

lisari team / Σχολικό έτος 2016 – 17
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ,
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΟΚΤΩ (8)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

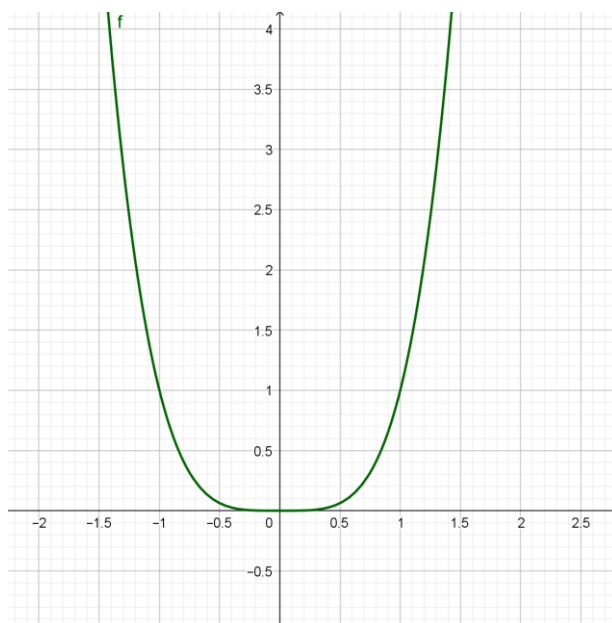
ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό σελ. 142

A2. α. Ψ

β. Είναι ψευδής η πρόταση διότι το σημείο αυτό αποτελεί πιθανή θέση σημείου καμπής. Για να είναι το x_0 θέση σημείου καμπής θα πρέπει η f'' να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και να ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = x^4$ που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι εμφανές ότι στο σημείο $x_0 = 0$ η C_f δεν έχει σημείο καμπής. Όμως $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ με $f''(0) = 0$.

A3. δ)

A4. (α) Σ

(β) Λ

(γ) Σ

(δ) Λ

(ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Το τρίγωνο EBZ είναι ορθογώνιο οπότε από Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$$EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 \Leftrightarrow EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

B2. Επειδή το τετράπλευρο ΘΕΖΗ είναι τετράγωνο έχουμε:

$$(\Theta H Z E) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

Επίσης, $EB = x \geq 0$ και $BZ = 2 - x \geq 0$ δηλαδή $x \leq 2$ άρα $0 \leq x \leq 2$. Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, 0 \leq x \leq 2$$

B3. Θα μελετήσουμε την f ως προς τα ακρότατα. Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f'(x) = 4x - 4$.

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	0	1	2
$f'(x)$		-	+
f		↘	↗

άρα η f είναι η γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, 2]$ επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ και μέγιστα στα σημεία $x_1 = 0$ με $f(0) = 4$ και $x_2 = 2$ με $f(2) = 4 = f(0)$.

B4. Αναζητούμε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$

Η f είναι συνεχής στο $A_1 = [0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_1) = [f(1), f(0)] = [2, 4]$$

Η f είναι συνεχής στο $A_2 = [1, 2]$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_2) = [f(1), f(2)] = [2, 4]$$

επομένως το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [2, 4]$$

οπότε έχουμε ότι $2 \leq f(x) \leq 4$ (1) για κάθε $x \in [0, 2]$.

Όμως

$$0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow e^0 \leq e^x \leq e^2 \Leftrightarrow 4 \leq 4e^x \leq 4e^2 \Leftrightarrow 5 \leq 4e^x + 1 \leq 4e^2 + 1 \quad (2)$$

άρα από (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) < 4e^x + 1 \text{ για κάθε } x \in [0, 2].$$

Επομένως δεν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$

Οπότε,

$$E = \int_0^3 |f'(x)| dx = -\int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx = -(f(2) - f(0)) + f(3) - f(2) = -2f(2) + 2 + f(3)$$

και αφού $E = 8$ έχουμε

$$-2f(2) + 2 + f(3) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) + f(3) = 6 \quad (1)$$

Επιπλέον αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως παραγωγίσιμη σε αυτό και δεν ικανοποιεί τις

υποθέσεις του Θ.Ε.Τ στο $[0, 3]$ τότε θα ισχύει $f(0) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 2$ και επομένως από την (1)

είναι $f(2) = -2$.

Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (xf'(x)) = 1 \cdot (-3) = -3$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = f'(1) = -3$, η f' είναι συνεχής από την γραφική της παράσταση.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

αφού $f'(x) < 0$ κοντά στο μηδέν και $f'(0) = 0$.

Γ2. Από το Γ1 έχουμε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, 3)$ και $f'(2) = 0$ άρα η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = -2$. Ακόμη από το διάγραμμα έχουμε πως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$, ενώ $f''(1) = 0$ αφού η καμπύλη της C_f δέχεται εφαπτομένη στο $(1, f'(1))$.

Το πρόσημο $f'(x)$ η μονοτονία – ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	2	3
$f'(x)$		–	+
f		↘	↗

Η μονοτονίας της f' και τα διαστήματα που η f είναι κυρτή – κοίλη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	3
$f'(x)$		↘	↗
f		↪	↻

Συμπερασματικά λοιπόν,

- η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$, γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 2$ το $f(2) = -2$ και τοπικά μέγιστα στα $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ με τιμή $f(0) = f(3) = 2$.
- η f είναι κοίλη στο $[0, 1]$, κυρτή στο $[1, 3]$ και το σημείο $(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής.

