

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

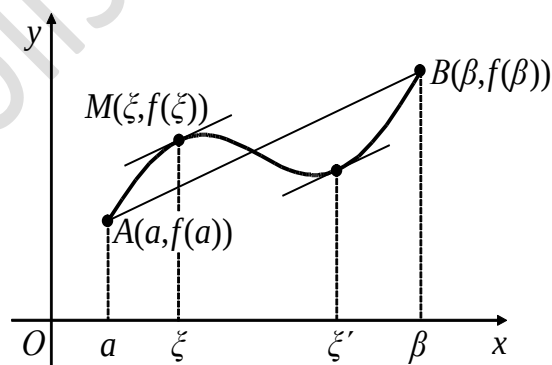
Β. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Γ. α. Σ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ

ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $w = 3z - i\bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$
 Οπότε $\text{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4$, $\text{Im}(w) = 3\beta - \alpha$.

Β. Οι εικόνες M του w έχουν συντεταγμένες $(3\alpha - \beta + 4, 3\beta - \alpha)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Επειδή κινούνται στην ευθεία $y = x - 12$, ισχύει:

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow 4\beta = 4\alpha - 8 \Leftrightarrow \beta = \alpha - 2$$

Αν $N(\alpha, \beta)$ οι εικόνες του μιγαδικού z , τότε οι συντεταγμένες του N επαληθεύουν την εξίσωση $y = x - 2$.

Οπότε οι εικόνες N των μιγαδικών z κινούνται στην ευθεία $\epsilon: y = x - 2$.

γ. Η ευθεία ϵ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(2, 0)$ και $B(0, -2)$ αντίστοιχα.

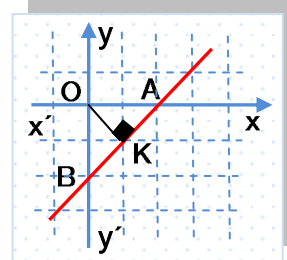
Επειδή $(OA) = (OB) = 2$, το τρίγωνο OAB είναι

ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε το ύψος του OK είναι

και διάμεσος. Άρα το K είναι μέσο του AB και έχει συντεταγμένες (1,1), γιατί :

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \text{ και } y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = -1.$$

Επειδή η εικόνα N του μιγαδικού z κινείται επί της ε, και το πιο κοντινό σημείο της ε στην αρχή των αξόνων είναι το K(1,-1), ο μιγαδικός z που έχει το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το K, οπότε $z = 1 - i$.



ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 οπότε ορίζεται η αντίστροφή της.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x \cdot (10x^2 + 3)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ και f κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$ και f κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Για κάθε $x < 0$ είναι $g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$$

Η g έχει ολικό ελάχιστο το $g(0) = 0$. Άρα $g(x) \geq g(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Δηλαδή } e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1 \xrightarrow{f^{-1}} f(e^x) \geq f(x + 1).$$

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (0,0) είναι :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x \text{ η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας των } C_f \text{ και } C_{f^{-1}}.$$

$$\delta. f^{-1}(x) \geq 0 \xrightarrow{f^{-1}} f(f^{-1}(x)) \geq f(0) \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : } E = \int_0^3 f^{-1}(x) dx.$$

Θέτουμε $f^{-1}(x) = u$, τότε $x = f(u)$ και $dx = f'(u)du$.

Για $x=0$ είναι $f(u) = 0 = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ και για $x=3$ είναι $f(u) = 3 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$.

$$E = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - \int_0^1 (u^5 + u^3 + u) du \Leftrightarrow$$

$$E = 3 - \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = 3 - \frac{11}{12} = \frac{25}{12}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν $\gamma = \delta$ τότε από τη σχέση $f(\gamma)f(\delta) < 0$ έχουμε $f^2(\gamma) < 0$ που είναι αδύνατο.

Άρα $\gamma \neq \delta$. Έστω $\gamma < \delta$.

Η συνάρτηση f είναι στο $[\gamma, \delta]$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ άρα λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (\gamma, \delta) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0) = 0$.

β) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\alpha, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, \beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0 = f'(x_2)$ (1).

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha, \gamma]$ υπάρχει $x_3 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_3) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha}.$$

Επειδή $f(\gamma)f(\delta) < 0$ οι τιμές $f(\gamma)$, $f(\delta)$ είναι ετερόσημες. Έστω $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$ τότε

$f'(x_3) < 0$. Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\gamma, x_0]$ υπάρχει $x_4 \in (\gamma, x_0)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_4) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{x_0 - \gamma} > 0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0, \delta]$ υπάρχει $x_5 \in (x_0, \delta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_5) = \frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} = \frac{f(\delta)}{\delta - x_0} > 0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\delta, \beta]$ υπάρχει $x_6 \in (\delta, \beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_6) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta} < 0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_3, x_4]$ υπάρχει $\xi_2 \in (x_3, x_4)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_4) - f'(x_3)}{x_4 - x_3} > 0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_5, x_6]$ υπάρχει $\xi_1 \in (x_5, x_6)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(x_6) - f'(x_5)}{x_6 - x_5} < 0.$$

γ) Επειδή $f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) < 0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, λόγω του Θ.

Bolzano υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi) = 0$. Επομένως η f έχει

τουλάχιστον ένα **πιθανό** σημείο καμπής.