

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή. } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

A.2 Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

B. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Σ στ. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

$$\alpha. \begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + 4i & (1) \\ 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \overline{4 + 4i} \\ 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 4 - 4i \\ 2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + 5i \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 4 - 4i \\ 2z_1 + \bar{z}_1 = 9 + i \end{cases}$$

Αν $z_1 = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, η τελευταία σχέση γίνεται:

$$2x + 2yi + x - yi = 9 + i \Leftrightarrow 3x + yi = 9 + i \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ και } y = 1, \text{ άρα } z_1 = 3 + i \text{ και}$$

από τη σχέση (1) έχουμε: $3 + i + z_2 = 4 + 4i \Leftrightarrow z_2 = 1 + 3i$.

β.ι. Επειδή $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ η εικόνα του M του z βρίσκεται σε κυκλικό δίσκο με κέντρο

$K(1, 3)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$. Επειδή $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$, η

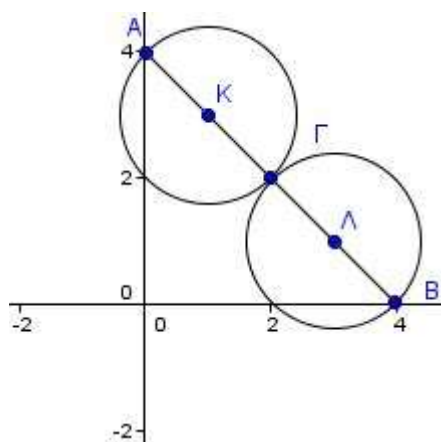
εικόνα N του w βρίσκεται σε

κύκλικό δίσκο με κέντρο $\Lambda(3, 1)$ και $\rho_2 = \sqrt{2}$.

$$\text{Είναι } (K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = \rho_1 + \rho_2,$$

άρα οι δύο κυκλικοί δίσκοι εφάπτονται εξωτερικά, οπότε υπάρχουν μοναδικοί z, w για τους οποίους ισχύει ότι $z = w$.

ii. $|z - w|_{\max} = (AB) = 2\rho_1 + 2\rho_2 = 4\sqrt{2}$



ΘΕΜΑ 3ο

α. Εστω ότι η f δεν είναι 1-1. Τότε θα υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$.

Τότε όμως θα ισχύει το θεώρημα Rolle, οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα, το οποίο είναι άτοπο. Άρα η f είναι 1-1.

$$\begin{aligned} \beta. f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2 &\Leftrightarrow f(f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8))) = f(-2) \Leftrightarrow \\ -2004 + f(x^2 - 8) &= 1 \Leftrightarrow f(x^2 - 8) = 2005 = f(1) \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \end{aligned}$$

γ) Αρκεί να υπάρχει x_0 τέτοιο, ώστε $f'(x_0)_{\lambda_e} = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) \left(-\frac{1}{668} \right) = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = 668$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 1)$, λόγω του Θ.Μ.Τ

$$\text{υπάρχει } x_0 \in (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(x_0) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \frac{2005 - 1}{3} = 668$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Εστω $\frac{f(x) - x}{x^2} = g(x)$, $x \neq 0$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2005$. Τότε

$$f(x) - x = x^2 g(x) \Leftrightarrow f(x) = x^2 g(x) + x.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, άρα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 g(x) + x) = 0$$

$$\text{ii. } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 g(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x) + 1) = 1 \text{ άρα } f'(0) = 1.$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda f^2(x)}{2x^2 + f^2(x)} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \lambda \frac{f^2(x)}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{f^2(x)}{x^2}} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \lambda \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2}{2 + \left(\frac{f(x)}{x} \right)^2} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 + \lambda [f'(0)]^2}{2 + [f'(0)]^2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1 + \lambda}{3} = 3 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 9 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

γ. i. Εστω $g(x) = e^{-x} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) > 0 \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$$

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ είναι } g(x) > g(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \xRightarrow{x > 0} x f(x) > 0.$$

$$\text{Για κάθε } x < 0 \text{ είναι } g(x) < g(0) \Leftrightarrow e^{-x} f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \xRightarrow{x < 0} x f(x) > 0.$$

Άρα $x f(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Επειδή οι συναρτήσεις f', f είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, ισχύει ότι:

$$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x) - f(x)) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx < [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = f(1)$$

askisopolis