

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h} = \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu h - \eta\mu x}{h} = \eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 1 \text{ και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{h} = 0, \text{ είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x,$$

$$\text{δηλαδή } (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x.$$

A.2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι

$$\text{παραγωγίσιμη στο } (a, \beta) \text{ και επιπλέον ισχύει } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}.$$

A.3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

A.4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1. Οι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - Sz + P = 0$, όπου $S = z_1 + z_2 = -2$ και $P = z_1 z_2 = 5$, άρα η εξίσωση είναι η $z^2 + 2z + 5 = 0$, έχει $\Delta = -16$ και $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

B.2. Εστω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow |x + yi + 1 - 2i|^2 + |x + yi + 1 + 2i|^2 = |-1 + 2i + 1 + 2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \right)^2 + \left(\sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2} \right)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 + 4x + 2y^2 = 6 \Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad (1).$$

B.3. Είναι $2 \cdot \text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$. Άρα

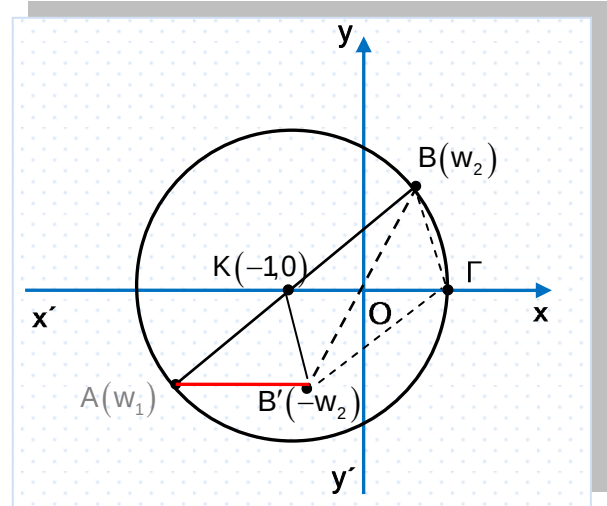
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + 4x^2 = 4 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = \frac{3}{5} \\ y = -2x \end{cases}$$

$$\text{Για } x = -1 \text{ είναι } y = 2 \text{ και } w = -1 + 2i, \text{ ενώ αν } x = \frac{3}{5}, \text{ τότε } y = -\frac{6}{5} \text{ και } w = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i.$$

B.4. Εστω A, B οι εικόνες των w_1, w_2 αντίστοιχα. Τότε $|w_1 - w_2| = 4 \Leftrightarrow |\overline{AB}| = 2\rho$, οπότε τα A, B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου της (1). Αν B' είναι η εικόνα του $-w_2$, τότε

$$|w_1 + w_2| = 2 \Leftrightarrow |\overline{AB'}| = 2.$$

Το τετράπλευρο ΒΚΒ'Γ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται.
Άρα $B'\Gamma = \parallel KB$. Άρα και τα $B'\Gamma$ και KA είναι ίσα και παράλληλα, οπότε και το τετράπλευρο ΚΑΒ'Γ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AB' = K\Gamma = 2$.
Δηλαδή $|\overline{AB'}| = 2$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-2)\ln x + x - 3) = +\infty$, αφού

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3) = +\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x-2)\ln x}{x} + 1 - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x + 1 - \frac{3}{x} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$.

Άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((x-2)\ln x + x - 3) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (x-3) = -3$, άρα η $x = 0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Γ.2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} + 1 = \ln x + \frac{2x-2}{x}$.

Για κάθε $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ και $2x-2 > 0$, άρα $f'(x) > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$ και $2x-2 < 0$, άρα $f'(x) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Γ.3. Για το διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)) = [-2, +\infty)$.

Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_1)$, υπάρχει $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 , το x_1 είναι μοναδικό.

Για το διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-2, +\infty)$.

Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 , το x_2 είναι μοναδικό. Οπότε η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ.4. Επειδή τα x_1, x_2 είναι ρίζες της f , ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Εστω $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [x_1, x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$. Επειδή $h(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1} = 0$, $h(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2} = 0$, δηλαδή $h(x_1) = h(x_2)$, λόγω του

θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

Εστω τώρα η συνάρτηση $\varphi(x) = xf'(x) - f(x)$, $x > 0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$\varphi'(x) = f'(x) - xf''(x) - f'(x) = -xf''(x) = -x\left(\ln x + \frac{x-2}{x} + 1\right)' = -x\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) < 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ έχει εξίσωση: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$.

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από την αρχή O των αξόνων, πρέπει:

$$0 - f(\xi) = f'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \text{ που ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$, άρα $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ.2. Έστω $xt = u$, τότε $xdt = du$ και για $t = 0$ είναι $u = 0$, ενώ για $t = 1$ είναι $u = x$. Οπότε:

$$x \int_0^1 f(xt) dt = \int_0^1 f(xt) x dt = \int_0^u f(u) du.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta \mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du + x^3}{\eta \mu^3 x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3x^2}{3\eta \mu^2 x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \frac{1}{x^2} + 3}{2 \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \cdot \sin x} = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Δ.3. $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2) \Leftrightarrow f'(x) - 2xf(x) = 2x^3 - 2x \Leftrightarrow e^{-x^2} f'(x) - 2xe^{-x^2} f(x) = 2x^3 e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow$

$$(e^{-x^2} f(x))' = 2x^3 e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow e^{-x^2} f(x) = \int 2x^3 e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$e^{-x^2} f(x) = \int 2x^3 e^{-x^2} dx - \int 2xe^{-x^2} dx \quad (1)$$

$$\text{Είναι } \int 2x^3 e^{-x^2} dx \stackrel{-x^2=u}{=} \int ue^u du = \int u(e^u)' du = ue^u - \int e^u du = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}, \text{ άρα}$$

$$\text{η (1) γίνεται: } e^{-x^2} f(x) = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} + e^{-x^2} + c \Leftrightarrow f(x) = -x^2 + ce^{x^2}.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1, \text{ άρα } f(x) = -x^2 + e^{x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Δ.4. Είναι $h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt = \int_x^0 f(t) dt + \int_0^{x+2} f(t) dt = \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt.$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $\int_0^{x+2} f(t) dt, \int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμες, άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f(x+2) - f(x)$.

Είναι $x < x+2, x > 0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $f(x) < f(x+2) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ και η γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0 \Leftrightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+1+2} f(t) dt < \int_4^6 f(t) dt \Leftrightarrow h(x^2+2x+1) < h(4) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 < 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 1)$$