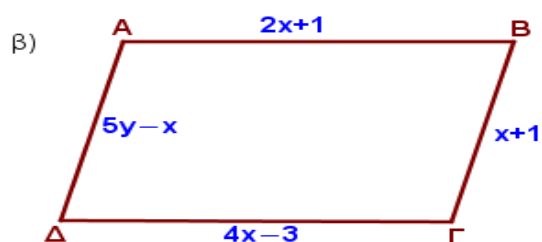
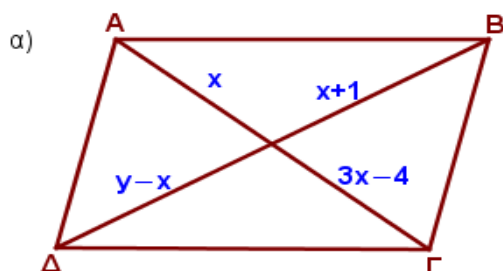
7.1 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι : $\Delta E = B\Gamma$ (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.104)

7.2 Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αν είναι :

- α) $\hat{A} = 50^\circ$
- β) $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$

7.3 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = (4x - 50)^\circ$ και $\hat{A} = (2x + 10)^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες του ΑΒΓΔ.

7.4 Αν τα παρακάτω τετράπλευρα ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμα, να βρείτε τα x, y



7.5 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς του AB . Να δείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές
- β) η DE είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$

7.6 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές
- β) Είναι το σημείο E μέσο της AB ;

7.7 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- α) οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνονται κάθετα.
- β) οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{F}$, αν δεν ταυτίζονται, είναι παράλληλες.

Να αποδείξουμε ότι είναι παραλληλόγραμμο

7.8 Σε ένα κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = x^\circ$, $\hat{B} = (2x + 30)^\circ$, $\hat{\Gamma} = (2x - 50)^\circ$ και $\hat{\Delta} = (3x - 20)^\circ$. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

7.9 Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν E και Z σημεία των OA και OG αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$, να αποδείξετε ότι το $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.104)

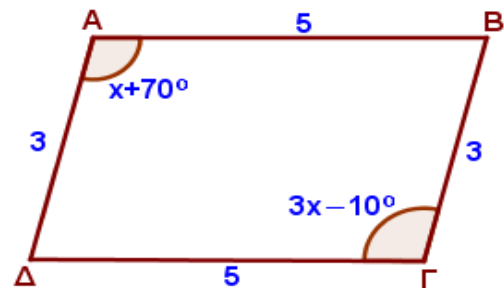
7.10 Έστω E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- α) το τετράπλευρο $AEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο
- β) οι $A\Gamma$, $B\Delta$ και EZ συντρέχουν (Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.104)

7.11 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Αν η παράλληλη από το E προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο Z , να δείξετε ότι $AE = BZ$ (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.104)

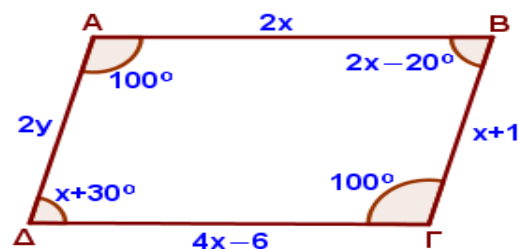
7.12 Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος.

- α) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- β) Να βρείτε το x και τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.



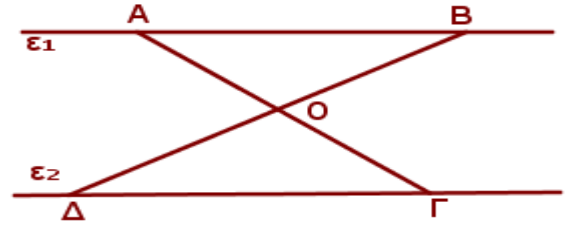
7.13 Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος.

- α) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο
- β) Να βρείτε τα x , y και τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.



7.14 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M της βάσης του $B\Gamma$. Φέρουμε $ME \parallel AB$ (E σημείο $A\Gamma$) και $M\Delta \parallel A\Gamma$ (Δ σημείο AB). Να δείξετε ότι: $M\Delta + ME = AB$ (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.105)

7.15 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω E, Z οι προβολές των A, Γ αντίστοιχα στη διαγώνιο $B\Delta$.
Να αποδείξετε ότι :
α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα
β) το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο .



7.16 Στο διπλανό σχήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ και το σημείο O είναι το μέσο της $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι :
α) τα τρίγωνα $A\Delta O$ και $\Gamma O B$ είναι ίσα
β) το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

7.17 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :
α) τα τρίγωνα $A\epsilon\Delta$ και $B\Gamma Z$ είναι ίσα
β) το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο

7.18 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA και την πλευρά $\Delta\Gamma$ κατά τμήματα $A\epsilon = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :
α) $BZ = E\Delta$
β) το τετράπλευρο $E B Z \Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

7.19 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την διαγώνιο $B\Delta$ κατά ίσα τμήματα BE και ΔZ .
Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο .

7.20 Έστω O το κέντρο παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. Αν E και Z σημεία των OA και OG αντίστοιχα, ώστε $OE = OZ$.
Να αποδείξετε ότι :
α) $BZ = \Delta E$
β) το $B E \Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο .

7.21 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και το M μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .
Να δείξετε ότι :
α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
β) $BM = \frac{AE}{2}$

7.22 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η $A\Delta$ είναι η διάμεσος του τριγώνου ABM και E σημείο στην προέκτασή της, ώστε : $A\Delta = \Delta E$ να αποδείξετε ότι :
α) το τετράπλευρο $ABEM$ είναι παραλληλόγραμμο
β) $ME = M\Gamma$

7.23 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} > 90^\circ$. Φέρουμε τις $A\epsilon \perp \Gamma\Delta$ και $\Gamma Z \perp AB$. Να δείξετε ότι :
α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma Z B$ είναι ίσα
β) το τετράπλευρο $B Z \Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο .

7.24 Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο A . Θεωρούμε σημεία B και Γ των κύκλων (O, ρ) και (K, ρ) αντίστοιχα, ώστε $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $OB\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο .

7.25 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε τη BE που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H . Να αποδείξετε ότι :
α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές
β) το τετράπλευρο $\Delta E \Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο
γ) η AH είναι η διάμεσος του τριγώνου BAE

7.26 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AM . Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$ θεωρούμε σημείο E ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι :

- α) το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο
- β) η BE διέρχεται από το μέσο της διαμέσου AM

Συνευθειακά Σημεία

7.27 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την $\Delta\Gamma$ κατά ίσο τμήμα ΓE και τη ΔA κατά ίσο τμήμα AZ . Να δείξετε ότι τα σημεία Z, B, E είναι συνευθειακά. (Σχολικό / 3 / Αποδεικτικές / σ.105)

7.28 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των διαμέσων $B\Delta$ και ΓE παίρνουμε σημεία H και Z αντίστοιχα τέτοια, ώστε $\Delta H = B\Delta$ και $ZE = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $AH = AZ$
- β) τα σημεία Z, A και H είναι συνευθειακά (Σχολικό / 4 / Αποδεικτικές / σ.105) (Τράπεζα Θεμάτων)

7.29 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την AM κατά ίσο τμήμα ME . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Γ, E είναι συνευθειακά και ότι το Γ είναι το μέσο του ΔE .

7.30 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA . Να δείξετε ότι :

- α) $\Delta A = AE$
- β) τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά
- γ) $\Delta E = B\Gamma$

Το Ορθογώνιο

Ορισμός: Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία του ορθή.

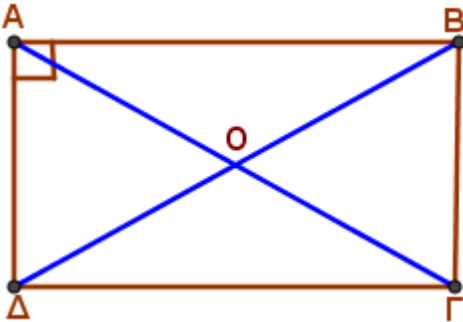


Όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές, αφού ως παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και τις υδιαδοχικές του γωνίες παραπληρωματικές.

Ιδιότητα Ορθογωνίου

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε ότι $AC = BD$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και ACD :

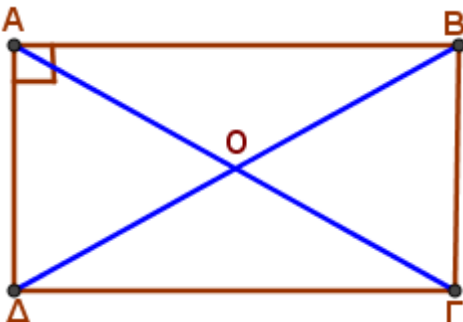
- 1) AD κοινή πλευρά
- 2) $AB = CD$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου
 άρα τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και ACD είναι ίσα,
 οπότε και $AC = BD$.

Κριτήρια Ορθογωνίου

A) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία.

B) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη



Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ABD και ACD :

- 1) AD κοινή πλευρά
- 2) $AB = CD$ ως απέναντι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου
- 3) $AC = BD$ από υπόθεση
 άρα από το Κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $\hat{A} = \hat{D}$,
 όμως $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$
 Επομένως το $ABCD$ είναι ορθογώνιο.

Γ) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν έχει τρεις γωνίες ορθές

Αν έχει τρεις γωνίες ορθές τότε και η τέταρτη γωνία είναι ορθή αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360°

Δ) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν όλες του οι γωνίες είναι ίσες

Αν όλες του οι γωνίες είναι ίσες, τότε αφού το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360° , όλες του οι γωνίες θα είναι ορθές.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Είναι παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

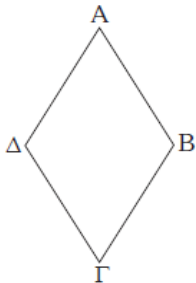
Έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου
Οι διαγώνιοί του είναι ίσες

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Είναι παραλληλόγραμμο και έχει μια ορθή γωνία
Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του ίσες
Έχει τρεις γωνίες ορθές
Όλες του οι γωνίες είναι ίσες

Ο Ρόμβος

Ορισμός: Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

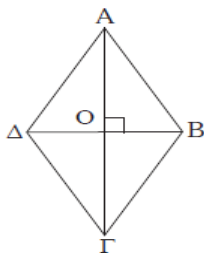


Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες, προκύπτει ότι στον ρόμβο όλες οι πλευρές του θα είναι ίσες.

Ιδιότητες Ρόμβου

Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη



Αφού ΑΒΓΔ είναι ρόμβος τότε $AB = AD$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές οπότε η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος. Επομένως οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα και η ΑΓ διχοτομεί την γωνία $\hat{A}$. Ομοίως η ΑΓ διχοτομεί και την $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{D}$.

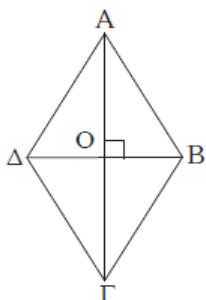
Κριτήρια Ρόμβου

Α) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος όταν έχει όλες του τις πλευρές ίσες.

Β) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, όταν είναι παραλληλόγραμμο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

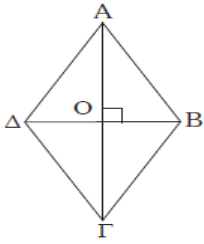
Γ) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, όταν είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.

Απόδειξη



Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $ΑΓ \perp ΒΔ$. Αφού οι διαγώνιοί του παραλληλογράμμου διχοτομούνται και υποθέσαμε ότι είναι και κάθετες, τότε στο τρίγωνο ΑΔΒ η ΑΟ είναι διάμεσος και ύψος. Οπότε το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές άρα $AB = AD$, επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

Δ) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, όταν είναι παραλληλόγραμμο και μια διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του



Απόδειξη

Έστω $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο και AG διχοτόμος της $\hat{A}$. Τότε η AO είναι διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου $AB\Delta$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές άρα $AB = A\Delta$, επομένως το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

ΡΟΜΒΟΣ

Είναι παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου

Οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα

Οι διαγώνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του

ΚΡΙΤΗΡΙΑ

Είναι παρ/μο και έχει 2 διαδοχικές πλευρές ίσες

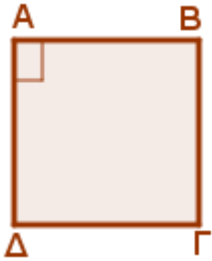
Είναι παρ/μο και οι διαγώνιοί τέμνονται κάθετα

Είναι παρ/μο και η διαγώνιός του διχοτομεί γωνία

Όλες του οι πλευρές είναι ίσες

Το Τετράγωνο

Ορισμός : Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος .



Ιδιότητες Τετραγώνου

- A) Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες
- B) Όλες του οι πλευρές είναι ίσες
- Γ) Όλες του οι γωνίες είναι ορθές
- Δ) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες , τέμνονται κάθετα , διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του .

Κριτήρια Τετραγώνου

Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω :

- A) Μια γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες .
- B) Μια γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του .
- Γ) Μια γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιές του είναι κάθετες .
- Δ) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες .
- Ε) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του .
- Ζ) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8.1 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε $AE \perp \Delta\Gamma$ και $\Gamma Z \perp AB$. Να αποδείξετε ότι το $AZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο. (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.109)

8.2 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $B\Delta = 2A\Gamma$. Αν E, Z τα μέσα των OB και OD αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι ορθογώνιο. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.109)

8.3 Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες. (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.109)

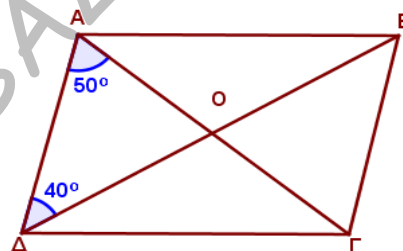
8.4 Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του. Παίρνουμε δύο σημεία E και Z της $A\Gamma$, ώστε $OE = OZ = OB = OD$. Να αποδείξετε ότι το ΔEBZ είναι τετράγωνο. (Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.109)

8.5 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις πλευρές του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ παίρνουμε σημεία K, Λ, M και N αντίστοιχα τέτοια ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda M N$ είναι τετράγωνο. (Σχολικό / 6 / Εμπέδωσης / σ.109)

8.6 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $A\Gamma = x + 6, B\Delta = 3x + 2$. Να βρείτε το x .

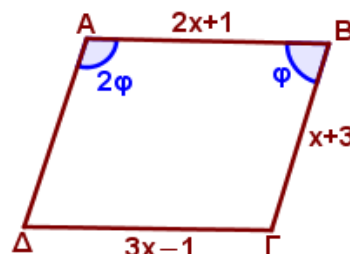
8.7 Να βρείτε τις γωνίες του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ αν $A\hat{\Gamma}B = 35^\circ$

8.8 Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος είναι $OA = O\Gamma$ και $OB = OD$. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.



8.9 Το τετράπλευρο του διπλανού σχήματος είναι παραλληλόγραμμο.

- Να βρείτε το φ
- Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος
- Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.



8.10 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με περίμετρο ίση με 20 και $AB = \alpha + 2, B\Gamma = 2\alpha - 1, \Gamma\Delta = 3\alpha - 4, \Delta A = 8 - \alpha$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.

