

lisari team / Σχολικό έτος 2019 – 20

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ (ΝΕΟ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: Έξι (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 111

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

A2. Ορισμός Σελ. 140

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

A3. Θεώρημα Rolle Σελ. 128

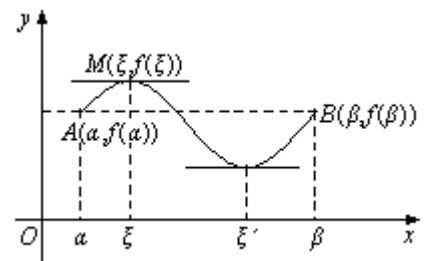
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, β) και
- $f(a) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



- A4.** α) Λάθος β) Λάθος γ) Λάθος δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= x^2 - 2x \Leftrightarrow f(g(x)) = x^2 - 2x \\&\Leftrightarrow f(x + \beta) = x^2 - 2x \\&\Leftrightarrow (x + \beta)^2 + \alpha = x^2 - 2x \\&\Leftrightarrow x^2 + 2\beta x + \beta^2 + \alpha = x^2 - 2x\end{aligned}$$

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν

$$\{2\beta = -2 \text{ και } \beta^2 + \alpha = 0\} \Leftrightarrow \{\beta = -1 \text{ και } \alpha = -1\}$$

B2. Ισχύει $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x - 1$. Είναι $-1 \neq 1$ και $f(-1) = f(1) = 0$, συνεπώς η f δεν είναι 1-1. Άρα δεν υπάρχει η αντίστροφή της.

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$ έχουμε

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

συνεπώς η g είναι 1-1. Άρα ορίζεται η αντίστροφή της.

Για να βρούμε την αντίστροφή της g θέτουμε $g(x) = y$ και λύνουμε ως προς x . Έχουμε

$$g(x) = y \Leftrightarrow x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1, y \in \mathbb{R}$$

δηλαδή

$$g^{-1}(y) = y + 1, y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η αντίστροφή της g είναι η $g^{-1}(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$.

B3. Οι g^{-1}, f έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η $g^{-1} \circ f$ έχει πεδίο ορισμού το

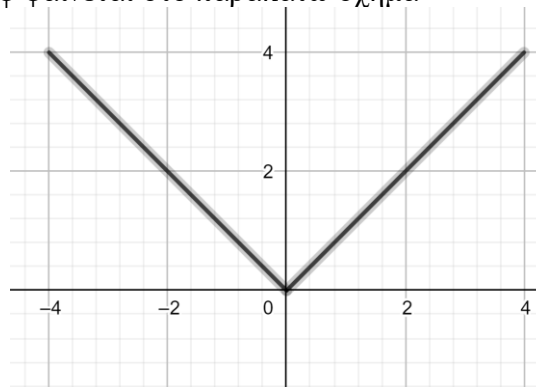
$$A = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Και ισχύει

$$(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 1 = x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } \varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Η γραφική παράσταση της φ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



B4. i) Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq h(x) \leq x + 1$$

όμως $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$ τότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2.$$

ii) Είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-2}{(h(x)+2)(h(x)-2)(\sqrt{h(x)+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)} \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\begin{aligned}y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - x_0^3 = 3x_0^2(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow y - x_0^3 = 3x_0^2x - 3x_0^3 \\ &\Leftrightarrow y = 3x_0^2x - 2x_0^3\end{aligned}$$

Όμως διέρχονται από το σημείο $N(-2, -8)$, άρα η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}-8 &= -6x_0^2 - 2x_0^3 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 6x_0^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0 + 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 1 \text{ ή } x_0 = -2\end{aligned}$$

Όμως, $f'(1) = 3$ και $f'(-2) = 12$ άρα οι ζητούμενες εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f είναι:

$$y - 1 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x - 2 \text{ και } y + 8 = 12(x + 2) \Leftrightarrow y = 12x + 16$$

Γ2. Η ευθεία (ζ) που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ έχει εξίσωση:

$$(\zeta): y = 3x + \alpha, \alpha \in (-2, 2).$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x + \alpha, \alpha \in (-2, 2)$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $(-1, 1)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^3 - 3x - \alpha, x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in (-2, 2)$, τότε

- η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-3, 3]$ ως πολυωνυμική
- $g(-1) = -1 + 3 - \alpha = 2 - \alpha > 0$
- $g(1) = 1 - 3 - \alpha = -2 - \alpha < 0$

οπότε $g(1)g(-1) < 0$, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 3x_0 + \alpha$.

