

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Εστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

A2. Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .

B. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2)$.

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 2$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οπότε είναι και 1-1 και αντιστρέφεται.

β. $f(x) = y \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 = y-2$ (1)

Πρέπει $y-2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2$, τότε η (1) γίνεται: $x-2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} + 2$, άρα

$f^{-1}(y) = \sqrt{y-2} + 2$, $y \geq 2$, οπότε και $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2$, $x \geq 2$.

γ. i. Για τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ έχουμε:

$$f(x) = x \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = x \Leftrightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ είναι τα $A(2,2)$ και $B(3,3)$.

Για τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ και $y = x$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x-2 \Leftrightarrow x-2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3. \text{ Άρα τα } A, B \text{ είναι κοινά σημεία και των } C_{f^{-1}} \text{ και } y = x.$$

ii. Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ τέμνονται στα σημεία Α και Β, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_2^3 |f(x) - f^{-1}(x)| dx.$$

Για να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $f(x) - f^{-1}(x)$, θα βρούμε τη σχετική θέση της C_f και της ευθείας $y = x$.

$$f(x) > x \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 > x \Leftrightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 - x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ή } x > 3.$$

Δηλαδή για κάθε $x \in (2, 3)$ η C_f βρίσκεται κάτω από τη $y = x$. Όμως οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη $y = x$, οπότε η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από τη $y = x$, οπότε $f^{-1}(x) > f(x) \Leftrightarrow f(x) - f^{-1}(x) < 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_2^3 (f^{-1}(x) - f(x)) dx = \int_2^3 [\sqrt{x-2} + \cancel{x} - \cancel{x} - (x-2)^2] dx = \int_2^3 [(x-2)^{\frac{1}{2}} - (x-2)^2] dx \Leftrightarrow$$

$$E = \left[\frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-2)^3}{3} \right]_2^3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 3ο

a.i. $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = 1 \Leftrightarrow$

$$|z_1 + z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 = -1.$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - (z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3}.$$

$$\text{Όμοια } |z_2 - z_3| = \sqrt{3} \text{ και } |z_3 - z_1| = \sqrt{3}.$$

ii. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq 4 \text{ και}$

$$|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

β. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

Εστω Α, Β, Γ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα.

Είναι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow |\overline{AB}| = |\overline{BG}| = |\overline{AG}|$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Πρέπει $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$, άρα $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A με $f'(x) = -\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} < 0$.

Είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (0,1)$ και $\searrow (1,+\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Στο διάστημα $A_1 = (0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \mathbb{R}$

Στο διάστημα $A_2 = (1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα

$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$. Είναι $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = \mathbb{R}$

β) Επειδή $0 \in f(A_1) = \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $x_1 \in A_1 = (0,1) : f(x_1) = 0$.

Επειδή $0 \in f(A_2) = \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $x_2 \in A_2 = (1,+\infty) : f(x_2) = 0$.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

γ) Η εφαπτομένη της C_g στο A είναι η ευθεία $\varepsilon_1 : y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x + \ln \alpha - 1$,

και της C_h στο B η ευθεία $\varepsilon_2 : y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x + e^\beta(1 - \beta)$.

Επειδή οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται, είναι:

$$\begin{cases} e^\beta = \frac{1}{\alpha} \\ \ln \alpha - 1 = e^\beta(1 - \beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ \ln \alpha - 1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \ln \alpha) \end{cases} \Rightarrow \alpha \ln \alpha - \alpha = 1 + \ln \alpha \Leftrightarrow (\alpha - 1) \ln \alpha = \alpha + 1 \quad (1).$$

Αν $\alpha = 1$, τότε η (1) είναι αδύνατη. Για $\alpha \neq 1$ έχουμε: $\ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

δ) Επειδή η $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες, υπάρχουν 2 τιμές του α για τις οποίες οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη.