

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης

τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει, $f'(\xi) = 0$, οπότε $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις $f(x_1) = f(x_2)$.

B. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται

παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Γ. α. Σ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Λ

ΘΕΜΑ 2ο

A. α. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Με αφαίρεση κατά μέλη

προκύπτει: $x - y = 2\lambda + 1 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.

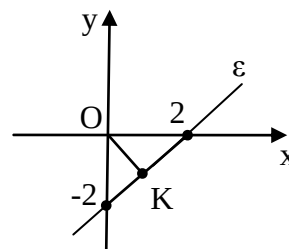
Οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται επί της ευθείας ε : $y = x - 2$.

β. Έστω OK η απόσταση της ευθείας ε από την αρχή O των αξόνων.

Ο μιγαδικός z_0 με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο K .

Επειδή $\lambda_\varepsilon = 1$ και $\varepsilon \perp OK$, ισχύει: $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OK} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$.

Άρα η OK έχει εξίσωση $y = -x$. Οι συντεταγμένες του σημείου K είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε , OK . Είναι



$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ άρα } K(1, -1)$$

και $z_0 = 1 - i$

Β. Έστω $w = \alpha + \beta i$, τότε:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12) - \beta i = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 1 + \alpha - 12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \text{ ή } \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 0$, άρα $f(x) \geq f(0)$. Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$, λόγω του θεωρήματος

Fermat, ισχύει ότι: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$.

α. Είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, η f είναι κυρτή.

β. Επειδή $f''(x) > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, οπότε για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

γ. $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$, $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Έστω $g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$, $x \in [1, 2]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(1) = (1-2)(f(\beta)-1) + (1-1)(f(\gamma)-1) = 1 - f(\beta)$ και

$g(2) = (2-2)(f(\beta)-1) + (2-1)(f(\gamma)-1) = f(\gamma) - 1$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$, για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$.

Άρα $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε και $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow 1 - f(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(1) < 0$ και $f(\gamma) > 1 \Leftrightarrow f(\gamma) - 1 > 0 \Leftrightarrow g(2) > 0$.

Επειδή $g(1)g(2) < 0$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(f(\beta) - 1) + (x_0 - 1)(f(\gamma) - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x_0 - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x_0 - 2} = 0.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή οι συναρτήσεις $f(t)$ και $tf(t)$ είναι συνεχείς στο $(0, 2]$, οι συναρτήσεις $\int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες, οπότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η G είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{1} = 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right) = 3 \text{ και}$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - t^2})(1 + \sqrt{1 - t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} \Leftrightarrow$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 6 \frac{1}{2} = 3. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) \text{ η } G \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ οπότε είναι συνεχής στο } [0, 2].$$

β. Όπως είδαμε στο προηγούμενο σκέλος η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2]$ οπότε και στο $(0, 2)$

$$\text{με } G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right)' = \frac{xH'(x) - H(x)}{x^2} - f(x) \Leftrightarrow$$

$$G'(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

$$\text{γ. Είναι } G(0) = 3 \text{ και } G(2) = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt}{2} + 3.$$

$$\text{Όμως } \int_0^2 (t - 2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0, \text{ άρα } G(2) = 3, \text{ δηλαδή } G(0) = G(2).$$

Επειδή η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$, λόγω του θεωρήματος Rolle,

$$\text{υπάρχει } \alpha \in (0, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0.$$

δ. Η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0, \alpha]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος, ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t) dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\int_0^\xi tf(t) dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \int_0^\xi tf(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt$$

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis