

**lisari team / Σχολικό έτος 2021 – 22**  
**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**  
**ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΣΕΛΙΔΕΣ: ΕΞΙ (6)**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Θεωρία

**A2.** Θεωρία

**A3.** Θεωρία

**A4.** α) Σ

β) Σ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Λ

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Άρα η ευθεία  $y = 1$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη και η  $x = 1$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**B2.** Εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano για τη συνάρτηση  $k(x) = f(x) - g(x)$  στο διάστημα  $[e, e^2]$ .

- Η  $k$  είναι συνεχής στο  $[e, e^2]$  ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $k(e) = \frac{1}{e-1} > 0$
- $k(e^2) = \frac{2-e^2}{e^2-1} < 0$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (e, e^2)$  τέτοιο, ώστε:

$$k(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

**B3.** Έχουμε,

$$D_{g \circ f} = \left\{ x > 1 \text{ και } \frac{x}{x-1} > 0 \right\} = (1, +\infty), \quad g(f(x)) = \varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

**B4.** Η συνάρτηση  $h$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$  διότι  $\frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0$ .

Η συνάρτηση  $\varphi$  έχει πεδίο ορισμού το  $(1, +\infty)$ . Επομένως, οι συναρτήσεις  $h$ ,  $\varphi$  δεν είναι ίσες διότι δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

**Σημείωση:** Δεν ζητάει η άσκηση να βρούμε το ευρύτερο υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}$  τέτοιο ώστε να ισχύει  $\varphi(x) = h(x)$  για κάθε  $x \in A$ . Επομένως, η άσκηση ολοκληρώνεται στο παραπάνω σημείο και είναι περιττή η λύση ότι  $\varphi(x) = h(x)$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1. i.** Εύρεση του  $f(0)$ , δηλαδή αναζητούμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  διότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  ως παραγωγίσιμη.

| Α' τρόπος                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Β' τρόπος                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Θέτουμε: <math>k(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x}</math>, <math>x \neq 0</math> με</p> $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0.$ <p>Έχουμε,</p> $k(x) = \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} \Leftrightarrow f(x) = xk(x) + \eta\mu x$ <p>άρα</p> $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xk(x) + \eta\mu x) \Rightarrow f(0) = 0.$ | <p>Έχουμε,</p> $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} \cdot x + \eta\mu x \right).$ $= 0 \cdot 0 + 0$ $= 0$ |

Εύρεση του  $f'(0)$  δηλαδή αναζητούμε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ .

| Α' τρόπος                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Β' τρόπος                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Είναι,</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x + \eta\mu x}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$ $= 0 + 1$ $= 1$ <p>άρα</p> $f'(0) = 1.$ | <p>Είναι,</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xk(x) + \eta\mu x}{x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( k(x) + \frac{\eta\mu x}{x} \right)$ $= 0 + 1$ $= 1$ <p>άρα</p> $f'(0) = 1.$ |

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 0$  είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x.$$

**Γ2.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow 2f'(x)f''(x) = 2x \Leftrightarrow \left[ (f'(x))^2 \right]' = (x^2)'$$

και επειδή οι συναρτήσεις  $(f'(x))^2$  και  $x^2$  είναι συνεχείς, από συνέπειες Θ.Μ.Τ. υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$(f'(x))^2 = x^2 + c.$$

Όμως για  $x=0$  έχουμε:

$$(f'(0))^2 = c \Rightarrow c=1$$

άρα

$$(f'(x))^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow |f'(x)| = \sqrt{x^2 + 1} \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$|f'(x)| \neq 0 \Leftrightarrow f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και επειδή η  $f'$  είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) από τις συνέπειες του Θ. Bolzano έπεται ότι η  $f'$  διατηρεί πρόσημο και επειδή

$$f'(0) = 1 > 0 \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τελικά,

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**Γ3.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f'(x)f''(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f''(x) = x \Leftrightarrow f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Επομένως,

| x        | $-\infty$                                                                           | 0                                                                                     | $+\infty$                                                                             |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| $f''(x)$ |                                                                                     |  |                                                                                       |
| f        |  |                                                                                       |  |

δηλαδή η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, 0]$  και κυρτή στο διάστημα  $[0, +\infty)$ . Η  $C_f$  έχει σημείο καμπής το  $A(0, f(0))$  ή  $A(0, 0)$ .

**Γ4.** Είναι  $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής, από τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ έπεται ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα άρα και  $1-1$ , επομένως ορίζεται η  $f^{-1}$ .

Από το σημείο καμπής  $A(0, 0)$  της  $C_f$  και την εφαπτομένη της  $y = x$  στο σημείο  $x_0 = 0$  που τη «διαπερνάει» έχουμε,

- $f(x) > x$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- $f(x) < x$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $\mathbb{R}$ , άρα  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ e^{x \ln x} & 0 < x \leq \frac{2}{e} \end{cases}$$

άρα

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & , -1 < x < 0 \\ e^{x \ln x} (\ln x + 1) & , 0 < x < \frac{2}{e} \end{cases}$$

άρα η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, 0]$  και στο διάστημα  $\left(0, \frac{2}{e}\right]$ .

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^3 + 3x + 1) = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} e^u = 1$$

διότι

$$u = x \ln x \quad \text{άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = u_0$$

άρα η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  συνεπώς η  $f$  είναι συνεχής.

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$$

ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ e^{x \ln x} (\ln x + 1) \right] = -\infty$$

Επομένως, η  $f$  είναι μη παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

Δ2. i. Ένα κρίσιμο σημείο της  $f$  είναι το  $x_1 = 0$  στο οποίο η  $f$  δεν παραγωγίζεται. Για κάθε  $x \in (-1, 0)$  έχουμε:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3 \underbrace{(x-1)}_{-} \underbrace{(x+1)}_{+} > 0$$

άρα η  $f$  δεν παρουσιάζει κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του διαστήματος  $[-1, 0]$ .

**Σημείωση:** Ενώ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 3x + 1 - (-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 3x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 + 3}{1} = 0$$

άρα  $f'(-1) = 0$  το  $x_2 = -1$  ΔΕΝ είναι παρόλα αυτά κρίσιμο σημείο της  $f$  στο διάστημα  $\Delta = [-1, 0]$  αφού τα κρίσιμα σημεία της τα εξετάζουμε στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta = [-1, 0]$ .

Τέλος, για κάθε  $x \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$  έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^x (\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

που είναι δεκτή, άρα  $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$  οπότε το  $x_3 = \frac{1}{e}$  είναι κρίσιμο σημείο της  $f$ .

Συνολικά, τα σημεία  $0$  και  $\frac{1}{e}$  είναι κρίσιμα της  $f$ .

ii. Πίνακας μεταβολών της  $f$

| $x$     | $-1$ | $0$        | $\frac{1}{e}$ | $\frac{2}{e}$ |
|---------|------|------------|---------------|---------------|
| $f'(x)$ |      | $+$        | $-$           | $+$           |
| $f(x)$  |      | $\nearrow$ | $\searrow$    | $\nearrow$    |

Επομένως, η  $f$  είναι συνεχής και

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $A_1 = [-1, 0]$  άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $f(A_1) = [f(-1), f(0)] = [-1, 1]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $A_2 = \left[0, \frac{1}{e}\right]$  άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $f(A_2) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, 1\right] = \left[e^{-\frac{1}{e}}, 1\right]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $A_3 = \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right]$  άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι  $f(A_3) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(\frac{2}{e}\right)\right] = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}\right]$ .

Επομένως, το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f\left(\left[-1, \frac{2}{e}\right]\right) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [-1, 1]$$

διότι  $-1 < 0 < e^{-\frac{1}{e}}$  και  $\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{e} < 1 \Leftrightarrow 2 < e$  που ισχύει.

**Δ3.** Για κάθε  $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  έχουμε:

$$-1 \leq f(\alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2f(\alpha) \leq 2 \text{ και } -1 \leq f(\beta) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3f(\beta) \leq 3.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των προηγούμενων σχέσεων έχουμε:

$$-5 \leq 2f(\alpha) + 3f(\beta) \leq 5 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5} \leq 1$$

άρα ο αριθμός  $\eta = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$  ανήκει στο σύνολο τιμών της  $f$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής,

υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$  τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}.$$

**Δ4.** Είναι,

$$x \cdot f(x) - f'(x) = x \cdot x^x - x^x(\ln x + 1) = x^x(x - \ln x - 1) \geq 0$$

διότι,  $\ln x \leq x - 1, x > 0$  άρα

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} (xf(x) - f'(x)) dx > 0$$

γιατί υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0$  (πχ.  $x_0 = e$ ) τέτοιο ώστε  $e \cdot f(e) - f'(e) = e^e(e - 2) > 0$ .