8.11 Σε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, αν M και N τα μέσα των AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

- $M\Delta = M\Gamma$.
- η ευθεία MN είναι η μεσοκάθετος του τμήματος $\Gamma\Delta$.

8.12 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα μέσα M και N των $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την MN κατά ίσο τμήμα NK . Να αποδείξετε ότι το $AM\Gamma K$ είναι ορθογώνιο.

8.13 Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ενός κύκλου στα άκρα δύο κάθετων διαμέτρων του, σχηματίζουν τετράγωνο.

8.14 Αν μια γωνία ενός ρόμβου είναι διπλάσια από την άλλη, τότε η περίμετρός του είναι τετραπλάσια της μικρής διαγωνίου του.

8.15 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο E . Από το Δ φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AE , που τέμνει την AE στο K και την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα KAZ και $K\Delta E$ είναι ίσα .
- β) το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ρόμβος .

8.16 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει την $B\Gamma$ στο Z , να δείξετε ότι το ΔEBZ είναι ρόμβος . (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.109)

8.17 Στις πλευρές AB και $B\Gamma$ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ παίρνουμε τα σημεία E και Z αντίστοιχα ώστε $AE = BZ$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $AZ = \Delta E$
- β) $AZ \perp \Delta E$

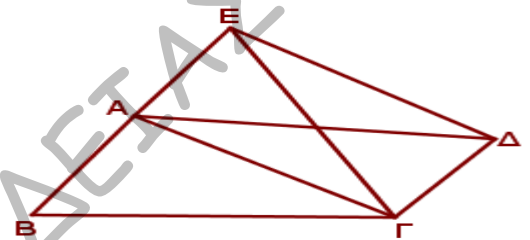
(Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.109)

8.18 Σε κύκλο κέντρο O φέρουμε δύο διαμέτρους του AB και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι :

- α) οι χορδές $A\Gamma$ και $B\Delta$ του κύκλου είναι ίσες .
- β) το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνιο .

8.19 Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι :

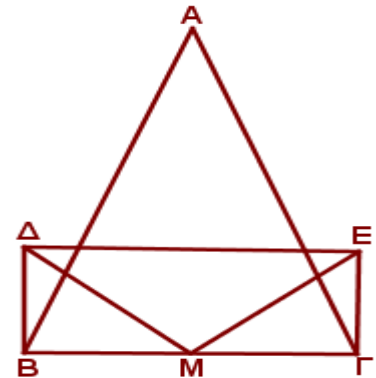
- α) το σημείο A είναι μέσο του BE
- β) το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές
- γ) $B\hat{\Gamma}A = A\hat{\Delta}E$



8.20 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M μέσο της $B\Gamma$. Στα σημεία B και Γ φέρουμε κάθετες στη $B\Gamma$ προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα τέτοια, ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα .
- β) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο .

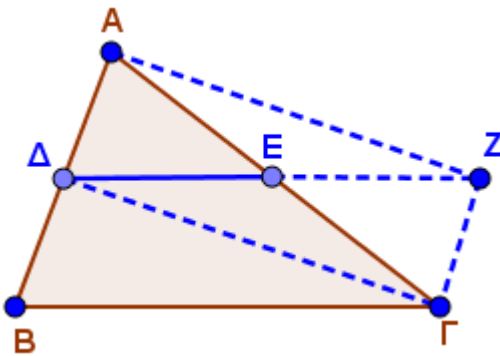


Εφαρμογές στα Τρίγωνα

Θεώρημα

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα .
Θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$ και $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ . Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι παραλληλόγραμμο γιατί οι διαγώνιές του διχοτομούνται (Ε μέσο της ΑΓ , αλλά και της ΔΖ) . Άρα $ΑΔ \parallel ΓΖ \Leftrightarrow ΔΒ \parallel ΓΖ$ αφού Δ μέσο ΑΒ .

Τότε όμως το ΔΖΓΒ θα είναι παραλληλόγραμμο , οπότε :

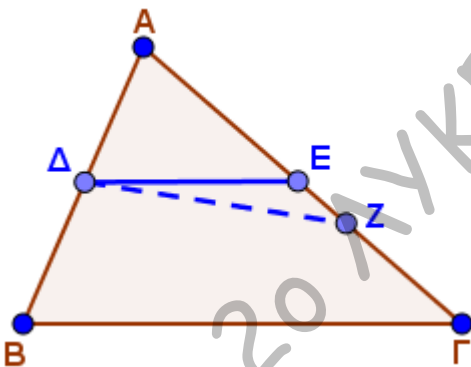
– $ΔΖ \parallel ΒΓ$ άρα και $ΔΕ \parallel ΒΓ$

– $ΔΖ = ΒΓ \Leftrightarrow 2ΔΕ = ΒΓ \Leftrightarrow ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$

Θεώρημα

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του , τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του .

Απόδειξη



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ μέσο της πλευράς ΑΒ . Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε . Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ .

Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ , τότε θεωρούμε Ζ μέσο της ΑΓ .

Το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ άρα θα ισχύει $ΔΖ \parallel ΒΓ$. Άτοπο , γιατί έτσι θα έχουμε δύο παράλληλες από το Δ προς την ΒΓ .

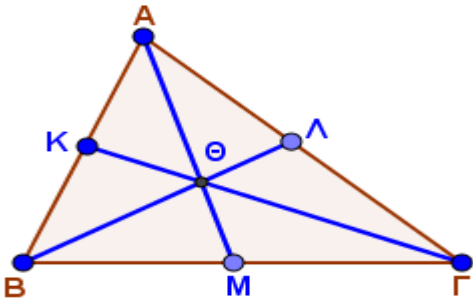
Άρα Ε το μέσο της ΑΓ .

Θεώρημα

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα , θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει .

Βαρύκεντρο Τριγώνου

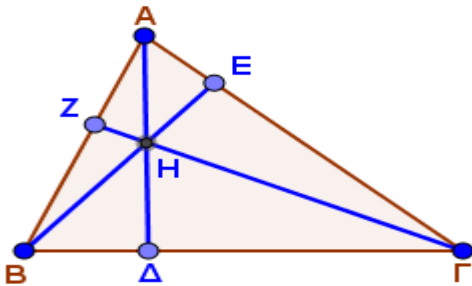
■ Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.



Το σημείο G , το σημείο τομής των διαμέσων, λέγεται βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους του τριγώνου.

Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις: $AG = \frac{2}{3} AM$, $BG = \frac{2}{3} BN$ και $CG = \frac{2}{3} CK$.

Ορθόκεντρο Τριγώνου



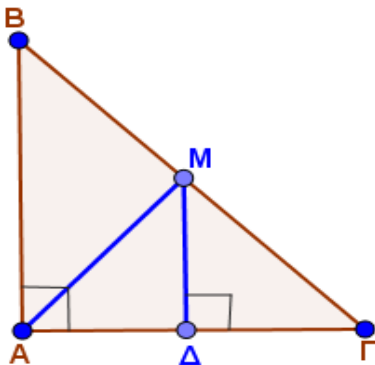
Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο. Το σημείο αυτό H λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου.

Ιδιότητες Ορθογωνίου Τριγώνου

Θεώρημα I

Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

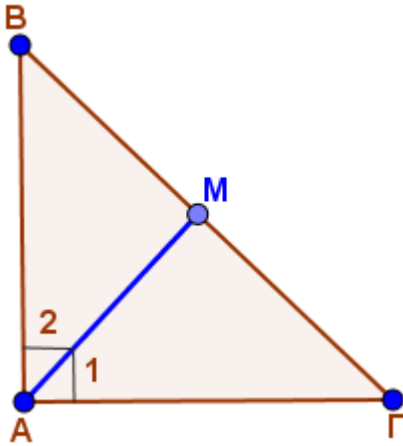


Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABG ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του AM . Θα δείξουμε ότι $AM = \frac{BG}{2}$. Φέρνουμε τη διάμεσο MD του τριγώνου AMG . Το τμήμα MD ενώνει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABG άρα θα ισχύει $MD \parallel AB$. Επειδή όμως $AB \perp AG$ θα είναι και $MD \perp AG$. Οπότε το MD είναι διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο AMG , άρα το τρίγωνο θα είναι ισοσκελές, οπότε: $AM = MG \Leftrightarrow AM = \frac{BG}{2}$.

Θεώρημα II

Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη



Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με AM διάμεσο για την οποία ισχύει $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Θα αποδείξουμε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

Είναι : $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = M\Gamma$ άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$ (1)

Είναι : $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = MB$ άρα το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{B} = \hat{A}_1$ (2)

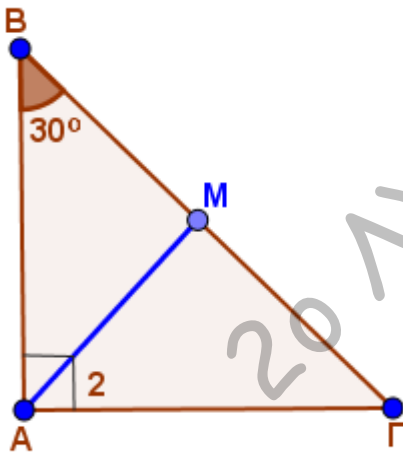
Έχουμε : (1) + (2) $\Rightarrow \hat{B} + \hat{\Gamma} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

Οπότε : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} + \hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ$.

Θεώρημα III

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη



ΟΡΘΟ : Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$,

θα δείξουμε ότι $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Αφού $\hat{B} = 30^\circ$ τότε $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Φέρνουμε την διάμεσο AM , τότε θα ισχύει : $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = M\Gamma$

άρα το $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{A}_2$,

οπότε το $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Επομένως $AG = M\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ : Αν $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AG = \frac{B\Gamma}{2}$, θα δείξουμε ότι $\hat{B} = 30^\circ$.

Φέρνουμε την διάμεσο AM , τότε θα ισχύει : $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = M\Gamma = AG$

αφού $AG = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

Επομένως $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τυχαία Τρίγωνα

9.1 Αν Δ και E τα μέσα των πλευρών AB και AG τριγώνου $AB\Gamma$ και Z τυχαίο σημείο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι η DE διχοτομεί την AZ .
(Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.115)

9.2 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AD . Αν E, Z και H τα μέσα των BD, AD και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $DEZH$ είναι παραλληλόγραμμο.
(Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.115)

9.3 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 12. Αν K, Λ, M τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ και GA αντίστοιχα, να βρείτε την περίμετρο του τριγώνου $K\Lambda M$.

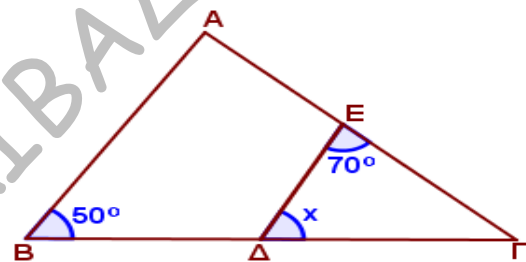
9.4 Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με K, Λ, M και N τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και DA αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

9.5 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M, N τα μέσα των πλευρών AB, AG αντίστοιχα. Αν $MN = 3x - 4$, $B\Gamma = 2x + 12$, να βρείτε το x .

9.6 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 50^\circ$. Έστω ότι τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα.

α) Να δικαιολογήσετε ότι $DE \parallel AB$

β) Να βρείτε τη γωνία x και τις υπόλοιπες γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$

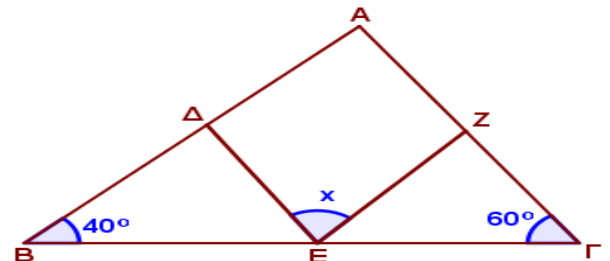


9.7 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma$ και AG αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τη γωνία $\hat{A}$

β) Να δείξετε ότι: $B\hat{\Delta}E = E\hat{Z}\Gamma = 80^\circ$

γ) Να βρείτε τη γωνία $\Delta\hat{E}Z$



9.8 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των AB, AG αντίστοιχα. Αν Δ, E είναι τα μέσα των AM, AN αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $DE = \frac{B\Gamma}{4}$

9.9 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα μέσα E, Z των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν η EZ τέμνει τη διαγώνιο AG στο H , να αποδείξετε ότι $GH = \frac{AG}{4}$
(Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.116)

9.10 Αν E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι DE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο AG .
(Σχολικό / 4 / Αποδεικτικές / σ.116)

9.11 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το Δ είναι το μέσο της διαμέσου AM . Αν η BD τέμνει την πλευρά AG στο E , να αποδείξετε ότι $AE = \frac{EG}{2}$
(Σχολικό / 6 / Αποδεικτικές / σ.116)

9.12 Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών κάθε κυρτού τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου .

9.13 Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κορυφές ρόμβου .

9.14 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών AB , $B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

- α) το τετράπλευρο ΔBEZ είναι παραλληλόγραμμο
- β) η ευθεία ΔZ διχοτομεί το τμήμα AE

9.15 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) , το ύψος του AD και τα μέσα E και Z των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι :

- α) τα τρίγωνα $B\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα .
- β) το τετράπλευρο $AZ\Delta E$ είναι ρόμβος .

9.16 Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κάθετες και ίσες διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών του $AB\Gamma\Delta$ είναι κορυφές τετραγώνου .

9.17 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, τυχαίο σημείο E της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα μέσα M , N των AE , BE αντίστοιχα . Αν η ευθεία NM τέμνει τις AD , $B\Gamma$ στα σημεία K , Λ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι $KM + N\Lambda = MN$.

9.18 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών :

- α) ισοσκελούς τριγώνου , είναι ισοσκελές .
- β) ισοπλεύρου τριγώνου , είναι ισόπλευρο .

9.19 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το κέντρο του . Έστω E , Z , H και Θ τα μέσα των OD , OA , OB και OG αντίστοιχα .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο .
- β) Αν η περίμετρος του $AB\Gamma\Delta$ είναι 40 , να βρείτε την περίμετρο του $EZH\Theta$

9.20 Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν τα σημεία E και Z είναι τα μέσα των πλευρών του AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

- α) το τετράπλευρο ΔEBZ είναι παραλληλόγραμμο
- β) $A\hat{E}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$
- γ) οι ΔE και BZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $A\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

Ορθογώνια Τρίγωνα

9.21 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και φέρουμε τα ύψη $B\Delta$ και ΓE . Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι : $MD = ME$.
(Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.115)

9.22 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E και Z τα μέσα των AB και $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι : $EZ = A\Gamma$
(Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.115)

9.23 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ και Δ , E τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα . Προεκτείνουμε την $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = E\Delta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι ρόμβος .
(Σχολικό / 7 / Εμπέδωσης / σ.116)

9.24 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν ΓE η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $EB = 2AE$.

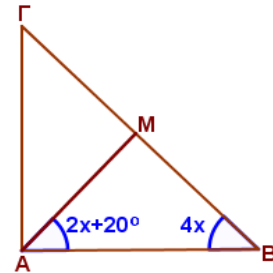
9.25 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 12$ και τα M , N τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα . Αν K το μέσο του MN , να βρείτε το μήκος του AK .

