

## ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΛ 2023 - στα γρήγορα

 $A_1: 76$  εελ. 6x0λ $A_2: 155$  εελ. 6x0λ $A_3: 216$  εελ. 6x0λ $A_4: \Sigma - \Sigma - 1 - 1 - \Sigma$ 

 T.M MAX ΔtN EXGI

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και  $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις  $f = \frac{g}{h}$  και  $r = g \cdot h$ .

Μονάδες 6

$$\bullet D_f = \{x \in D_g \cap D_h \mid h(x) \neq 0\} = (1, +\infty)$$

$$\text{Αφού } x \geq 1 \text{ και } \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0\right) \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$\text{και } f(x) = \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \sqrt{x}}{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sqrt{x}} = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$$

$$\bullet D_r = \{x \in D_g \cap D_h\} = [1, +\infty)$$

$$r(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad g(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι  $f^{-1} = f$  (μονάδες 5), όπου  $f^{-1}$  είναι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

Μονάδες 7

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x_1) &= f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \\ \Leftrightarrow x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 &= x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \\ \text{ΑΡΑ } f: 1-1 &\Rightarrow f \text{ αντιστρέφεται} \Rightarrow \text{υπάρχει } f^{-1} \end{aligned}$$

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A \quad \text{και} \quad y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, \forall x \in A$$

$$\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = y+1$$

$$\xrightarrow[\text{Από } y=1]{y \neq 1} x = \frac{y+1}{y-1} \quad \text{και} \quad x \in A \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \frac{y+1}{y-1} > 1$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \quad \Bigg| \quad \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow (y > 1)$$

$$\text{ΑΡΑ } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1, \quad D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

$$\text{Δηλ. } \left\{ f^{-1}(x) = f(x) \quad \text{και} \quad D_{f^{-1}} = D_f = (1, +\infty) \right\} \Rightarrow f^{-1} = f$$

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$ .

Μονάδες 6

$$g(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \in [1, +\infty)$$

• ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜΠΤ.  $\rightarrow \infty x_1$ : επειδή η  $g$  συνεχής  $[1, +\infty)$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1 - 0 = 1 \\ \beta &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} y = x \\ \text{ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠ} \\ \text{και } C_r \text{ στο } +\infty \end{array}$$

B4. Να λύσετε την εξίσωση  $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4f(x)$ .

Μονάδες 6

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f = (1, +\infty), \text{ δηλ. } \boxed{x > 1}$$

$$(B4) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}\right) \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1, x = 4 \left. \begin{array}{l} \text{ομω, } x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=4} \text{ μόνο}$$

$$\text{Σημ: } D_r = [1, +\infty) \cap D_f = (1, +\infty) = (1, +\infty)$$

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^\lambda, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Γ1. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 0$ .

Μονάδες 5

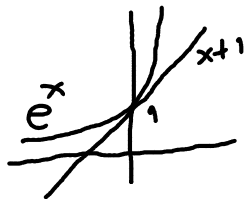
$$D_f = [0, +\infty). \text{ } f \text{ συνεχής} \Rightarrow f \text{ συνεχής @ } 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = f(2)$$

$$\Leftrightarrow -4 + 4 + e^\lambda = -4 + 8 - 3 + \lambda \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 0}$$

ΠΡΟΦΑΝΗΣ  
ΛΥΣΗ  
ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΗ

Αφού  $e^x \geq x + 1$ , γνωστό από θεωρία



$e^x > x + 1, \forall x \neq 0$ . , Αλλιώς θεωρούμε

$$g(x) = e^x - x - 1$$

... κτλ.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

$$x \neq 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= -2 < 0 \quad / \quad [0, 2) \Rightarrow f \searrow [0, 2) \\ f'(x) &= -2x+4 < 0 \quad / \quad x > 2 \Rightarrow f \searrow (2, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \searrow [0, +\infty) = A$$

$$\Rightarrow f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0) \right] = (-\infty, 5] \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \exists x \in \mathbb{R} \\ \text{Ολ. ΜΓΙΣΤΟ } \omega \quad 5 = f(0) \end{matrix}}$$

ΤΟΙ. ΑΚΡΟΤΑΤΑ  $\Delta \in \mathbb{N}$  έχει: γνηί  $f \searrow (0, +\infty)$

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα  $[0, 3]$ . (μονάδες 4)

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{(x-2)} = 0 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -2x+5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3, & x \geq 2 \end{cases} \\ f(2) &= -4+8-3 = 1 \end{aligned} \right.$$

$\neq$  οχι παραγ. σὺ 2, οπότε ούτε στο  $(0, 3) \Rightarrow f \notin \mathbb{N}$  ικαν. προϋπ. Θ.Μ.Τ.  $[0, 3]$

Γ3. ii) Να βρείτε, αν υπάρχει,  $\xi \in (0, 3)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της  $f$  στο σημείο  $\Gamma(\xi, f(\xi))$  να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $\Delta(0, f(0))$  και  $E(3, f(3))$ .

