

ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 263

A2. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 192

A3. Θεωρία σχολικό βιβλίο σελίδα 303

A4. α. Σ β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

Έστω $z = x + yi$ με $z \neq 0 - \frac{i}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } w &= \frac{2z-i}{2z+i} = \frac{2(x+yi)-i}{2(x+yi)+i} = \\ &= \frac{2x+2yi-i}{2x+2yi+i} = \\ &= \frac{2x+2yi-i}{2x+(2y+1)i} = \\ &= \frac{[2x+2yi-i][2x-(2y+1)i]}{[2x+(2y+1)i][2x-(2y+1)i]} = \dots = \\ &= \frac{4x^2+4y^2-1}{(2x)^2+(2y+1)^2} + \frac{-4x}{(2x)^2+(2y+1)^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \text{ φανταστικός} &\Leftrightarrow \frac{4x^2+4y^2-1}{(2x)^2+(2y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \\ &4x^2+4y^2-1=0 \Leftrightarrow \\ &x^2+y^2=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$, εκτός του σημείου $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$,

λόγω του περιορισμού $z \neq 0 - \frac{i}{2}$

B2.

$$\begin{aligned} |w| = 1 &\Leftrightarrow \left| \frac{2z-i}{2z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2z-i|}{|2z+i|} = 1 \Leftrightarrow \\ &|2z-i| = |2z+i| \stackrel{z=x+yi}{\Leftrightarrow} \\ &|2x+2yi-i| = |2x+2yi+i| \Leftrightarrow \\ &\sqrt{(2x)^2+(2y-1)^2} = \sqrt{(2x)^2+(2y+1)^2} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 4x^2 + 4y^2 + 4y + 1 \Leftrightarrow$$

$$y = 0$$

$$\text{Η } x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

Οπότε οι ζητούμενοι z είναι οι $z = \pm \frac{1}{2} + 0i$

B3.

$$\text{Αν } z = \frac{1}{2} \text{ τότε } w = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - i}{2 \cdot \frac{1}{2} + i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{1 + 1} = \frac{1 - 2i - 1}{2} = -i$$

$$\text{Οπότε } w^4 + iw^7 = (-i)^4 + i(-i)^7 = i^4 - i^8 = 1 - (i^4)^2 = 1 - 1^2 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$\text{Θέτω } u = \frac{\ln x}{x}. \text{ Τότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \text{ με } x > 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 = f(0)$$

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

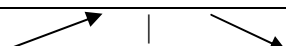
Γ2.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	e	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Οπότε, για $x \in [0, e]$ το σύνολο τιμών είναι το $f_1(A) = [f(0), f(e)]$ και

για $x \in [e, +\infty)$ το σύνολο τιμών είναι το $f_2(A) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)]$

Όμως $f(0) = 0$, $f(e) = e^{\frac{\ln e}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$.

Για το όριο αυτό, θέτω $u = \frac{\ln x}{x}$

Τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = e^0 = 1$

Μετά από αυτά, το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = f_1(A) \cup f_2(A) =$
 $= [0, e^{\frac{1}{e}}] \cup (1, e^{\frac{1}{e}}] =$
 $= [0, e^{\frac{1}{e}}]$

Γ3.

i) Για κάθε $x > 0$ έχουμε ότι: $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}}$
 $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4}$
 $4 \ln x = x \ln 4$
 $\ln x^4 = \ln 4^x$
 $x^4 = 4^x$

ii) Η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει προφανείς ρίζες τις $x = 2$ και $x = 4$, άρα και η ισοδύναμή της $f(x) = f(4)$ έχει τις ίδιες προφανείς ρίζες.
 Όμως στο διάστημα $[0, e]$, η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα το 2 είναι μοναδική ρίζα στο διάστημα $[0, e]$.
 Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$, άρα το 4 είναι μοναδική ρίζα στο διάστημα $[e, +\infty)$.
 Συνεπώς οι ρίζες $x = 2$ και $x = 4$ της εξίσωσης $x^4 = 4^x$ είναι μοναδικές.

Γ4.

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $f'(x) \int_2^x f(t) dt = f(x) (\sqrt{2} - f(x))$

Θεωρώ τη συνάρτηση $F(x) = \int_2^x f(t) dt$, $x \in [2, 4]$ που είναι αρχική της f .

Τότε $F'(x) = f(x)$ και $F''(x) = f'(x)$

Οπότε, αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $F''(x) F(x) = F'(x) (\sqrt{2} - F'(x)) \Leftrightarrow$

$$F''(x) F(x) = \sqrt{2} F'(x) - F'(x) F'(x)$$

$$F''(x) F(x) + F'(x) F'(x) = \sqrt{2} F'(x)$$

$$(F'(x))' F(x) + F'(x) F'(x) = (\sqrt{2} F(x))'$$

$$(F'(x) F(x))' = (\sqrt{2} F(x))'$$

$$(F'(x) F(x))' - (\sqrt{2} F(x))' = 0$$

$$(F'(x) F(x) - \sqrt{2} F(x))' = 0$$

$$(F(x) [F'(x) - \sqrt{2}])' = 0$$

$$\left(\int_2^x f(t) dt \cdot [f(x) - \sqrt{2}] \right)' = 0$$

Πάμε για Rolle στη συνάρτηση $h(x) = \int_2^x f(t) dt \cdot [f(x) - \sqrt{2}]$, $x \in [2, 4]$

Προφανώς η h είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και παραγωγίσιμη στο $(2, 4)$.

