

ΛΥΣΕΙΣ
ΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ 2000
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A .

α. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

B₁. α. Λ , β. Σ , γ. Λ

B₂. Γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[-2, 1]$, $[3, 6]$
και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$z^2 + 2z + 2 = 0, \quad \Delta = -4 \quad \text{οπότε} \quad z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\text{Έστω } z_1 = -1 + i \text{ και } z_2 = -1 - i$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } z_1^{20} - z_2^{20} &= (-1 + i)^{20} - (-1 - i)^{20} \\ &= [(-1 + i)^2]^{10} - [(-1 - i)^2]^{10} \\ &= (1 - 2i - 1)^{10} - (1 + 2i - 1)^{10} \\ &= (-2i)^{10} - (2i)^{10} = (2i)^{10} - (2i)^{10} = 0 \end{aligned}$$

β.

$$\rho = |z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta \mu \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } \varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ οπότε } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \eta \mu \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{και } z_1^v &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \eta \mu \frac{3\pi}{4} \right) \right]^v \\ &= (\sqrt{2})^v \left(\cos \frac{3v\pi}{4} + i \eta \mu \frac{3v\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Για να είναι ο } z_1^v \text{ πραγματικός, πρέπει } \eta \mu \frac{3v\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\eta \mu \frac{3v\pi}{4} = \eta \mu 0$$

$$\frac{3v\pi}{4} = \lambda\pi$$

$$v = \frac{4\lambda}{3}, \text{ όπου } \lambda \text{ θετικός ακέραιος}$$

Είναι $\lambda = 3\kappa + v$ με $v = 0, 1, 2$ και κ θετικό ακέραιο

Όταν $v = 0$, τότε $\lambda = 3\kappa$ οπότε $v = \frac{4 \cdot 3\kappa}{3} = 4\kappa \in \mathbb{Z}$

Όταν $v = 1$, τότε $\lambda = 3\kappa + 1$ οπότε $v = \frac{4(3\kappa+1)}{3} = 4\kappa + \frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$

Όταν $v = 2$, τότε $\lambda = 3\kappa + 2$ οπότε $v = \frac{4(3\kappa+2)}{3} = 4\kappa + \frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$

Επομένως $v = 4\kappa$ με κ θετικό ακέραιο.

γ.

Η εικόνα της ρίζας z_1 είναι το σημείο $M(-1, 1)$ ενώ η εικόνα της z_2 είναι το σημείο $M'(-1, -1)$.

Επειδή τα σημεία M και M' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x , ο

ζητούμενος πίνακας είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Θέτω $\frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = g(x)$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$

Τότε $f(x) = g(x) \cdot \eta\mu 2x + e^{2x} - 1$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (g(x) \cdot \eta\mu 2x + e^{2x} - 1) = 5 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ θα ισχύει $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

β.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \eta\mu 2x + e^{2x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) \cdot \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) \cdot \frac{\eta\mu 2x}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) \cdot \frac{2\eta\mu 2x}{2x} \right) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(g(x) \cdot \frac{\eta\mu 2x}{2x} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu 2x}{2x} \right) = 2 \cdot 5 \cdot 1 = 10$$

και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{x} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$

Η (1) γίνεται $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 10 + 2 = 12$

Επομένως η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ και μάλιστα ισχύει $f'(0) = 12$

γ.

Επειδή $h(0) = e^0 f(0) = 0$, έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} f(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-x} \frac{f(x)}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \cdot 12 = 12$$

Δηλαδή $h'(0) = 12$

Αφού λοιπόν $h'(0) = 12 = f'(0)$, οι εφαπτομένες στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 4ο

$$P(t) = 4 + \frac{t - 6}{t^2 + \frac{25}{4}}, \quad t \geq 0$$

α.

$$P(0) = 4 + \frac{-6}{\frac{25}{4}} = 4 - \frac{24}{25} = \frac{76}{25} = 3,04 \text{ χιλιάδες δραχμές}$$

β.

$$P'(t) = \frac{(t-6)' \left(t^2 + \frac{25}{4} \right) - (t-6) \left(t^2 + \frac{25}{4} \right)'}{\left(t^2 + \frac{25}{4} \right)^2}$$

$$= \frac{t^2 + \frac{25}{4} - 2t(t-6)}{\left(t^2 + \frac{25}{4} \right)^2} = \frac{-t^2 + 12t + \frac{25}{4}}{\left(t^2 + \frac{25}{4} \right)^2}, \quad t \geq 0$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 12t + \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25}{2} = 12,5 \quad \text{ή} \quad t = -\frac{1}{2} \text{ απορρίπτεται}$$

Πρόσημο της P' και μονοτονία της P

t	0	12,5	$+\infty$
P'	+	0	-
P			

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η τιμή του προϊόντος αυξάνεται συνεχώς από την στιγμή εισαγωγής του στην αγορά έως και τους 12,5 μήνες

γ.

Η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη όταν $t = 12,5$ μήνες

δ.

Η συνάρτηση $P(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[12,5, +\infty)$ επομένως η τιμή του προϊόντος μετά τους 12,5 μήνες συνεχώς μειώνεται.

$$\begin{aligned} \text{Όμως} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} \right) = 4 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}} \right) \\ &= 4 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t^2} \right) \\ &= 4 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 4 + 0 = 4 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του προϊόντος πάντοτε θα είναι μεγαλύτερη από τις 4 χιλιάδες, όπου $4 > 3,04$ δηλαδή η τιμή του προϊόντος θα είναι πάντα μεγαλύτερη από την τιμή εισαγωγής του στην αγορά