

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} \\ &= \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}. \end{aligned}$$

Επειδή $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0$, έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x, \text{ άρα } (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x.$$

A.2. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

B. α. Σ

β. Λ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^{x+1}) - (1+e^x)e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x + e^{2x+1} - e^{x+1} - e^{2x+1}}{(1+e^{x+1})^2} = \frac{e^x(1-e)}{(1+e^{x+1})^2}$$

Είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow \mathbb{R}$.

β. Εστω $e^x = u > 0$, τότε $x = \ln u$ και $dx = \frac{1}{u} du$.

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x} dx = \int \frac{1+eu}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \frac{1+eu}{u(u+1)} du$$

$$\frac{1+eu}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} = \frac{Au + A + Bu}{u(u+1)} = \frac{(A+B)u + A}{u(u+1)}. \text{ Είναι } \begin{cases} A+B=e \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=e-1 \\ A=1 \end{cases}, \text{ άρα}$$

$$\int \frac{1+eu}{u(u+1)} du = \int \frac{1}{u} du + \int \frac{e-1}{u+1} du = \ln u + (e-1)\ln(u+1) + c, c \in \mathbb{R}$$

γ) Εστω $g(t) = t^x$, $t > 0, x < 0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(t) = xt^{x-1} < 0 \Rightarrow g \searrow (0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } 5 < 6 \xRightarrow{g \searrow} g(5) > g(6) \Leftrightarrow 5^x > 6^x \xRightarrow{f \searrow} f(5^x) < f(6^x) \text{ (1) και}$$

$$7 < 8 \Rightarrow g(7) > g(8) \Leftrightarrow 7^x > 8^x \Rightarrow f(7^x) < f(8^x) \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Εστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$(4-z)^{10} = z^{10} \Rightarrow |(4-z)^{10}| = |z^{10}| \Leftrightarrow |4-z|^{10} = |z|^{10} \Leftrightarrow |4-z| = |z| \Leftrightarrow$$

$$|4-x-yi| = |x+yi| \Leftrightarrow \sqrt{(4-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Επειδή $x = 2$ οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία $x = 2$.

β. i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + 1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(2, f(2))$ είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - (6 + \alpha) = 5(x - 2) \Leftrightarrow y = 5x - 4 + \alpha$$

Για $x = 0$ είναι $y = -4 + \alpha$, δηλαδή η ε τέμνει τον y στο $y_0 = \alpha - 4$. Άρα

$$\alpha - 4 = -3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ και η } \varepsilon \text{ έχει εξίσωση: } y = 5x - 4 + 1 \Leftrightarrow y = 5x - 3$$

ii. Αρχικά διαπιστώνουμε ότι περιοχή που να

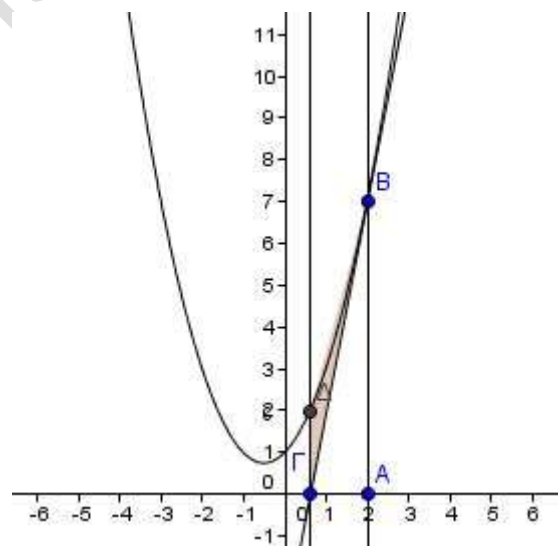
σχηματίζεται από τις C_f , $x = \frac{3}{5}$, ε , x δεν υπάρχει.

Ετσι θα αφαιρέσουμε από την εκφώνηση τον x .

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_{\frac{3}{5}}^2 (f(x) - (5x - 3)) dx = \int_{\frac{3}{5}}^2 (x^2 + x + 1 - 5x + 3) dx \Leftrightarrow$$

$$E = \int_{\frac{3}{5}}^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_{\frac{3}{5}}^2 (x - 2)^2 dx = \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_{\frac{3}{5}}^2 = \frac{343}{375}$$



ΘΕΜΑ 4ο

α. i. Εστω $g(t) = \ln t$, $t \in [x, x+1]$, $x > 0$.

Η g είναι συνεχής στο $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ με $g'(t) = \frac{1}{t}$.

Από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(x+1) - g(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x.$$

$$\text{Είναι } x < \xi < x+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} - \ln x - \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x^2 - (x+1)^2}{x(x+1)} < \frac{1}{x} - \frac{2x+1}{x(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) < \frac{x+1-2x-1}{x(x+1)} = \frac{-x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow f \searrow (0, +\infty).$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+u} = 1$$

$$\gamma. (\alpha+1)^\alpha = \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \ln(\alpha+1)^\alpha = \ln \alpha^{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha \ln(\alpha+1) - (\alpha+1) \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x+1) - (x+1) \ln x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - (x+1) \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln x - \ln x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(\ln(x+1) - \ln x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{x+1}{x} - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \ln x \right) = -\infty$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, +\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = \mathbb{R}.$$

Επειδή $0 \in f(A)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = 0$.