

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΘΕΩΡΙΑ σελ 334-335 : θεώρημα σταθερής, αντικαταστάσεις
A2. ΘΕΩΡΙΑ σελ 246 **A3. ΟΡΙΣΜΟΣ σελ 222** **A4. Λ Σ Σ Λ Σ**

ΘΕΜΑ Β

B1. Για το γ.τ του z :

1^{ος} τρόπος: $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow (z-2)(\overline{z-2}) + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow$
 $|z-2| = 1 \text{ ή } |z-2| = -2 \text{ που απορρίπτεται. Άρα ο Γ.Τ των } M(z) \text{ είναι ο μοναδιαίος κύκλος με } K(2,0) \text{ και } \rho = 1.$

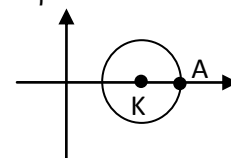
2^{ος} τρόπος: Αν $z = x + yi$, τότε.... $(x-2)^2 + y^2 + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow \dots (x-2)^2 + y^2 = 1$ Άρα

Για $|z| \leq 3$ (μ 3):

1^{ος} τρόπος: $1 = |z-2| \geq ||z| - 2| \Leftrightarrow ||z| - 2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq |z| - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq |z| \leq 3$

2^{ος} τρόπος: Είναι $|z|_{\max} = |\overrightarrow{OA}| = 3$, άρα $|z| \leq |z|_{\max} = 3$

3^{ος} τρόπος: $|z-2|^2 + |z-2| = 2$. Αν $0 < |z-2| < 1$, τότε $|z-2|^2 + |z-2| < 2$. Αν $|z-2| > 1$, τότε $|z-2|^2 + |z-2| > 2$, άρα $|z-2| = 1$



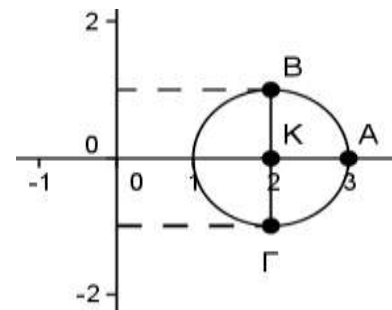
B2. [9] 1^{ος} τρόπος: Αν $z_1 = x + yi$, τότε $z_2 = \bar{z}_1 = x - yi$. $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2y| = 2 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Τότε $|z-2| = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$, άρα $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$.

Είναι $z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$, $z_1 z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 2^2 + 1^2 = 5$

Όμοια με αντικατάσταση του z_1 .

2^{ος} τρόπος: $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2$. Επειδή οι εικόνες B, Γ των z_1, z_2 είναι σημεία ομοκυκλικά και αφού είναι συζυγείς η BΓ είναι κάθετη στον χ'χ. Όμως η χορδή που είναι κάθετη στον χ'χ και έχει μέγιστο μήκος είναι η BΓ = 2ρ = 2, άρα B(2,1), Γ(2,-1). Δηλαδή $z_1 = 2 + i$ και $z_2 = 2 - i$.



Είναι $z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$, $z_1 z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 2^2 + 1^2 = 5$. Όμοια με αντικατάσταση του z_1 .

B3. [8] $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = -v^3$, άρα και $|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| = |v|^3$.

$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$.

1^{ος} τρόπος Αν $|v| > 1$, τότε $|v|^3 \leq |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} = 3 \left(\frac{|v|^3}{|v| - 1} - \frac{1}{|v| - 1} \right) < 3 \frac{|v|^3}{|v| - 1} \Leftrightarrow$
 $|v| - 1 < 3 \Leftrightarrow |v| < 4$. Αν $|v| \leq 1 \Rightarrow |v| < 4$.

2^{ος} τρόπος: $|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 < 3|v|^2 + 3|v| + 4 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0 \Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) < 0 \Leftrightarrow |v| < 4$

αφού $|v|^2 + |v| + 1 > 0$.

3^{ος} τρόπος: $|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0$. Έστω $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$, $x \geq 0$.

Είναι $f'(x) = 3(x^2 - 2x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 + \sqrt{2}$

Είναι $f(3) = -12 < 0$, $f(4) = 1 > 0$, άρα από το Θ.Β $\exists x_0(3,4): f(x_0) = 0$

x	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f'	-	+	
f	$\swarrow$	$\searrow$	

Για κάθε $1 + \sqrt{2} \leq x \leq x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_0) = 0$, για κάθε $x > x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) = 0$

και για κάθε $0 \leq x < 1 + \sqrt{2} \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(1 + \sqrt{2}) < f(x) \leq f(0) = -3 < 0$.