9.26 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν : $A\Delta = E\Delta = \Delta B$ με $AE = 8$ και $\Delta B = 10$

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο AEB είναι ορθογώνιο.
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
- γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$

9.27 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



9.28 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 12$ και τα M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν K το μέσο του MN , να βρείτε το μήκος του AK .

9.29 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 3x + 1$, $AB = 2x - 1$, $\hat{B} = 3\varphi$ και $\hat{\Gamma} = \varphi + 10^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και το x .

9.30 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία E και Δ είναι τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα με $E\Delta = 1$, να υπολογίσετε τα τμήματα $A\Gamma, B\Gamma, A\Delta$.

9.31 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 35^\circ$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Να βρείτε :

- α) τη γωνία $\hat{\Gamma}$
- β) τις γωνίες του τριγώνου AMB

9.32 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο ισχύουν $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ και $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.
- β) Αν είναι $B\Gamma = 2$, να βρείτε το μήκος της πλευράς AB .

9.33 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 8$. Έστω AM διάμεσος του τριγώνου και $M\Delta \perp A\Gamma$.

Αν η γωνία $\hat{AM}\Gamma$ είναι ίση με 120° τότε :

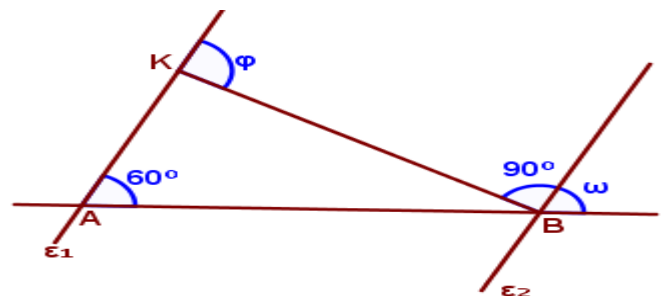
- α) να αποδείξετε ότι $AB = 4$
- β) να βρείτε το μήκος της $M\Delta$.

9.34 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ ώστε $\Gamma\Delta = \Delta B = 2$. Να δείξετε ότι :

- α) $\hat{B} = 30^\circ$
- β) $AB = 3$

9.35 Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $AB = 6$

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ
- β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABK ως προς τις γωνίες του
- γ) Να βρείτε το μήκος της AK



9.36 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην AB , η οποία τέμνει την πλευρά AG στο Δ .

- α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$
- β) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AM\Gamma$
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $M\Delta$ είναι μεσοκάθετος του AG .

9.37 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = AG$) και $\hat{B} = 30^\circ$. Θεωρούμε Δ και E τα μέσα των AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του
- β) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισόπλευρο.

9.38 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{A} = 120^\circ$ και $AB = 2AD$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την AB στο E και στη συνέχεια φέρνουμε το κάθετο τμήμα AZ στην ΔE . Να αποδείξετε ότι :

- α) $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$
- β) $AZ = \frac{AB}{4}$

9.39 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 2AG$.

- α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$
- β) Αν ΓE η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $EB = 2AE$.

9.40 Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{B} = 120^\circ$ και $\Delta E \perp B\Gamma$. Έστω EZ η διάμεσος του τριγώνου $\Delta E\Gamma$.

- α) Να βρείτε τις γωνίες του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
- β) Αν K το μέσο της πλευράς AB , να αποδείξετε ότι $EZ = AK$
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{Z}\Gamma$

9.41 Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

9.42 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με AD διχοτόμος. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την πλευρά AG στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι :

- α) $AD = \frac{B\Gamma}{2}$
- β) το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ορθογώνιο
- γ) $\Delta E = \frac{AG}{2}$

9.43 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε ημιευθεία Ax παράλληλη στη $B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που ορίζει η AM και το σημείο Γ . Να αποδείξετε ότι :

- α) $M\hat{A}\Gamma = M\hat{\Gamma}A$
- β) η AG είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$

9.44 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα μέσα K, Λ των AB, AG αντίστοιχα. Έστω Δ η προβολή του K στην AG και M το μέσο $K\Lambda$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$
- β) αν η προέκταση του ΔM τέμνει τη $B\Gamma$ στο E , τότε το τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

9.45 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του AD . Αν E και Z τα μέσα των AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι : $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ (Σχολικό / 1 / Σύνθετα Θέματα / σ.116)

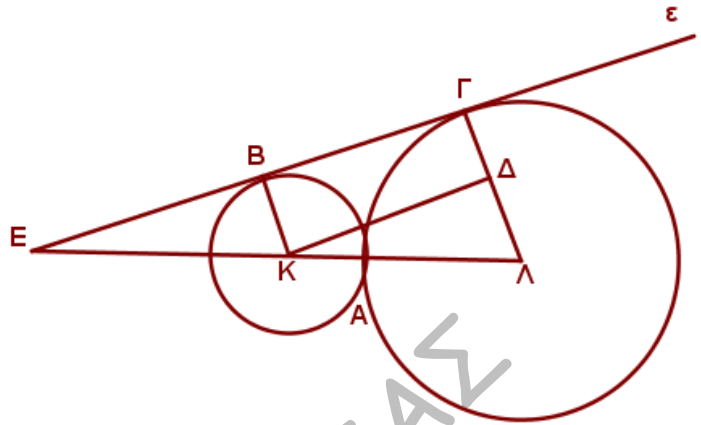
9.46 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του AD . Να αποδείξετε ότι : $\hat{B} = 15^\circ$ αν και μόνο αν $AD = \frac{B\Gamma}{4}$. (Υπόδειξη : Να φέρετε την διάμεσο AM) (Σχολικό / 2 / Σύνθετα Θέματα / σ.116)

9.47 Δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο E . Αν OA και OB είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο O στον κύκλο (K, ρ) να αποδείξετε ότι :

- α) $AE = BE$
- β) $\widehat{AOK} = 30^\circ$
- γ) το τετράπλευρο $AKBE$ είναι ρόμβος .

9.48 Οι κύκλοι (K, ρ) και $(\Lambda, 3\rho)$ εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Μια ευθεία ε εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου $K\Lambda$ στο E . Φέρουμε από το σημείο K παράλληλο τμήμα στην ε που τέμνει το τμήμα $\Lambda\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι :

- α) το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta K$ είναι ορθογώνιο
- β) $\widehat{\Delta K\Lambda} = 30^\circ$
- γ) $E\Lambda = 6\rho$



Βαρύκεντρο - Ορθόκεντρο

9.49 Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\mu_B = \mu_\Gamma$ να δείξετε ότι $\beta = \gamma$ (Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.115)

9.50 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Προεκτείνουμε τη ΓA κατά τυχαίο τμήμα $A\Delta$. Από το Δ φέρουμε κάθετη $D\eta$ στην $B\Gamma$, η οποία τέμνει την AB στο E . Να δείξετε ότι $\Gamma E \perp \Delta B$ (Σχολικό / 6 / Εμπέδωσης / σ.116)

9.51 Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι AE και AZ τριχοτομούν τη διαγώνιο $B\Delta$ (Σχολικό / 5 / Αποδεικτικές / σ.116)

9.52 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και έστω Θ το σημείο τομής των διαμέσων του AM και BN .

Να αποδείξετε ότι : $\Theta M = \frac{B\Gamma}{6}$

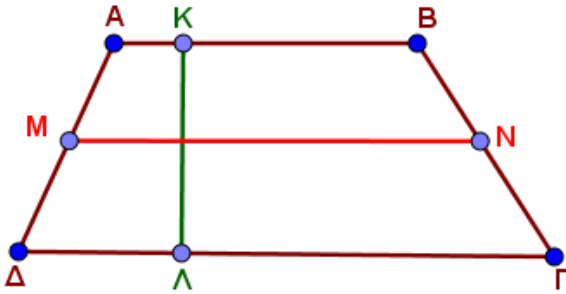
9.53 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του AM και BN , που τέμνονται στο Θ . Έστω επίσης K το μέσο του $B\Theta$.

α) Αν η ΓK τέμνει τη ΘM στο Π , να δείξετε ότι : $\Pi M = \frac{AM}{9}$

β) Αν η $\Gamma\Theta$ τέμνει την AB στο Λ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda\Theta M$ είναι παραλληλόγραμμο .

Το Τραπεζίο

Ορισμός: Τραπεζίο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Οι παράλληλες πλευρές AB και ΓΔ λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.

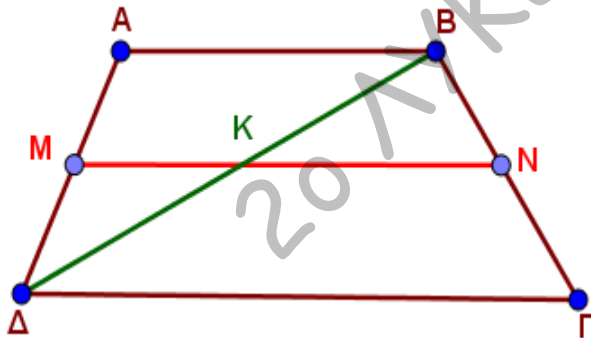
Η απόσταση ΚΛ των παραλλήλων πλευρών του λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.

Το ευθύγραμμο τμήμα MN που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται **διάμεσος** του τραπεζίου

Θεώρημα I

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίαθροισμά τους.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε ότι $MN \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$ και $MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$

Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ και από το Μ μέσο της ΑΔ φέρνουμε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ν αντίστοιχα.

Τότε στο τρίγωνο ΑΒΔ το Μ είναι μέσο της ΑΔ και $MK \parallel AB$, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΔΒ, άρα θα ισχύει $MK = \frac{AB}{2}$ (1).

Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΔΒ και $KN \parallel \Gamma\Delta$, οπότε το Ν είναι το μέσο της ΒΓ, άρα και $KN = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (2)

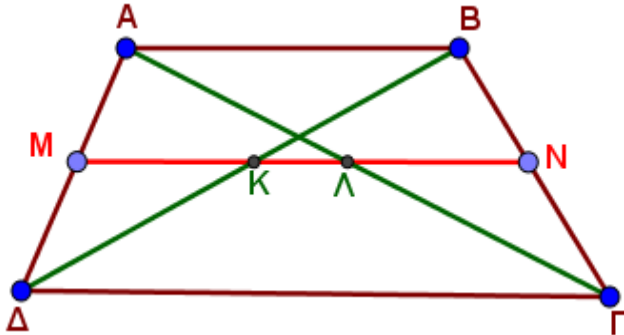
Επομένως η MN είναι διάμεσος του τραπεζίου και $MN \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$

Επίσης: $(1) + (2) \Rightarrow MK + KN = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}$

Πόρισμα

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων τραπέζιου βρίσκεται πάνω στη διάμεσο του τραπέζιου, είναι παράλληλο προς τις βάσεις και ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων του.

Απόδειξη



Φέρνουμε τις διαγωνίες ΒΔ, ΑΓ και την διάμεσο ΜΝ που τέμνει τις ΒΔ και ΑΓ στα Κ και Λ αντίστοιχα.

Τότε στο τρίγωνο ΑΒΔ το Μ είναι μέσο της ΑΔ και ΜΚ ∥ ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ, άρα θα ισχύει $ΜΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).

Ομοίως στο τρίγωνο ΑΔΓ το Μ είναι μέσο της ΑΔ και ΜΛ ∥ ΓΔ οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ, άρα θα ισχύει $ΜΛ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2).

Επομένως η διάμεσος ΜΝ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ και προφανώς ΚΛ ∥ ΑΒ ∥ ΓΔ.

$$\text{Επίσης: } (1) - (2) \Rightarrow ΜΛ - ΜΚ = \frac{ΔΓ}{2} - \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΚΛ = \frac{ΔΓ - ΑΒ}{2}.$$

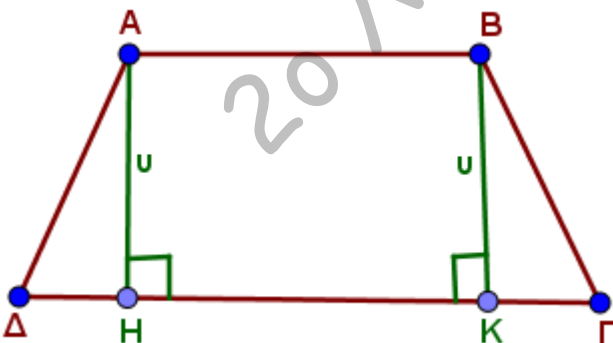
Ισοσκελές Τραπέζιο

Ορισμός: Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

Ιδιότητες Ισοσκελούς Τραπεζίου

Α) Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.

Απόδειξη



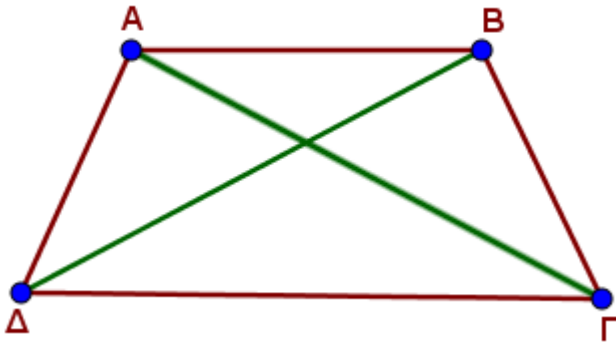
Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ ∥ ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Φέρνουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΓΚ είναι ίσα γιατί:

- 1) $\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$
 - 2) ΑΔ = ΒΓ αφού ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο
 - 3) ΑΗ = ΒΚ = υ
- άρα θα είναι και $\hat{A} = \hat{B}$.

Επειδή είναι $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ και $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ άρα θα είναι $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{B}$

B) Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Απόδειξη



Συγκρίνω τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΒΓΔ$:

- 1) $ΓΔ$ κοινή πλευρά
 - 2) $ΑΔ = ΒΓ$ αφού $ΑΒΓΔ$ ισοσκελές τραπέζιο
 - 3) $Α\hat{Δ}Γ = Β\hat{Γ}Δ$ ως προσκείμενες στην βάση γωνίες ισοσκελούς τραπεζίου
- άρα από το κριτήριο $Γ-Π-Γ$, τα τρίγωνα είναι ίσα ,
οπότε και $ΑΓ = ΒΔ$

Κριτήρια για να είναι ένα Τραπέζιο Ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις :

A) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες

B) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Τυχαίο Τραπέζιο

10.1 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και η διάμεσός του EZ . Αν οι μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και H , Θ είναι τα μέσα των KA και KB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα E, Z, H, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.

(Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ. 119)

10.2 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$ τέμνει τη διάμεσό του EZ στο H , να αποδείξετε ότι $B\widehat{H}\Gamma = 90^\circ$

(Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.3 Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, η μια από τις μη παράλληλες πλευρές του $A\Delta$ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων του. Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι: $A\widehat{M}\Delta = 90^\circ$

(Σχολικό / 4 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.4 Αν σε τραπέζιο η μία βάση του είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

(Σχολικό / 7 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.5 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = 3AB$ και K, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το $AK\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε είναι ορθογώνιο; (Σχολικό / 8 / Αποδεικτικές / σ. 120)

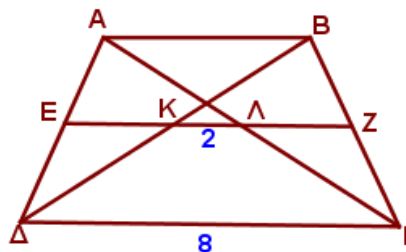
10.6 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$. Αν E, Z, H είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$ και ΔE αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ABZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

Αν η προέκταση της AH τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο Θ , τότε $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - AB$ (Σχολικό / 9 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.7 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και Δ, E τα μέσα των AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Από το μέσο Z του $A\Delta$ φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την $B\Gamma$ στο H . Αν $ZH = \frac{3}{8}B\Gamma$, να βρείτε τη γωνία $\widehat{B}$.

(Σχολικό / 4 / Σύνθετα Θέματα / σ. 120)

10.8 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3, \Gamma\Delta = 7$ και E, Z μέσα των διαγωνίων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Αν K, Λ τα μέσα των $B\Delta$ και $A\Gamma$, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων EZ και $K\Lambda$



10.9 Δίνεται το διπλανό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και E, Z μέσα των διαγωνίων $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων AB και EZ .

10.10 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = x, \Gamma\Delta = x + 6$ και EZ διάμεσος του με $EZ = 2x - 2$. Να βρείτε το x .

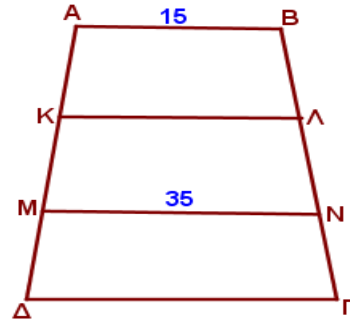
10.11 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $B\Delta = B\Gamma, \Delta\widehat{B}\Gamma = 120^\circ, A\widehat{\Delta}B = 25^\circ$. Να υπολογίσετε:

- α) τη γωνία $\widehat{\Gamma}$
- β) τη γωνία $\widehat{A}$

10.12 Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ, E τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, $A\Delta = 9, E\Gamma = 10, B\Gamma = 30, \Delta E = x$.

- α) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος x

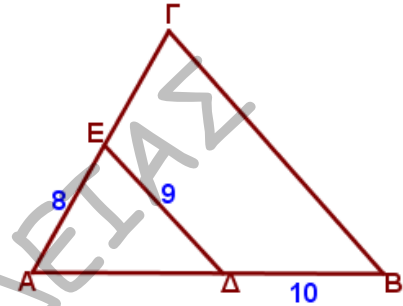
10.13 Στο διπλανό σχήμα $AB \parallel KL \parallel MN \parallel \Delta\Gamma$
και $AK = KM = M\Delta$, $AB = 15$ και $MN = 35$.
Να βρείτε τα μήκη των KL και $\Delta\Gamma$.



10.14 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $BA = \Delta A$, $\hat{\Gamma} = 110^\circ$, $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$. Να βρείτε τη γωνία $A\hat{\Delta}B$

10.15 Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος τα σημεία Δ , E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι τραπέζιο
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$
γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου $AB\Gamma$ και του τετραπλεύρου $\Delta E\Gamma B$



10.16 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3$ και $\Gamma\Delta = 4$. Θεωρούμε σημείο E στην AB , ώστε $AE = 1$. Στο τραπέζιο $EB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τα K , Λ μέσα των $E\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο $K\Lambda$ του τραπέζιου $EB\Gamma\Delta$
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο.

10.17 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Έστω K , Λ τα μέσα των AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα και M , N τα μέσα των KB , $\Lambda\Gamma$ αντίστοιχα. Αν Π το μέσο του $K\Lambda$, να αποδείξετε ότι: $MN = 3AP$

10.18 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Στην πλευρά θεωρούμε τα σημεία K , M και Λ ώστε να ισχύει: $BK = KM = M\Lambda = \Lambda\Gamma$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι

- α) το τετράπλευρο $\Delta E\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο
β) η διάμεσος του τραπέζιου $K\Delta M\Lambda$ ισούται με $\frac{3}{8} B\Gamma$

10.19 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = \Delta A + B\Gamma$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Delta}$ τέμνει την AB στο M , να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $\Delta M\Lambda$ είναι ισοσκελές
β) το τρίγωνο $M B\Gamma$ είναι ισοσκελές
γ) η ΓM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τραπέζιου.

10.20 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta = 2AB$. Επίσης τα Z , H και E είναι τα μέσα των $\Delta\Delta$, $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Ακόμη η ZH τέμνει τις AE και BE στα σημεία Θ και I αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο
β) τα σημεία Θ και I είναι τα μέσα των AE και BE αντίστοιχα.
γ) $ZH = \frac{3}{2} AB$

10.21 Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου AB . Θεωρούμε ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο E , η οποία τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα Δ και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο

β) $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

γ) το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ορθογώνιο

δ) Αν $\widehat{A\Delta E} = 60^\circ$ και η $O\Delta$ τέμνει τον κύκλο στο K , να δείξετε ότι K μέσο της ΔO .

Ισοσκελές Τραπέζιο

10.22 Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB = 5x$, $\Delta\Gamma = 3x$ και $\widehat{A} = 60^\circ$. Να βρείτε την περίμετρο του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ (Σχολικό / 4 / Κατανόησης / σ. 119)

10.23 Αν Δ και E είναι τα μέσα των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι το $\Delta E\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ. 120)

10.24 Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) οι διαγώνιοί του τέμνονται στο O . Αν E, Z, H, Θ τα μέσα των OA, OB, OG, OD αντίστοιχα, να δείξετε ότι το $EZH\Theta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ. 120)

10.25 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και το ύψος του AE . Αν K, Λ είναι τα μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $K\Lambda\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ. 120)

10.26 Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB < \Gamma\Delta$ και τα ύψη του AE και BZ .

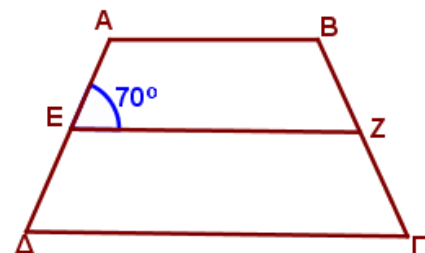
Να αποδείξετε ότι : $\Delta E = \Gamma Z = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2}$ (Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ. 120)

10.27 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) M είναι το μέσο της AB . Αν η μεσοκάθετος της AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Z και η παράλληλη από το Z προς τη $B\Gamma$ τέμνει την AB στο H , να αποδείξετε ότι $\Gamma H = AZ$ (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ. 120)

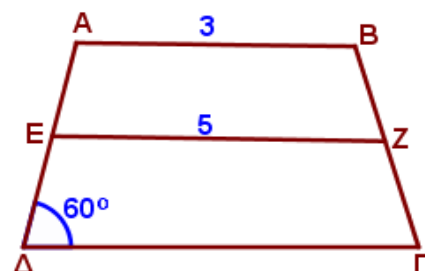
10.28 Από το μέσο E της πλευράς $B\Gamma$ ισοσκελούς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) φέρουμε παράλληλη προς την $A\Delta$ που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο M . Να αποδείξετε ότι $BM \perp \Delta\Gamma$ (Σχολικό / 5 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.29 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Σχολικό / 6 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.30 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και E, Z μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$



10.31 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 5$, $\Gamma\Delta = 9$, $A\Delta = B\Gamma = 4$. Να βρείτε τις γωνίες του.



10.32 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και E, Z μέσα των $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να βρείτε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

10.33 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = 72^\circ$, $A\Delta = \Delta\Gamma = \Gamma B$. Να δείξετε ότι : $A\Gamma = AB$.

10.34 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 8$ και $\Delta\Gamma = 12$. Αν AH και $B\Theta$ τα ύψη του τραπεζίου
 α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$
 β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου

10.35 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου
 β) Να αποδείξετε ότι : $AE = E\Delta = BZ = \Gamma Z$

10.36 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$, $A\Delta = 12$ και $\Gamma\Delta = 20$. Φέρουμε και τα ύψη AE και BZ .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Gamma Z$ και $AB = EZ$
 β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου

10.37 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $AB = 6$ και $B\Gamma = 4$. Φέρουμε και τα ύψη AE και BZ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου
 β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AED και $BZ\Gamma$ είναι ίσα.
 γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραπεζίου

10.38 Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έστω O το κέντρο του. Αν K, Λ είναι τα μέσα των OG, OD αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

10.39 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Αν M, N είναι τα μέσα των $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $A\Delta N$ και $B\Gamma N$ είναι ίσα.
 β) το τμήμα MN είναι κάθετο στις βάσεις AB και $\Gamma\Delta$.

10.40 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = 135^\circ$. Αν EZ η διάμεσος του και ΔH το ύψος του, να αποδείξετε ότι : $EZ + \Delta H = AB$.

10.41 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα.
 β) τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

10.42 Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Θεωρούμε τα μέσα Δ, E και Z των πλευρών του $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 β) το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

10.43 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τυχαίο σημείο Δ της AB . Έστω K, M και N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $KMND$ είναι παραλληλόγραμμο
 β) το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο
 γ) η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$

10.44 Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου κέντρου O φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA, PB και τη διακεντρική ευθεία PO που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των PA και PB στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$
 β) $EA = ZB$
 γ) το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

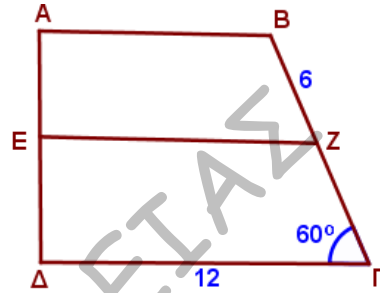
Ορθογώνιο Τραπεζίο

10.45 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 120^\circ$. Αν $AB = 2\alpha$ και $B\Gamma = \alpha$ να υπολογίσετε τη διάμεσο EZ ως συνάρτηση του α .
(Σχολικό / 3 / Αποδεικτικές / σ. 120)

10.46 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 2\Gamma\Delta$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma = 3M\hat{A}B$
(Σχολικό / 2 / Σύνθετα Θέματα / σ. 120)

10.47 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\Delta B = \Delta\Gamma = 18$. Να βρείτε το ύψος του τραπεζίου.

10.48 Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και E μέσο της $A\Delta$ με $EZ \perp A\Delta$.
Να βρείτε τα μήκη των $B\Delta$, AB και EZ .



10.49 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $AB = B\Gamma = 4$ και το ύψος BE από την κορυφή B

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δύο γωνίες του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

β) Να αποδείξετε ότι $2E\Gamma = B\Gamma$

γ) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα, να βρείτε το μήκος του MN

10.50 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε την $\Gamma H \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E και Z των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) $AB = 3\Gamma\Delta$

β) το τετράπλευρο $ENBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

10.51 Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$ και K, Λ τα μέσα των $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Η παράλληλη από το K προς την AB τέμνει την $A\Lambda$ στο Z . Να αποδείξετε ότι :

α) $B\Gamma = 2\Delta Z$

β) το τετράπλευρο $ZK\Gamma\Lambda$ είναι ρόμβος

γ) $A\hat{K}\Lambda = 90^\circ$

10.52 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, $\Gamma\Delta = 2AB$. Από την κορυφή B φέρουμε την BE κάθετη στην $\Gamma\Delta$.

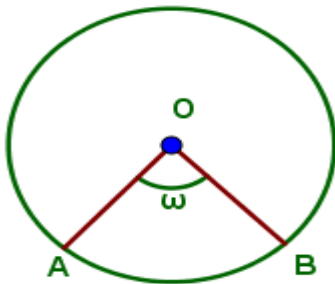
α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο

β) Να αποδείξετε ότι το $ABE\Delta$ είναι τετράγωνο

γ) Αν N μέσο του AE και M το μέσο του BE να δειχθεί ότι $NM = \frac{\Delta\Gamma}{4}$

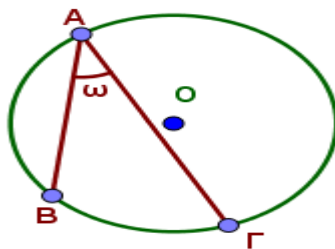
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Επίκεντρη Γωνία



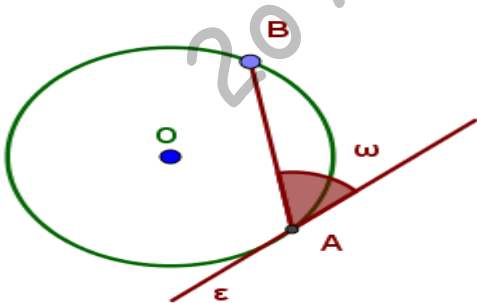
Μια γωνία λέγεται επίκεντρη, όταν η κορυφή της είναι το κέντρο του κύκλου και οι πλευρές της ακτίνες του κύκλου

Εγγεγραμμένη Γωνία



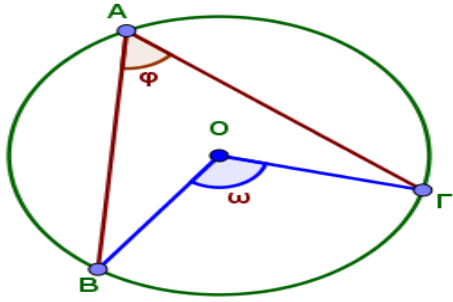
Μια κυρτή γωνία λέγεται εγγεγραμμένη σε ένα κύκλο αν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου. Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται αντίστοιχο τόξο της ή διαφορετικά λέμε ότι η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Γωνία Χορδής και Εφαπτομένης



Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μια της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης.

Σχέση Εγγεγραμμένης και αντίστοιχης Επίκεντρης



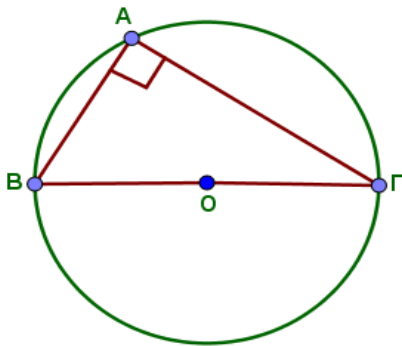
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Δηλαδή: $\hat{A} = \frac{1}{2} \hat{O}$ αφού βαίνουν στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Πορίσματα

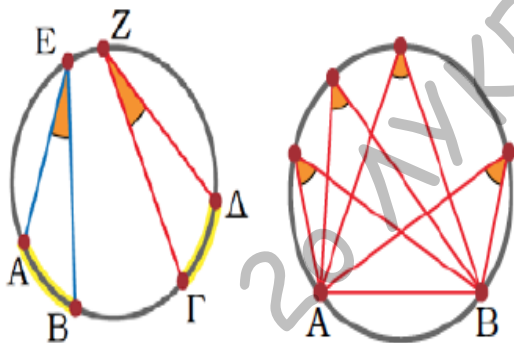
A) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

B) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



$\hat{A} = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

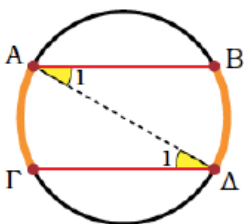
Γ) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα



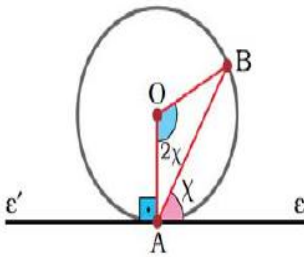
$\hat{E} = \hat{Z}$ αφού βαίνουν στα ίσα τόξα $\widehat{AB}, \widehat{\Gamma\Delta}$

Δ) Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παραλλήλων χορδών είναι ίσα.

