

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2024 - ΛΥΣΕΙΣ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ

Τρίτη, 10 Σεπτεμβρίου 2024 11:30 μμ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x) - g(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $g(x) = f(x) \eta \mu x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

(Μονάδες 4)

- ii) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x}$.

(Μονάδες 1)

Μονάδες 5

Δ1,i) Έστω $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$: $|g(x) - g(x_0)| \leq (x - x_0)^2$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -(x - x_0)^2 \leq g(x) - g(x_0) \leq (x - x_0)^2 \\ \text{κ' } \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x - x_0)^2] = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{κ.π.}} \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x) - g(x_0)) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) \end{array}$$

Άρα g συνεχής σε κάθε $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$: $|g(x) - g(\frac{\pi}{2})| \leq (x - \frac{\pi}{2})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -(x - \frac{\pi}{2})^2 \leq g(x) - g(\frac{\pi}{2}) \leq (x - \frac{\pi}{2})^2 \\ \text{και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [-(x - \frac{\pi}{2})^2] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (x - \frac{\pi}{2})^2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{κ.π.}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (g(x) - g(\frac{\pi}{2})) = 0 \\ \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = g(\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

Άρα g συνεχής στο $(0, \frac{\pi}{2}]$

Εξω x_0 εσω. σημ. του $\Delta = (0, \pi/2] \Rightarrow x_0 \in (0, \pi/2)$

$$: \quad |f(x) - f(x_0)| \leq (x - x_0)^2 = |x - x_0|^2 \xRightarrow{|x - x_0| > 0}$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq |x - x_0| \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -|x - x_0| \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq |x - x_0| \\ \text{κ' } \lim_{x \rightarrow x_0} (-|x - x_0|) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - x_0| = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{κ.η } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \\ \Rightarrow f'(x_0) = 0 \end{array}$$

$$\text{ΕΤΣΙ : } \left. \begin{array}{l} g \text{ συνεχ. στο } (0, \pi/2] \\ g'(x) = 0, \forall x \in (0, \pi/2), \text{ εσω } (0, \pi/2] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ σταθερή στο } \Delta = (0, \pi/2] \Rightarrow g(x) = c, \forall x \in \Delta$$

$$\textcircled{\Delta 1 \text{ ii}} \quad f(x) \cdot \eta_{\mu} x = c \xRightarrow{x = \pi/4} f(\pi/4) \cdot \eta_{\mu} \pi/4 = c \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = c \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$\text{ΑΡΑ } \left. \begin{array}{l} f(x) \cdot \eta_{\mu} x = 1 \\ x \in (0, \pi/2) : 0 < \eta_{\mu} x \leq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{\eta_{\mu} x}}$$

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 3) και να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

$$f'(x) = -\frac{\sigma_{\omega} x}{\eta_{\mu}^2 x} < 0 \quad \forall x \in (0, \pi/2) \text{ αφού } \eta_{\mu} x, \sigma_{\omega} x > 0$$

$$\Rightarrow f \searrow (0, \pi/2] \Rightarrow f: 1-1 \text{ στο } (0, \pi/2] \quad \text{κ.Α.1}$$

$$f(\Delta) = [f(\pi/2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] = [1, +\infty) \quad \text{γιατί:}$$

$$f(\pi/2) = \frac{1}{\eta_{\mu} \pi/2} = 1 \quad \text{κ' } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ \eta_{\mu} x > 0}} \frac{1}{\eta_{\mu} x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)-2}{x-\frac{\pi}{4}} + \frac{f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{2}} = 0, \text{ με } \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (1)$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$.

Μονάδες 6

Έχουμε $f: I \rightarrow I \Rightarrow \exists \text{ παρχει } f^{-1}$ οπότε $f^{-1}(f(\pi/4)) = f^{-1}(\sqrt{2})$
 $\Rightarrow f^{-1}(\sqrt{2}) = \pi/4$

οπότε $(1) \Leftrightarrow \phi(x) = (x-\sqrt{2})(f(\alpha)-2) + (x-\pi/4)(\pi/4-\pi/3) = 0 \quad (2)$

Αρκεί να δούμε $\phi(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(\pi/4, \sqrt{2})$

• $(2) \Leftrightarrow x(f(\alpha)-2) - \sqrt{2}(f(\alpha)-2) + x(\pi/4 - \pi/3) - \pi/4(\pi/4 - \pi/3) = 0$

$\Leftrightarrow x[f(\alpha)-2 + \pi/4 - \pi/3] = \sqrt{2}(f(\alpha)-2) + \pi/4(\pi/4 - \pi/3)$

