

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015**

ΘΕΜΑ Α

A.1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Έστω $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι: η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

A2. Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής στο x_0** , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

A3. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

A4. $\Lambda \quad \Sigma \quad \Lambda \quad \Sigma \quad \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1. $|z - 4| = 2|z - 1| \Leftrightarrow |z - 4|^2 = 4|z - 1|^2 \Leftrightarrow (z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow$

$|z|^2 - 4\bar{z} - 4z + 16 = 4|z|^2 - 4\bar{z} - 4z + 4 \Leftrightarrow 3|z|^2 = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

β' τρόπος

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

$|z - 4| = 2|z - 1| \Leftrightarrow |x - 4 + yi| = 2|x - 1 + yi| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 \Leftrightarrow$

$3x^2 + 3y^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.

B2. α) $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$. Όμοια $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

$$\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{8}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{\frac{8}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$$

β' τρόπος:

$$w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow 2|z_1|^2 z_1 \bar{z}_2 + 2|z_2|^2 \bar{z}_1 z_2 = 2|z_2|^2 \bar{z}_1 z_2 + 2|z_1|^2 z_1 \bar{z}_2 \text{ ισχύει}$$

$$\beta) |w| = \left| \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \right| \leq \left| \frac{2z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{2z_2}{z_1} \right| = \frac{2|z_1|}{|z_2|} + \frac{2|z_2|}{|z_1|} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 + 2 = 4 \Leftrightarrow |w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$$

2ος τρόπος

Αν $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ με αντίστοιχες εικόνες $A(z_1), B(z_2)$ έχουμε

$$z_1 \bar{z}_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + (y_1 x_2 - x_1 y_2) i$$

$$w = 2 \left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} \right) = 2 \left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \right) = 2 \left(\frac{z_2}{z_1} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \right) = 2 \frac{\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2}{|z_1|^2} = \cancel{2} \frac{\cancel{2} \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)}{\cancel{4}} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \sigma \nu \nu(\angle AOB) = 4 \sigma \nu \nu(\angle AOB) \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 4 \sigma \nu \nu(\angle AOB) .$$

$$-1 \leq \sigma \nu \nu(\angle AOB) \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 4 \sigma \nu \nu(\angle AOB) \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq |w| \leq 4 \stackrel{w \in \mathbb{R}}{\Leftrightarrow} -4 \leq w \leq 4$$

$$\mathbf{B3.} w = -4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2} z_1}{z_2} + \frac{\cancel{2} z_2}{z_1} = -\cancel{4} \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 z_2 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 .$$

Άρα $A(z_1), B(-z_1), \Gamma(2iz_1)$ και

$$(B\Gamma) = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1(-1 - 2i)| = |z_1| \cdot |-1 - 2i| = |z_1| \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$(A\Gamma) = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = |z_1| \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} .$$

Άρα $(B\Gamma) = (A\Gamma)$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β' τρόπος

Αν $z_1 = x_1 + y_1 i$, $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ τότε $A(x_1, y_1), B(-x_1, -y_1), \Gamma(-2y_1, 2x_1)$.

$$(A\Gamma) = \sqrt{(x_1 + 2y_1)^2 + (y_1 - 2x_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2 + \cancel{4x_1 y_1} + 4x_1^2 + y_1^2 - \cancel{4x_1 y_1}} = \sqrt{5(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(2y_1 - x_1)^2 + (-2x_1 - y_1)^2} = \sqrt{x_1^2 + 4y_1^2 - \cancel{4x_1 y_1} + 4x_1^2 + y_1^2 + \cancel{4x_1 y_1}} = \sqrt{5(x_1^2 + y_1^2)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Άρα $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ οπότε το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

$$\mathbf{Γ1.} x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow A_f = (-\infty, +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ για $x \neq 1$ επομένως η f $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής στο 1.

$$\text{Το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι το } f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{D.L.H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\Gamma 2. f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5} = f(2) \stackrel{f \text{ και } 1-1}{\Leftrightarrow} e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x} = \frac{2}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}$$

$$\text{Ο αριθμός } \frac{e^3}{2} \in f(A) \text{ άρα υπάρχει } x_0 \in \mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = \frac{e^3}{2}.$$

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι 1-1.

β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) - \frac{e^2}{5}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$h'(x) = f'(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) \cdot (e^{3-x} \cdot (x^2 + 1))' = f'(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) \cdot (-e^{3x})(x-1)^2 < 0$$

για κάθε $x \neq 1$ και επειδή η h είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα ($\searrow$) στο $\mathbb{R}$.

Έστω $s(x) = e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$s'(x) = -e^{3-x}(x^2 + 1) + 2e^{3-x}x = -e^{3-x}(x-1)^2 < 0 \text{ για κάθε } x \neq 1 \text{ και επειδή}$$

η s είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα ($\searrow$) στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)] = +\infty \text{ (από το } \Gamma 1) \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^{x-3}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-3}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-3}} = 0 \text{ (από το } \Gamma 1), \text{ άρα } s(A) = (0, +\infty)$$

$$\text{Είναι } f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

Επειδή $\frac{e^2}{5} \in (1, +\infty)$, υπάρχει $x_1 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(e^{3-x_1} \cdot (x_1^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα, το x_1 είναι μοναδικό.

Γ3. Για κάθε $t \in [2x, 4x]$ είναι $2x \leq t \leq 4x \stackrel{f \text{ και } 1-1}{\Rightarrow} f(t) \leq f(4x)$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε

$$t \in [2x, 4x], \text{ έχουμε: } \int_{2x}^{4x} f(t) dt < \int_{2x}^{4x} f(4x) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t) dt < f(4x) \int_{2x}^{4x} dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < f(4x) [t]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x).$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_1^x f(t) dt$, $x \in (0, +\infty)$.