Όμως, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$, οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Γ3. Αρχικά έχουμε $x \in (-2, 0)$ και $x'(t) > 0$. Αναζητούμε τη χρονική στιγμή t_0 για την οποία
$$y'(t_0) = 3x'(t_0)$$

Έχουμε,

$$\begin{aligned} y'(t_0) = 3x'(t_0) &\Leftrightarrow 3x^2(t_0)x'(t_0) = 3x'(t_0) \\ &\Leftrightarrow \overset{x'(t)>0}{3x^2(t_0)} = 3 \\ &\Leftrightarrow x(t_0) = 1 \text{ ή } x(t_0) = -1 \end{aligned}$$

Όμως, $x \in (-2, 0)$ άρα η δεκτή τιμή είναι $x(t_0) = -1$ οπότε $y(t_0) = -1$, άρα το ζητούμενο σημείο στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του είναι το σημείο $(-1, -1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x - 1 - \epsilon\phi^2 x \\ &= \frac{f'(x)\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x + f(x)\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= \frac{f'(x)\eta\mu x \sigma\upsilon\nu^2 x + f(x)\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Άρα από την συνέπεια του Θ.Μ.Τ. η g είναι σταθερή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως για κάθε

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε: $g(x) = c$.

Για $x = \frac{\pi}{3}$ έχουμε:

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = c \Leftrightarrow c = 1$$

Συνεπώς για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow f(x)\eta\mu x - \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Δ2. Α' τρόπος :

Από την δοσμένη σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x) \sin^2 x \cos x &= 1 - f(x) \sin^3 x \Leftrightarrow f'(x) \sin^2 x \cos x = 1 - \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \right) \sin^3 x \\ &\Leftrightarrow f'(x) \sin^2 x \cos x = \cos^2 x - \frac{\sin^3 x}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow f'(x) \sin^2 x \cos x = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x} \\ &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x \cos x} \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x = \sin^3 x \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos^3 x > \sin^3 x \Leftrightarrow \cos x > \sin x \Leftrightarrow \cos x > \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos^3 x < \sin^3 x \Leftrightarrow \cos x < \sin x \Leftrightarrow \cos x < \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$

Επιπλέον η f είναι συνεχής στο $\frac{\pi}{4}$ συνεπώς μόνο στο $\frac{\pi}{4}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

Β' τρόπος:

Παραγωγίζοντας την f

Δ3. Θεωρούμε τα διαστήματα $\Delta_1 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\Delta_2 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 άρα :

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = (2\sqrt{2}, +\infty)$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 0$ και $\cos x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

Όμως $3\sqrt{2} \in f(\Delta_1)$, άρα υπάρχει $\rho_1 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) : f(\rho_1) = 3\sqrt{2}$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_2 άρα :

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = (2\sqrt{2}, +\infty)$$

διότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 0$ και $\sin x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} = +\infty$$

Όμως $3\sqrt{2} \in f(\Delta_2)$, άρα υπάρχει $\rho_2 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) : f(\rho_2) = 3\sqrt{2}$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

Δ4. Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{4}, \rho_2\right]$ επομένως υπάρχει

$$\lambda \in \left(\frac{\pi}{4}, \rho_2\right) : f'(\lambda) = \frac{f(\rho_2) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho_2 - \frac{\pi}{4}}$$

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x}{\sin^2 x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \text{ και } f''(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x}{\sin^4 x} + \frac{\eta\mu^3 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^4 x} > 0$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα

$$\lambda < \rho_2 \Rightarrow f'(\lambda) < f'(\rho_2) \Rightarrow f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}.$$