ομωσ $f(\alpha)-2 + \pi/4 - \pi/3 = f(\alpha)-2 - \frac{\pi}{12} \neq 0$

Αρα η (2) έχει μοναδική ρίζα, γιατί

$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{f \downarrow} f(\pi/6) > f(\alpha) > f(\pi/2) \Rightarrow \frac{1}{\eta\mu \pi/6} > f(\alpha) > \frac{1}{\eta\mu \pi/2}$

$\Rightarrow \boxed{1 < f(\alpha) < 2} \quad (3) \Rightarrow -1 < f(\alpha)-2 < 0 \xrightarrow{-\pi/12}$

$\Rightarrow -1 - \pi/12 < f(\alpha)-2 - \pi/12 < -\pi/12 \Rightarrow f(\alpha)-2 - \frac{\pi}{12} \neq 0$.

Επιπλέον: $\phi(x)$ συνεχής στο $[\pi/4, \sqrt{2}]$

μὲν $\phi(\pi/4) = \underbrace{(\frac{\pi}{4}-\sqrt{2})}_{-} \underbrace{(f(\alpha)-2)}_{-} + \underbrace{(\frac{\pi}{4}-\pi/4)}_0 (\pi/4 - \pi/3) \stackrel{(3)}{>} 0$

κ' $\phi(\sqrt{2}) = \underbrace{(\sqrt{2}-\sqrt{2})}_0 \underbrace{(f(\alpha)-2)}_{-} + \underbrace{(\sqrt{2}-\pi/4)}_{+} \underbrace{(-\frac{\pi}{12})}_{-} < 0$

θ.β.

$\Rightarrow$ η $\phi(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(\pi/4, \sqrt{2}) \quad (4)$

Επομένως η $\phi(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα που ανήκει στο $(\pi/4, \sqrt{2})$.

Δ4. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin x) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x) = \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο $(0, \frac{\pi}{2}]$.
(Μονάδες 2)

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu x \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x) + \eta\mu x \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu x)}{2(1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)} \\ &= \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x} = h(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu x} = f(x) \end{aligned}$$

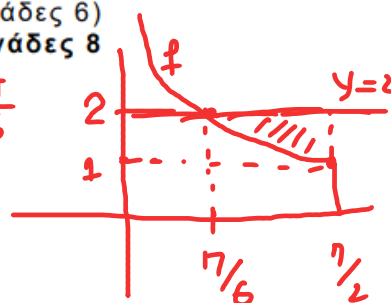
Άρα $H(x)$ παράγουσα της $h(x)$ στο $(0, \pi/2]$ δηλ της $f(x)$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = 2$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 6)
Μονάδες 8

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu x} = 2 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$E = \int_{\pi/6}^{\pi/2} |f(x) - 2| dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} (2 - f(x)) dx$$



αφού ③ : $f(x) < 2$

$$E = \left[2x - H(x) \right]_{\pi/6}^{\pi/2} = \left[2 \cdot \frac{\pi}{2} - H(\pi/2) \right] - \left[2 \cdot \frac{\pi}{6} - H(\pi/6) \right]$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} + H(\pi/6) - H(\pi/2)$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2} \ln(1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \ln(1 + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})^2 = \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3}) \quad \text{ε.μον.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x, & x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}, & x \geq -1 \end{cases}, \text{ όπου } \alpha > 1 \text{ και } \lambda \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

$$\begin{aligned} f \text{ παραγ } \mathbb{R} &\Rightarrow f \text{ συνεχ. } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ συνεχ. @ } -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x+1} + \lambda x = \frac{-\alpha + \alpha}{-1 + \alpha} \Rightarrow e^0 - \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{aligned}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, 0)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

$$\begin{aligned} f \text{ παραγ @ } 1 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \quad / \quad f(-1) = \frac{-\alpha + \alpha}{-1 + \alpha} = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{x+1} + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha}}{x + 1} \Rightarrow \text{DLH (2)} \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} (e^{x+1} + 1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\alpha(x+1)}{(x+\alpha)(x+1)} \Rightarrow e^0 + 1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha} \\ &\Rightarrow \alpha = -2 + 2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \\ \text{και } f'(-1) &= e^0 + 1 = \frac{\alpha}{-1 + \alpha} \Rightarrow \boxed{f'(-1) = 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Εφαπτ. } \text{w } C_f \text{ στο } A(-1, 0): y - f(-1) &= f'(-1)(x + 1) \\ \Rightarrow y - 0 &= 2(x + 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 2} \end{aligned}$$

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{2x+2}{x+2}, & x \geq -1 \end{cases}$$

Μονάδες 7

$$\bullet \lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x+2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+2}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

Άρα $\varepsilon_1: y=2$ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜΠΤ. Στο $+\infty$

$$\bullet \lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(e^{x+1} + x)'}{(x)'} \stackrel{\frac{0}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} \stackrel{u=x+1}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$$

$$\bullet \beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1} + \cancel{x} - \cancel{x}) = 0$$

Άρα $\varepsilon_2: y=x$ ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤ. Στο $-\infty$.

• ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΔΕΝ ΕΧΕΙ $D_f = (-\infty, +\infty)$

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

$$f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + x, & x < -1 \\ \frac{2x+2}{x+2}, & x \geq -1 \end{cases}$$

Μονάδες 5

$$\forall x \in \mathbb{R}: -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \eta\mu x - 2 \leq -1$$

$$(I) \text{ Αν } \eta\mu x - 2 = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\eta\mu x - 2) = f(-1) = 0 \\ 2\eta\mu x - 2 = 2(1) - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\eta\mu x - 2) = 2\eta\mu x - 2$$

$$(II) \text{ Αν } \eta\mu x - 2 < -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\eta\mu x - 2) = e^{\eta\mu x - 2 + 1} + \eta\mu x - 2 \\ \Rightarrow f(\eta\mu x - 2) = e^{\eta\mu x - 1} + \eta\mu x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{ΟΜΩΣ ΒΑΣΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ } e^{\eta\mu x - 1} \geq (\eta\mu x - 1) + 1$$

$$\Rightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq (\eta\mu x - 1) + 1 + \eta\mu x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$$

$$\text{ΤΕΛΙΚΑ } \forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2\ln x - 1$

και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x - 2$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

$$\bullet D_h = \left\{ x \in D_g = \mathbb{R} / g(x) = x - 2 \in D_f = (0, +\infty) \right\} = (2, +\infty) = A$$
$$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\bullet h(x) = f(g(x)) = 2 \ln g(x) - 1 = 2 \ln(x - 2) - 1$$

Αν $h(x) = 2\ln(x - 2) - 1$, $x > 2$, τότε:

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 6

$$h'(x) = \frac{2}{x-2}, \quad h''(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0, \quad x > 2$$

ΑΡΑ h κοίλη $(2, +\infty)$

B3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη της h^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

$$h'(x) = \frac{2}{x-2} > 0 \quad \forall x \in (2, +\infty) \Rightarrow h \nearrow (2, +\infty) = A$$

$\Rightarrow h$ αντιστρέφεται και $h^{-1}: h(A) \rightarrow A$

$$h(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = (-\infty, +\infty) \text{ γιατί:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 \ln(x-2) - 1) \stackrel{u=x-2}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u - 1 = 2(-\infty) - 1 = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(x-2) - 1] \stackrel{u=x-2}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) - 1 = +\infty$$

$$\text{ΜΕ } y=h(x) \Leftrightarrow h^{-1}(y)=x \quad \text{οπότε}$$

$$y=2 \ln(x-2)-1 \Leftrightarrow y+1=2 \ln(x-2) \Rightarrow \frac{y+1}{2}=\ln(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x-2=e^{\frac{y+1}{2}} \Leftrightarrow x=e^{\frac{y+1}{2}}+2 \Leftrightarrow$$

$$h^{-1}(y)=e^{\frac{y+1}{2}}+2 \Rightarrow h^{-1}(x)=e^{\frac{x+1}{2}}+2$$

B4. Αν $h^{-1}(x)=2+e^{\frac{x+1}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=(h^{-1}(x)-3) \cdot (x^3-8)$$

στο $[-1, 2]$.

Μονάδες 6

$$\varphi(x)=(e^{\frac{x+1}{2}}-1)(x^3-8), \quad D_{\varphi}=\mathbb{R}$$

• φ συνεχής $\mathbb{R}$, φ παραγ. $\mathbb{R}$ (ΠΡΑΞΗΙΣ)

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \varphi(-1)=(e^0-1)(-1-8)=0 \\ \cdot \varphi(2)=(e^{3/2}-1)(8-8)=0 \end{array} \right\} \varphi(-1)=\varphi(2)$$

ΑΡΑ ΙΚΑΝΟΗ. ΟΙ ΠΡΟΧ. Π. Θ. Rolle στο $[-1, 2]$

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$. 6 ελ. 105

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; σελ 31.

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. σελ 77

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln \frac{1}{x}) = 0$. Σ (σελ 52 6α)

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Λ σελ 74 (συνεχής f)

γ) Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x) = ax^{a-1}$. Σ σελ 116

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$. Σ σελ 214

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 . Σ σελ 47.

Μονάδες 10