

lisari team / Σχολικό έτος 2022 – 23
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΕΛΙΔΕΣ: ΕΞΙ (6)
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία

A2. Θεωρία

A3. Θεωρία

A4. α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Λ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε,

$$D_{g \circ h} = \{x \in D_h / h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \in (0, +\infty)\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 1 \end{array} \right\} = (1, +\infty).$$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

B2. Για κάθε $x > 1$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0.$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$, επομένως ορίζεται η f^{-1} . Το σύνολο τιμών της f είναι $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$ διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \frac{1}{x-1} \right] = +\infty.$$

Επομένως, για κάθε $x > 1$ και $y > 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \\ &\Leftrightarrow (y-1)x = y + 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Τελικά, $f^{-1} = f$.

B3. Αποδείξαμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \frac{1}{x-1} \right] = +\infty$ άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Επίσης,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

άρα η ευθεία $y = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. Γνωρίζουμε ότι, $f(x) > 1$ για κάθε $x > 1$. Επίσης $\sin x \leq 1$ για κάθε $x > 1$, άρα η εξίσωση $f(x) = \sin x$ είναι αδύνατη στο $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = -x + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 2$.

- η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- $g(1)g(2) = (f(1) - 1)f(2) = (-1) \cdot 2 = -2 < 0$

άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -x + 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ii.

Α' τρόπος	Β' τρόπος
Η C_f και η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ έχουν ένα κοινό σημείο το $(2, 2)$. Επειδή, $f'(2) = 1 = \lambda_{\varepsilon_2}$ η ευθεία ε_2 εφάπτεται της C_f στο σημείο $(2, 2)$.	Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(2, 2)$ είναι $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 1(x - 2) \Leftrightarrow y = x$

Γ2. Για κάθε $x \in [1, 2]$ έχουμε $f''(x) < 0$ άρα η f είναι κοίλη και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f'(1) \geq f'(x) \geq f'(2) = 1 > 0$$

άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$ επομένως ορίζεται η f^{-1} και το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή

$$f([1, 2]) = D_{f^{-1}} = [f(1), f(2)] = [0, 2].$$

Γ3. Για κάθε $x \in (1, 2)$ θα αποδείξουμε ισοδύναμα ότι

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \stackrel{\Theta\text{MT}[1,x],[x,2]}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \stackrel{f' \searrow}{\Leftrightarrow} \xi_1 < \xi_2$$

$\xi_1 \in (1, x), \xi_2 \in (x, 2)$

που ισχύει.

Γ4. i. Για κάθε $x \in (1, 2)$ ισχύει ότι

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \quad \Leftrightarrow \quad (2-x)f(x) > (x-1)(2-f(x)) \Leftrightarrow 2f(x) - xf(x) > 2x - xf(x) - 2 + f(x) \\ \Leftrightarrow f(x) > 2x - 2$$

Επίσης, για $x = 1$ και $x = 2$ ισχύει η ισότητα. Τελικά, για κάθε $x \in [1, 2]$ ισχύει

$$f(x) \geq 2x - 2.$$

ii. Η f είναι κοίλη και η ευθεία $y = x$ είναι εφαπτομένη της C_f άρα ισχύει:

$$2x - 2 \leq f(x) \leq x$$

και επειδή οι συναρτήσεις $2x - 2, f(x)$ και x είναι συνεχείς και όχι παντού ίσες στο διάστημα $[1, 2]$ ισχύει:

$$\int_1^2 (2x - 2) dx < \int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 x dx \Rightarrow [x^2 - 2x]_1^2 < \int_1^2 f(x) dx < \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Leftrightarrow 1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$ είναι:

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1) \quad (1).$$

Η εξίσωση (1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $y = x = 0$:

$$-e^{x_1} = e^{x_1}(0 - x_1) \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Επομένως, η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y - e = e(x - 1) \Leftrightarrow y = ex.$$

Δ2. Μια προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x) = ex$ είναι η ρίζα $x = 1$. Για $x < 0$ έχουμε:

$$f(x) = ex \Leftrightarrow 2 - e^{-x} = ex \Leftrightarrow -e^{-x} - ex + 2 = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - ex = -e^{-x} - ex + 2, x \in \mathbb{R}$.

Είναι,

- $h'(x) = e^{-x} - e$
- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e > 0 \Leftrightarrow x < -1$
- $h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^{-x} - e < 0 \Leftrightarrow x > -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	+	○	-
h	↗		↘

όπου $h(-1) = -e + e + 2 = 2 > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{-x} - ex + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\frac{e^{-x}}{x} - e + \frac{2}{x} \right) \right] = (-\infty)(+\infty - e + 0) = -\infty,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty. \text{ Τέλος, } h(1) = 0.$$

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ άρα το σύνολο τιμών της h είναι

$$h((-\infty, -1]) = (-\infty, 2]$$

άρα υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in (-\infty, -1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - ex_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = ex_0.$$

Δ3. Αναζητούμε το εμβαδόν

$$E(\Omega) = \int_{x_0}^1 |f(x) - ex| dx = \int_{x_0}^1 |h(x)| dx.$$

Η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει δύο διαδοχικές ρίζες, τις x_0 και 1 άρα από τις συνέπειες του Θ.

Bolzano η συνεχής συνάρτηση $h(x) = f(x) - ex$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_0, 1)$. Όμως, $h(0) = f(0) - e \cdot 0 = 1 > 0$ άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 1)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{x_0}^1 h(x) dx = \int_{x_0}^0 (f(x) - ex) dx + \int_0^1 (f(x) - ex) dx = \int_{x_0}^0 (2 - e^{-x} - ex) dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[2x + e^{-x} - \frac{ex^2}{2} \right]_{x_0}^0 + \left[e^x - \frac{ex^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 1 - \left(2x_0 + e^{-x_0} - \frac{ex_0^2}{2} \right) + e - \frac{e}{2} - 1 \\ &= -2x_0 - e^{-x_0} + \frac{ex_0^2}{2} + \frac{e}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ4. Έστω $(x, 2 - e^{-x})$, $x_0 < x$ οι συντεταγμένες του 1^{ου} κινητού που βρίσκεται πάνω στη C_f .

Επίσης, (x, ex) , $x_0 < x < 0$ είναι οι συντεταγμένες του 2^{ου} κινητού που βρίσκεται στην ευθεία ΒΟ.

Επειδή τα κινητά κινούνται στην ίδια οριζόντια ευθεία, όταν το 2^ο κινητό βρίσκεται στην θέση Ο, το 1^ο κινητό θα βρίσκεται στη θέση:

$$2 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

επομένως $(x, 2 - e^{-x})$, $x_0 < x < -\ln 2$.

Αναζητούμε την μέγιστη απόσταση της διαφοράς

$$|x_2 - x_3|$$

όπου $(x_2, f(x_2))$ η θέση του 1^{ου} κινητού και (x_3, y_3) η θέση του 2^{ου} κινητού. Γνωρίζουμε ότι

$$2 - e^{-x_2} = ex_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{2 - e^{-x_2}}{e} (2).$$

Έστω συνάρτηση

$$d(x_2) = |x_3 - x_2| \stackrel{(2)}{=} \left| \frac{2 - e^{-x_2}}{e} - x_2 \right| = \left| \frac{-e^{-x_2} - ex_2 + 2}{e} \right| = \frac{|h(x_2)|}{e} = \frac{h(x_2)}{e}$$

διότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [x_0, -\ln 2] \subseteq \mathbb{R}$.

Όμως $h(x) \leq h(-1) = 2$ για κάθε $x \in [x_0, -\ln 2] \subseteq \mathbb{R}$ άρα

$$d(x_2) = \frac{h(x_2)}{e} \leq \frac{2}{e} = d(-1)$$

άρα η μέγιστη απόσταση είναι $\frac{2}{e}$ και επιτυγχάνεται για $x_2 = -1$.

Σημείωση: Δίνεται το σχήμα για διδακτικούς σκοπούς

