

lisari team / Σχολικό έτος 2019 – 20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 144

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

A2. Κριτήριο παρεμβολής σελ. 51

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lambda$

τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$

A3. Ορισμός σελ. 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

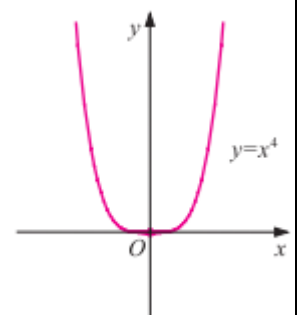
A4. Σχόλιο σελ. 156

α) Η πρόταση είναι ψευδής. $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1$

β) Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$

Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η $f''(x)$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$, αφού $f''(0) = 0$.

Σημείωση: Το σχήμα είναι προαιρετικό



A5. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό (Ερώτηση κατανόησης 13 σελ. 237)

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x + \alpha)$ διότι η κλίση της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ είναι ίση με 2 ισχύει

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

B2. Για κάθε $x \in [-1, +\infty)$ είναι

$$f(x) = (x+1)^2 - 1$$

και

$$f'(x) = 2(x+1) > 0 \text{ στο } (-1, +\infty)$$

και επειδή f συνεχής στο -1 η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, τότε f είναι 1-1, συνεπώς η f αντιστρέφεται.

Έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = y \Leftrightarrow (x+1)^2 = y+1, y+1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{y+1}, y \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y+1} - 1, y \geq -1 \end{aligned}$$

δηλαδή

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+1} - 1, y \geq -1.$$

Επομένως η αντίστροφη της f είναι η

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1, x \geq -1.$$

B3. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[-1, +\infty)$. Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η $f^{-1} \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το

$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) \in [-1, +\infty)\} = \mathbb{R}$$

αφού

$$g(x) \in [-1, +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$(f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1 + 1} - 1 = \sqrt{x^2} - 1 = |x| - 1, x \in \mathbb{R}$$

B4. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f^{-1}(x) + 1}{(f^{-1} \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = -\infty$$

αφού $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ ισχύει $x < 0$ κοντά στο -1 τότε $|x| = -x$ και $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0$ με $\sqrt{x+1} > 0$

κοντά στο -1 τότε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $2yx$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΒΓ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε έχουμε:

$$2^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

Επίσης, η κάθετη πλευρά ΒΓ είναι μικρότερη της υποτείνουσας ΚΓ = 2 cm, άρα $0 < x < 2$. Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{x^2}\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{4x^2 - x^4}, 0 < x < 2$$

Γ2. Για κάθε $x \in (0, 2)$ έχουμε:

$$E'(x) = \frac{4x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

Ο πίνακας μεταβολών για τη συνάρτηση E φαίνεται παρακάτω:

x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$E'(x)$		+		-	
E		↗ 0	4	↘ 0	

Γ3. Α' τρόπος (αλγεβρικά)

Έχουμε,

$$E(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2 - x^4} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 4x^2 - x^4 = 3 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

Αν θέσουμε $\omega = x^2$ η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = 3$$

άρα

$$x = 1 \text{ ή } x = \sqrt{3}$$

που είναι δεκτές αφού $x \in (0, 2)$.

Β' τρόπος (ανάλυση)

Για κάθε $x \in (0, \sqrt{2})$ έχουμε ότι η E είναι γνησίως αύξουσα, άρα η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$E(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow E(x) = E(1) \stackrel{1, x \in (0, \sqrt{2})}{\Leftrightarrow} x = 1$$

Επίσης, για κάθε $x \in (\sqrt{2}, 2)$ έχουμε ότι η E είναι γνησίως φθίνουσα, άρα η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$E(x) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow E(x) = E(\sqrt{3}) \stackrel{\sqrt{3}, x \in (\sqrt{2}, 2)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$$

Άρα οι τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3} \text{ cm}^2$ είναι 1 cm και $\sqrt{3} \text{ cm}$.

