

lisari team / Σχολικό έτος 2019 – 20

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (ΝΕΟ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

A2. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}.$$

A3. α. Ο ισχυρισμός της πρότασης είναι Ψευδής. (Σχολικό βιβλίο σελ. 136)

β. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η παράγωγος της δεν είναι αναγκαστικά θετική. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^3$ αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει παράγωγο $f'(x) = 3x^2$ που δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f'(0) = 0$. (Σχολικό βιβλίο σελ. 136)

A4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό (σελίδα 177 σχολικό βιβλίο)

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $D_f = (1, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$. Η $f \circ g$ ορίζεται για

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x \in (1, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^x > e^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } D_{f \circ g} = (0, +\infty) \text{ και } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) + 2}{g(x) - 1} = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

B2. Α' τρόπος

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$(f \circ g)'(x) = \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$ άρα η $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, άρα και «1 – 1». Η $f \circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$$(f \circ g)((0, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

γιατί

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} \stackrel{u=e^x}{=} \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{u + 2}{u - 1} = +\infty$$

Άρα η $(f \circ g)^{-1}$ ορίζεται στο σύνολο τιμών της $f \circ g$ δηλαδή στο $(1, +\infty)$, άρα για $y > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x - 1) \\ &\Leftrightarrow e^x(1 - y) = -y - 2 \\ &\Leftrightarrow e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \\ &\Leftrightarrow x = \ln \left(\frac{y + 2}{y - 1} \right) \end{aligned}$$

Άρα $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln \left(\frac{x + 2}{x - 1} \right)$ με $x > 1$.

B' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{e^{x_1} + 2}{e^{x_1} - 1} = \frac{e^{x_2} + 2}{e^{x_2} - 1} \Rightarrow (e^{x_1} + 2)(e^{x_2} - 1) = (e^{x_1} - 1)(e^{x_2} + 2) \\ &\Rightarrow e^{x_1}e^{x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1}e^{x_2} + 2e^{x_1} - e^{x_2} - 2 \\ &\Rightarrow -3e^{x_1} = -3e^{x_2} \\ &\Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

άρα η $f \circ g$ είναι «1 – 1» και

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x - 1) \\ &\Leftrightarrow e^x(1 - y) = -y - 2 \\ &\stackrel{y \neq 1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \\ &\stackrel{y < -2 \text{ ή } y > 1}{\Leftrightarrow} x = \ln \left(\frac{y + 2}{y - 1} \right) \end{aligned}$$

όμως

$$x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Άρα $(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$.

B3. Η $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ με $x > 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_\varphi = (1, +\infty)$ με

$$\varphi'(x) = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

B4. Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty,$$

όπου $u = \frac{x+2}{x-1}$ και αν $x \rightarrow 1^+$ το $u \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0,$$

όπου $u = \frac{x+2}{x-1}$ και αν $x \rightarrow +\infty$ το $u \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε θα είναι και συνεχής στο 0. Συνεπώς

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \upsilon \nu x) = 0 + \lambda = \lambda.$$

Πρέπει:

$$1 - \ln \lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$. Έχουμε

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0,$$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και $1 - 1$. Από την σχέση (1) έχουμε

$$g(\lambda) = g(1) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} \lambda = 1$$

Γ2. Αρκεί να δείξουμε ότι $f'(0) = \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} = 1$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1-x)} = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Οπότε

$$f'(0) = 1$$

Γ3. Για κάθε $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Για κάθε $x > 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Επίσης ισχύει $f'(0) = 1$, άρα

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

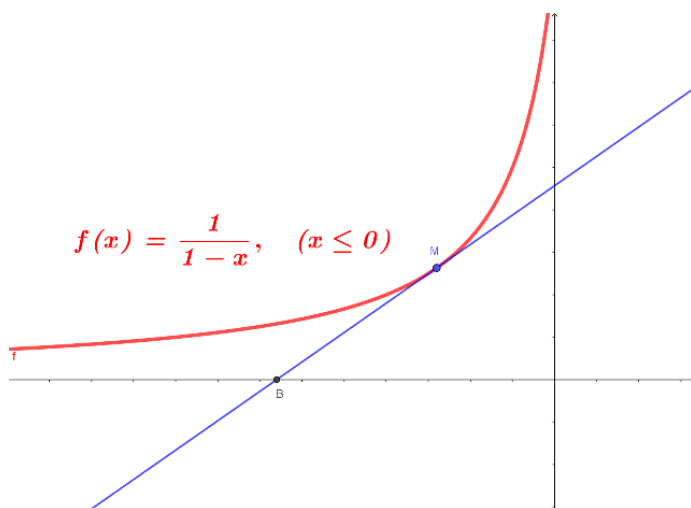
Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, τα κρίσιμα σημεία της είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία μηδενίζεται η παράγωγός της.

