

lisari team / Σχολικό έτος 2018 – 19

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΙΑ (9)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1) α) Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y .

β) i. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν είναι ένα προς ένα.

ii. **A' διατύπωση ορισμού**

Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

B' διατύπωση ορισμού

Αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε ορίζεται μια συνάρτηση $g : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχίζει το y στο x . Η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Γ' διατύπωση ορισμού

Η αντίστροφη f^{-1} της f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(A)$ και ισχύει $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ για κάθε $x \in A$ και $y \in f(A)$.

(Αν η παραπάνω ισοδυναμία διατυπωθεί λεκτικά θεωρείται σωστή. Οδηγία από την ΚΕΕ)

A2) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0.$$

A3) Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

10 – 6 – 2019

ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$. Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

A4) α) Λάθος, διότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$ αν και $f'(x) = 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ εντούτοις δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

β) Λάθος, διότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2019, & x = 1 \end{cases}$ έχει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

ενώ η τιμή της στο $x_0 = 1$ είναι 2019, άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) = 2019$

A5) Σωστό το (γ).

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \cdot 0 + \lambda = \lambda$, άρα $\lambda = 2$.

B2. Θεωρούμε συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $h(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$

Η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε και $1 - 1$. Η h είναι συνεχής στο $[2, 3] \subseteq \mathbb{R}$ και

$$h(2) = e^{-2} > 0, \quad h(3) = e^{-3} - 1 = \frac{1 - e^{-3}}{e^3} < 0$$

επομένως $h(2) \cdot h(3) < 0$ και από Θ. Bolzano η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2, 3)$ κι αφού η h είναι $1 - 1$ είναι μοναδική.

B3. Είναι $f'(x) = -e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και $1 - 1$, συνεπώς αντιστρέφεται. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $D_f = \mathbb{R}$ άρα έχει

σύνολο τιμών: $f(D_f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (2, +\infty)$ διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 2) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 2) = 2$$

Για $x \in \mathbb{R}$ και $y \in (2, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \Leftrightarrow -x = \ln(y - 2) \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2)$$

Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), x \in (2, +\infty)$

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

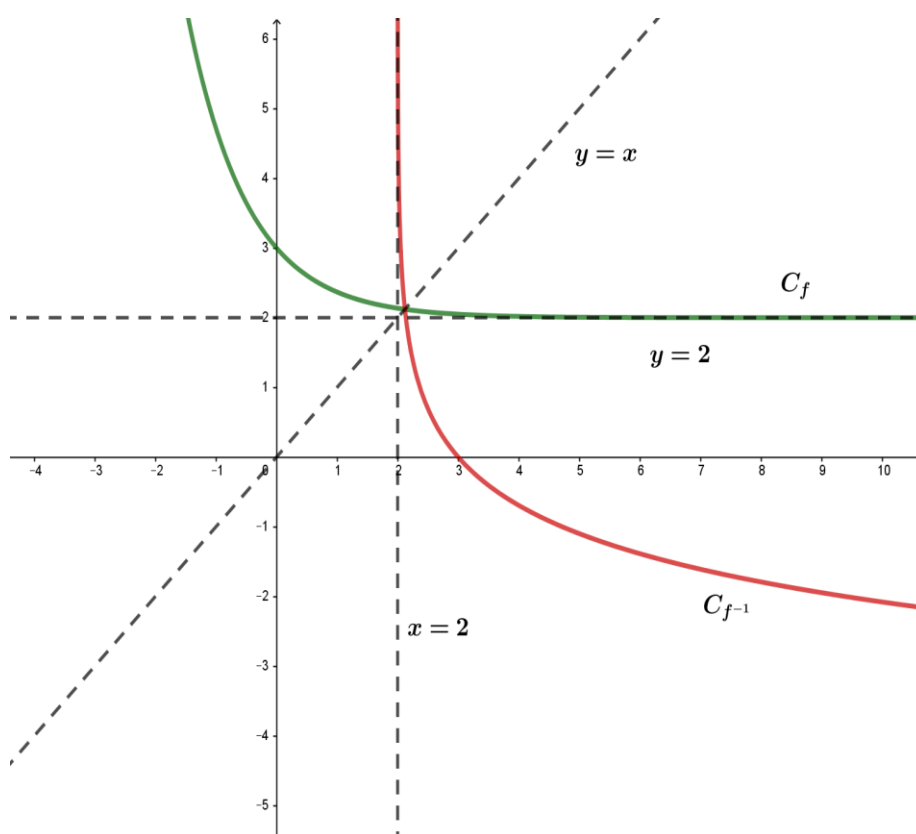
10 – 6 – 2019

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x-2)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-\ln u) = +\infty$ διότι, θέτουμε $u = x-2$ και είναι

