

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Β. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Γ. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε: $(2 - i)z + (2 + i)\bar{z} - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$$(2 - i)(x + yi) + (2 + i)(x + yi) - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2x + 2yi - xi + y + 2x - 2yi + xi + y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4x + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4 \quad (1)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία ε : $y = -2x + 4$.

β. Για $y = 0$ η γίνεται $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και για $x = 0$ γίνεται $y = 4$.

Άρα ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την (1) είναι ο $z_1 = 2$ και ο μοναδικός φανταστικός αριθμός είναι ο $z_2 = 4i$.

$$\gamma. |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |2 + 4i|^2 + |2 - 4i|^2 = \left(\sqrt{2^2 + 4^2}\right)^2 + \left(\sqrt{2^2 + (-4)^2}\right)^2 = 20 + 20 = 40.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Είναι $f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2) = \ln \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}$

Έστω $u = \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}$.

Αν $\lambda+1 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda+1)x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda+1)x = +\infty$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$.

Αν $\lambda+1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln u = 0$.

Άρα για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός, πρέπει $\lambda = -1$.

B. Για $\lambda = -1$ είναι $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x+2)$, $x > -1$.

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [\ln(x+1) - \ln(x+2)] = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$ και

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+2) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, οπότε για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$f(A) = f((-1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0)$.

β. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

γ. Είναι $-\alpha^2 < 0$ για κάθε $\alpha \neq 0$, οπότε ο αριθμός $-\alpha^2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x) = -\alpha^2 \Leftrightarrow f(x) + \alpha^2 = 0$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \neq 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $g(0) = -\frac{f'(0) - 2f(0)}{e^0} = -2f(0) + 2f(0) = 0$ και

$g(2) = 12 - \frac{f'(2) - 2f(2)}{e^4} = 12 - \frac{2f(2) + 12e^4 - 2f(2)}{e^4} = 12 - \frac{12e^4}{e^4} = 0$, δηλαδή $g(0) = g(2)$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με

$$g'(x) = 6x - \frac{(f''(x) - 2f'(x))e^{2x} - (f'(x) - 2f(x))2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}},$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 2]$.

β. Λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

$$6\xi - \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi)}{e^{2\xi}} = 6\xi \Leftrightarrow$$

$$f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} \Leftrightarrow f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

γ. Για $x = \xi$ η σχέση $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}$, γίνεται:

$$f''(\xi) - 4f'(\xi) + 4f(\xi) = k\xi e^{2\xi} \Leftrightarrow 6\xi e^{2\xi} = k\xi e^{2\xi} \Leftrightarrow k = 6$$

$$\text{Τότε } g'(x) = 6x - \frac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)}{e^{2x}} = 6x - \frac{6xe^{2x}}{e^{2x}} = 6x - 6x = 0, \quad g(x) = c, \quad c \in \mathbb{R} \text{ για κάθε}$$

$x \in [0, 2]$. Επειδή $g(0) = 0$, είναι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

$$\delta. \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 3x^2 \Leftrightarrow f'(x)e^{-2x} - 2e^{-2x}f(x) = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{-2x}f(x))' = (x^3)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x) = x^3 + c_1 \Leftrightarrow f(x) = (x^3 + c_1)e^{2x}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f(1) = e^2$, είναι $e^2 = (1 + c_1)e^2 \Leftrightarrow c_1 = 0$, άρα $f(x) = x^3 e^{2x}, x \in [0, 2]$.

$$\varepsilon. \quad \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^2 \frac{x^3 e^{2x}}{x^2} dx = \int_1^2 x e^{2x} dx = \int_1^2 x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right)' dx = \left[x \frac{e^{2x}}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{2} dx =$$

$$= e^4 - \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_1^2 = e^4 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} = \frac{3e^4 - e^2}{4}$$

Στέλιος Μιχαήλογλου