

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

A.2 Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

B. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ στ. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α) $|z_1| = 3 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 3^2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 9 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$ και όμοια $\bar{z}_2 = \frac{9}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \frac{9}{z_3}$.

β) $\bar{w} = \frac{\bar{z}_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_2}{z_1} = \frac{\frac{9}{z_2}}{z_1} + \frac{\frac{9}{z_1}}{z_2} = \frac{9z_2}{z_1 z_2} + \frac{9z_1}{z_1 z_2} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$

γ) $|z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = \left| 9 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) \right| \Leftrightarrow$
 $|z_1 + z_2 + z_3| = 9 \left| \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} \right| = 9 \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} \Leftrightarrow$
 $|z_1 + z_2 + z_3| = \frac{9 |z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} \cdot |z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$. Είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β. Εστω $M(x_0, f(x_0))$. Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι η ευθεία ε με εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (x - x_0)$$

Επειδή η e διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ισχύει ότι:

$$-e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (-x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda x_0 e^{\lambda x_0} \Leftrightarrow \lambda x_0 e^{\lambda x_0} - e^{\lambda x_0} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x_0} (\lambda x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda} \text{ ή } e^{\lambda x_0} = 0 \text{ που είναι αδύνατο.}$$

Για $x_0 = \frac{1}{\lambda}$ είναι $f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e$, το σημείο M έχει συντεταγμένες $\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$ και η e έχει εξίσωση:

$$y - e = \lambda e \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) \Leftrightarrow y - e = \lambda ex - \cancel{\lambda} e \frac{1}{\cancel{\lambda}} \Leftrightarrow y - e = \lambda ex - e \Leftrightarrow y = \lambda ex$$

γ. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε

βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός από το σημείο επαφής. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda ex) dx = \left[\frac{e^{\lambda x}}{\lambda} - \lambda e \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} = \frac{e}{\lambda} - \frac{\cancel{\lambda} e}{2} \frac{1}{\cancel{\lambda}^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e}{\lambda} - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{e-2}{\lambda}$$

$$\delta. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{\cancel{\lambda}}}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e-2}{\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}} = +\infty \text{ γιατί } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda} = 0, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} = 0 \text{ αφού}$$

$$\left| \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \right| = \frac{|\eta \mu \lambda|}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}, \text{ είναι } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} \right) = 0, \text{ οπότε από Κ.Π είναι}$$

$$\text{και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} = 0. \text{ Επιπλέον } 2 + \eta \mu \lambda > 0 \text{ για κάθε } \lambda > 0.$$

ΘΕΜΑ 4ο

$$\alpha. 2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) e^{f(x)} = \frac{1}{2} e^x \Leftrightarrow (e^{f(x)})' = \left(\frac{1}{2} e^x \right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{1}{2} e^x + c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (1).$$

$$\text{Για } x=0 \text{ η (1) γίνεται: } e^{f(0)} = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}, \text{ άρα}$$

$$e^{f(x)} = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln \left(\frac{e^x + 1}{2} \right)$$

β. Θέτουμε $x-t=u \Leftrightarrow x=u+t$ και $dt=-du$. Για $t=0$ είναι $u=x$ και για $t=x$ είναι $u=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t) dt}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\int_x^0 f(u) du}{\eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta \mu x}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $\int_0^x f(u) du$ είναι παραγωγίσιμη και επειδή το $\eta \mu x$ είναι

$$\text{παραγωγίσιμη συνάρτηση, έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{\eta \mu x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma \nu \nu x} = \frac{f(0)}{1} = 0.$$

γ. Εστω

$$\varphi(x) = h(x) - g(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt - \frac{x^{2007}}{2007} = \int_0^x t^{2005} f(t) dt - \int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt - \frac{x^{2007}}{2007}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση $t^{2005} f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων,

οι $\int_0^x t^{2005} f(t) dt$, $\int_0^{-x} t^{2005} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμες και επειδή η $\frac{x^{2007}}{2007}$ είναι

παραγωγίσιμη, η φ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = x^{2005} f(x) - x^{2005} f(-x) - x^{2006} = x^{2005} \left[\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) \right] - x^{2006} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = x^{2005} \ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{1+\frac{1}{e^x}}{2}}\right) - x^{2006} = x^{2005} \ln\left(\frac{\frac{1+e^x}{2}}{\frac{e^x+1}{2}}\right) - x^{2006} = x^{2005} \ln\left(\frac{\cancel{1+e^x}}{\cancel{e^x+1}}\right) - x^{2006} \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) = x^{2005} \ln e^x - x^{2006} = x^{2005} \cdot x - x^{2006} = x^{2006} - x^{2006} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Είναι $\varphi(0) = 0$ άρα $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Εστω $\sigma(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt - \frac{1}{2008} = \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008}, \quad x \in [0, 1].$

Είναι $\sigma(0) = -\frac{1}{2008} < 0$, $\sigma(1) = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0$, δηλαδή $\sigma(0)\sigma(1) < 0$ και επειδή η σ

είναι συνεχής στο $[0, 1]$, λόγω του Θ. Bolzano, υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $\sigma(\rho) = 0$

Η σ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $\sigma'(x) = x^{2006} > 0 \quad \forall x \in (0, 1) \Rightarrow \sigma \nearrow [0, 1]$, άρα το ρ

είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\sigma(x) = 0$.