

lisari team / Σχολικό έτος 2017 – 18

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο σελ. 145

A2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελ. 15

A3. Η παράγωγος της συνάρτησης f μπορεί να είναι η T και της g η συνάρτηση H

A4. α. Ψ

β. Είναι ψευδής η πρόταση αφού αν για παράδειγμα πάρουμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

A5. (α) Σ

(β) Σ

(γ) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $D_f = \mathbb{R}$. Για $x < 1$ η f συνεχής ως άθροισμα συνεχών και για $x > 1$ η f συνεχής ως πηλίκο συνεχών. Για να είναι η f συνεχής στο πεδίο ορισμού της θα πρέπει να είναι και συνεχής στο 1.

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha \quad \text{και} \quad f(1) = \alpha + 1$$

άρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2 = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\mathbf{B2.} \text{ Είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + 1, & x \leq 1 \end{cases}$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>

06- 09 - 2018

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right] \subseteq \mathbb{R}$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ με $f'(x) = 2x$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 4)$ με $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Ελέγχουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη και στο 1. Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x+1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \frac{1}{x} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

$$\text{B3. Είναι } f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2}, & x > 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Για } x < 1: f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{8} \text{ (δεκτή)}$$

$$\text{Για } x > 1: f'(x) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (δεκτή)}$$

Επομένως, τα σημεία που η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2018$

είναι τα $A\left(-\frac{1}{8}, f\left(-\frac{1}{8}\right)\right)$ και $B(2, f(2))$.

Έχουμε,

$$\varepsilon_A: y - f\left(-\frac{1}{8}\right) = f'\left(-\frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right) \stackrel{f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{65}{64}}{\Leftrightarrow} y - \frac{65}{64} = -\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{63}{64}$$

$$\varepsilon_B: y - f(2) = f'(2)(x - 2) \stackrel{f(2) = \frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + 2$$

B4. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

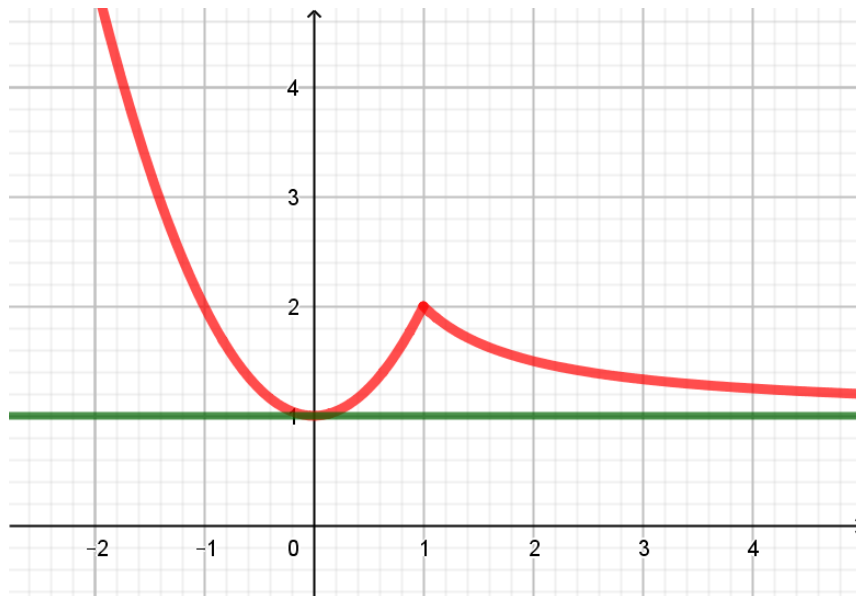
<http://lisari.blogspot.gr>
06– 09 – 2018

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Στο $-\infty$ η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2^{ου} βαθμού άρα δεν έχει πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $f'(x) = 2\sin x - 1$

Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$, διότι $x \in [0, \pi]$

Η f' είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ άρα διατηρεί πρόσημο μεταξύ των ριζών της. Το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>

06– 09 – 2018

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
x_0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(x_0)$	$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-1=\sqrt{2}-1>0$	$2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-1=0-1<0$	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{3}$ το $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$, ολικό ελάχιστο στο π το $-\pi$ και τοπικό ελάχιστο στο 0 το 0 .

Γ2. Ισχύει $f''(x) = -2\eta\mu x < 0$ στο $(0, \pi)$ άρα η f είναι κοίλη στο $[0, \pi]$, συνεπώς η εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της $x_0 \in [0, \pi]$ είναι πάνω από την C_f εκτός του σημείου x_0 . Επομένως η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Είναι

$$\int_0^\pi f(x) \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^\pi (2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - x \sigma\upsilon\nu x) dx = \int_0^\pi 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx - \int_0^\pi x \sigma\upsilon\nu x dx = I_1 - I_2$$

Για το I_1 θέτουμε $\eta\mu x = u$ τότε $\sigma\upsilon\nu x dx = du$

$$\text{Για } x=0, u_1=0 \text{ και για } x=\pi, u_2=0 \text{ τότε } I_1 = \int_0^\pi 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^0 2u du = 0$$

Για το I_2 έχουμε:

$$I_2 = \int_0^\pi x \sigma\upsilon\nu x dx = [x\eta\mu x]_0^\pi - \int_0^\pi \eta\mu x dx = [x\eta\mu x]_0^\pi + [\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -2$$

Επομένως,

$$\int_0^\pi f(x) \sigma\upsilon\nu x dx = 2$$

Γ4. α) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$

β) Είναι:

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>
06-09-2018

$$\lim_{x \rightarrow 0} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x) - f(2x)}{x} \cdot x \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - 2 \frac{f(2x)}{2x} \right) \cdot x \ln x \right] = (1 - 2 \cdot 1) \cdot 0 = 0$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Α' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$K(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \quad \text{με } x \in [0, +\infty)$$

και ζητούμε $K(x) > 0$, για κάθε $x > 0$. Έχουμε:

$$K'(x) = \ln(x+1) + (x+1) \frac{1}{x+1} - 1 = \ln(x+1), \quad x > 0,$$

όμως

$$x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln 1 = 0,$$

άρα είναι $K'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και επειδή η K είναι φανερά συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι $K \nearrow$ στο $[0, +\infty)$, οπότε: $x > 0 \Rightarrow K(x) > K(0) = 0$

Β' τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$m(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}, \quad x \in [0, +\infty)$$

και ζητούμε $m(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Έχουμε:

$$m'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0 \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

οπότε $m \nearrow$ στο $[0, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και για κάθε εσωτερικό του $(0, +\infty)$ είναι $m'(x) > 0$ οπότε: $x > 0 \Rightarrow m(x) > m(0) = 0$

Γ' τρόπος

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>

06– 09 – 2018

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1) > 1 - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} > 1 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $x > 0$

Είναι, $r'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ και ο πίνακας προσήμων της $r'(x)$ και η μονοτονία της συνάρτησης r φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$
$r'(x)$		–	+
r		$\searrow$	$\nearrow$

άρα για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$x+1 > 1 \Rightarrow r(x+1) > r(1) \Rightarrow \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} > 1$$

Δ' τρόπος

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει :

$$\ln x < x - 1 \xrightarrow{e^x \nearrow} x < e^{x-1} \Rightarrow e^x > ex$$

Για $x > 0$ έχουμε $0 < \frac{1}{1+x} < 1$ και έτσι έχουμε:

$$e^{\frac{1}{1+x}} > e \frac{1}{x+1} \xrightarrow{\ln x \nearrow} \ln e^{\frac{1}{1+x}} > 1 + \ln \frac{1}{x+1} \Rightarrow \ln(x+1) > 1 - \frac{1}{x+1} \Rightarrow \ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} < 0 \text{ αφού } \frac{x}{x+1} - \ln(x+1) < 0$$

όπως είδαμε στο Δ1, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ άρα «1–1» και συνεπώς αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f όμως η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ συνεπώς:

$$f((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (0, 1)$$

διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>

06– 09 – 2018

$$f(x)+1 > 2^{f(x)} \Leftrightarrow \ln(f(x)+1) > f(x) \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(f(x)+1)}{f(x)} > \ln 2 \Leftrightarrow f(f(x)) > f(1) \Leftrightarrow f(x) < 1$$

που ισχύει.

Δ4. Θεωρούμε τη πολυωνυμική συνάρτηση:

$$h(x) = x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi) \text{ με } x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και:

- $h(0) = 2\eta\mu(\alpha\pi) > 0$ αφού $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < \alpha\pi < \pi$
- $h(1) = -f(\alpha) < 0$ αφού $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x > 0$

Επομένως η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική και :

- $h(1) < 0$
- $h(2) = f^{-1}(\alpha) > 0$ αφού το σύνολο τιμών της αντίστροφης είναι το πεδίο ορισμού της f δηλαδή το $(0, +\infty)$.

Επομένως η εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi) = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

Όμως η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\alpha\pi)}{x} = 0$ και η εξίσωση

$$x(x-2)f(\alpha) + x(x-1)f^{-1}(\alpha) + (x-1)(x-2)\eta\mu(\alpha\pi) = 0 \text{ στο } (0,1) \cup (1,2) \text{ είναι ισοδύναμες.}$$

Η δεύτερη όμως είναι δευτέρου βαθμού αφού $f(\alpha) + f^{-1}(\alpha) + \eta\mu(\alpha\pi) > 0$ (ως άθροισμα συντελεστών του x^2) άρα έχει το πολύ δυο ρίζες.

Συνεπώς έχουμε δυο ακριβώς ρίζες ως προς x , από μία στα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,2)$.

Δ5. Η F είναι συνεχής στο $[1, e]$ παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $F'(x) = f(x)$ γνησίως φθίνουσα.

Άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{F(e) - F(1)}{e - 1}$$

$$\text{Ισχύει } 1 < \xi < e \Rightarrow f(1) > f(\xi) > f(e) \Rightarrow \ln 2 > \frac{e \ln 2 - F(1)}{e - 1} > \frac{\ln(e+1)}{e}$$

$$\Rightarrow (e-1) \ln 2 > e \ln 2 - F(1) > \frac{(e-1) \ln(e+1)}{e}$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.gr>
06- 09 - 2018

$$\Rightarrow (e-1)\ln 2 - e\ln 2 > -F(1) > \frac{(e-1)\ln(e+1) - e^2 \ln 2}{e}$$

$$\Rightarrow \ln 2 < F(1) < \frac{e^2 \ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{e^2 \ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right) \Leftrightarrow \frac{e^2 \ln 2 - (e-1)\ln(e+1)}{e} < \ln 2^{e+1} - \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow e^2 \ln 2 - (e-1)\ln(e+1) < e \ln 2^{e+1} - e \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow e^2 \ln 2 - (e-1)\ln(e+1) < e(e+1)\ln 2 - e \ln(e+1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(e+1) < e \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(e+1)}{e} < \ln 2$$

$$\Leftrightarrow f(e) < f(2)$$

$$\stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} e > 2$$

που ισχύει.