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} u = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0$$

άρα η ευθεία $x=2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης e^{-x} είναι συμμετρική της e^x ως προς τον άξονα $y'y$. Οπότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση 2 μονάδες πάνω της e^{-x} . Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y=x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα θα είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $x_0 = 1$ οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \in \mathbb{R} \quad (2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + \beta x) = e^0 + \beta = 1 + \beta$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha$
- $f(1) = 1 + \alpha$

λόγω της (1) είναι $1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Επίσης,

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

10 – 6 – 2019

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\alpha=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = e^0 + \beta = 1 + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + \alpha - 1 - \alpha}{x - 1} \stackrel{\alpha=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1} = 2$$

Λόγω της (2) είναι $1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = 1$ οπότε λόγω της (1) $\alpha = 1$

Γ2. Έχουμε, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \ x \geq 1 \\ e^{x-1} + x & , \ x < 1 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \ x \geq 1 \\ e^{x-1} + 1 & , \ x < 1 \end{cases}$$

- Για κάθε $x < 1$ είναι $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 1 > 0$
- Για κάθε $x > 1$ είναι $f'(x) = 2x > 2 > 0$
- Η f είναι και συνεχής στο $x_0 = 1$

άρα από γνωστή πρόταση του σχολικού βιβλίου η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Έτσι

$$f(A) = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

Γ3. i. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, 0)$, οπότε

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right)$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = e^{-1}$$

Το $0 \in f(A_1)$ συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει αρνητική ρίζα x_0 η οποία είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Για $x \in (x_0, +\infty)$ είναι

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)(f(x) - x_0) = 0$$

Έχουμε

$$x > x_0 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

και

$$f(x) - x_0 > 0 \text{ για κάθε } x > x_0$$

διότι

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

10 – 6 – 2019

$$f(x) > 0 \text{ και } x_0 < 0 \Leftrightarrow -x_0 > 0$$

Οπότε η εξίσωση $f(x)(f(x) - x_0) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Για $x \geq 1$ έχουμε

$$E = \frac{1}{2}(\text{OK})(\text{KM}) = \frac{1}{2}|x||f(x)| = \frac{1}{2}x(x^2 + 1) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$$

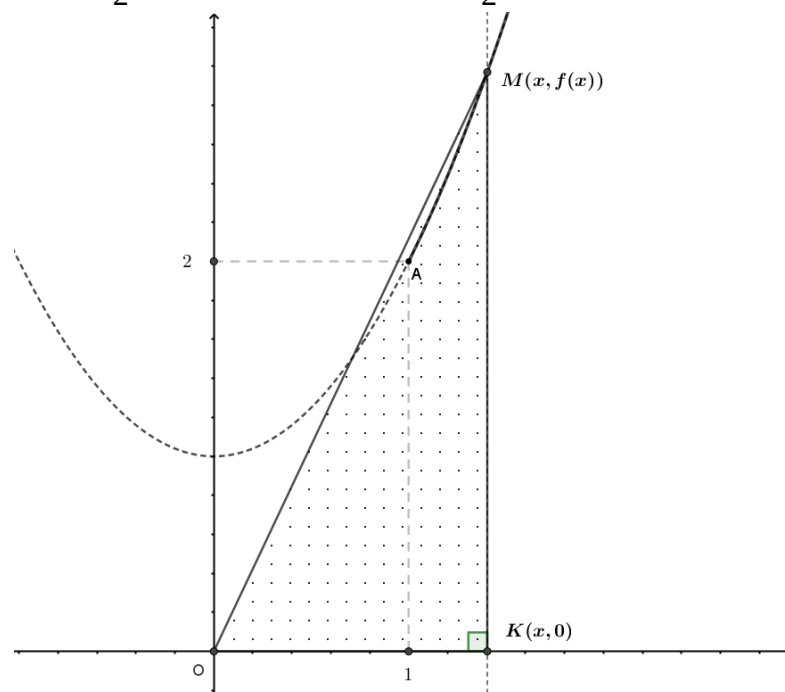
Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι

$$E(t) = \frac{1}{2}(x^3(t) + x(t))$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε

$$E'(t) = \frac{1}{2}(3x^2(t)x'(t) + x'(t))$$

$$\text{Για } t = t_0 \text{ είναι: } E'(t_0) = \frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)) = \frac{1}{2}(3 \cdot 3^2 \cdot 2 + 2) = 28 \text{ τ.μ./sec}$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Πρέπει $f(1) = 1$ και $f'(1) = -1$ οπότε $f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$ (1). Επίσης,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}(x - 1) + \alpha \\ &= \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x - 1)^2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha \end{aligned}$$

$$\text{όμως } f'(1) = -1 \Leftrightarrow \ln 1 + \frac{2(1-1)^2}{1-2+2} + \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε $\alpha = -1$ και $\beta = 2$

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

10 – 6 – 2019

$$\Delta 2. E = \int_1^2 |f(x) - (-x + 2)| dx = \int_1^2 |f(x) + x - 2| dx$$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in [1, 2] \text{ έχουμε: } f(x) + x - 2 &= (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2 + x - 2 \\ &= (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } E = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\text{Θέτουμε } x^2 - 2x + 2 = u \text{ οπότε } 2(x-1) dx = du \text{ άρα}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 u \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1 \ln 1) - \frac{1}{2} [u]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

x	1	2
u	1	2

Β' τρόπος (συνοπτικά - υπολογισμός ολοκληρώματος)

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-2) \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 2)' \ln(x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[(x^2 - 2x + 2) \ln(x^2 - 2x + 2) dx \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 2) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} [x^2 - 2x]_1^2 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Delta 3. \text{ i. Έχουμε, } f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \text{ άρα θα αποδείξουμε ισοδύναμα ότι:}$$

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

που ισχύει διότι :

$$(x-1)^2 + 1 \geq 1 \xrightarrow{\ln x \nearrow (0, +\infty)} \ln((x-1)^2 + 1) \geq \ln 1 \Rightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \text{ και } \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Β' τρόπος (συνοπτικά)

Θα αποδείξουμε ότι η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1 \right)' \\
 &= \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4(x-1)(x^2 - 2x + 2) - 2(x-1)^2(2x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\
 &= \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4(x-1)(x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2x - 1)}{(x^2 - 2x + 2)^2} \\
 &= \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x + 2} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 2x + 2} \right) \\
 &= \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 2x + 2)^2}
 \end{aligned}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f' και ο πίνακας προσήμων την f'' είναι ο εξής:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
f'		$\searrow$	$\nearrow$

άρα ... για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \geq f'(1) = -1$.

ii. Η f συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ από ΘΜΤ υπάρχει

$$\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right) \text{ τέτοιο ώστε: } f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\lambda + \frac{1}{2} - \lambda}. \text{ Όμως}$$

$$f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

Β' τρόπος (συνοπτικά)

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία είναι γν. αύξουσα διότι $h'(x) = f'(x) - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και την ισότητα να μηδενίζεται μόνο στο $x_0 = 1$ που είναι συνεχής. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda &\geq (\lambda - 1)\left(\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2)\right) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)\left(\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2)\right) + 2 \\
 &\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + 2 \\
 &\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) + \lambda \\
 &\Leftrightarrow h\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq h(\lambda) \\
 &\Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda
 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x) = -3x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $M(x_1, f(x_1))$, $N(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f , C_g αντίστοιχα τότε πρέπει,

$$f'(x_1) = g'(x_2)$$

Όμως από το Δ3i είναι $f'(x_1) \geq -1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1 = 1$ και

$g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_2 = 0$, άρα είναι $M(1, f(1))$ και

$N(0, g(0))$ μοναδικά σημεία αφού οι ισότητες ισχύουν μόνο για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$

Άρα η κοινή τους εφαπτομένη είναι

$$\varepsilon: y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Β' τρόπος

Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_1, f(x_1))$ είναι

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)(x_1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $B(x_2, g(x_2))$ είναι :

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) = g'(x_2)x + g(x_2) - x_2 g'(x_2)$$

Η C_f και η C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \quad (1) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Όμως $f'(x_1) \geq -1$ και $-3x_2^2 - 1 \leq -1$

Άρα για να ισχύει η (1) πρέπει :

$$f'(x_1) = -1 \text{ και } -3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x_1) = -1 \text{ και } x_2 = 0$$

Όμως

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2 + 1\right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 = -1$$

Μαθηματικά Προσανατολισμού
Γ' Λυκείου

<http://lisari.blogspot.com>

10 – 6 – 2019

$$\Leftrightarrow \ln \left[(x-1)^2 + 1 \right] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

διότι $\ln \left[(x-1)^2 + 1 \right] \geq 0$ και $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο 1,

άρα $f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow x_1 = 1$. Επομένως,

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0 \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = 0$$

Αφού επαληθεύουν και την :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2$$

Για $x_1 = 1$ έχουμε :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + 1 = -x + 1 + 1 = -x + 2.$$