Για την h ισχύει το Θ.Μ.Τ στο $[2x, 4x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = \frac{h(4x) - h(2x)}{4x - 2x} = \frac{\int_1^{4x} f(t)dt - \int_1^{2x} f(t)dt}{2x} = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

$$2x < \xi < 4x \xRightarrow{f \nearrow} f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x \cdot f(4x)$$

Γ4. Η g συνεχής στο $(0, +\infty)$ αφού η f συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{4x} f(t)dt - \int_1^{2x} f(t)dt}{x} \stackrel{D.L.H}{=} \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(4x) - 2f(2x)}{1} = 4f(0) - 2f(0) = 2 = g(0) \text{ . Άρα η g συνεχής στο } [0, +\infty) \text{ .}$$

$$\text{Η g είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty) \text{ με: } g'(x) = \frac{(4f(4x) - 2f(2x)) \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}$$

$$\text{Είναι } \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow -\int_{2x}^{4x} f(t)dt > -2xf(4x) \text{ και για κάθε } x > 0 \Rightarrow 2x < 4x \xRightarrow{f \nearrow} f(2x) < f(4x)$$

$$\text{Άρα } g'(x) > \frac{2(2f(4x) - f(2x)) \cdot x - 2xf(4x)}{x^2} = \frac{2(f(4x) - f(2x))}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$g'(x) > 0 \text{ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, είναι γνησίως αύξουσα στο } [0, +\infty) \text{ .}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, c \in \mathbb{R} \text{ . (1) } \stackrel{x=0}{(1) \Rightarrow c=0} \text{ οπότε } e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \xRightarrow{\cdot e^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \neq 0 \text{ (2)}$$

Η συνάρτηση $a(x) = e^{f(x)} - x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $a(x) \neq 0$ οπότε η α διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $a(0) = 1 > 0$ η $a(x) > 0$ οπότε

$$(2) \Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ (3)}$$

$$\text{Είναι } \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \Leftrightarrow -\sqrt{x^2 + 1} < x < \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Η (3) γίνεται } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

β' τρόπος

$$(e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} - 1 = 0 \text{ Θέτω } e^{f(x)} = \omega > 0, \text{ τότε } \omega^2 - 2x\omega - 1 = 0 \text{ . Είναι } \Delta = 4x^2 + 4 > 0, \text{ άρα}$$

$$\omega_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Από τη σχέση (1) είναι $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$, και επειδή $e^{f(x)} = \omega > 0$, είναι

$$\omega = e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ .}$$

$$\Delta 2. \alpha) f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής το $(0, f(0))$ δηλαδή την αρχή των αξόνων.

$$\beta) E = \int_0^1 |x - f(x)| dx. \text{ Η εφαπτομένη της } f \text{ στο } 0 \text{ είναι η } y = x.$$

Επειδή η f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$ είναι $f(x) \leq x \Leftrightarrow f(x) - x \leq 0$.

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 x' f(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} - [x f(x)]_0^1 + \int_0^1 x f'(x) dx = \frac{1}{2} - f(1) + \int_0^1 x \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\Delta 3. x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln |f(x)| \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \cdot \ln f(x) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \cdot (f(x) \ln f(x)) \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}{f(x)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{D.L.H} \frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} \cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{0 \cdot 0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln f(x) \cdot f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+} (\ln u \cdot u) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{D.L.H} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-u) = 0.$$

β' τρόπος:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{D.L.H} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{\frac{e^{\int_0^x f^2(t) dt} f^2(x)}{\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right)^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f'(x) \left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right)^2}{f^3(x) e^{\int_0^x f^2(t) dt}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}} \cdot \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \right)^2}{f^3(x)} \right) = -\frac{f'(0)}{1} \cdot 0 = 0 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \right)^2}{f^3(x)} \stackrel{DLH}{=} \frac{\left(\frac{\infty}{\infty} \right) 2 \left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1 \right) e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cancel{f^2(x)}}{3 \cancel{f^2(x)} f'(x)} = 0$$

Δ4. Θεωρούμε $h(x) = (x-2) \left(1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2)dt \right) + (x-3) \left(8 - 3 \int_0^x f^2(t)dt \right)$.

Η f συνεχής στο $[2,3]$ σαν πράξεις συνεχών.....

$$h(2) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t)dt < 0 \text{ αφού}$$

$$f(t) \leq t, x \in [0, +\infty) \Rightarrow f^2(t) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^x f^2(t)dt < \int_0^x t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$3 \int_0^x f^2(t)dt < 3 \int_0^x t^2 dt \Leftrightarrow 3 \int_0^x f^2(t)dt < 3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \Leftrightarrow 3 \int_0^x f^2(t)dt < x^3 \stackrel{x=2}{\Rightarrow}$$

$$3 \int_0^2 f^2(t)dt < 8 \Leftrightarrow -8 + 3 \int_0^2 f^2(t)dt < 0$$

$$h(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2)dt > 0 \text{ αφού}$$

$$f(x) \leq x, x \in [0, +\infty) \Rightarrow f(t^2) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(t^2)dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(t^2)dt < 1 \Leftrightarrow 1 - 3 \int_0^1 f(t^2)dt > 0$$

Άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi-2) \left(1 - 3 \int_0^{\xi-2} f(t^2)dt \right) + (\xi-3) \left(8 - 3 \int_0^\xi f^2(t)dt \right) = 0 \stackrel{:(\xi-2)(\xi-3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1 - 3 \int_0^{\xi-2} f(t^2)dt}{\xi-3} + \frac{8 - 3 \int_0^\xi f^2(t)dt}{\xi-2} = 0.$$

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς