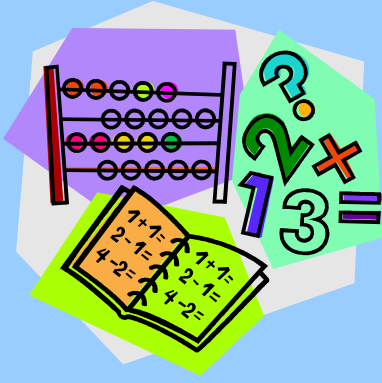




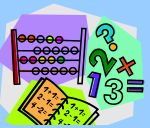
Γεωμετρία. Κεφ 1^ο: Γεωμετρία.

Μέρος Α Θεωρία.

1. Με τι είναι ίσο το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;
2. Ποιο τρίγωνο λέγετε οξυγώνιο - αμβλυγώνιο - ορθογώνιο.
3. Ποιο τρίγωνο λέγετε σκαληνό - ισοσκελές - ισόπλευρο.
4. Τι λέγεται διάμεσος, τι διχοτόμος και τι ύψος ενός τριγώνου.
5. Ποια είναι τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
6. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;
7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος;
8. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου μιας γωνίας;
9. Με τι είναι ίσο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου;
10. Με τι είναι ίση η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου;
11. Ποιο είναι το θεώρημα του Θαλή;
12. Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια;
13. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;
14. Με τι είναι ίσος ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων;

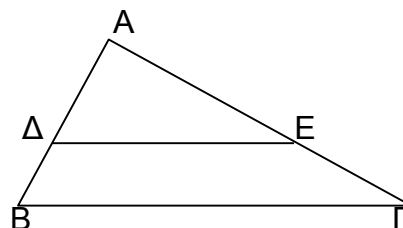
Μέρος Β Ασκήσεις.

1. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) φέρνουμε τη διάμεσο AM και τη διάμεσο MN του τριγώνου $AM\Gamma$. Ναδειχτεί ότι:
α. Η MN είναι μεσοκάθετη της $A\Gamma$. β. $AM = \frac{B\Gamma}{2}$
2. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. Να συγκρίνετε :
α. Τις διαμέσους τους AM και $A'M'$
β. Τις διχοτόμους τους AD και $A'D'$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές $B\Gamma$ και $B'\Gamma'$.
3. Αν από το μέσον της βάσης $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) φέρουμε τα τμήματα $M\Delta$ και ME κάθετα στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
α. $M\Delta=ME$ και
β. Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

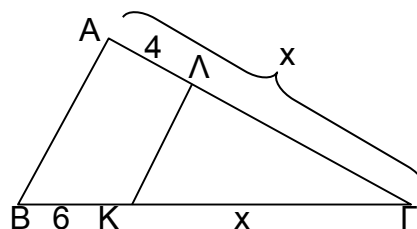


4. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε μια ευθεία παράλληλη προς τη πλευρά $B\Gamma$, η οποία τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν είναι $A\Delta=4\text{cm}$ και $A\Gamma=10,5\text{cm}$, να υπολογίσετε τα τμήματα AE και $E\Gamma$.
5. Μια ευθεία παράλληλη προς την πλευρά $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Αν είναι $\Delta E=8\text{cm}$, $B\Gamma=20\text{cm}$ και $A\Delta=4\text{cm}$, $E\Gamma=9\text{cm}$, να υπολογίσετε τις AB και AE .
6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AD . Να δείξετε ότι:
α. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.
β. $AB^2=B\Gamma \cdot B\Delta$.

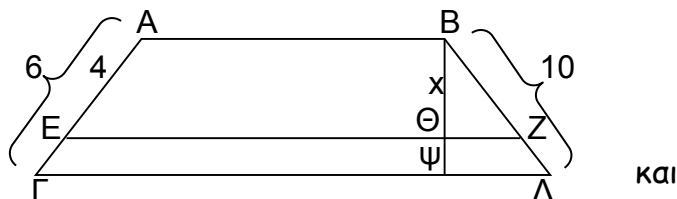
7. Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $AB=6\text{cm}$, $A\Gamma=8\text{cm}$ και $A\Delta=4\text{cm}$. Αν είναι $AE=x$ και $E\Gamma=y$, να βρεθούν τα x και y .



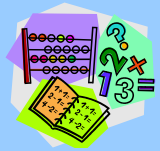
8. Στο διπλανό σχήμα είναι $K\Lambda \parallel AB$, $A\Lambda=4\text{cm}$, και $BK=6\text{cm}$. Αν είναι $A\Gamma=K\Gamma=x$, να υπολογιστεί το x .



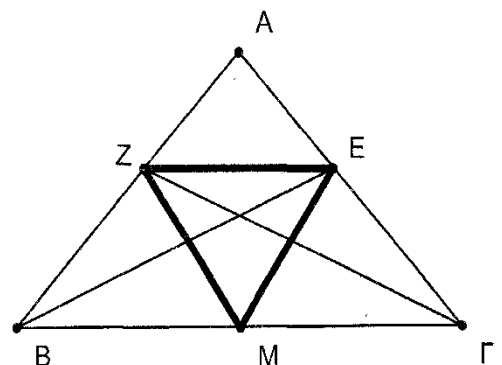
9. Στο διπλανό τραπέζιο είναι $EZ \parallel AB$, $\Delta E=4\text{cm}$, $A\Delta=6\text{cm}$, $\Gamma H=5\text{cm}$, $B\Gamma=10\text{cm}$. Αν είναι $\Gamma\Theta=x$, $\Theta H=\psi$, και $\Gamma Z=\omega$, $ZB=\phi$, να βρεθούν τα x , ψ , ω και ϕ .

