

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

A2. Εστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

A3. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

A4. α. Σ β. Λ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Η εξίσωση $2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z| \Leftrightarrow 2x^2 - |w - 4 - 3i|x + 2|z| = 0$ είναι τριώνυμο ως προς x το οποίο έχει διπλή ρίζα τη $x = 1$ οπότε πρέπει

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = 0 \\ 2 - |w - 4 - 3i| + 2|z| = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w - 4 - 3i|^2 - 16|z| = 0 \\ |w - 4 - 3i| = 2 + 2|z| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w - 4 - 3i| = 2 + 2|z| \\ (2 + 2|z|)^2 = 16|z| \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |w - 4 - 3i| = 2 + 2|z| \\ 4 + 8|z| + 4|z|^2 = 16|z| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w - 4 - 3i| = 2 + 2|z| \\ (2|z| - 2)^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |w - 4 - 3i| = 4 \\ |z| = 1 \end{array} \right.$$

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων του z είναι ο μοναδιαίος κύκλος ενώ ο γ.τ. των εικόνων του w είναι ο κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και $\rho_2 = 4$.

Αλλιώς $z = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\beta}{2\alpha} \right) = \frac{|w - 4 - 3i|}{4} \Leftrightarrow |w - 4 - 3i| = 4$ και

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow |w - 4 - 3i|^2 - 16|z| = 0 \Leftrightarrow 16 - 16|z| = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$$

B2. 1ος τρόπος.

$$(OK) = \sqrt{(0-4)^2 + (0-3)^2} = 5 = \rho_1 + \rho_2$$

Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

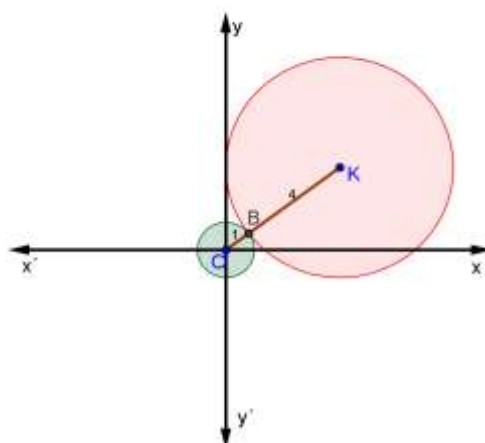
2ος τρόπος

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο κύκλων έχουμε:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

άρα ο μοναδικός μιγαδικός όπου ανήκει και στους δύο τόπους είναι $v = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

**B3. 1ος τρόπος.**

$$\text{Είναι } |z-w|_{\max} = |w-z|_{\max} = (OK) + \rho_1 + \rho_2 = 5 + 1 + 4 = 10 \Leftrightarrow |w-z| \leq 10$$

Επίσης επειδή ο γ.τ. του z έχει κέντρο συμμετρίας το $(0,0)$ οπότε ανήκει

στον τόπο και το $-z$ τότε

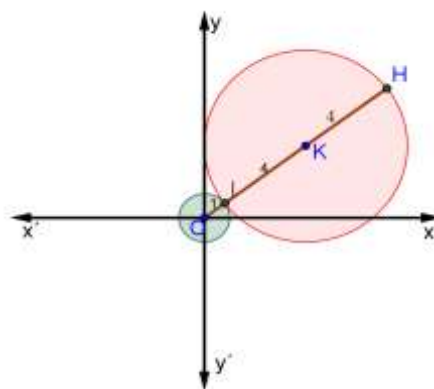
$$|w+z| = |w-(-z)| = |w-z| \leq 10$$

2ος τρόπος.

$$|w|_{\max} = (OH) = 9.$$

Οπότε :

$$|z+w| \leq |z| + |w| \leq |z| + |w|_{\max} \Leftrightarrow |z+w| \leq 1+9=10$$



$$\text{B4. } |2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5 \Leftrightarrow |z(2z - 3 - 2\bar{z})| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|z| \cdot |2z - 2\bar{z} - 3| = 5 \Leftrightarrow 1 \cdot |2(z - \bar{z}) - 3| = 5 \Leftrightarrow$$

$$|2 \cdot (2yi) - 3| = 5 \Leftrightarrow |-3 + 4yi| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{9 + 16y^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + 16y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

