

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Ετσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

A2. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

A3. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } |z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| + \overline{|z - 3i|} = 2 \Leftrightarrow 2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow |z - 3i| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

$$\text{B2. } |z - 3i| = 1 \Leftrightarrow |z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\overline{z - 3i}) = 1 \Leftrightarrow (z - 3i)(\bar{z} + 3i) = 1 \quad (1)$$

Επειδή $z \neq 3i$ αφού $|3i - 3i| = 0 \neq 1$, η (1) γίνεται: $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

B3. Είναι $w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} w = z - 3i + \bar{z} + 3i = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ άρα $w \in \mathbb{R}$

Εστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε: $|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow (y - 3)^2 = 1 - x^2$

Επειδή $(y - 3)^2 \geq 0$ είναι

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$$

B4. Επειδή $w = z + \bar{z}$, έχουμε: $|z - w| = |z - z - \bar{z}| = |-\bar{z}| = |z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x) + e^x f''(x) - e^x = (xf'(x))' \Leftrightarrow$

$$(e^x f'(x) - e^x)' = (xf'(x))' \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = xf'(x) + c \Leftrightarrow e^x f'(x) - xf'(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 0$ η (1) γίνεται: $0 = 1 + c \Leftrightarrow c = -1$, άρα

$$e^x f'(x) - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (e^x - x)f'(x) = e^x - 1 \quad (2)$$

Εστω $g(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = e^x - 1$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$g'(x) < 0 \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$. Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = 1$, άρα

$g(x) \geq g(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $g(x) \neq 0$ και η (2) γίνεται:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \stackrel{e^x - x \geq 1 > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln(e^x - x) + c', c' \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c' \Leftrightarrow c' = 0$, άρα $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x - x} \geq 0 \stackrel{e^x - x > 0}{\Leftrightarrow} e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow [0, +\infty)$ και για κάθε $x < 0$ είναι

$f'(x) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, 0]$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0) = 0$, άρα

$f(x) \geq f(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

Γ3. $f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \left(\frac{e^x - x + x - 1}{e^x - x} \right)' = \left(1 + \frac{x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{e^x - x - (x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \Leftrightarrow$

$$f''(x) = \frac{e^x - x - xe^x + x + e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

Εστω $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x(1 - x).$$

$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Για κάθε $x < 1$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \nearrow (-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 1$ είναι

$h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow [0, +\infty)$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1$

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - xe^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x(2-x) - 1) = -\infty$ και $h(1) = e - 1$

Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), h(0) \right] = (-1, e - 1].$$

Επειδή $0 \in (-1, e - 1)$ υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 0)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0$ και $h \nearrow (-\infty, 0]$ άρα το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $(-\infty, 0]$

Στο διάστημα $\Delta_2 = [0, +\infty)$ η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα

$$h(\Delta_2) = \left[h(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [-1, +\infty).$$

Επειδή $0 \in (-1, +\infty)$ υπάρχει $x_2 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_2) = 0$ και $h \searrow [0, +\infty)$ άρα το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της h στο $[0, +\infty)$.

Για κάθε $x < x_1 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_1) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $(-\infty, x_1]$.

Για κάθε $x_1 < x < 0 \stackrel{h \nearrow}{\Rightarrow} h(x_1) < h(x) < h(0) = 0 \Rightarrow h(x) > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[x_1, 0]$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(x_1, f(x_1))$.

Για κάθε $0 < x < x_2 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ κυρτή στο $[0, x_2]$.

Για κάθε $x > x_2 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_2) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f$ κοίλη στο $[x_2, +\infty)$.

Η f έχει σημείο καμπής το $(x_2, f(x_2))$.

Γ4. Εστω $\varphi(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Είναι } \varphi(0) = -1 < 0 \text{ και } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Από το Γ1 είναι $g \nearrow [0, +\infty)$ και

$$\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) > g(0) \Leftrightarrow e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2} > 1 \Leftrightarrow \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$$

Επειδή $\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ και η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει

$x_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_3) = 0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $\varphi'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0$, αφού $f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$

και $\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η x_3

είναι η μοναδική ρίζα της $\varphi(x) = 0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $x+t=u \Leftrightarrow t=u-x$, οπότε $dt=du$.

Για $t=0$ είναι $u=x$ και για $t=-x$ είναι $u=0$, οπότε:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x}} \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow 1-f(x) = \int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du. \text{ Όμοια από τη σχέση } \frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt \text{ προκύπτει ότι}$$

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \left(1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \right)' = \frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x) = e^{2x} \quad (1) \text{ και}$$

$$g'(x) = \left(1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \right)' = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x) = e^{2x} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1), (2) είναι } f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c \Leftrightarrow f(x) = cg(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 + \int_0^0 \frac{e^{2u}}{g(u)} du = 1 \text{ και } g(0) = 1 + \int_0^0 \frac{e^{2u}}{f(u)} du = 1, \text{ άρα } f(0) = cg(0) \Leftrightarrow c = 1,$$

$$\text{οπότε } f(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Επειδή $f(x) = g(x)$, η σχέση $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ γίνεται: $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων,

η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη, άρα και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \left(1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \right)' = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \text{ Επειδή } f(0) = 1 \text{ είναι } c = 0, \text{ οπότε}$$

$$(f^2(x))' = (e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x) = e^{2x} = (e^x)^2 \text{ και επειδή } f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\Delta 3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} \quad (1)$$

Θέτουμε $\frac{1}{x} = u$ με $\lim_{x \rightarrow 0^-} u = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{ue^u} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^{-u}}{u} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-u}}{1} = -\infty$$

$\Delta 4.$ Είναι $f(t^2) = e^{t^2} > 0$, άρα $F(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα

$$E(\Omega) = -\int_0^1 F(x) dx = -\int_0^1 x' \cdot F(x) dx = -\left[xF(x) \right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx = -F(1) + \int_0^1 xf(x^2) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$