

lisari team / Σχολικό έτος 2015 – 16

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ

ΣΠΟΥΔΩΝ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΤΕΚΑ (11)

(έκδοση γ')

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, Θεώρημα Fermat, σελ. 260

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \quad \text{και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3)$$

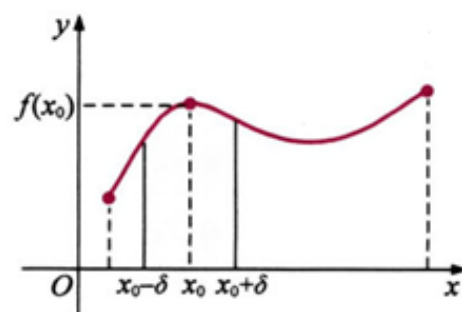
Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 169 (Κριτήριο Παρεμβολής)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$



τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 280

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται **οριζόντια ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

A4. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος



ΘΕΜΑ Β

B1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης, της συνάρτησης f , άρα :

$$D_f = (1, 3] \cup (3, 5) \cup (5, 7] \cup (7, 9] = (1, 5) \cup (5, 9]$$

Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης, της συνάρτησης f , άρα :

$$f(D_f) = (-2, 1) \cup (2, 4] \cup (0, 3) \cup \{3\} \cup [3, 5) = (-2, 5]$$

B2. α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

β) Το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$.

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$

δ) Το $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ δεν υπάρχει, αφού $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$ ενώ $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4$.

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = 3$

B3. α) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)}$$

επειδή $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο 2 για $x < 2$

και $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο 2 για $x > 2$.

β) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ υπάρχει και είναι $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)}$ αφού

$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ επειδή $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο 6 για $x < 6$.

και $\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ επειδή $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο 6 για $x > 6$.

γ) Θέτουμε $u = f(x)$ οπότε για $x \rightarrow 8$ θα είναι $u \rightarrow 5$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = \lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 3$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = 3$$

B4. Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στα εξής σημεία του πεδίου ορισμού της:

i) $x_1 = 3$, καθώς είναι $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

$$(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 1)$$

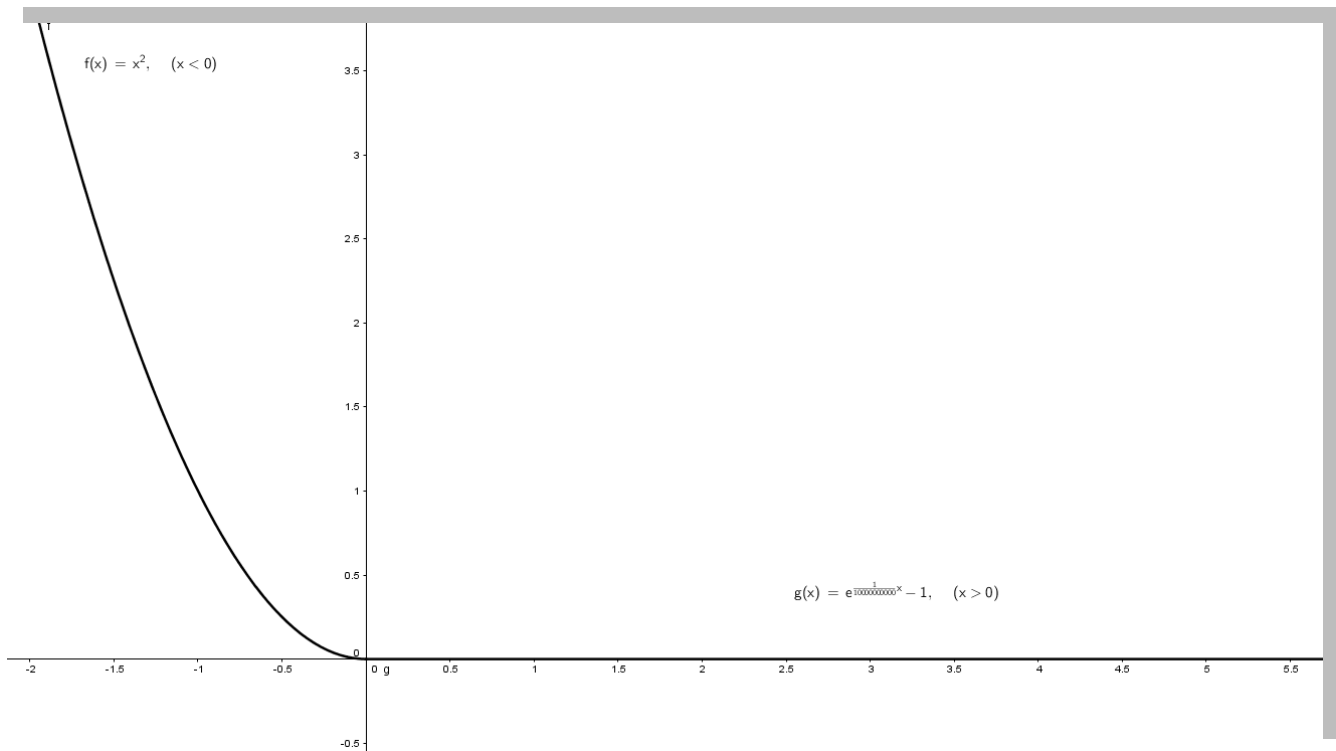
ii) $x_1 = 7$, καθώς είναι $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) \neq f(7)$
($\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$ και $f(7) = 3$)