Αφού $|z| = 1$ δηλ. $x^2 + y^2 = 1$ τότε αν $y^2 = 1$ θα είναι $x^2 = 0$ άρα $x = 0$. Οπότε $z = \pm i$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } 2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 3x^2 \Leftrightarrow [(x^2 + 1)f(x)]' = (x^3)' \Leftrightarrow (x^2 + 1)f(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{x^3 + c}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}. \text{ Για } x=1 \text{ είναι } f(1) = \frac{1+c}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c=0, \text{ άρα } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ για } x \neq 0$$

Η f συνεχής στο 0. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x} = -1.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x} = -1.$$

Άρα η $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επειδή η f έχει πλάγια ασύμπτωτη, δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Γ3. $f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2) \Leftrightarrow 5(x^2 + 1)^3 - 8 \leq 8(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow$

$$5(x^2 + 1)^3 - 8(x^2 + 1)^2 - 8 \leq 0 \quad (1). \text{ Θέτουμε } (x^2 + 1) = \omega, \text{ οπότε η (1) γίνεται:}$$

$$5\omega^3 - 8\omega^2 - 8 \leq 0. \text{ Με σχήμα Horner βρίσκουμε ότι } 5\omega^3 - 8\omega^2 - 8 = (\omega - 2)(5\omega^2 + 2\omega + 4),$$

άρα

$$(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4) \leq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Γ4. Εστω $g(x) = x \int_0^{x^3 - x} f(t) dt, x \in [0, 1]$.

Επειδή η f είναι συνεχής και η $x^3 - x$ είναι παραγωγίσιμη, η συνάρτηση $\int_0^{x^3 - x} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = \int_0^{x^3 - x} f(t) dt + x f(x^3 - x)(3x^2 - 1)$, οπότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Επειδή $g(0) = g(1) = 0$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt + \xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi f(\xi^3 - \xi)(3\xi^2 - 1)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) = \left(x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du \right)' = 1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt$ και

$$f''(x) = \left(1 + \int_1^x \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right)' = \frac{(f'(x))^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f''(x)f(x) = (f'(x))^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f''(x)f(x) + 1 = (f'(x))^2 \quad (1)$$

Δ2.α. Επειδή $f(x)f'(x) \neq 0$ οι συναρτήσεις f, f' δεν μηδενίζονται και επειδή είναι συνεχείς

διατηρούν σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = 1 > 0$ είναι

$f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επειδή $f'(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = 1 > 0$, είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

β. Επειδή $f'(x) > 0$ από την (1) έχουμε $f''(x) = \sqrt{1 + f(x)f''(x)}$

Η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + f(x)f''(x)} = \sqrt{1 + f(0)f''(0)} \stackrel{f(0)=0}{=} 1$

Δ3.α. Είναι $g'(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = -\frac{1}{f^2(x)}$ και $g'(1) = -\frac{1}{f^2(1)} = -1$. Επειδή

$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = 1$, η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ είναι $y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Επειδή η g είναι κυρτή, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, εκτός από το σημείο επαφής, άρα $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x > 0$.

β. Είναι $g(x) \geq 2 - x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \Leftrightarrow f'(x) \geq (2 - x)f(x)$ και επειδή η ισότητα ισχύει

μόνο για $x = 1$ και οι συναρτήσεις $f'(x)$, $(2 - x)f(x)$ είναι συνεχείς στο $[0, 1]$, ισχύει ότι:

$$\int_0^1 f'(x) dx > \int_0^1 (2 - x)f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 (2 - x)f(x) dx < f(1) - f(0) = 1$$

Δ4. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $h(x) = [f'(x)]^3 \geq 0$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 f'(x) dx = \left\{ [f'(x)]^2 f(x) \right\}_0^1 - \int_0^1 2f'(x)f''(x)f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E = (f'(1))^2 f(1) - (f'(0))^2 f(0) - 2 \int_0^1 [f'(x)]^2 f''(x) dx = 1 - 2 \left[\frac{[f'(x)]^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$1 - 2 \frac{[f'(1)]^3 - [f'(0)]^3}{3} = 1 - 2 \frac{1 - 1}{3} = 1 \text{ τ.μ.}$$