

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

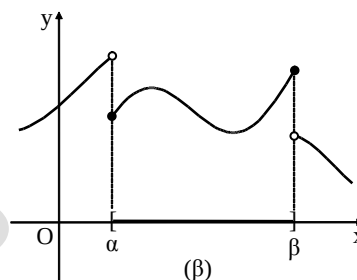
A.1. Αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

Αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε

$y = \ln u$. Επομένως $y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

A.2. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$$



B. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α. $|(i + 2\sqrt{2})z| = 6 \Leftrightarrow |i + 2\sqrt{2}||z| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2}|z| = 6 \Leftrightarrow 3|z| = 6 \Leftrightarrow |z| = 2$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας 2.

β. Αν $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$|w - (1 - i)| = |w - (3 - 3i)| \Leftrightarrow$$

$$|x + yi - 1 + i| = |x + yi - 3 + 3i| \Leftrightarrow$$

$$|(x - 1) + (y + 1)i| = |(x - 3) + (y + 3)i| \Leftrightarrow$$

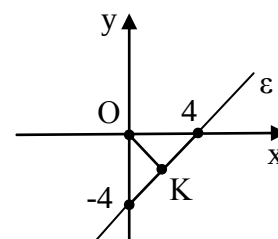
$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \Leftrightarrow$$

$$y = x - 4.$$

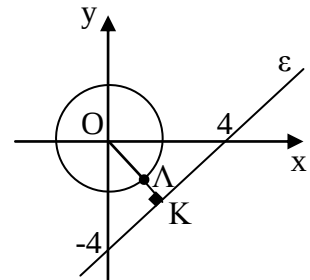
Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x - 4$.

γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση $d(O, \varepsilon)$ του O από την ευθεία $\varepsilon: y = x - 4 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0$. Είναι:



$$|w|_{\min} = d(O, \varepsilon) = \frac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

δ. Η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι η ελάχιστη απόσταση των σημείων του κύκλου από την ευθεία ε . Η απόσταση αυτή είναι η ΚΛ. Έχουμε $|z - w|_{\min} = (ΚΛ) = d(O, \varepsilon) - \rho = 2\sqrt{2} - 2$



ΘΕΜΑ 3^ο

α. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, η f είναι συνεχής στο 0.

β. Είναι $f'(x) = \ln x + 1$ και $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$, είναι $f'(x) < 0$ άρα η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{e}\right]$.

Αν $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ είναι $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$ και $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.$

Για το διάστημα $\Delta_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$, το σύνολο τιμών είναι:

$$f(\Delta_1) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \text{ και}$$

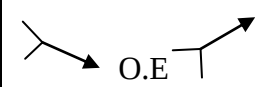
για το διάστημα $\Delta_2 = \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$, το σύνολο τιμών είναι:

$$f(\Delta_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο:

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

γ. Για $x > 0$ είναι: $x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \ln x = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha.$

x	0	1/e	+
f'	-	+	
f			

- Αν $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)$, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

- Αν $\alpha = -\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα την $x = \frac{1}{e}$.

- Αν $\alpha \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, τότε υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ και $x_2 \in \Delta_2$, τέτοια, ώστε $f(x_1) = 0$ και $f(x_2) = 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 τα x_1, x_2 είναι οι μοναδικές λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα την $x = 1$.

- Αν $\alpha \in (0, +\infty)$, τότε υπάρχει $\rho \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = \alpha$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , το ρ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

δ. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x, x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$, λόγω του Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} = f(x+1) - f(x).$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Είναι $f''(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επειδή $x < \xi < x+1$, είναι $f'(x) < f'(\xi) < f'(x+1)$ ή $f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Έστω $\int_0^2 f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$ (1). Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)\lambda - 45 = 10\lambda x^3 + 3\lambda x - 45$ (2).

Η σχέση (1) γίνεται: $\int_0^2 (10\lambda t^3 + 3\lambda t - 45) dt = \lambda \Leftrightarrow$

$$10\lambda \int_0^2 t^3 dt + 3\lambda \int_0^2 t dt - 45 \int_0^2 dt = \lambda \Leftrightarrow$$

$$10\lambda \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 + 3\lambda \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^2 - 45(2-0) = \lambda \Leftrightarrow$$

$$40\lambda + 6\lambda - 90 = \lambda \Leftrightarrow$$

$$\lambda = 2.$$

Από τη σχέση (2), προκύπτει ότι: $f(x) = 20x^3 + 6x - 45, x \in \mathbb{R}$.

β. Επειδή η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x)}{h}$.

$$\text{Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \stackrel{-h=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x+u)}{-u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{γ.ι. Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} &\stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{2h} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x+h) - g'(x) + g'(x) - g'(x-h)}{h} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} (g''(x) + g''(x)) = g''(x).
 \end{aligned}$$

Η σχέση $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$, γίνεται:

$$g''(x) = f(x) + 45 = 20x^3 + 6x \Leftrightarrow (g'(x))' = (5x^4 + 3x^2)' \Leftrightarrow g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } g'(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τότε } g'(x) = (x^5 + x^3 + x)' \Leftrightarrow g(x) = x^5 + x^3 + x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Όμως } g(0) = 1 \Leftrightarrow c_1 = 1, \text{ άρα } g(x) = x^5 + x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και 1-1.

Στέλιος Μιχαήλογλου