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

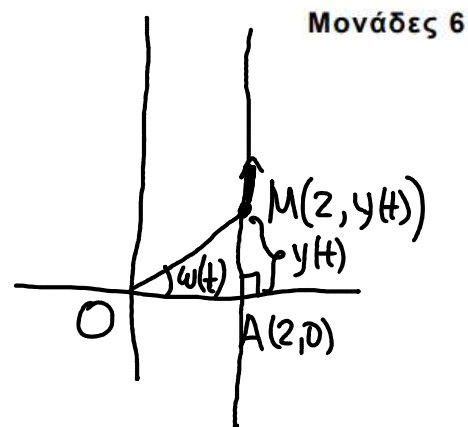
ΘΕΛΟΥΜΕ  $\xi$ :

$$f'(\xi) = \lambda_{\Delta E} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi) = -\frac{5}{3}} \quad \boxed{\begin{matrix} f(0) = 5 \\ f(3) = -9+12-3 = 0 \end{matrix}}$$

$$\text{ΟΜΩΣ } f'(x) = \begin{cases} -2 & x \in [0, 2) \\ -2x+4 & x \in (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = -\frac{5}{3} \text{ ασυν. } [0, 2) \\ -2\xi+4 = -\frac{5}{3}, (2, +\infty) \end{cases}$$

$$f'\left(\frac{17}{6}\right) = -2\left(\frac{17}{6}\right) + 4 = -\frac{17}{3} + \frac{12}{3} = -\frac{5}{3} \quad \left| \quad \begin{aligned} -6\xi+12 &= -5 \\ \text{υπάρχει } \xi &= \frac{17}{6} \in (2, +\infty) \end{aligned} \right.$$

- Γ4. Κινητό σημείο  $M$  ξεκινά από το σημείο  $A(2,0)$  και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα  $v=0,5$  μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν  $O$  είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία  $\hat{\omega} = \hat{AOM}$  τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο  $M$  θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



Εχ $^{\circ}$ ;  $v=0,5 \text{ m/s} = y'(t)$

Θε $^{\circ}$ μ $^{\circ}$ ;  $\omega'(t)$  δηλαδή το  $\omega'(t_0)$

Ποτε; όταν  $t_0$ :  $M(2, y(t_0)) \in C_f \Leftrightarrow f(2) = y(t_0) \Leftrightarrow y(t_0) = 1$

Χρ $^{\circ}$ ω $^{\circ}$ ομαι σχέση μεταξύ των  $y(t)$  &  $\omega(t)$ , άρα

Εφ $^{\circ}$ ω στο ορθ. τρίγ.  $O\hat{A}M$ :  $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma \omega^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t)}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sigma \omega^2(\omega(t_0))} \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2}$  ①

Την στιγμή  $t_0$ : Ισχύει

$AM = y(t_0) = 1$

$OA = 2$

$OM = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$



Επομένως

ή ①  $\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \cdot \omega'(t_0) = \frac{0,5}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} \cdot \omega'(t_0) = \frac{5}{20} \Rightarrow \omega'(t_0) = \frac{4}{20}$

$\omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad/s} = 0,2 \text{ rad/s}$

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 4**

Το  $1 + \frac{1}{e}$  είναι το μέγιστο της  $f$ , άρα υπάρχει  
 $x_1 \in (0, +\infty) : f(x_1) = 1 + \frac{1}{e}$ . 1 . Επίσης η  
 $f$  παραγ./μη  $(0, +\infty)$  με  $f'(x) = \frac{(\frac{1}{x} + \alpha)x - \ln x - \alpha x}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} . \quad \text{Οπότε έχουμε}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot x_1 \text{ εσωτ. σημείο } (0, +\infty) \\ \cdot f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_1 \\ \cdot f(x_1) \text{ ακρότατο} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Fermat} \\ \Rightarrow f'(x_1) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1 - \ln x_1}{x_1^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = e} \end{array}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow f(e) = 1 + \frac{1}{e} \quad \text{ομωι} \quad f(e) = \frac{\ln e + \alpha e}{e}$$

$$\text{Άρα} \quad 1 + \frac{1}{e} = \frac{1 + \alpha e}{e} \Leftrightarrow e + 1 = 1 + \alpha e \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει μοναδική ρίζα,  $x_0$ , η οποία ανήκει στο διάστημα  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

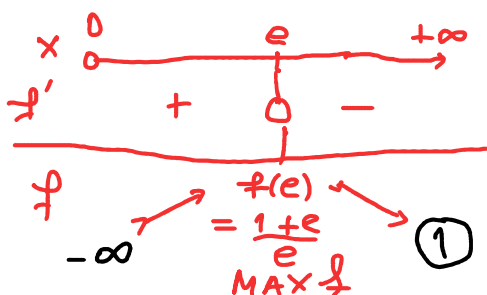
Μονάδες 6

$$f(x) = \frac{\ln x + x}{x}, \quad (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow x < e : f \uparrow (0, e)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e \quad \text{έτσι} \quad f \downarrow [e, +\infty)$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x + x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (\ln x + x) = \\ &= (+\infty) \cdot (-\infty + 0) = -\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{\text{DLH}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} + 1 \right) = 0 + 1 = 1$$

ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ  $f$

$$f((0, e)) \stackrel{f \uparrow}{=} \left(-\infty, \frac{1+e}{e}\right), \quad f([e, +\infty)) \stackrel{f \downarrow}{=} \left(1, 1 + \frac{1}{e}\right)$$

$$0 \in f((0, e)) \Rightarrow$$

η  $f(x)=0$  έχει ρίζα  
στο  $(0, e)$  κ αφού  $f \uparrow$   
είναι μοναδική (α)

$$0 \notin f([e, +\infty))$$

ΑΡΑ η  $f(x)=0$  δεν  
έχει ρίζα στο  $[e, +\infty)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{(\cancel{\ln 1} - \ln 2 + \frac{1}{2}) \cdot 2}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 2} = \boxed{-2 \ln 2 + 1} = 1 - \ln 4 < 0$$

αφού  $e < 4 \Leftrightarrow 1 < \ln 4$

$$f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 > 0. \quad \text{Έχουμε } f \text{ συνεχής στο } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0 \stackrel{\text{Βολτανο}}{\Rightarrow}$  η εξίσωση  $f(x)=0$  έχει  
μία τογλαχιστων ρίζα στο  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  (β)

Απο (α), (β) η εξίσ.  $f(x)=0$  έχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΡΙΖΑ  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$



Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = f(4)$  έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις  $x_1 = 2$  και  $x_2 = 4$ .

(μονάδες 3)

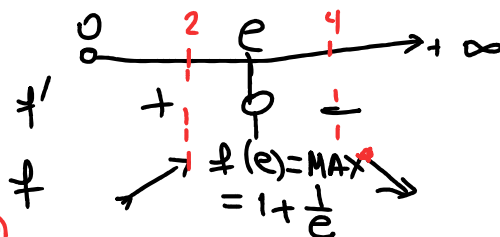
- η  $f(x) = f(4)$  έχει  $x_2 = 4$  προφ. λύση
- για  $x = 2$  :  $f(2) = \frac{(\ln 2 + 2) \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2 \ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2^2 + 4}{4} = \frac{\ln 4 + 4}{4} = f(4)$   
αρα  $x_1 = 2$  επαληθ. μιν  $f(x) = f(4)$  και είναι λύση της

$$x_1 = 2 \in (0, e), f \nearrow (0, e)$$

$\Rightarrow x_1 = 2$  μοναδική στο  $(0, e)$

$$x_2 = 4 \in [e, +\infty), f \searrow [e, +\infty)$$

$\Rightarrow x_2 = 4$  μοναδική στο  $[e, +\infty)$



Επομένως, η  $f(x) = f(4)$  έχει 2 ακριβώς λύσεις

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $2^x \leq x^2$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

$$\ln(2^x) \leq \ln(x^2) \Leftrightarrow x \ln 2 \leq \frac{2 \ln x}{2x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \leq \frac{\ln x}{x} + 1 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x)$$

① όταν  $x \in (0, e]$   $f \nearrow$  οπότε  $f(2) \leq f(x)$   
 $\Leftrightarrow 2 \leq x$  ΑΡΑ  $2 \leq x \leq e$  λύσεις.

② όταν  $x \in [e, +\infty)$   $f \searrow$  οπότε  $f(2) \leq f(x)$   
ομω,  $f(2) = f(4)$   $\Rightarrow f(4) \leq f(x)$   
 $\Rightarrow 4 \geq x \Rightarrow e \leq x \leq 4$ . Επομένως λύσεις  $x \in [2, 4]$



Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες  $x = -\ln 2$  και  $x = 0$ , και περικλείεται από αυτές, τον άξονα  $x'x$  και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .

Μονάδες 7

$$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx$$

$$\stackrel{x < 0}{1-x > 0} \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \right| \cdot \frac{1-x}{e^x} dx$$

$$\left| \begin{array}{l} -\ln 2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 1-x \geq 0 \\ \text{Έχουμε } f(x) = \frac{\ln x + x}{x} \\ f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Θέτουμε } f(e^x) = u \Rightarrow$$

$$f'(e^x) \cdot e^x dx = du$$

$$\frac{1 - \ln e^x}{(e^x)^2} \cdot e^x dx = du$$

$$\boxed{\frac{1-x}{e^x} dx = du}$$

| $x$      | $e^x$         | $u = f(e^x)$                                  |
|----------|---------------|-----------------------------------------------|
| 0        | 1             | $u = f(1) = 1$                                |
| $-\ln 2$ | $\frac{1}{2}$ | $u = f\left(\frac{1}{2}\right) = -2\ln 2 + 1$ |

Επομένως έχουμε ότι:

$$E(\Omega) = \int_{-2\ln 2 + 1}^1 |u| du = \int_{-2\ln 2 + 1}^0 |u| du + \int_0^1 |u| du =$$

$$= \int_{-2\ln 2 + 1}^0 -u du + \int_0^1 u du = \left[ \frac{u^2}{2} \right]_{-2\ln 2 + 1}^0 + \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{(-2\ln 2 + 1)^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4\ln^2 2 - 4\ln 2 + 1 + 1}{2}$$

$$= 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1 \quad \text{τ.μον.}$$