

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΛΥΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Εστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

A.2. α. $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$

β. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

γ. $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$

B.1. $f''(x) = 6x + 4 = (3x^2 + 4x)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$

Επειδή η C_f έχει στο $A(0,3)$ κλίση 2, είναι $f'(0) = 2$, άρα $c_1 = 2$ και

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + c, c \in \mathbb{R}.$

Είναι $f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 3$, άρα $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}.$

B.2. α. $\int_0^1 (e^x + x) dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}$

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{3x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx = 3 \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx = 3 \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{6}{5} \left[\sqrt{x^5} \right]_1^4 =$

$\frac{6}{5} \left[x^2 \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{6}{5} (32 - 1) = \frac{183}{5}$

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta \mu x + 3\sigma \upsilon \nu x) dx = \left[-2\sigma \upsilon \nu x + 3\eta \mu x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 + 2 = 5$

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z + 16| = 4|z + 1| \Leftrightarrow |z + 16|^2 = 16|z + 1|^2 \Leftrightarrow (z + 16)(\bar{z} + 16) = 16(z + 1)(\bar{z} + 1) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 16 \Leftrightarrow 15|z|^2 = 240 \Leftrightarrow |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο O και

ακτίνα 4.

β. Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$$|z-1| = |z-i| \Leftrightarrow |(x-1) + yi| = |x + (y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow y = x.$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι η ευθεία $y = x$.

γ. Οι μιγαδικοί z που επαληθεύουν συγχρόνως τους δύο προηγούμενους γεωμετρικούς τόπους, αποτελούν λύση του συστήματος των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 16 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = x \end{cases}.$$

$$\text{Άρα } z_1 = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} \text{ και } z_2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}.$$

$$\text{Είναι } z_1 = 2\sqrt{2}(1+i) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ και } z_2 = 2\sqrt{2}(-1-i) = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

ΘΕΜΑ 3ο

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)'}{\left(\frac{0}{0}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{-x+1}}{1} = 1.$$

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \alpha$, $f(1) = 1 + \alpha$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1 - e^{-x+1}}{x-1} \cdot (x-1) \cdot \ln(x-1) \right]. \text{ Όμως}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \cdot \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x+1) = 0.$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ άρα

$$\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

$$\gamma. \text{ Για } \alpha = -1 \text{ η } f \text{ γίνεται : } f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1), & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f'(x) = e^{-x+1} \cdot \ln(x-1) + \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1}$.

Επίσης $f(1) = 0$ και $f(2) = (1 - e^{-1}) \cdot \ln 1 = 0$, δηλαδή $f(1) = f(2)$.

Άρα λόγω του Θ. Rolle υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε : $f'(\xi) = 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2} dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \int_1^x tf(t) dt, \quad x > 0.$

Επειδή η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, η οποία συνάρτηση $\int_1^x tf(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \int_1^x tf(t) dt$ (1) είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

β. Από την (1) έχουμε $x^2 f(x) = x + \int_1^x tf(t) dt$ παραγωγίζοντας είναι :

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \Leftrightarrow$$

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow (xf'(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c \quad (2).$$

Παρατηρούμε ότι $f(1) = \frac{1}{1} + \int_1^1 \frac{tf(t)}{1} dt = 1$ οπότε από την (2) έχουμε : $f(1) = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = 1$,

$$\text{άρα } xf(x) = \ln x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \text{ για } x > 0.$$

γ. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)'x - (x)'(1 + \ln x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-\ln x}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow -\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [1, +\infty)$.

$$\text{Είναι } f(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (1 + \ln x) \right] = -\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, 1]$ άρα $f(A_1) = (-\infty, 1]$

και γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A_2) = (0, 1]$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$.

δ. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ (άξονας $y'y$), και επειδή

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=0$ (άξονας $x'x$).

ε. Παρατηρούμε ότι $f(x) > 0$ στο $[1, e]$ γιατί το σύνολο τιμών στο $[1, +\infty)$ είναι $f(A_2) = (0, 1]$ οπότε

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[\ln|x| \right]_1^e + \int_1^e (\ln x)' \ln x dx = (\ln e - \ln 1) + \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_1^e = \\
 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ r.μ.}
 \end{aligned}$$

askisopolis