

lisari team / Σχολικό έτος 2016 – 17

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ,
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΕΚΑ (10)**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό σελ. 135

A2.

α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

(Θεωρία, σχολικό σελ. 99)

A3. Θεωρία, σχολικό σελ. 73

A4. (α) Λ

(β) Σ

(γ) Λ

(δ) Σ

(ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g / g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \neq 1 / \frac{x}{1-x} > 0 \right\} = \left\{ x \neq 1 / 0 < x < 1 \right\} = (0,1)$$

και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0,1)$$

B2. Είναι:

$$h'(x) = \left(\ln \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{\frac{1-x+x}{(1-x)^2}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in (0,1)$$

Οπότε η γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Είναι

$$h((0,1)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \right) = \mathbb{R}$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} \stackrel{\theta = \frac{x}{1-x}}{=} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \ln \theta = -\infty$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} \stackrel{\theta = \frac{x}{1-x}}{=} \lim_{\theta \rightarrow +\infty} \ln \theta = +\infty$$

Οπότε για $x \in (0,1)$ και $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$y = h(x) \Leftrightarrow y = \ln \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow x = e^y - x e^y \Leftrightarrow x + x e^y = e^y \Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y}$$

άρα

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

B3. Είναι:

$$\varphi'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

- $\varphi''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2(1+e^x)e^xe^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x + e^{2x} - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}, x \in \mathbb{R}$
- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow 1-e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

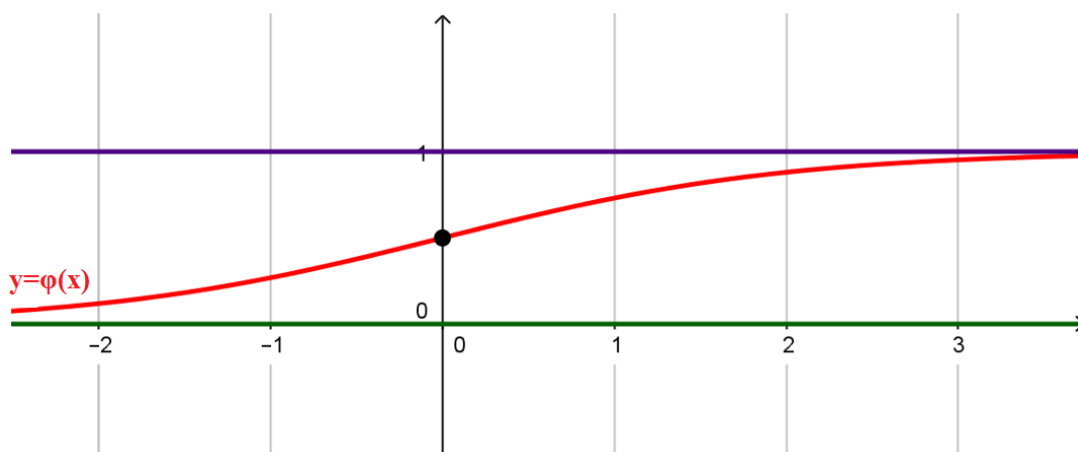
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
φ			

Η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$

Σημείο καμπής το $A(0, \varphi(0)) \rightarrow A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{0}{1+0} = 0$ οπότε $\varepsilon_1 : y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{D.L.H \ x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$ οπότε $\varepsilon_2 : y = 1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = -\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής, η εφαπτομένης της C_f στο M είναι

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$$

Η (ε) θα διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ αν, και μόνο αν,

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \sigma\upsilon\nu x_0\frac{\pi}{2} - x_0\sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}$ με $x \in [0, \pi]$. Είναι:

$$h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2}\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + x \cdot \eta\mu x = \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

άρα

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } x - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pi \text{ ή } x = \frac{\pi}{2}$$

Ακόμη για $x \in (0, \pi)$ είναι $\eta\mu x > 0$ και $x - \frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

Το πρόσημο της $h'(x)$ και η μονοτονία της h φαίνονται στον πίνακα :

x	0	$\pi/2$	π
$h'(x)$	-	0	+
h			

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ άρα παρουσιάζει για

$x = 0$ ολικό μέγιστο με τιμή $h(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, για $x = \frac{\pi}{2}$ ολικό ελάχιστο με τιμή $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$

και για $x = \pi$ ολικό μέγιστο με τιμή $h(\pi) = -\frac{\pi}{2} + \pi - \frac{\pi}{2} = 0$.