Για κάθε $x < 0$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = 0$, αδύνατη.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$

(αφού $0 < x < \frac{3\pi}{2}$)

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{5\pi}{4}$.



Γ4. Για $x \leq 0$ η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα.

Η εφαπτομένη της C_f στη θέση M είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B , που προκύπτει για $y = 0$:

$$-f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x - \alpha) \Leftrightarrow x = 2\alpha - 1$$

άρα $x_B = 2\alpha - 1$.

Δίνεται $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\alpha}{3}$ και την χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = \alpha_0 = -1$, συνεπώς :

$$\frac{dx_B}{dt} = \frac{d(2\alpha - 1)}{dt} = \frac{d(2\alpha - 1)}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = 2 \frac{d\alpha}{dt}$$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε:

$$\left. \frac{dx_B}{dt} \right|_{t_0} = 2 \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t_0} = 2 \left(-\frac{\alpha_0}{3} \right) = 2 \left(-\frac{-1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

Με άλλη γραφή :

$$\begin{aligned} x_B(t) = 2\alpha(t) - 1 &\Rightarrow (x_B(t))' = (2\alpha(t) - 1)' \\ &\Rightarrow x_B'(t) = 2\alpha'(t) \\ &\Rightarrow x_B'(t) = 2 \left(-\frac{\alpha(t)}{3} \right) \\ &\Rightarrow x_B'(t_0) = 2 \left(-\frac{\alpha(t_0)}{3} \right) = 2 \left(-\frac{-1}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x) = e^x + 2x - e, \quad f''(x) = e^x + 2 > 0$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1.

Α' τρόπος

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$f'(0) = 1 - e < 0, \quad f'(1) = 2 > 0$$

Επομένως $f'(0)f'(1) < 0$ και συνεπώς από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι 1 - 1 το x_0 είναι μοναδικό.

Β' τρόπος

Για τη f ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, διότι

- f συνεχής στο $[0,1]$
- f παραγωγίσιμη στο $(0,1)$
- $f(0) = f(1) = 0$

άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_0) = 0$ και επειδή η f' είναι 1-1 το x_0 είναι μοναδικό.

Συνεπώς,

$$x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$$

και επειδή η f συνεχής στο x_0 τελικά η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 .

Ο πίνακας μεταβολών που μας δείχνει τα παραπάνω συμπεράσματα είναι ο εξής:

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	+	+	
$f'(x)$		$f'(0)=1-e$ -	0	$f'(1)=2$ +	
f			0		

Ο.Ε

$$f(x_0) < 0$$

Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ επομένως

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1.$$

Δ2. Α' τρόπος

Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε,

$$f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$$

και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

διότι η f είναι συνεχής στο x_0 τελικά $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$

Για κάθε $x \neq x_0$ έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \right) = +\infty \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = +\infty .$$

Β' τρόπος

Έστω $x > x_0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[\frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) \right] = +\infty$$

διότι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty \quad (x > x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = +\infty \quad (\text{για } x > x_0 \text{ από } \Delta 1 \text{ έχουμε: } f'(x_0) > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) = 0, \text{ από κριτήριο παρεμβολής } -(x - x_0) \leq (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq (x - x_0)$$

Έστω $x < x_0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[\frac{1}{x - x_0} \left(\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) \right] = +\infty$$

διότι,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty \quad (x < x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = -\infty \quad (\text{για } x < x_0 \text{ από } \Delta 1 \text{ έχουμε: } f'(x_0) < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) = 0, \text{ από κριτήριο παρεμβολής } -(x - x_0) \geq (x - x_0) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \geq (x - x_0)$$

άρα συνολικά,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right) = +\infty .$$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) + x - x_0, x \in [x_0, 1]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων

- $h(1) = f(1) + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$
- $h(x_0) = f(x_0)$

Όμως $x_0 < 1 \xRightarrow{f \nearrow [x_0, +\infty)} f(x_0) < f(1) \Rightarrow f(x_0) < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει

$$\rho \in (x_0, 1) : h(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0$$

διότι $h'(x) = f'(x) + 1 > 1$ και για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > 0$, άρα η h είναι 1-1 και άρα η ρίζα είναι μοναδική.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ έχει μοναδική ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$.

Δ4. Έχουμε,

$$f(\rho) + \rho = x_0 \Rightarrow f(\rho) = x_0 - \rho.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(\kappa) + 1)$. Επειδή είναι $x_0 - \rho < 0$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) + 1 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - (x_0 - \rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa).$$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$, παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) , άρα από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (x_0, \rho)$

τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$.

Ισχύει $x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$ και από το Δ1 η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$f'(\xi) < f'(\kappa) \Rightarrow \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \text{ για κάθε } \kappa \in (\rho, 1).$$