Αν $AB \parallel \Gamma\Delta$ τότε $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Delta}$



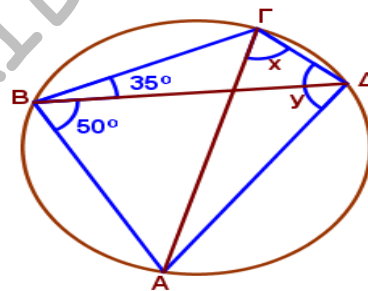
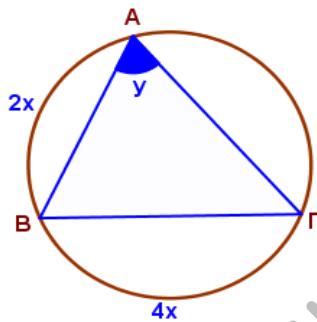
Ε) Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στην άκρη της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.



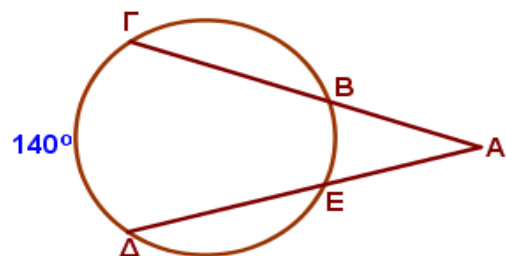
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στην άκρη της χορδής ισούται με μισό της επίκεντρης που βαίνει στο τόξο της χορδής .
Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στην άκρη της χορδής έχει μέτρο όσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της χορδής .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11.1 Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x, y . (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.134)

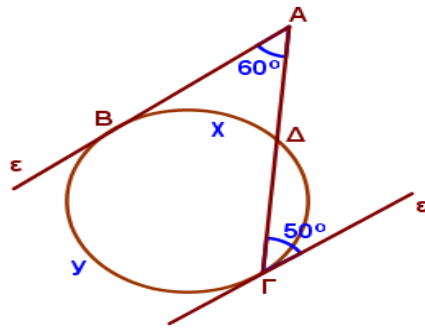
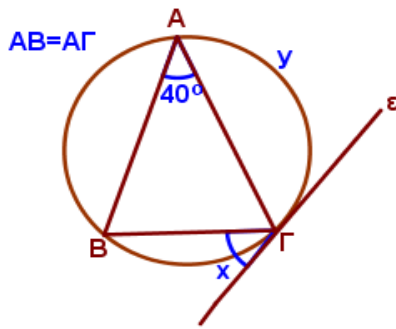


11.2 Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 40^\circ$, να βρείτε το μέτρο του τόξου BE. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.134)

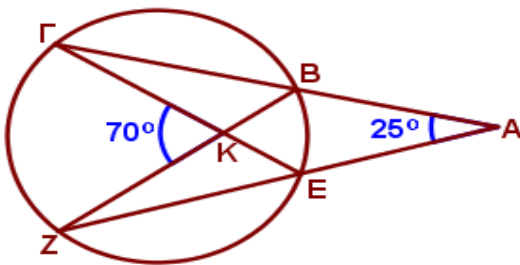


11.3 Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή AB κύκλου (K) είναι παράλληλη στην χορδή AB και αντίστροφα. (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.135)

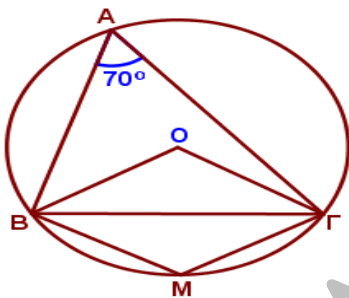
11.4 Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ϵ και ϵ' είναι εφαπτόμενες να βρείτε τα x, y .
(Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.134)



11.5 Να βρείτε τα μέτρα των τόξων EB και ΓΔ του παρακάτω σχήματος. (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.134)



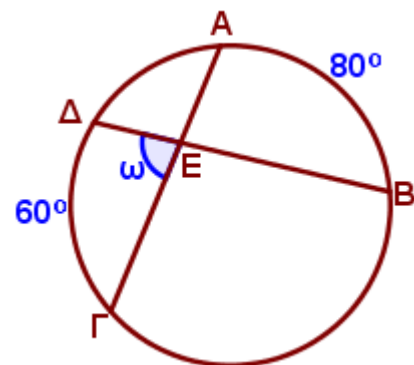
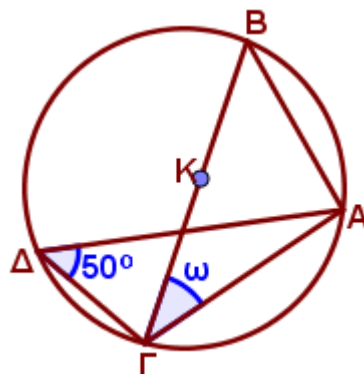
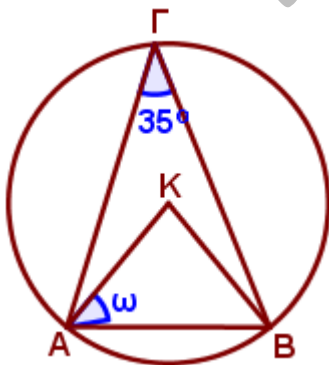
11.6 Αν στο επόμενο σχήμα τα τόξα BM και ΜΓ είναι ίσα, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ



(Σχολικό / 5 / Εμπέδωσης / σ.134)

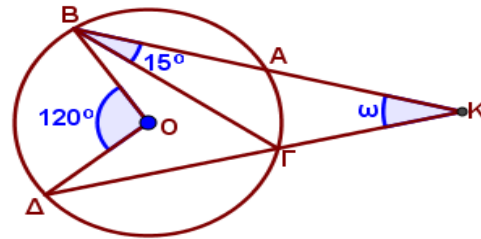
11.7 Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία A και B. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του A στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το B. (Σχολικό / 2 / Αποδεικτικές / σ.135)

11.8 Να βρείτε τη γωνία ω στα παρακάτω σχήματα :

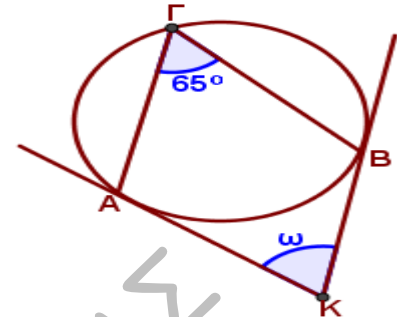
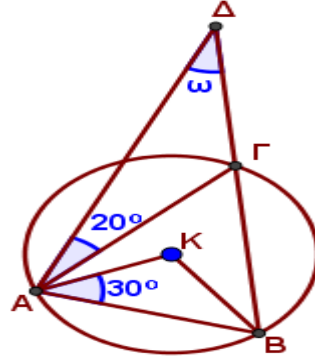
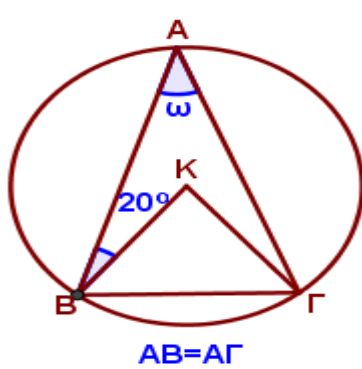


11.9 Στο διπλανό σχήμα , να υπολογίσετε :

- α) τη γωνία $B\hat{F}\Delta$
β) τη γωνία ω

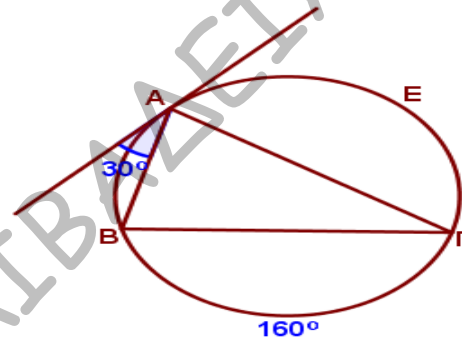


11.10 Να βρείτε τη γωνία ω στα παρακάτω σχήματα :

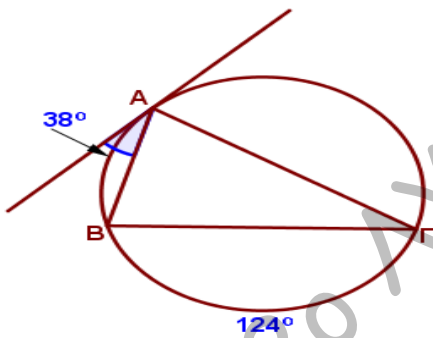


11.11 Στο διπλανό σχήμα , να υπολογίσετε :

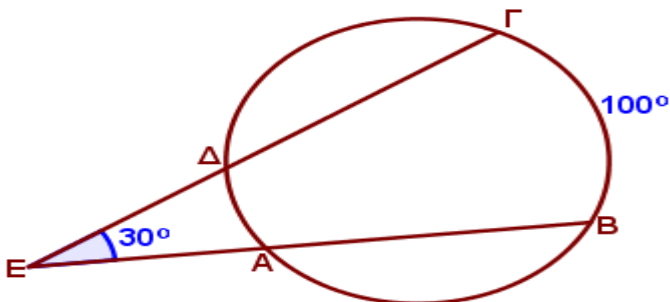
- α) τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$
β) το μέτρο του τόξου $A\hat{E}\Gamma$



11.12 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$



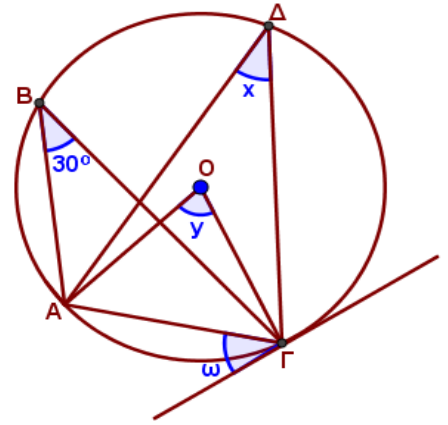
11.13 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $A\hat{D}$



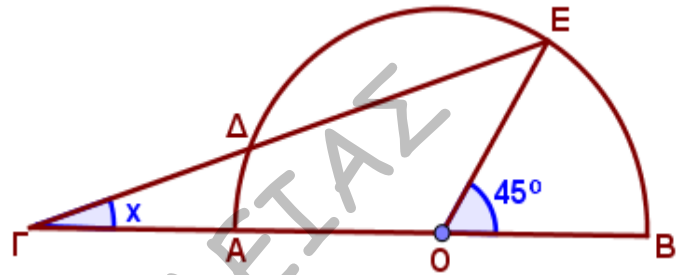
11.14 Στο διπλανό σχήμα η ευθεία εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες x , y και ω

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΟΑΓ ως προς τις πλευρές του



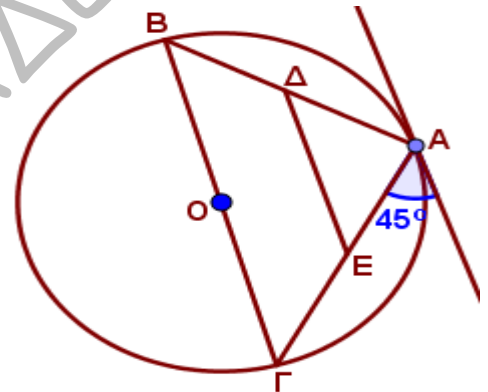
11.15 Σε ημικύκλιο διαμέτρου AB προεκτείνουμε την AB προς το μέρος του A και παίρνουμε ένα σημείο Γ. Θεωρούμε E ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω Δ το σημείο τομής του τμήματος ΓΕ με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα ΓΔ ισούται με το OB, να βρείτε τη γωνία x .



11.16 Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΒΓ. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και την παράλληλη ευθεία στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΓ

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.



11.17 Δίνεται κύκλος κέντρου Ο διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{B\hat{A}G} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ, προς το Β, στο σημείο Δ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΓΔ

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΓΒΔ είναι ίσα.

11.18 Δίνεται κύκλος κέντρου Ο διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{B\hat{A}G} = 30^\circ$. Στο σημείο Γ φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου ΑΒ, προς το Β, στο σημείο Δ.

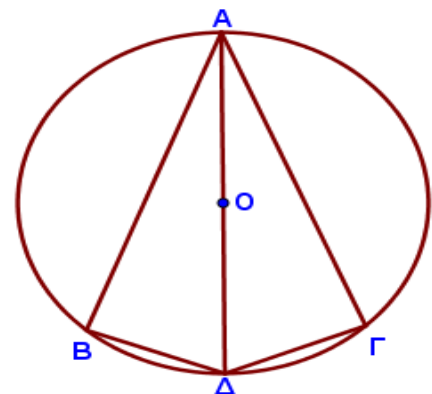
α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΓΑΔ είναι ισοσκελές

β) Να αποδείξετε ότι $AB = 2BD$

11.19 Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν η διάμετρος ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}G}$, να αποδείξετε ότι:

α) τα τόξα ΒΔ και ΔΓ είναι ίσα

β) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.



11.20 Σε κύκλο κέντρο O φέρουμε τις διαμέτρους του $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο

β) Ποια σχέση πρέπει να έχουν οι διάμετροι $ΑΓ$ και $ΒΔ$ ώστε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ να είναι τετράγωνο . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .

11.21 Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι (O, ρ) και (K, ρ) με $OK = \rho$, οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAK είναι ισόπλευρο

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BAK .

11.22 Δύο κύκλοι (O, ρ) και (K, R) εφάπτονται εξωτερικά στο N . Μια ευθεία ε εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία A και B αντίστοιχα . Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο N τέμνει την ε στο M . Να δείξετε ότι :

α) το M είναι το μέσο του AB

β) $\widehat{OMK} = 90^\circ$

γ) $\widehat{ANB} = 90^\circ$

11.23 Θεωρούμε έναν κύκλο και ένα σημείο A εκτός αυτού. Από το A φέρουμε ένα εφαπτόμενο τμήμα AB και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ . Αν η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Delta\Gamma}$ τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο E , να αποδείξετε ότι $AB = AE$.

11.24 Σε κύκλο διαμέτρου AB φέρουμε δύο παράλληλες χορδές $ΑΓ$ και $ΒΔ$. Να αποδείξετε ότι :

α) $ΑΓ = ΒΔ$

β) η $\Gamma\Delta$ είναι διάμετρος του κύκλου

11.25 Δίνεται κύκλος κέντρου O , μια χορδή του AB , η εφαπτομένη του (ε) στο A και σημείο Γ της (ε) ώστε $ΑΓ = AB$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\Delta A = \Delta \Gamma$

β) το τόξο AB είναι διπλάσιο του τόξου $A\Delta$.