Γ3. Αν είναι $f(x_0) \neq 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ υπάρχει αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ άρα και στο

$[2, 3]$. Επομένως για να μην υπάρχει το όριο θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ ώστε

$f(x_0) = 0$ και η f να μην διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

Η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και $f(2) \cdot f(3) = -2 \cdot 2 = -4 < 0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει

$x_0 \in (2, 3)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Επίσης η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 3]$ άρα το x_0 είναι μοναδικό

και

$$2 < x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$$

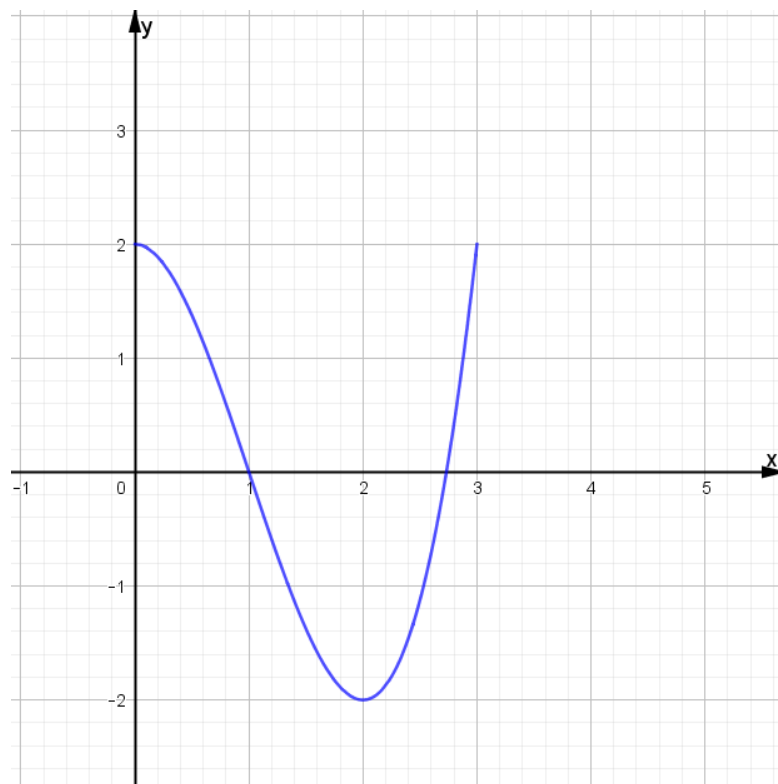
$$x_0 < x < 3 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$$

Επομένως το παραπάνω όριο στο x_0 δεν υπάρχει.

Γ4. Σύμφωνα με τον πίνακα μεταβολών της f από τα δεδομένα του ερωτήματος Γ2 έχουμε:

x	0	1	2	3
$f'(x)$	—		—	+
f	↘	↘	↗	
	Σ.Κ		Ο.Ε	

η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι ως εξής:



Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 2]$ ως πολωνυμική συνάρτηση, όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x^2 + 2) = 2 = f(0)$$

Επομένως ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Άρα η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[0, 2]$.

Δ2. Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $x_0 = 0$ επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha \right) = 2 \Rightarrow -1 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 3$$

Δ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} & , x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ 3x^2 - 6x & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} < 0$$

όπου $g(x) = \eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$, αφού

$g'(x) = x\eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ οπότε

$$x < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) = 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f		↘	↗

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Συνολικά, επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\right]$.

Δ4. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^2 f(x) dx &= \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx + \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx \\&= \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_0^2 \\&= \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx + 0 \\&= \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx\end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\pi < \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1$$

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 &\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0) \Rightarrow 2 \leq f(x) \leq 3 - \frac{2}{\pi} \\&\Rightarrow \int_{-\pi/2}^0 2 dx < \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx < \int_{-\pi/2}^0 \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) dx \\&\Rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} < \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx < \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \\&\Rightarrow \pi < \int_{-\pi/2}^0 f(x) dx < \frac{3\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

Δ5. Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε:

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}x \leq 0$$

και

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^0 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{2}e^{-x} \leq -\frac{\pi}{2e} < 0$$

Επομένως, για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε: $-\frac{\pi}{2}x, -\frac{\pi}{2}e^{-x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ όπου η f είναι γνησίως φθίνουσα

άρα και $1 - 1$ οπότε,

$$f\left(-\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = f\left(-\frac{\pi}{2}e^{-x}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \cdot x = -\frac{\pi}{2}e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = x \Leftrightarrow e^{-x} - x = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $e^{-x} - x = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, 1)$.

Θέτουμε συνάρτηση: $h(x) = e^{-x} - x, x \in \mathbb{R}$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης,

$$h(0) = 1 > 0 \text{ και } h(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

οπότε $h(0) \cdot h(1) < 0$, άρα η h ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0, 1)$ και επειδή η h είναι γνησίως φθίνουσα η λύση αυτή είναι μοναδική.

