

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΘΕΜΑ 1ο

A1. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

A2. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 218

B1. α. Λ, β. Λ, γ. Σ

B2. α→3, β→1, γ→5, δ→2

ΘΕΜΑ 2ο

$$f(z) = \frac{2z+i}{\bar{z}-2i}, \quad z \neq -2i$$

α. • $w_1 = f(9-5i) = \frac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i} = \frac{18-9i}{9+3i} = \frac{6-3i}{3+i}$

$$= \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{18-6i-9i-3}{9+1}$$

$$= \frac{15-15i}{10} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$\rho = |w_1| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \text{οπότε} \quad \text{συν}\varphi = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{και} \quad \eta\mu\varphi = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{επομένως} \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Άρα} \quad w_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

• $w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i) \right]^{2004} = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \right]^{2004}$

$$= \text{συν}\left(-\frac{2004 \cdot \pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{2004 \cdot \pi}{4}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(-501\pi) + i \sin(-501\pi) \\
&= \cos(-500\pi - \pi) + i \sin(-500\pi - \pi) \\
&= \cos(-\pi) + i \sin(-\pi)
\end{aligned}$$

$$\beta. \quad M = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και όπως ξέρουμε από την θεωρία, σωστό είναι το B

$$\gamma. \quad K = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε } MX = K \Leftrightarrow X = M^{-1} \cdot K \quad (1)$$

$$\text{Όμως } M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Οπότε η (1) γίνεται } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$,
 $f(0) = 2$, $f(1) = 4$

α. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 3$ έχει μία ακριβώς λύση στο $(0, 1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 3$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (πράξεις συνεχών) με

$$g(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0 \quad \text{και}$$

$$g(1) = f(1) - 3 = 4 - 3 = 1 > 0 \quad \text{οπότε}$$

$$g(0)g(1) < 0$$

Επομένως, με βάση το θεώρημα Bolzano, θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$

$$\text{έτσι ώστε } g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 3.$$

Επειδή όμως $g'(x) = f'(x) > 0$, η g είναι γνησίως αύξουσα άρα η λύση είναι μοναδική

β. $0 < \frac{1}{5} < 1$ και η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$

$$\text{ομοίως } f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$$

$$f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$$

$$f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

Προσθέτουμε : $4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$

$$f(0) < \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} < f(1) \quad (1)$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) \neq f(1)$, λόγω της (1) και με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρξει $x_1 \in (0, 1)$ ώστε

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ άρα με βάση το

θεώρημα της μέσης τιμής θα υπάρξει $x_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2$

Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη στο σημείο $(x_2, f(x_2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$

ΘΕΜΑ 4ο

$$f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

α. Αφού η f , για $t = 6$, παρουσιάζει μέγιστο ίσο με 15, έχουμε $f(6) = 15$

Επίσης αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $t = 6$ του $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο σε αυτό, με βάση το θεώρημα Fermat, θα ισχύει $f'(6) = 0$.

$$\text{Όμως } f'(t) = \frac{\alpha(\beta^2 - t^2)}{\beta^2 \left(1 + \frac{t^2}{\beta^2}\right)^2} \text{ οπότε } f'(6) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\beta^2 - 36) = 0$$

και επειδή α, β θετικές σταθερές θα είναι $\beta = 6$.

$$\text{Επίσης } f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{6\alpha}{1 + \left(\frac{6}{6}\right)^2} = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

β. Θα πρέπει να ισχύει $f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{5t}{1 + \left(\frac{t}{6}\right)^2} \geq 12$

$$t^2 - 15t + 36 \leq 0$$

$$3 \leq t \leq 12$$

netsuccess.gr