$$\text{Επίσης } h(2) = \int_2^2 f(t) dt \cdot [f(2) - \sqrt{2}] = 0 \cdot [f(2) - \sqrt{2}] = 0$$

$$h(4) = \int_2^4 f(t) dt \cdot [f(4) - \sqrt{2}], \text{ αλλά } f(4) = e^{\frac{\ln 4}{4}} = e^{\frac{1}{4} \ln 4} = e^{\ln \sqrt[4]{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } h(4) = \int_2^4 f(t) dt \cdot 0 = 0 = h(2)$$

Τελικά, κατά το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 4)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $A = (0, +\infty)$, η δοσμένη σχέση

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

είναι παραγωγίσιμη και στα δύο μέλη, οπότε παραγωγίζοντας έχουμε

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) - 2f(x) + 3) + e^{f(x)} (2f(x) f'(x) - 2f'(x)) = 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) - 2f(x) + 3 + 2f(x) - 2) = 1$$

$$e^{f(x)} f'(x) (f^2(x) + 1) = 1$$

και επειδή $e^{f(x)} (f^2(x) + 1) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

$$\text{έχουμε ότι } f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} (f^2(x) + 1)} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως '1-1', οπότε η f είναι αντιστρέψιμη.

Υπάρχει λοιπόν η συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

Η δοσμένη σχέση γράφεται $e^{f(x)} ((f(x))^2 - 2f(x) + 3) = x$

$$\text{Θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x): e^{f(f^{-1}(x))} (f(f^{-1}(x))^2 - 2f(f^{-1}(x)) + 3) = f^{-1}(x)$$

$$\text{Αλλά } f(f^{-1}(x)) = x, \text{ οπότε } e^{x^2 - 2x + 3} = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = e^{x^2 - 2x + 3}, x \in \mathbb{R}$$

Δ2.

$$(f^{-1}(x))' = e^{x^2 - 2x + 3} + e^{x^2 - 2x + 3} (2x - 2) = e^{x^2 + 1}$$

$$(f^{-1}(x))'' = e^{x^2 + 1} + 2xe^{x^2 + 1} = e^{x^2 + 1} (x^2 + 2x + 1) = e^{x^2 + 1} (x + 1)^2 > 0 \text{ για κάθε } x \neq -1,$$

Επομένως η f^{-1} στρέφει τα κοίλα άνω σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με τον άξονα των y είναι το $(0, f^{-1}(0)) = (0, 3)$.

$$\text{Ακόμα είναι } (f^{-1})'(0) = e^{0^2 + 1} = 1.$$

Επομένως η εφαπτομένη στο σημείο $(0, f^{-1}(0))$ έχει εξίσωση

$$y-3=1(x-0) \Leftrightarrow y=x+3.$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης για τον προσδιορισμό του ζητούμενου εμβαδού είναι το $[0, 1]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $E = \int_0^1 |f^{-1}(x) - (x+3)| dx$

Επειδή η f^{-1} είναι κυρτή, η γραφική της παράσταση είναι ψηλότερα από την εφαπτομένη, εκτός βέβαια του σημείου επαφής.

Επομένως είναι $f^{-1}(x) - (x+3) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το $(=)$ να ισχύει μόνο για $x=0$.

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (f^{-1}(x) - (x+3)) dx = \int_0^1 (e^x(x^2 - 2x + 3) - (x+3)) dx = \\ &= \int_0^1 e^x(x^2 - 2x + 3) dx - \int_0^1 (x+3) dx = \\ &= \int_0^1 (e^x)'(x^2 - 2x + 3) dx - \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1 = \\ &= \left[e^x(x^2 - 2x + 3) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x(2x - 2) dx - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = \\ &= 2e - 3 - \int_0^1 (e^x)'(2x - 2) dx - \frac{7}{2} = \\ &= 2e - \frac{13}{2} - \left[e^x(2x - 2) \right]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx = \\ &= 2e - \frac{13}{2} - (2 + 2) + \left[2e^x \right]_0^1 = \\ &= 2e - \frac{13}{2} - 2 + (2e - 2) = 4e - \frac{21}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$

Δ3.

i) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} στο σημείο $A(x, f^{-1}(x))$, όπως είδαμε στο Δ₂, είναι ίσος με $(f^{-1})'(x) = (f^{-1}(x))' = e^x(x^2 + 1)$

Ενώ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $B(f^{-1}(x), x)$ είναι ίσος με $f'(f^{-1}(x))$.

$$\text{Αλλά, όπως είδαμε στο } \Delta_1, \text{ είναι } f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}(f^2(x) + 1)} = \frac{1}{e^{f(x)}((f(x))^2 + 1)}$$

$$\text{Θέτουμε όπου } x \text{ το } f^{-1}(x): f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{e^{f(f^{-1}(x))}[(f(f^{-1}(x)))^2 + 1]} = \frac{1}{e^x(x^2 + 1)}$$

$$\text{Επομένως } (f^{-1})'(x) \cdot f'(f^{-1}(x)) = e^x(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{e^x(x^2 + 1)} = 1$$

ii) Η απόσταση d των σημείων A, B είναι ίση με

$$d(A, B) = \sqrt{(x - f^{-1}(x))^2 + (f^{-1}(x) - x)^2} = \sqrt{2(f^{-1}(x) - x)^2} = |f^{-1}(x) - x| \sqrt{2}$$

Στο Δ₂ δείξαμε ότι $f^{-1}(x) - (x+3) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το $(=)$ να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα $f^{-1}(x) - x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$f^{-1}(x) - x \geq 3 > 0$$

$$\text{Οπότε } d(A, B) = (f^{-1}(x) - x) \sqrt{2} \geq 3\sqrt{2}$$

Δηλαδή η απόσταση $d(A, B)$ γίνεται ελάχιστη για $x = 0$, και η ελάχιστη τιμή αυτής είναι η $d(A, B)_{\min} = 3\sqrt{2}$

netsuccess.gr