B5. Παρατηρούμε από την γραφική παράσταση της f ότι στα σημεία $x_0 = 4$, $x_1 = 6$ και $x_2 = 8$ η καμπύλη είναι ομαλή (χωρίς γωνιακά σημεία) και η C_f δέχεται στα σημεία αυτά οριζόντια εφαπτομένη, άρα $f'(4) = 0$, $f'(6) = 0$ και $f'(8) = 0$.

Σχόλιο: Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα στηρίζεται στην οπτική παρατήρηση και όχι σε δεδομένα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία αυτά.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ e^{\frac{x}{10^{10}}} - 1, & x \geq 0 \end{cases}$, φαίνεται να είναι ομαλή και να δέχεται

οριζόντια εφαπτομένη στο $x_0 = 0$ αλλά δεν ισχύει $f'(0) = 0$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Α' τρόπος

Έχουμε για την $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ αν είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

που σημαίνει ότι η f είναι '1-1' άρα αντιστρέψιμη με $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Έτσι θεωρώντας την εξίσωση $f(x) = y$, $y \in \mathbb{R}$ έχουμε ισοδύναμα

$$x^3 = y \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|y|}, & y < 0 \end{cases} \text{ επομένως } f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{|y|}, & y < 0 \end{cases}$$

Β' τρόπος

Έχουμε για την $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ ότι είναι παραγωγίσιμη με

$f'(x) = 3x^2 > 0$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1-1' άρα αντιστρέψιμη με $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

και για την εύρεση τύπου της αντίστροφης, όπως και στον Α' τρόπο.

Γ2. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3, \quad x \geq 0$$

Έχουμε για κάθε $x \geq 0$:

$$g'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{και} \quad g''(x) = -\eta\mu x + x$$

όμως

$$|\eta\mu x| \leq |x| \quad \text{με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν } x = 0$$

άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$|x| > |\eta\mu x| \Leftrightarrow x > |\eta\mu x| \geq \eta\mu x$$

οπότε $x - \eta\mu x > 0$, επομένως $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Συνεπώς η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ αφού η g' είναι συνεχής στο 0.

Για $x > 0$ είναι

$$x > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(0) \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα για $[0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$$

Γ3. Για $t \geq 0$ είναι $y(t) = x^3(t)$, οπότε

$$y'(t) = 3x^2(t)x'(t) \quad (1)$$

Για $t = t_0$ στην (1) είναι

$$y'(t_0) = 3x^2(t_0)x'(t_0)$$

Όταν $y'(t_0) = x'(t_0)$ έχουμε

$$x'(t_0) = 3x^2(t_0)x'(t_0) \stackrel{x'(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) = \frac{1}{3} \stackrel{x(t_0) > 0}{\Leftrightarrow} x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επίσης

$$y(t_0) = x^3(t_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Συνεπώς στο σημείο $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ είναι ίσος με το ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$.

Γ4. Α' τρόπος

Αφού g άρτια για κάθε $x, -x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$g(-x) = g(x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Είναι

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

Θέτουμε $x = -u$ τότε $dx = -du$, για $x = -1$, $u = 1$, για $x = 1$, $u = -1$ τότε

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_1^{-1} -f(-u)g(-u)du = \int_{-1}^1 -f(u)g(u)du = -\int_{-1}^1 f(u)g(u)du = -I$$

δηλαδή

$$I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$$

άρα

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$$

Β' τρόπος

Έχουμε

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Στο ολοκλήρωμα

$$I_1 = \int_{-1}^0 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^0 x^3 g(x)dx$$

θέτουμε $x = -u$ τότε $dx = -du$, για $x = -1$, $u = 1$, για $x = 0$, $u = 0$ οπότε

$$I_1 = \int_1^0 (-u)^3 g(-u)(-du) = \int_1^0 u^3 g(u)du$$

άρα

$$I_1 = -\int_0^1 f(x)g(x)dx$$

οπότε

$$I = 0$$

Γ' τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι περιττή...



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in (0,1)$ η f είναι συνεχής συνάρτηση ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Για κάθε $x > 1$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{0}{0}}{\frac{0}{0}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1} = 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ η μόνη θέση που θα εξετάσουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη είναι το $x_0 = 0$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} + 1 \right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Δ2. Κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται και τα εσωτερικά σημεία στα οποία η f' δεν ορίζεται.

Για $x \in (0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1)$$

Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x-1) - x \ln x, x \geq 1$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$g'(x) = -\ln x < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$.