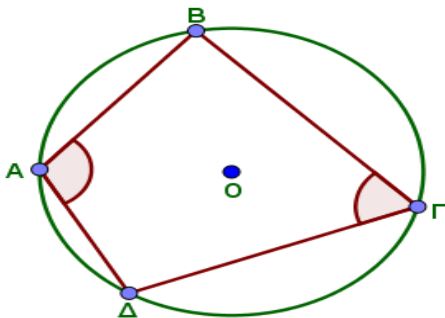
Εγγεγραμμένα Τετράπλευρα

Ορισμός: Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγεγραμμένο σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο το τετράπλευρο λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του τετραπλεύρου.

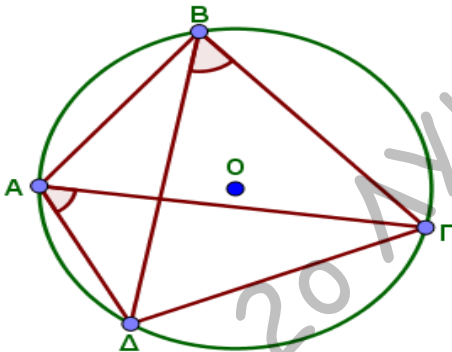
Ιδιότητες Εγγεγραμμένου Τετραπλεύρων

A) Οι απέναντι γωνίες ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές.



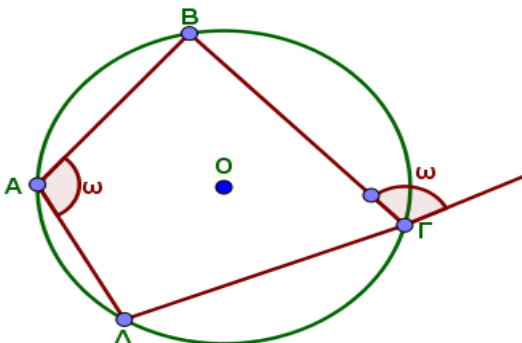
Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$ ενώ η γωνία $\hat{C}$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Delta A}$ για τα οποία τόξα ισχύει $\widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{B\Delta A} = 4\epsilon$, άρα $\hat{A} + \hat{C} = 2\epsilon$

B) Κάθε πλευρά ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.



Η πλευρά π.χ. $\Gamma\Delta$ φαίνεται από τις κορυφές A και B υπό ίσες γωνίες αφού είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$

Γ) Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.



Αφού $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο τότε θα ισχύει: $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ.}} = \hat{A}$

Εγγράψιμα Τετράπλευρα

Ορισμός: Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του .

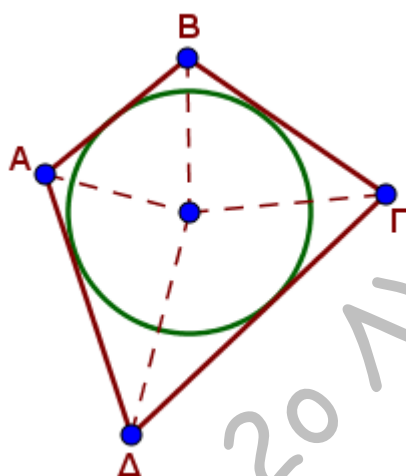
Κριτήρια Εγγραψιμότητας Τετραπλεύρων

Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο , αν ισχύει μια από τις ακόλουθες προτάσεις :

- A) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
- B) Μια πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες
- Γ) Μια εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου .

Περιγεγραμμένα και Περιγράψιμα Τετράπλευρα

Ορισμός: Ένα τετράπλευρο , του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο , λέγεται περιγεγραμμένο στον κύκλο αυτό , ενώ ο κύκλος λέγεται εγγεγραμμένος στο τετράπλευρο αυτό .



Ιδιότητες Περιγεγραμμένων Τετραπλεύρων

- A) Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο , το οποίο είναι και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του .
- B) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίσα .

Κριτήρια Περιγραψιμότητας Τετραπλεύρων

- A) Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο
- B) Ένα τετράπλευρο είναι περιγράψιμο σε κύκλο αν τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12.1 Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\hat{A} = 120^\circ$ και $\hat{B}_{\text{εξωτ.}} = 80^\circ$. Να βρείτε τις υπόλοιπες γωνίες του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ (Σχολικό / 1 / Εμπέδωσης / σ.139)

12.2 Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο. (Σχολικό / 2 / Εμπέδωσης / σ.139)

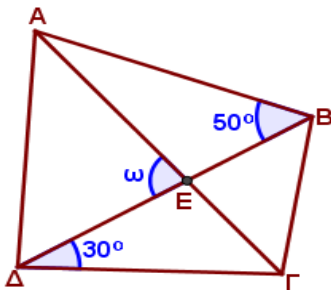
12.3 Να δείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο. (Σχολικό / 3 / Εμπέδωσης / σ.139)

12.4 Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου. (Σχολικό / 4 / Εμπέδωσης / σ.139)

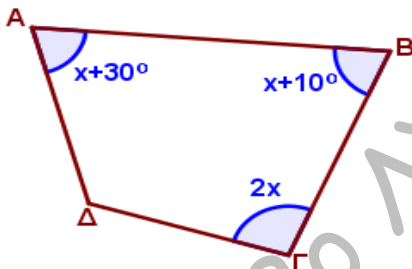
12.5 Δύο κύκλοι τέμνονται στα A και B . Από τα A και B φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον έναν κύκλο στα Γ και Γ' ενώ τον άλλον στα Δ και Δ' . Να δείξετε ότι: $\Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ (Σχολικό / 1 / Αποδεικτικές / σ.139)

12.6 Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο

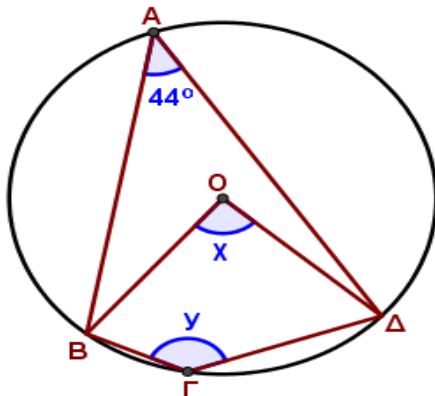
12.7 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο. Να υπολογίσετε τη γωνία ω .



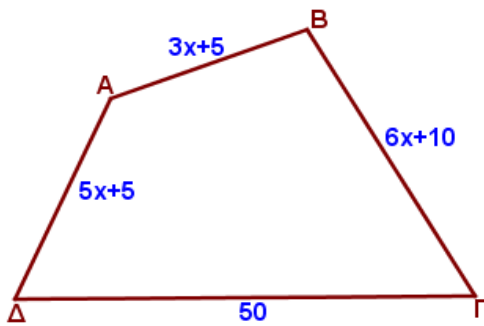
12.8 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο. Να υπολογίσετε τις γωνίες του.



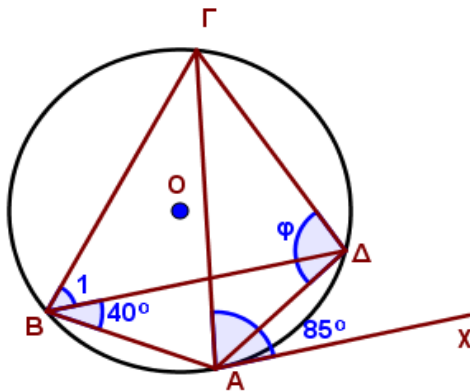
12.9 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x, y .



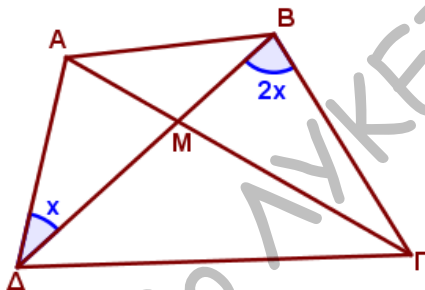
12.10 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του .



12.11 Στο παρακάτω σχήμα η Ax είναι εφαπτομένη του κύκλου με κέντρο O . Να βρείτε τη γωνία $\hat{B}_1$ και την $\hat{\varphi}$



12.12 Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει κάθετες διαγώνιους και $\hat{B\hat{A}\Delta} = 110^\circ$ και $\hat{B\hat{\Gamma}\Delta} = 70^\circ$. Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι εγγράψιμο και να βρείτε τις γωνίες B και Δ .



12.13 Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, στο οποίο ισχύει $\Gamma\Delta = 3AB$ και $\hat{\Delta} = 60^\circ$. Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο .

12.14 Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Προεκτείνουμε το $A\Delta$ κατά ίσο τμήμα ΔE . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι περιγράψιμο σε κύκλο .

12.15 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E ένα σημείο του ύψους του $A\Delta$. Αν Z και H είναι οι προβολές του E στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{Z\hat{A}E} = \hat{H\hat{A}E}$

β) το τετράπλευρο $BZH\Gamma$ είναι εγγράψιμο

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

13.1 Δίνεται κύκλος (O, R) και οι ίσες χορδές του $AB, ΓΔ$ και τα αποστήματά τους OK και OL αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και $ΔΓ$ τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $ΜΟΚ$ και $ΜΟΛ$ είναι ίσα

β) $MA = MG$ και $MB = MD$

(ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ 2016)

13.2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AG$. Αν Θ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $\Theta B = \Theta Γ$, τότε να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $AB\Theta$ και $AΓ\Theta$ είναι ίσα

β) η $A\Theta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$

γ) $A\Theta \perp BΓ$

(ΒΟΛΟΣ 2016)

13.3 Δίνεται τραπέζιο $ABΓΔ$ με $AB \parallel ΓΔ$ και $\hat{A} = 90^\circ$. Η διάμεσος KN του τραπεζίου τέμνει τη διαγώνιο $BΔ$ στο M έτσι ώστε το τετράπλευρο $ABNM$ να είναι ρόμβος πλευράς $AB = 4$.

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα KM και $ΔΓ$

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $BΔΓ$ είναι ισόπλευρο

γ) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπεζίου.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

13.4 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες του τριγώνου $ABΓ$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, $ΔΔ$ ύψος και AM διάμεσος, να αποδείξετε ότι :

β1) $\hat{\Delta AM} = 30^\circ$

β2) $BΔ = \frac{BΓ}{4}$

(ΕΡΕΤΡΙΑ 2016)

13.5 Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και η διάμεσός του AM . Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $MD = AM$

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $MΓΔ$ είναι ίσα

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABΔΓ$ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $ABΔΓ$ αν $\hat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$

(ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2016)

13.6 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ με $AB = AG$. Αν O είναι το σημείο τομής των υψών BE και $ΓΔ$ του τριγώνου αυτού, να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα ABE και $AΓΔ$ είναι ίσα

β) το τρίγωνο $BOΓ$ είναι ισοσκελές

(ΛΙΒΑΔΕΙΑ 2016)

13.7 Στο παρακάτω σχήμα το M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

Αν $MG = MD$ και $AD = BΓ$, να αποδείξετε ότι :

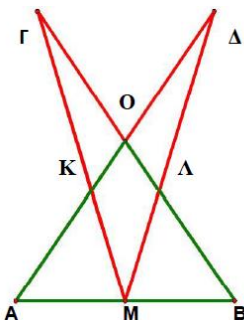
α) τα τρίγωνα ADM και $BΓM$ είναι ίσα και να γράψετε και τις γωνίες τους που είναι αντίστοιχα ίσες

β) το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές

γ) οι γωνίες $\hat{\Delta MB} = \hat{\Gamma MA}$

δ) τα τρίγωνα AKM και BML είναι ίσα

(ΛΙΜΕΝΑΡΙΑ ΘΑΣΟΥ 2016)



13.8 Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και BD, GE τα ύψη από τις κορυφές B και Γ αντίστοιχα. Αν $BD = GE$ τότε:

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και ΓEB .
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ) Να αποδείξετε ότι το $\Delta E // B\Gamma$. **(ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ 2016)**

13.9 Από σημείο M εξωτερικό του κύκλου (O,R) φέρνουμε τις εφαπτόμενες MA, MB του κύκλου.

Προεκτείνουμε το OB κατά ίσο τμήμα $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $OM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β) $\widehat{AM\Gamma} = 3 \cdot \widehat{BM\Gamma}$
- γ) $OM \perp AB$ **(ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ 2017)**

13.10 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ από τα σημεία B και Γ , παίρνουμε αντίστοιχα τα ίσα τμήματα BD και GE . Φέρουμε επίσης BK κάθετη στην AD και $\Gamma\Lambda$ κάθετη στην AE . Να αποδείξετε ότι:

- α) $AD = AE$
- β) Τα τρίγωνα AKB και $A\Lambda\Gamma$ είναι ίσα.
- γ) Αν οι ευθείες KB και $\Gamma\Lambda$ τέμνονται στο σημείο M , τότε η AM είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος KL **(ΧΑΛΑΝΔΡΙ 2017)**

13.11 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ τυχαίο σημείο της βάσης του $B\Gamma$. Από το σημείο Δ φέρνουμε παράλληλη στην AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές
- β) $A\widehat{E}\Delta = 2 \cdot \widehat{B}$ **(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2017)**

13.12 Δίνεται κύκλος με κέντρο O και A εξωτερικό σημείο από το οποίο φέρουμε εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$. Αν Δ αντιδιαμετρικό του B και E αντιδιαμετρικό του Γ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Gamma E$ και $AB\Delta$ είναι ίσα.
- β) $\Delta\widehat{A}\Gamma = B\widehat{A}E$
- γ) τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και ABE είναι ίσα **(ΣΕΡΡΕΣ 2017)**

13.13 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των $BA, \Gamma A$ παίρνουμε τα σημεία E, Δ αντιστοίχως, ώστε $AE = A\Delta$. Αν M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα
- β) το τρίγωνο $ME\Delta$ είναι ισοσκελές **(ΣΕΡΡΕΣ 2017)**

13.14 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ παίρνουμε τα σημεία E και Z έτσι ώστε $AE = AZ$. Να αποδείξετε ότι :

- α) $BZ = \Gamma E$
- β) αν K το σημείο τομής των $BZ, \Gamma E$, τότε $B\widehat{E}K = \Gamma\widehat{Z}K$
- γ) η AK διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$
- δ) $EZ // B\Gamma$ **(ΣΕΡΡΕΣ 2017)**

13.15 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και οι διχοτόμοι BE και $\Gamma\Delta$ των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα και I το σημείο τομής τους. Να αποδείξετε ότι :

- α) το τρίγωνο $BI\Gamma$ είναι ισοσκελές
- β) AI διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$
- γ) AI μεσοκάθετος της $B\Gamma$ **(ΣΕΡΡΕΣ 2017)**

13.16 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε τις πλευρές του AB και $A\Gamma$ κατά ίσα τμήματα BD και GE αντίστοιχα. Αν BE και GD τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ABE και $A\Gamma D$ είναι ίσα.

β) $DM = ME$

γ) Η AM είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος DE . (ΛΙΒΑΔΕΙΑ 2018)

13.17 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε τη διάμεσο AM (προς το M) κατά τμήμα $MD = AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABM και $M\Gamma D$ είναι ίσα.