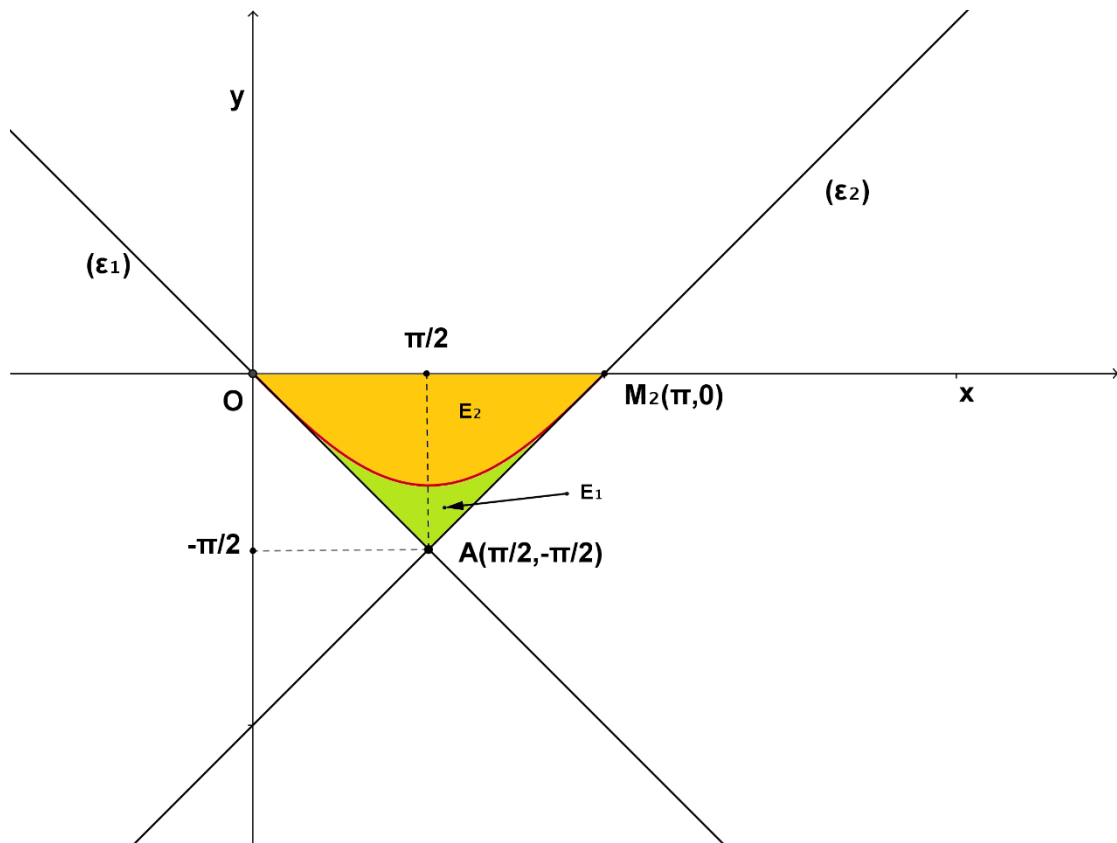
Άρα οι $x = 0$, $x = \pi$ είναι οι μοναδικές ρίζες της $h(x) = 0$.

Επομένως οι ζητούμενες εφαπτόμενες είναι στα σημεία με $x = 0$ και $x = \pi$

Άρα $O(0, f(0))$ ή $O(0, 0)$ και $M_2(\pi, f(\pi))$ ή $M_2(\pi, 0)$

Είναι $(\varepsilon_1): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$ και $(\varepsilon_2): y - f(\pi) = f'(\pi)(x - \pi) \Leftrightarrow y = x - \pi$

Γ2. Από το παρακάτω σχήμα έχουμε:



$$E_2 = \int_0^\pi |- \eta \mu x| dx = \int_0^\pi \eta \mu x dx = [-\sigma \upsilon \nu x]_0^\pi = 1 + 1 = 2\tau\mu$$

και

$$E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |-x + \eta \mu x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |x - \pi + \eta \mu x| dx = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

άρα

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + \pi}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

αφού, η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f είναι πάνω από τη C_f , εκτός του σημείου επαφής,

άρα

$$f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi \geq 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) - x + \pi) = 0$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$$

$$\text{ενώ } \lim_{x \rightarrow \pi} (f(x) + \pi) = \pi > 0$$

Γ4. Από τη C_f η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$ άρα η εφαπτομένη της C_f στο M_2 είναι κάτω από τη C_f εκτός του σημείου επαφής, άρα για κάθε $x \in [0, \pi)$ είναι

$$f(x) > x - \pi \Rightarrow \frac{x > 0}{x} \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{\pi}{x}$$

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > [x - \pi \cdot \ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - \pi - 1$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και στο $(0, \pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Στο σημείο $x = 0$ έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{0^4} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cdot \eta \mu x) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$
- $f(0) = e^0 \cdot \eta \mu 0 = 1 \cdot 0 = 0$

συνεπώς $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής και στο 0.

Τελικά η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, \pi]$.

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f' μηδενίζεται ή δεν ορίζεται.

Για $x \in (-1, 0)$ έχουμε

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^4} \stackrel{x < 0}{=} \sqrt[3]{(-x)^4} = (-x)^{\frac{4}{3}}$$

άρα

$$f'(x) = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1} \cdot (-x)' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} \neq 0, \text{ για κάθε } x \in (-1, 0).$$