Οπότε

$$x > 1 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(1) \Rightarrow (x-1) - x \ln x < 0$$

άρα

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x > 1$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x(x-1)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x(2x-1)} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{2x(x-1)} = -\frac{1}{2}$$

άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, επομένως στο $x_0 = 1$ έχει μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Δ3. i) Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, 1]$ με $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1]$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ και } f(1) = 1.$$

Επειδή $0 \in f(A_1)$ και f γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, 1]$, θα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A_1$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 1$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η f είναι γνησίως

φθίνουσα στο $A_2 = [1, +\infty)$ με $f(A_2) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1, 0)$, αφού $f(1) = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{DLH} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Όμως $0 \notin f(A_2)$, άρα το $x_0 \in A_1$ είναι μοναδικό.

ii) Η f είναι συνεχής $(0, +\infty)$ άρα για το εμβαδόν του χωρίου έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx, \text{ αφού } x_0 \in (0,1]$$

άρα $x_0 < 1$ (προφανώς το $x_0 = 1$ δεν είναι ρίζα της f).

Επίσης για κάθε $x \in [x_0, 1] \subseteq (0,1]$ είναι $f(x) > 0$ διότι

$$x \geq x_0 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq 0.$$

Οπότε

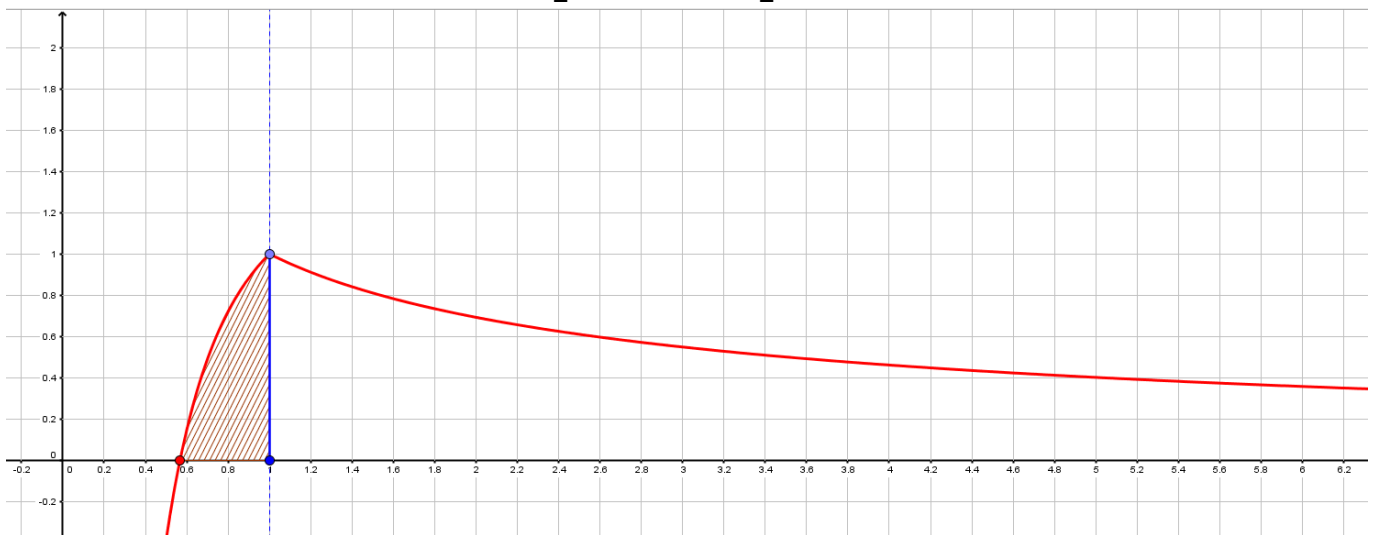
$$E(\Omega) = \int_{x_0}^1 f(x) dx = \int_{x_0}^1 \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} + x \right]_{x_0}^1 = 1 - \frac{\ln^2 x_0}{2} - x_0$$

Όμως $x_0 \in A_1$ και είναι ρίζα της f , οπότε

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$$

Οπότε το εμβαδό γίνεται

$$E(\Omega) = 1 - \frac{x_0^2}{2} - x_0 = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}$$



(το σχήμα δεν είναι απαραίτητο να γίνει, το δίνουμε όμως για εκπαιδευτικούς σκοπούς)

Δ4. Για $x > 1$ δείξαμε ότι

$$f'(x) < 0 \Rightarrow F''(x) < 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ η F' είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και άρα στο $[1, +\infty)$ επομένως η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Όμως για $x > 1$ έχουμε $1 < x < x^2$.

Θεωρούμε τα διαστήματα $[1, x]$ και $[x, x^2]$.

Σε κάθε ένα από αυτά η F ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, άρα υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x^2)$ (όπου ξ_1, ξ_2 συναρτήσεις του x) τέτοια ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \quad \text{και} \quad F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x - 1)}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \xi_1 < \xi_2 \stackrel{F' \nearrow}{\Rightarrow} F'(\xi_1) > F'(\xi_2) &\Rightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x - 1)} \\ &\stackrel{x-1>0}{\Rightarrow} (x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2) \end{aligned}$$