β) Τι είδους τετράπλευρο είναι το $AB\Delta\Gamma$ αν $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και Δ ισαπέχουν από την πλευρά $B\Gamma$. (ΑΘΗΝΑ 2018)

13.18 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και Δ, E εσωτερικά της $B\Gamma$ έτσι ώστε $B\Delta = E\Gamma$

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές

β) Αν M, N τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $M\hat{\Delta}A = N\hat{E}A$ (ΑΘΗΝΑ 2018)

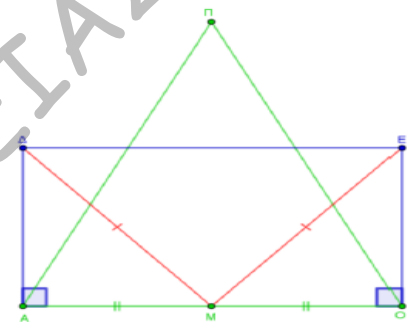
13.19 Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΠAO ($\Pi A = \Pi O$) και M το μέσο του AO . Στα σημεία A και O φέρουμε κάθετες στην AO προς το ίδιο μέρος και θεωρούμε σε αυτές σημεία Δ και E αντίστοιχα τέτοια ώστε $M\Delta = ME$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΔA και OE είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΔDEO είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(ΠΥΛΟΣ 2018)



13.20 Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος.

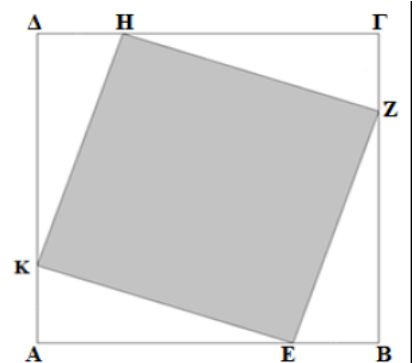
Έστω σημεία E, Z, H, K στις πλευρές $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ και ΔA αντίστοιχα τέτοια ώστε $AE = BZ = \Gamma H = \Delta K$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AEK, BEZ, \Gamma HZ, \Delta HK$ είναι ίσα.

β) $K\hat{E}Z = 90^\circ$

γ) η KZ είναι μεσοκάθετη του HE

(ΜΑΡΟΥΣΙ 2019)



13.21 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω M το μέσο της $B\Gamma$. Πάνω στις ίσες πλευρές $AB, A\Gamma$ θεωρώ τα σημεία E, Z τέτοια ώστε $AE = AZ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $EM = MZ$

β) Τα τρίγωνα AEM, AZM είναι ίσα

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας EMZ .

δ) Η AM είναι κάθετη στη EZ (ΑΘΗΝΑ 2019)

13.22 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και AD διχοτόμος του. Από το D φέρνουμε παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

Να δείξετε ότι :

α) τα τμήματα BE, ZD διχοτομούνται .

β) το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.

γ) $AE = BZ$

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2019)

13.23 Δίνονται οι κύκλοι (Λ, ρ) και $(K, 3\rho)$ οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο A . Αν (ϵ) είναι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη που εφάπτεται στους κύκλους στα σημεία B και Γ αντίστοιχα και (η) η κοινή εσωτερική τους εφαπτομένη στο σημείο A που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο M , να αποδείξετε ότι:

α) Το M είναι το μέσο της $B\Gamma$.

β) $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$

γ) Αν φέρουμε την AH κάθετη στην $K\Gamma$, το τετράπλευρο $B\Lambda H\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

δ) Να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία $K\Lambda$ και η ευθεία της εφαπτομένης $B\Gamma$. (ΠΡΟΤΥΠΟ 2019)

13.24 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο PAO ($PA = PO$) και τα σημεία Δ και E των πλευρών PA και PO αντίστοιχα ώστε $P\Delta = \frac{1}{3}PA$ και $PE = \frac{1}{3}PO$. Αν Θ το σημείο τομής των AE και DO , Να αποδείξετε ότι:

α) $EA = DO$.

β) Τα τρίγωνα $\Delta A\Theta$ και $\Theta E O$ είναι ίσα.

γ) Η $P\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Π

(ΠΥΛΟΣ 2019)

13.25 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και AM διάμεσος.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

γ) Αν η κάθετη από την κορυφή A προς τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας της Γ τέμνει την προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ στο E , τότε:

γ1) Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $A\Gamma E$ είναι ισοσκελές.

γ2) Να υπολογίσετε την γωνία $A\hat{E}\Gamma$

γ3) Να αποδείξετε ότι $AE = AB$

(ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ 2016)

13.26 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $\hat{\Gamma} = 2 \cdot \hat{B}$. Φέρουμε τη διχοτόμο $\Gamma\Delta$ της γωνίας Γ και στη συνέχεια $\Delta E \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$

β) $\Delta E = A\Delta$

γ) $\Delta E = \frac{1}{3}AB$

(ΒΟΛΟΣ 2016)

13.27 Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Στην προέκταση της BA προς το A θεωρούμε σημείο M ώστε $AB = AM$.

Από το M φέρνουμε την MK κάθετη στην $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο $AK\Delta$ είναι ισοσκελές.

β) η $K\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $AK\Gamma$

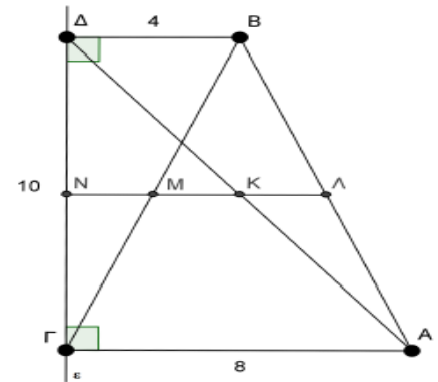
γ) ισχύει $A\hat{K}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)

13.28 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και μια ευθεία ε που δεν τέμνει το τμήμα αυτό. Από τα A, B φέρουμε κάθετες προς την ε , οι οποίες την τέμνουν στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα, ώστε $A\Gamma = 8, B\Delta = 4$ και $\Gamma\Delta = 10$. Από το μέσο K της $A\Delta$ φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$, η οποία τέμνει τις $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ στα σημεία Λ, M και N αντίστοιχα.

- Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο και ότι τα σημεία Λ, M και N είναι τα μέσα των $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα
- Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων KM και ΛN
- Να χαράξετε το τμήμα BK και να υπολογίσετε το μήκος του

(ΕΡΕΤΡΙΑ 2016)

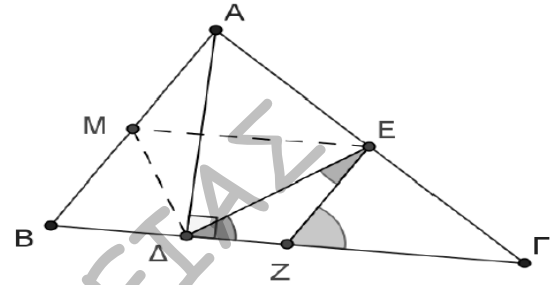


13.29 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του $A\Delta$.

Αν E και Z τα μέσα των $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- $E\widehat{Z}\Gamma = \widehat{B}$ και $E\widehat{\Delta}\Gamma = \widehat{\Gamma}$
- $\Delta\widehat{E}Z = \widehat{B} - \widehat{\Gamma}$
- Αν και το M είναι μέσο του AB , το $M\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

(ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2016)



13.30 Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = A\Delta = \alpha, \Gamma\Delta = 2\alpha$ και M το μέσον της $\Gamma\Delta$.

- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ρόμβος.
- Να αποδείξετε ότι $\Delta B \perp B\Gamma$.
- Αν E είναι το σημείο τομής των ΔA και ΓB , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AEBM$ είναι παραλληλόγραμμο.

(ΛΙΒΑΔΕΙΑ 2016)

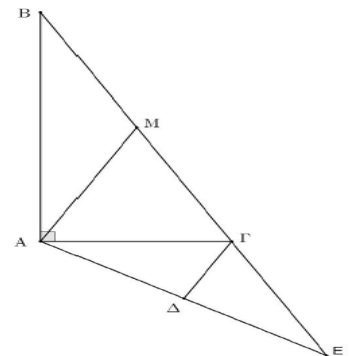
13.31 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) είναι $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ και

AM διάμεσος του τριγώνου.

- Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{B} = 30^\circ$
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- Αν $\Gamma\Delta$ η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας της Γ και η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$ τότε:

γ1) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AM\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

γ2) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \frac{BE}{6}$ (ΛΙΜΕΝΑΡΙΑ ΘΑΣΟΥ 2016)



13.32 Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $B\Gamma = 2AB$. Δίνεται AM διάμεσος, E μέσο του AB και Δ μέσο του BM .

Να αποδείξετε ότι:

- $\widehat{B\Lambda M} = \widehat{B\widehat{M}A}$
- Τα τρίγωνα AEM και $A\Delta M$ είναι ίσα.
- Η AM είναι διχοτόμος της $\Delta\widehat{A}\Gamma$

(ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ 2016)

13.33 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με AD διάμεσος και M, E μέσα των AG και GD αντίστοιχα.

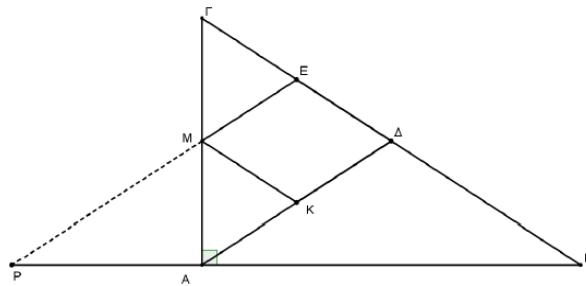
Να αποδείξετε ότι:

α) $ME = \frac{BG}{4}$

β) το $ME\Delta K$ είναι ρόμβος, όπου K μέσο του AD .

γ) το τρίγωνο BEP είναι ισοσκελές, όπου P το σημείο τομής του EM με την AB .

δ) $A\tilde{K}M = 2\tilde{B}$ (ΠΕΤΡΟΥΠΟΛΗ 2017)



13.34 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με γωνία $\tilde{B} = 30^\circ$. Φέρνουμε την διχοτόμο BD της γωνίας B και από την κορυφή A την κάθετη στην διχοτόμο BD που τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο σημείο E . Αν M είναι το μέσο της διχοτόμου BD , να αποδείξετε ότι:

α) $DA = DE$

β) Το τρίγωνο AME είναι ισοσκελές.

γ) $MD = AE$ (ΧΑΛΑΝΔΡΙ 2017)

13.35 Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB . Στα σημεία A και B φέρουμε τις εφαπτόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. Φέρουμε εφαπτομένη ευθεία ε στο σημείο Z του κύκλου, η οποία τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα με $\Gamma\Delta$ να μην είναι παράλληλο στην AB . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι τραπέζιο.

β) $\Gamma\Delta = A\Gamma + B\Delta$

γ) $\widehat{O\Delta} = 90^\circ$

δ) αν $\widehat{A\Gamma\Delta} = 60^\circ$ και η OG τέμνει τον κύκλο στο σημείο M τότε το σημείο M είναι το μέσο του OG

(ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2017)

13.36 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διάμεσός του AM . Αν $AM = A\Gamma = 3 \text{ cm}$, να βρείτε:

α) το $M\Gamma$

β) το $B\Gamma$

γ) Αν $M\Delta // A\Gamma$, τότε να βρείτε:

γ1) τις γωνίες $\tilde{B}$ και $\tilde{\Gamma}$

γ2) το $M\Delta$ (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.37 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 3, \Gamma\Delta = 7$ και περίμετρο 18. Να βρείτε :

α) το μήκος της διαμέσου του τραpezίου.

β) το μήκος του τμήματος που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραpezίου.

γ) το μήκος των ίσων πλευρών.

δ) τις γωνίες του τραpezίου (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.38 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\tilde{B} = 30^\circ$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = E\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

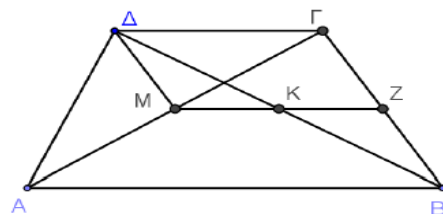
α) $A\Gamma = ZE$

β) το $A\Gamma EZ$ είναι ρόμβος. (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.39 Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $AB = 2\Gamma\Delta$ και η διαγώνιος του $A\Gamma$ είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο M . Έστω K το μέσο της διαγώνιου $B\Delta$ και Z της το σημείο στο οποίο η προέκταση της MK τέμνει τη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- Το σημείο M είναι το μέσο της $A\Gamma$.
- Το τετράπλευρο $MZ\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το σημείο K είναι μέσο της MZ . (ΑΘΗΝΑ 2018)



13.40 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 60^\circ$, AD ύψος, AE διχοτόμος και M το μέσο του AE .

Από το E φέρνω $EZ \parallel BA$ (Z σημείο της $A\Gamma$) και $E\Theta \parallel A\Gamma$ (Θ σημείο της AB). Να δείξετε ότι:

- $\hat{\Delta AE} = 30^\circ$
- το τρίγωνο ΔME είναι ισόπλευρο.
- το τετράπλευρο $AZE\Theta$ είναι ρόμβος. (ΓΙΑΝΝΟΥΛΗ 2018)

13.41 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Η AM τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο E .

Να αποδειχθεί ότι :

- $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
- Το τρίγωνο ΔBE είναι ορθογώνιο.
- $B\Delta = BE$. (ΠΥΛΟΣ 2018)

13.42 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AH το ύψος του. Αν Δ, E, Z είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

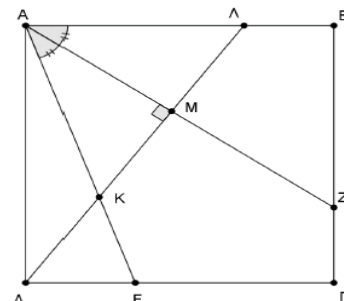
- ΔEZB παραλληλόγραμμο
- $\Delta H = EZ$ και $HE = Z\Delta$
- η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{D}H$ (ΜΑΡΟΥΣΙ 2019)

13.43 Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο και O το κέντρο του. Αν K, Λ είναι τα μέσα των ΔO και ΓO αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα KOA και ΛOB είναι ίσα.
- Το τετράπλευρο $AB\Lambda K$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- Αν η διάμεσος του ισοσκελούς τραpezίου $AB\Lambda K$ έχει μήκος 3 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα των διαγώνιων του $A\Lambda$ και BK .
- Επιπλέον αν γνωρίζετε ότι η γωνία $\Gamma\hat{B}\Delta = 30^\circ$, να υπολογίσετε τα μήκη των διαγώνιων $A\Lambda, BK$ του τραpezίου $ABK\Lambda$. (ΑΘΗΝΑ 2019)

13.44 Στο διπλανό τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε τυχαίο σημείο E στην πλευρά $\Delta\Gamma$ και τη διχοτόμο AZ της γωνίας EAB . Από την κορυφή Δ φέρνουμε την κάθετο στη διχοτόμο AZ , η οποία τέμνει την AE στο K την AZ στο M και την AB στο Λ . Να αποδείξετε ότι :

- $KE = \Delta E$
 - τα τρίγωνα ABZ και $A\Delta\Lambda$ είναι ίσα.
- (ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑΣ 2019)



13.45 Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$ με $\hat{A} = 2\hat{B}$. Η διχοτόμος της A τέμνει τη $ΓΔ$ στο E .