Γ4. Για κάθε $x \in (0, 2)$ έχουμε:

$$f'(x) = E'(x) + (E(x) - 2\sqrt{3})e^x$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$, δηλαδή αρκεί να ικανοποιείται για τη συνάρτηση f' το θεώρημα Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$.

Είναι,

- Η f' είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $f'(\sqrt{2}) = E'(\sqrt{2}) + (E(\sqrt{2}) - 2\sqrt{3})e^{\sqrt{2}} = 0 + (4 - 2\sqrt{3})e^{\sqrt{2}} = (\sqrt{16} - \sqrt{12})e^{\sqrt{2}} > 0$
- $f'(\sqrt{3}) = E'(\sqrt{3}) + (E(\sqrt{3}) - 2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}} = -4 < 0$

άρα $f'(\sqrt{2})f'(\sqrt{3}) < 0$ δηλαδή ικανοποιείται το Θεώρημα Bolzano στο κλειστό διάστημα $[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ άρα και το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$xf(x) = \sin x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sin x - 1}{x}$$

Όμως η f είναι συνεχής στο 0 άρα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Επομένως,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δ2. Η f είναι περιττή διότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει $-x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ και για κάθε

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$f(-x) = \frac{\sin(-x) - 1}{-x} = -\frac{\sin x - 1}{x} = -f(x)$$

και για $x = 0$ προφανώς ισχύει $f(-x) = -f(x)$ άρα για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε

$$f(-x) = -f(x).$$

Αν θέσουμε τώρα $u = -x$ έχουμε:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -f(-x) dx = \dots = -I$$

Συνεπώς $I = 0$.

Δ3. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$f(x) + xf'(x) = -\eta\mu x \Leftrightarrow xf'(x) = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} - \eta\mu x \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

Θεωρούμε την $h(x) = 1 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ για την οποία ισχύει :

$h'(x) = -x\sigma\upsilon\nu x$ από την οποία εύκολα έχουμε ότι

$$h(x) < h(0) \Leftrightarrow 1 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x < 0 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η h είναι συνεχής στο 0 και επομένως τελικά είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Η $x = 0$ είναι μια προφανής ρίζα της εξίσωσης. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = \frac{1}{2020}$$

Όμως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ άρα $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right) = \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$

Προφανώς $\frac{1}{2020} \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right]$ και επομένως υπάρχει

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) : f(\alpha) = \frac{1}{2020} \Leftrightarrow 2020\sigma\upsilon\nu\alpha - \alpha = 2020$$

Επειδή η f είναι 1 - 1 οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Άρα η εξίσωση έχει δυο ακριβώς ρίζες.

Δ5. Επειδή $F(0) = 0$ για $x = 0$ ισχύει ως ισότητα. Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \searrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow -\frac{2}{\pi} \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi} \Rightarrow |F'(x)| \leq \frac{2}{\pi}$$

Έστω $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ τότε από Θ.Μ.Τ για την F στο κλειστό διάστημα $[x_0, 0]$ έχουμε:

$$F'(\xi_1) = \frac{-F(x_0)}{-x_0} \Rightarrow |F'(\xi_1)| = \left| \frac{F(x_0)}{x_0} \right|$$

και επειδή $|F'(\xi_1)| \leq \frac{2}{\pi}$ τελικά

$$\pi |F(x_0)| \leq 2|x_0|$$

Το x_0 είναι τυχαίο άρα

$$\pi |F(x)| \leq 2|x| \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Έστω $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε από Θ.Μ.Τ για την F στο κλειστό διάστημα $[0, x_0]$ έχουμε:

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x_0)}{x_0} \Rightarrow |F'(\xi_2)| = \left| \frac{F(x_0)}{x_0} \right|$$

και επειδή

$$|F'(\xi_2)| \leq \frac{2}{\pi}$$

τελικά

$$\pi |F(x_0)| \leq 2|x_0|$$

Το x_0 είναι τυχαίο και επομένως

$$\pi |F(x)| \leq 2|x| \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.