Άρα $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \leq x_0 < 4$, άρα $f(|v|) \leq 0 \Leftrightarrow |v| \leq x_0 < 4 \Leftrightarrow |v| < 4$.

4^{ος} τρόπος: $|v|^3 - 1 < |v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow (|v| - 1)(|v|^2 + |v| + 1) < 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v| - 1 < 3 \Leftrightarrow |v| < 4$.

5^{ος} τρόπος: Έστω $|v| \geq 4$. Τότε: $|v|^3 \leq |\alpha_2||v|^2 + |\alpha_1||v| + |\alpha_0| \Leftrightarrow 1 \leq \frac{|\alpha_2|}{|v|} + \frac{|\alpha_1|}{|v|^2} + \frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \leq \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} = \frac{63}{64}$. Άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow \left[(f(x) + x)^2 \right]' = (x^2)' \Leftrightarrow$

$$(f(x) + x)^2 = x^2 + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{Για } x = 0 \text{ είναι } c = 1$$

Άρα $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) + x \neq 0$ και επειδή η $f(x) + x$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(0) + 0 = 1 > 0$ είναι $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}$.

Γ2. 1^{ος} τρόπος $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Είναι

$$1 + x^2 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \Leftrightarrow -\sqrt{1 + x^2} < x < \sqrt{1 + x^2}, \text{ άρα } x - \sqrt{1 + x^2} < 0, \text{ οπότε } f'(x) < 0 \text{ και } f \downarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Είναι: } f(g(x)) = 1 = f(0) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$$

$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$. Στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, είναι

$$g(\Delta_1) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], 0 \notin g(\Delta_1). \text{ Στο } \Delta_2 = [-1, 0] \text{ είναι } g(\Delta_2) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right], 0 \notin g(\Delta_2).$$

Στο $\Delta_3 = [0, +\infty)$, είναι $g(\Delta_3) = [-1, +\infty)$, $0 \in g(\Delta_3)$ και $g \upharpoonright \Delta_3$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_3 : g(x_1) = 0$.

2^{ος} τρόπος: $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} = g(x) + 1 \quad (1)$.

Πρέπει: $g(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x + \frac{3}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$. Τότε:

$$(1) \Rightarrow g^2(x) + 1 = g^2(x) + 2g(x) + 1 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1). \text{ Στο } \Delta_1 = \left[-\frac{3}{2}, -1\right], \text{ είναι } g(\Delta_1) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right], 0 \notin g(\Delta_1). \text{ Στο } \Delta_2 = [-1, 0] \text{ είναι}$$

$$g(\Delta_2) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right], 0 \notin g(\Delta_2).$$

Στο $\Delta_3 = [0, +\infty)$, είναι $g(\Delta_3) = [-1, +\infty)$, $0 \in g(\Delta_3)$ και $g \upharpoonright \Delta_3$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_3 : g(x_1) = 0$.

Γ3. 1^{ος} τρόπος (Bolzano): Έστω $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \phi x + \int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $x - \frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή οι συναρτήσεις $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $\varepsilon \phi x$ είναι

παραγωγίσιμες, η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$h(0) = \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt < 0$, γιατί $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, αφού $\sqrt{x^2 + 1} > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε και

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0. \text{ Ακόμη } h\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) = 1 > 0,$$

δηλαδή $h(0)h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, οπότε από το Θ.Β υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

$$\text{2ος τρόπος: Έστω } h(x) = \eta \mu x \int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $x - \frac{\pi}{4}$ παραγωγίσιμη, άρα η συνάρτηση $\int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επειδή η $\eta \mu x$ είναι παραγωγίσιμη, η h είναι παραγωγίσιμη

στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = \sigma \nu x \int_0^{x - \frac{\pi}{4}} f(t) dt + \eta \mu x f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, οπότε η h είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $h(0) = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, από το Θ. Rolle υπάρχει $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sigma \nu x_0 \int_0^{x_0 - \frac{\pi}{4}} f(t) dt + \eta \mu x_0 f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right] = 6f'(1),$$

$$\text{γιατί } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+kh) - f(1)}{kh} \stackrel{kh=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1), \text{ άρα } 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) = 0 \Rightarrow f \downarrow (0, 1]$ και για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) = 0 \Rightarrow f \uparrow [1, +\infty)$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

$\Delta 2$ Επειδή η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, η g είναι