Αν $K, Λ, Μ, Ρ$ είναι τα μέσα των $ΑΕ, ΑΒ, ΒΓ, ΕΓ$ αντίστοιχα αποδείξτε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΑΒΓΕ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) Το τετράπλευρο $ΚΛΜΡ$ είναι ρόμβος.

γ) Αν επιπλέον για το παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ ισχύει και $ΑΒ = 2ΒΓ$ να αποδείξετε ότι :

γ1) Το τρίγωνο $ΔΑΓ$ είναι ορθογώνιο.

γ2) $ΒΕ = 2ΑΝ$ όπου N η προβολή του A στη $ΓΔ$

(ΠΡΟΤΥΠΟ 2019)

13.46 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\hat{B} = 30^\circ$ η κάθετος στο μέσο της υποτείνουσας $ΒΓ$ τέμνει την πλευρά $ΑΒ$ στο $Δ$ (όπως στο σχήμα) . Να αποδειχθεί ότι :

α) $ΔΜ = ΔΑ$.

β) $ΔΜ = \frac{ΑΒ}{3}$

(ΠΥΛΟΣ 2019)

13.47 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο

$ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) με $ΑΒ = \alpha, ΓΔ = 3\alpha, ΑΔ = ΒΓ = 2\alpha$.

Αν H και Θ οι προβολές των A, B στην $ΓΔ$ αντίστοιχα, τότε:

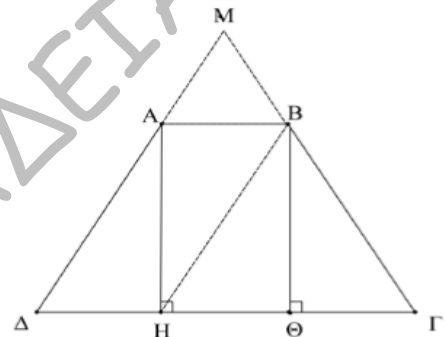
α) να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΗ$ και $ΒΓ\Theta$ είναι ίσα

β) να βρεθούν οι γωνίες του $ΑΒΓΔ$,

γ) να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΒΗΓ$ είναι ισόπλευρο

δ) αν οι μη παράλληλες πλευρές του τραpezίου $ΑΔ, ΒΓ$ τέμνονται στο M , να δείξετε ότι $MH = ΑΓ$

(ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΥΠΟΛΗ 2016)



13.48 Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ η διάμεσος του $ΑΜ$ είναι ίση με την πλευρά $ΑΒ$.

Φέρουμε το ύψος AH και στην προέκτασή του παίρνουμε τμήμα

$HK = AH$. Στη συνέχεια στην προέκταση της διαμέσου $ΑΜ$

παίρνουμε τμήμα $MN = AM$. Να αποδείξετε ότι:

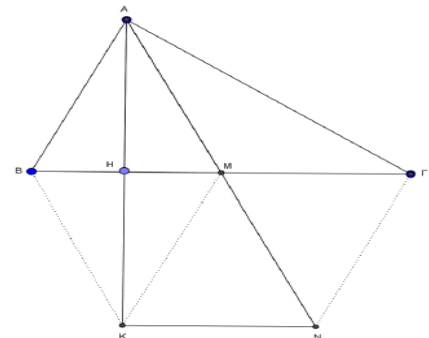
α) $HM \parallel \frac{KN}{2}$

β) Το τρίγωνο $ΑΒΚ$ είναι ισοσκελές.

γ) Το τετράπλευρο $ΒΑΓΝ$ είναι παραλληλόγραμμο.

δ) Το τετράπλευρο $ΑΒΚΜ$ είναι ρόμβος

(ΒΟΛΟΣ 2016)



13.49 Δίνεται (αμβλυγώνιο) τρίγωνο $ΑΒΓ$ και κατασκευάζουμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΒΕ$, (όπως στο σχήμα). Θεωρούμε τα μέσα M, K, N των

πλευρών $ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ$ αντίστοιχα του τριγώνου $ΑΒΓ$.

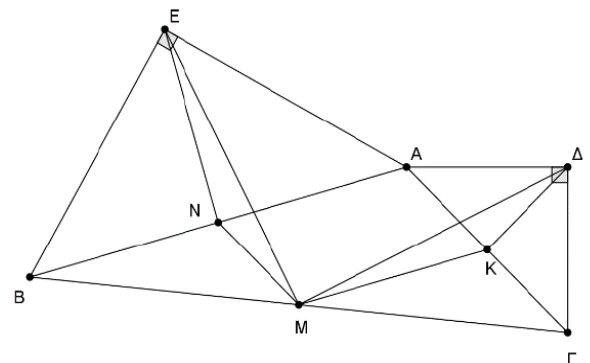
Να αποδείξετε ότι :

α) $MK = EN$

β) τα τρίγωνα $ΜΚΔ$ και $ΜΝΕ$ είναι ίσα

γ) Το τρίγωνο $ΕΜΔ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2016)



13.50 Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνω σημείο Ε στην προέκταση του ΒΔ, ώστε $ΔΕ = ΒΔ$.

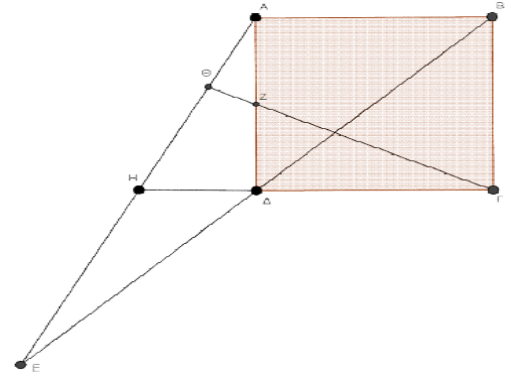
α) Αν το σημείο Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Η είναι η τομή των ΑΕ και ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α1) $ΔΗ = \frac{AB}{2}$

α2) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα

β) Αν Θ είναι το σημείο τομής των ΓΖ και ΑΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΑΘΓ = 90^\circ$

(ΕΡΕΤΡΙΑ 2016)



13.51 Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο

ΑΒΓΔ ($AB \parallel ΓΔ$) με $AB = \alpha$, $AD = BG = 2\alpha$ και $\hat{A} = 60^\circ$

Αν ΑΗ το ύψος του και οι μη παράλληλες πλευρές του τέμνονται στο Μ:

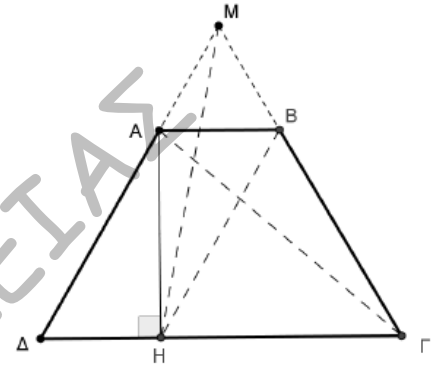
α) Δείξτε ότι $ΓΔ = 3\alpha$

β) Να βρείτε τις γωνίες του ΑΒΓΔ

γ) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΗΓ και ΜΑΒ είναι ισόπλευρα

δ) $MH = AG$

(ΚΟΡΙΝΘΟΣ 2016)



13.52 Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και ΑΔ το ύψος του.

Φέρνουμε ΔΕ και ΔΖ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Από τα σημεία

Ε και Ζ φέρνουμε κάθετες ΕΗ και ΖΘ στην υποτείνουσα ΒΓ.

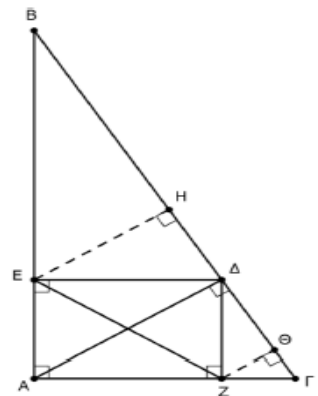
Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = EZ$.

β) Το Δ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΗΘ.

γ) $EH + Z\Theta = EZ$

(ΛΙΒΑΔΕΙΑ 2016)



13.53 Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς του ΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τετραγώνου ένα δευτερο τετράγωνο ΒΕΖΗ. Το τμήμα ΗΕ προεκτεινόμενο τέμνει την ΓΔ στο σημείο Θ. Από τη κορυφή Γ φέρνουμε παράλληλη προς την ΘΗ που τέμνει την ΖΗ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΘΓΜΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

β) $ΑΘ = ΘΜ$

γ) Η γωνία ΑΘΜ είναι ορθή.

(ΧΑΛΑΝΔΡΙ 2017)

13.54 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ και $B\hat{G} = 2AB$. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Δ. Από το σημείο Δ φέρνουμε κάθετη στη ΒΓ την οποία τέμνει στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

β) $AD = DE$ και $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$

γ) $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

δ) $AE = AB$ (ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ 2017)

13.55 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Z στην $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $AZ = AB$. Αν η BZ τέμνει την $A\Delta$ στο E να αποδείξετε ότι:

α) Η EM είναι παράλληλη με την $A\Gamma$.

β) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

γ) $\widehat{\Delta EM} = \frac{\widehat{A}}{2}$ (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.56 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, στο οποίο ισχύει: $\widehat{A} = \widehat{B} + 30^\circ$.

Οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο I .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $I\Gamma\Delta$.

γ) Να αποδείξετε ότι $ED \parallel B\Gamma$ (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.57 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Φέρουμε $AK \perp \Delta\Gamma$ και $\Gamma\Lambda \perp AB$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta K = B\Lambda$

β) το $\Delta\Lambda\Gamma K$ είναι ορθογώνιο

γ) οι $A\Gamma$, $B\Delta$, $K\Lambda$ συντρέχουν. (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.58 Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A} = 120^\circ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την $B\Gamma$ στο μέσον της E . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ABE είναι ισόπλευρο.

β) $\widehat{B\Lambda\Gamma} = 90^\circ$ (ΣΕΡΡΕΣ 2017)

13.59 Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $\widehat{B} = 3\widehat{\Gamma}$, $\Gamma\Delta = 2AB$. Από την κορυφή B φέρουμε την BE κάθετη στην $\Gamma\Delta$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τραπέζιου

β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο

γ) Να αποδείξετε ότι $AE \perp B\Delta$

δ) Αν N είναι το σημείο τομής των AE και $B\Delta$, M είναι το μέσον της BE και η NM τέμνει την $B\Gamma$ στο Θ , να αποδείξετε ότι $N\Theta = A\Delta$ (ΛΙΒΑΔΕΙΑ 2018)

13.60 Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A\Gamma = AB$. Συνδέουμε την κορυφή A με το μέσο M της $B\Gamma$ και προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $ME = AM$. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι ρόμβος

β) Η AM είναι κάθετη στην $A\Delta$

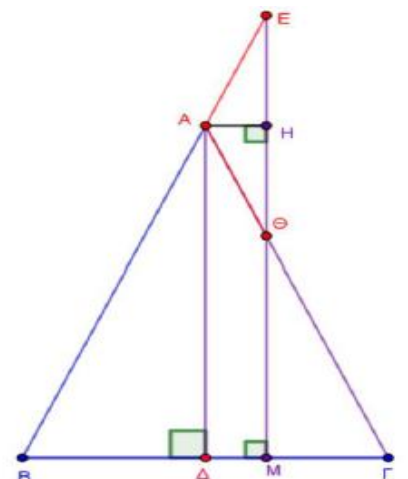
γ) Τα σημεία Δ , Γ , E είναι συνευθειακά (ΕΞΑΠΛΑΤΑΝΟΣ 2018)

13.61 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τυχαίο σημείο M της $B\Gamma$. Από το M φέρνουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν $A\Delta$ και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $\Theta E A$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{\Delta A H} = 90^\circ$

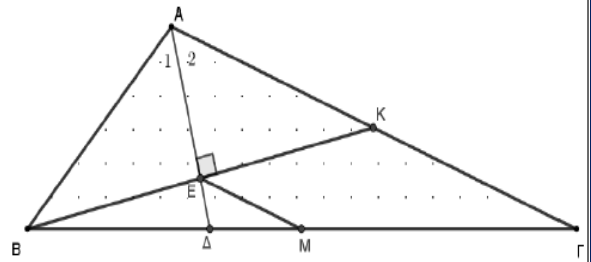
β) Το τρίγωνο $\Theta E A$ είναι ισοσκελές.

γ) $M\Theta + ME = 2 \cdot A\Delta$ (ΠΥΛΟΣ 2018)



13.62 Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AG - AB = 4$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Από το B φέρνουμε το ύψος στην $A\Delta$ που την τέμνει στο E και την πλευρά $A\Gamma$ στο K . Να αποδείξετε ότι :

- α) $4 < B\Gamma < 2(AK + 2)$
- β) το $EM\Gamma K$ είναι τραπέζιο
- γ) $EM = 2$
- δ) οι γωνίες του τριγώνου ΔEM υπολογίζονται σε συνάρτηση των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$. (**ΜΑΡΟΥΣΙ 2019**)

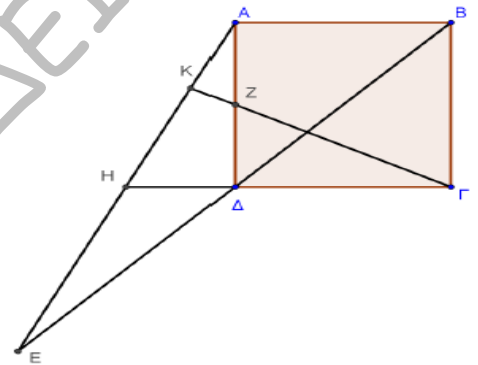


13.63 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε τμήμα $\Gamma\Delta$ κάθετο στη $A\Gamma$ και ίσο με τη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $AB\Gamma$.
- β) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.
- γ) Αν N είναι το μέσο της $A\Gamma$ και M μέσο της $B\Delta$, ότι MN είναι κάθετο στο $A\Gamma$.
- δ) Το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- ε) $\hat{M}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} + \hat{B}\hat{A}\hat{M} = 180^\circ$ (**ΑΘΗΝΑ 2019**)

13.64 Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$. Θεωρούμε Z το μέσο της $A\Delta$ και ονομάζουμε H το σημείο τομής των $\Gamma\Delta$ και AE και K το σημείο τομής των ΓZ και AE . Να δείξετε ότι :

- α) Τα τρίγωνα $A\hat{H}\hat{\Delta}$ και $\Delta Z\hat{\Gamma}$ είναι ίσα.
- β) Η γωνία $\hat{H}K\hat{\Gamma}$ είναι ορθή.
- γ) Οι HZ και $A\Gamma$ τέμνονται κάθετα.
- δ) Το σημείο Δ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Gamma E$ (**ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΔΟΥΚΑ 2019**)



13.65 Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ προς το μέρος του Δ κατά τμήμα $\Delta E = B\Delta$.

Έστω Z το μέσο της $A\Delta$ και H το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta H = \frac{A\Delta}{2}$
- β) $\Gamma Z = AH$.
- γ) ΓZ κάθετη στην AE . (**ΠΥΛΟΣ 2019**)

