

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Έστω $z_1 = x + yi$ και $z_2 = \alpha + \beta i$. Τότε

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x + yi) \cdot (\alpha + \beta i)} = \overline{\alpha x + x\beta i + \alpha y i - \beta y} = \overline{(\alpha x - \beta y) + (x\beta + \alpha y)i}$$

$$= (\alpha x - \beta y) - (\beta x + \alpha y)i \quad (1)$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x - yi)(\alpha - \beta i) = \alpha x - \alpha yi - \beta xi - \beta y = (\alpha x - \beta y) - (\alpha y + \beta x)i \quad (2)$$

$$\text{Από (1), (2)} \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

A.2. α. 4, β. 5, γ. 2

B.1. Γ

B.2. $z = 1 + i$ οπότε $\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta \mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } \varphi = \frac{\pi}{4}, \text{ συνεπώς } z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \eta \mu \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z^{16} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \eta \mu \frac{\pi}{4} \right) \right]^{16}$$

$$= (\sqrt{2})^{16} \left(\cos \frac{16\pi}{4} + i \eta \mu \frac{16\pi}{4} \right)$$

$$= 2^8 (\cos 4\pi + i \eta \mu 4\pi) = 2^8 (1 + 0i) = 256$$

ΘΕΜΑ 2ο

A.

α.

Για να ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$ θα πρέπει $\kappa + 2\lambda - 3 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = 4$

β.

Για να ορίζεται και το γινόμενο $B \cdot A$ θα πρέπει $3\kappa - \kappa^2 + 2 = \kappa^2 - 2\kappa - 1 \Leftrightarrow$

$$2\kappa^2 - 5\kappa - 3 = 0$$

$$\kappa = 3 \text{ ή } \kappa = \frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται}$$

Επομένως για να ορίζονται τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ θα πρέπει

$$\kappa = 3 \text{ και } \kappa + \lambda = 4 \Leftrightarrow \kappa = 3 \text{ και } \lambda = 1.$$

Τότε ο πίνακας A είναι διάστασης 2×2 και ο πίνακας B είναι διάστασης 2×2

B.**α.**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 0+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -I$$

β.

$$\begin{aligned} 2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} &= 2(A^2)^{1002} + (A^2)^{1000}A + (A^2)^{999}A \\ &= 2(-I)^{1002} + (-I)^{1000}A + (-I)^{999}A \\ &= 2I + IA + (-I)A = 2I + A - A = 2I \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3ο**α.**

Για να είναι η ευθεία $x = 4$ κατακόρυφη ασύμπτωτη θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - \alpha) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 2) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - \alpha = 0 \quad \text{και} \quad 6 \neq 0$$

Οπότε θα πρέπει $\alpha = 4$.

Τότε πράγματι για το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 4}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 2) = 6 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} (x - 4) = 0 \quad \text{με} \quad x - 4 > 0 \quad \text{για τιμές του } x \text{ κοντά στο } 4^+, \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty.$$

Επομένως η ευθεία $x = 4$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β.

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad f'(x) &= \frac{(2x-3)(x-\alpha) - (x^2-3x+2)}{(x-\alpha)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 2\alpha x - 3x + 3\alpha - x^2 + 3x - 2}{(x-\alpha)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2\alpha x + 3\alpha - 2}{(x-\alpha)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Είναι} \quad f(1) = 0, \quad f'(1) = \frac{\alpha - 1}{(1 - \alpha)^2} = \frac{1}{\alpha - 1}, \quad \alpha \neq 1$$

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1, 0)$ είναι η $y - 0 = \frac{1}{\alpha - 1}(x - 1) \Leftrightarrow$

$$y = \frac{1}{\alpha - 1}x - \frac{1}{\alpha - 1}$$

Για να διέρχεται η ευθεία αυτή από το $A(-2, 3)$ πρέπει και αρκεί

$$3 = \frac{1}{\alpha - 1}(-2) - \frac{1}{\alpha - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 3\alpha - 3 = -3 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0$$

γ.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι, αν $\alpha > 2$ υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αφού $\alpha > 2$, η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$,

παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$

και $f(1) = 0 = f(2)$

Άρα, με βάση το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

Αφού ο κάθε βαθμολογητής διορθώνει 100 γραπτά την ημέρα, οι x βαθμολογητές θα διορθώνουν $100x$ γραπτά την ημέρα.

Επειδή όμως το σύνολο των γραπτών είναι 2000, αφού τα 1000 γραπτά διορθώνονται από δύο καθηγητές, για την διόρθωση όλων των γραπτών θα απαιτηθούν

$$\frac{2000}{100x} = \frac{20}{x} \text{ ημέρες.}$$

Επομένως τα έξοδα της διόρθωσης επιμερίζονται όπως παρακάτω

- Αμοιβή για την διόρθωση 2000 γραπτών $= 2000 \cdot 200 = 400000$ δραχμές
- Έξτρα επίδομα καθηγητών $= 10000x$ δραχμές
- Αμοιβή εποπτών $= 2 \cdot \frac{20}{x} \cdot 4000 = \frac{160000}{x}$ δραχμές

Οπότε το κόστος της διόρθωσης είναι $K(x) = 400000 + 10000x + \frac{160000}{x}$ δραχμές

$$K(x) = 400 + 10x + \frac{160}{x} \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

β.

$$\text{Είναι } K'(x) = 10 \left(1 - \frac{16}{x^2} \right) = 10 \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ αφού } x > 0$$

$$K'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

$$K'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

Άρα η συνάρτηση K παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 4$

Επομένως το ελάχιστο κόστος προκύπτει όταν απασχοληθούν 4 καθηγητές

γ.

Το ελάχιστο κόστος είναι $K(4) = 480$ χιλιάδες δραχμές

Οι ημέρες απασχόλησης είναι $\frac{20}{4} = 5$