παραγωγίσιμη με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$. Για το πρόσημο της g' υπάρχουν δύο επιλογές:

$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος:}$ Για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$, άρα και $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0 \Rightarrow g \uparrow (1, +\infty)$

$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος:}$ Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-1}{x-1}$. Είναι

$$1 < \xi < x \Leftrightarrow f'(1) < f'(\xi) < f'(x), \text{ άρα } f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0 \Rightarrow g \uparrow (1, +\infty).$$

Για την ανίσωση:

$1^{\text{ος}} \text{ τρόπος:}$ Έστω $h(x) = \int_x^{x+1} g(u) du = \int_2^{x+1} g(u) du - \int_2^x g(u) du, x+1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$ και $x > 1$, άρα $x > 1$

Είναι $h'(x) = g(x+1) - g(x), x+1 > x \Leftrightarrow g(x+1) > g(x)$, άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow (1, +\infty)$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(8x^2+5) > h(2x^4+5) \Leftrightarrow 8x^2 + \cancel{5} > 2x^4 + \cancel{5} \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2).$$

$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος:}$ Έστω $h(x) = \int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du = \int_2^{8x^2+6} g(u) du - \int_2^{8x^2+5} g(u) du, x \in \mathbb{R} \ 8x^2+5 > 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

$$\text{Είναι } h'(x) = 16x \left[g(8x^2 + 6) - g(8x^2 + 5) \right].$$

- Για κάθε $x > 0$ είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow [0, +\infty)$. Είναι:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(x) > h\left(\frac{x^2}{2}\right) \xrightarrow{h \uparrow} \Leftrightarrow x > \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x - x^2 > 0 \xrightarrow{x > 0} \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

- Για κάθε $x < 0$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \downarrow (-\infty, 0]$. Είναι:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(x) > h\left(-\frac{x^2}{2}\right) \xrightarrow{h \downarrow} \Leftrightarrow x < -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow 2x + x^2 < 0 \xrightarrow{x < 0} \Leftrightarrow 2 + x > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

Δ.3. Για την κυρτότητα: Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2}$.

Από το ΘΜΤ για την f υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-1}{x-1}$. Είναι

$$1 < \xi < x \xrightarrow{f' \uparrow} \Leftrightarrow f'(1) < f'(\xi) < f'(x), \text{ άρα } \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1) - (f(x)-1) > 0, \text{ άρα } g''(x) > 0 \Rightarrow g \text{ κυρτή}$$

Για την εξίσωση:

1^{ος} τρόπος: Η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = \alpha$ είναι η $\varepsilon: y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = g'(\alpha)(x - \alpha)$.

Επειδή η g είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, άρα $g(x) \geq g'(\alpha)(x - \alpha)$ με το ίσον να ισχύει μόνο

$$\text{για } x = \alpha \text{ (μ 2). Άρα η εξίσωση } g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt = (f(\alpha)-1)(x - \alpha) \text{ αληθεύει μόνο για } x = \alpha.$$

2^{ος} τρόπος: Έστω $\varphi(x) = (\alpha-1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(\alpha)-1)(x - \alpha)$, $x > 1$. Είναι $\varphi(\alpha) = 0$.

$$\varphi'(x) = (\alpha-1) \frac{f(x)-1}{x-1} - (f(\alpha)-1) = (\alpha-1) \left[\frac{f(x)-1}{x-1} - \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \right] = (\alpha-1)(g'(x) - g'(\alpha)).$$

$$\text{Για κάθε } x > \alpha \xrightarrow{g' \uparrow} \Leftrightarrow g'(x) > g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi \uparrow [\alpha, +\infty). \text{ Για κάθε } x > \alpha \xrightarrow{\varphi \uparrow} \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\alpha) = 0.$$

$$\text{Για κάθε } 1 < x < \alpha \xrightarrow{g' \uparrow} \Leftrightarrow g'(x) < g'(\alpha) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) < 0 \Rightarrow \varphi \downarrow (1, \alpha]. \text{ Για κάθε } 1 < x < \alpha \xrightarrow{\varphi \downarrow} \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(\alpha) = 0.$$

Άρα η $x = \alpha$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x) = 0$.

3^{ος} τρόπος: Προφανής ρίζα η $x = \alpha$. Έστω ότι η φ έχει και άλλη ρίζα ρ . Τότε με Θ.Rolle στο (α, ρ) ή στο (ρ, α) η $\varphi'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα, που οδηγεί σε άτοπο. Όμοια αν $1 < \rho < \alpha$.