

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

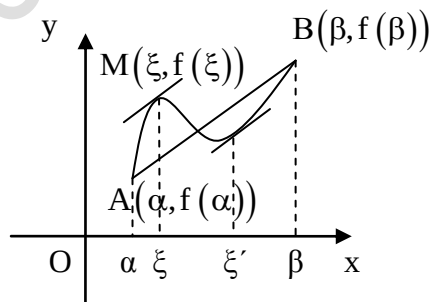
$$G(x) = F(x) + c \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε
 $c = G(\alpha)$. Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

B. Γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης τιμής σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



Γ. α. Σ β. Λ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Επειδή ο z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης, ισχύει:

$$z_1^2 + \beta z_1 + \gamma = 0 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \beta \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2}i + \gamma = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\beta + 1)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} + \gamma - \frac{1}{2} = 0 \\ \beta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

β. Για $\beta = -1$ και $\gamma = 1$ η σχέση (1) γίνεται: $z_1^2 - z_1 + 1 = 0$.

$$\text{Είναι } z_1^3 + 1 = (z_1 + 1)(z_1^2 - z_1 + 1) = (z_1 + 1) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow z_1^3 = -1$$

γ. Είναι $|w| = |z_1 - \bar{z}_1| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού w είναι κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{3}$.

ΘΕΜΑ 3^ο

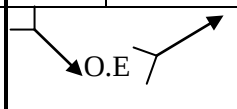
α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1, \text{ άρα } x = 1.$$

Αν $x \in (0, 1)$ είναι $f'(x) < 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Αν $x \in (1, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1^2 - 2\ln 1 = 1$, άρα $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

x	0	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

β. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2\ln x) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, άρα η ευθεία $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ άρα η } C_f$$

δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x^2} \right).$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ άρα η } C_f$$

δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

γ.ι. Η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι η g συνεχής στο πεδίο ορισμού της πρέπει να είναι συνεχής και στο 0, δηλαδή $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = k$. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{2x - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x^2 - 2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2 - 2} = -\frac{1}{2}, \text{ άρα } k = -\frac{1}{2}.$$

ii. Είναι $g(e) = \frac{\ln e}{f(e)} = \frac{1}{e^2 - 2\ln e} = \frac{1}{e^2 - 2} > 0$ και $g(0) = k = -\frac{1}{2} < 0$, δηλαδή $g(0)g(e) < 0$

και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, e]$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$, η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο

διάστημα αυτό με $F'(x) = \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$. Άρα

$$\int_0^1 e^{t-1} [f(t) + F(t)] dt = F(1) \Leftrightarrow \int_0^1 e^{t-1} [F'(t) + F(t)] dt = F(1) \Leftrightarrow \int_0^1 [e^{t-1} F(t)]' dt = F(1) \Leftrightarrow [e^{t-1} F(t)]_0^1 = F(1) \Leftrightarrow e^0 F(1) - e^{-1} F(0) = F(1) \Leftrightarrow F(1) - e^{-1} \cdot 0 = F(1) \text{ που ισχύει.}$$

β. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$$h'(x) = \left(\frac{F(x)}{\int_0^x tf(t) dt} \right)' = \frac{F'(x) \int_0^x tf(t) dt - F(x) \left(\int_0^x tf(t) dt \right)'}{\left(\int_0^x tf(t) dt \right)^2} = \frac{f(x) \int_0^x tf(t) dt - F(x) x f(x)}{\left(\int_0^x tf(t) dt \right)^2} \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = \frac{f(x) \left(\int_0^x tf(t) dt - F(x) x \right)}{\left(\int_0^x tf(t) dt \right)^2}.$$

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$ και $\left(\int_0^x tf(t) dt \right)^2 > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα το πρόσημο της h' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $\int_0^x tf(t) dt - F(x)x$.

Έστω $g(x) = \int_0^x tf(t) dt - F(x)x$, $x \geq 0$. Είναι

$$g'(x) = xf(x) - F'(x)x - F(x) = xf(x) - xf(x) - F(x) = -F(x)$$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Οπότε για κάθε $x > 0$ είναι $F(x) > F(0) = 0$, άρα $g'(x) = -F(x) < 0$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) < g(0) = 0$, άρα $h'(x) < 0$ και η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

γ. i. Είναι $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t) dt \Leftrightarrow \frac{\int_0^2 f(t) dt}{\int_0^2 tf(t) dt} < 2 \Leftrightarrow h(2) < 2$.

Επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ και $2 > 1$, είναι $h(2) < h(1) = 2$.

ii. Είναι $\int_0^1 F(t) dt = \int_0^1 tF'(t) dt = [tF(t)]_0^1 - \int_0^1 tF'(t) dt = F(1) - \int_0^1 tf(t) dt$.

Όμως $h(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{F(1)}{\int_0^1 tf(t) dt} = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 tf(t) dt = \frac{1}{2} F(1)$, άρα

$$\int_0^1 F(t) dt = F(1) - \frac{1}{2} F(1) = \frac{1}{2} F(1)$$

Στέλιος Μιχαήλογλου