

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \Leftrightarrow$
 $z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$ ισχύει

A2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

A3. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

B. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2°

α. Είναι $|z| = \left| \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i} \right| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β. Για $\alpha = 0$, είναι $z_1 = \frac{2+0 \cdot i}{0+2i} = \frac{2}{2i} = \frac{i}{i^2} = -i$ και για $\alpha = 2$ είναι $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$.

i. Η απόσταση των εικόνων των z_1, z_2 είναι $|z_1 - z_2| = |-1-i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

ii. Είναι $(z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = [(-i)^2]^v = (-1)^v = (-z_2)^v$.

ΘΕΜΑ 3°

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ή } x \geq 1$$

Για κάθε $x < -1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\infty, -1]$,

για κάθε $x \in (-1, 1)$ είναι $f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow [-1, 1]$ και

για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [1, +\infty)$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	-	+	
f				

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$ το $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$ το $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) < 0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, ενώ για κάθε

$x > 0$ είναι $f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0)) \equiv (0, -2\eta\mu^2\theta)$.

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Επειδή $2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ για κάθε $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, το μηδέν ανήκει στο $f(\Delta_1)$, οπότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1 , το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, 1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα:

$f(\Delta_2) = [f(1), f(-1)] = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Επειδή $0 \in f(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_3 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα:

$f(\Delta_3) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$.

Επειδή $0 \in f(\Delta_3)$, υπάρχει $x_3 \in \Delta_3$ τέτοιο, ώστε $f(x_3) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3 , το x_3 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$ στο διάστημα αυτό. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ) Είναι $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$.

$$\text{Επειδή } \begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \\ -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \\ -2\eta\mu^2\theta = -2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu^2\theta = 2 \\ -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \\ -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \end{cases}, \text{ οι συντεταγμένες}$$

των A, B, Γ επαληθεύουν την εξίσωση $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$, άρα τα σημεία αυτά βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

δ. Εστω $g(x) = f(x) - (-2x - 2\eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow$

$$g(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ το ζητούμενο

εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 |g(x)| dx = \int_{-1}^0 g(x) dx - \int_0^1 g(x) dx = \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx \Leftrightarrow$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g(x)		-	+	-	+

$$E(\Omega) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(x) = \left(\int_0^x f(t)g(t)dt \right)' = f(x)g(x)$$

Για κάθε $0 < x < 1 \Rightarrow f(0) < f(x) \Leftrightarrow f(x) > 0 \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} g(x)f(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow [0, 1]$.

Για κάθε $0 < x \leq 1$ είναι $F(x) > F(0) = 0$

$$\beta. f(x)G(x) > F(x) \Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t)dt > \int_0^x f(t)g(t)dt \Leftrightarrow \int_0^x f(x)g(t)dt - \int_0^x f(t)g(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x g(t)(f(x) - f(t))dt > 0.$$

Είναι $g(t) > 0$ για κάθε $t \in [0, x]$, $x \in (0, 1]$.

Για κάθε $0 \leq t \leq x \Rightarrow f(t) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(t) \geq 0 \Leftrightarrow g(t)(f(x) - f(t)) \geq 0$.

Επειδή η ισότητα στη προηγούμενη σχέση ισχύει μόνο για $t = x$, είναι

$$\int_0^x g(t)(f(x) - f(t))dt > 0$$

γ. Εστω $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$, $x \in (0, 1]$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1]$ με

$$h'(x) = \frac{F'(x)G(x) - G'(x)F(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - g(x)F(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)(f(x)G(x) - F(x))}{G^2(x)}$$

Επειδή $g(x) > 0$, $G^2(x) > 0$ και $f(x)G(x) - F(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$, είναι

$$h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (0, 1]$$

Για κάθε $0 < x \leq 1$ είναι $h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \eta \mu x^4}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{5} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} = 0 \cdot 1 = 0, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt \right) \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t)dt \right) x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \right) = 0 \cdot f(0) = 0$$