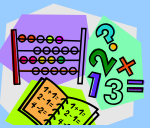


10. Σε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι ΔE και BZ είναι κάθετες στη διαγώνιο $A\Gamma$ και τέμνουν τις AB και $\Gamma\Delta$ στα σημεία K, Λ αντίστοιχα. Αν $AB=10\text{cm}$, $A\Gamma=9\text{cm}$ και $EZ=3\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου.
11. Σε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), αν $EZ \parallel AB \parallel \Gamma\Delta$, (E ανήκει στην $A\Delta$ και Z ανήκει στην $B\Gamma$). Να υπολογιστεί το ευθ. τμήμα BZ , αν $AE=9\text{cm}$, $E\Delta=3\text{cm}$ και $B\Gamma=16\text{cm}$.



12. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του και σχηματίζουμε ένα νέο τρίγωνο $K\Lambda M$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ισόπλευρο και το εμβαδόν του είναι 4 φορές μικρότερο από το εμβαδό του αρχικού τριγώνου $AB\Gamma$.
13. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Προεκτείνουμε τις πλευρές BA και ΓA του τριγώνου κατά τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ και $A\epsilon = AB$ αντίστοιχα. Έστω M το σημείο τομής των προεκτάσεων των $\Delta\epsilon$ και $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- $B\Gamma = \Delta\epsilon$
 - Το τρίγωνο MBE είναι ισοσκελές.
 - Τα τρίγωνα MAB και $MA\epsilon$ είναι ίσα.
14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, το ύψος του $A\Delta$ και $\Delta\epsilon \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα.
 - Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\epsilon$ είναι όμοια.
 - Αν $AB = 10\text{cm}$, $A\Delta = 5\text{cm}$, $\Delta\epsilon = 2\text{cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Delta$ και $A\epsilon$.
15. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = 7,5\text{cm}$ και $A\Gamma = 9\text{cm}$. Στην AB παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = 4\text{cm}$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς την $B\Gamma$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο ϵ :
- Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\epsilon$ είναι όμοια.
 - Να γράψετε τον λόγο ομοιότητας.
 - Να υπολογίσετε τα τμήματα $A\epsilon$ και $\Delta\epsilon$.
 - Αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 16cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του $A\Delta\epsilon$.
16. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρνουμε τις διχοτόμους BE και ΓZ των γωνιών B και Γ .
- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και ΓBZ είναι ίσα.
 - Να γράψετε την ισότητα των πλευρών και των γωνιών που προκύπτει από την παραπάνω ισότητα τριγώνων.
 - Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.

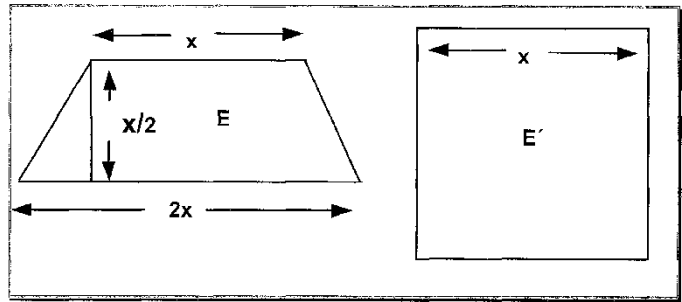




17. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες του είναι ίσες και δημιουργούν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο ίσα μεταξύ τους.
18. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A = 90^\circ$) να αποδείξετε ότι:
- A. αν $\Gamma = 30^\circ$, θα ισχύει ότι $AB = \frac{B\Gamma}{2}$
- B. αν $AB = \frac{B\Gamma}{2}$, θα ισχύει ότι $\Gamma = 30^\circ$.
19. Δύο τετράγωνα είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$. Αν η πλευρά του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι 12cm, να βρεθεί η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου και ο λόγος των εμβαδών τους.
20. Να βρείτε το λόγο ομοιότητας δύο κανονικών οκταγώνων που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνων 5cm και 7cm.
21. Μια σελίδα χαρτί έχει σχήμα ορθογωνίου. Αν διπλώσουμε το χαρτί αυτό στη μέση κατά μήκος του πλάτους του, προκύπτει ορθογώνιο όμοιο με το αρχικό. Να βρεθεί ο λόγος των διαστάσεων του χαρτιού.
22. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 8cm και σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$, έτσι ώστε $BA = 3cm$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $A\Delta B$, $A\Lambda\Gamma$.
23. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A = 30^\circ$, $a = 2cm$ και $\gamma = 5cm$. Να βρείτε τις γωνίες Γ , B και την πλευρά β .
24. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $\Gamma\Delta$ και ΓE αντίστοιχα έτσι, ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$. Αν Z σημείο της διχοτόμου ΓH να δείξετε ότι:
- A. $Z\Delta = ZE$
- B. Οι αποστάσεις του Z από τις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ είναι ίσες.



25. Αν E το εμβαδόν του τραπεζίου του διπλανού σχήματος και E' το εμβαδόν του τετραγώνου, να βρείτε τον λόγο των εμβαδών $\frac{E}{E'}$

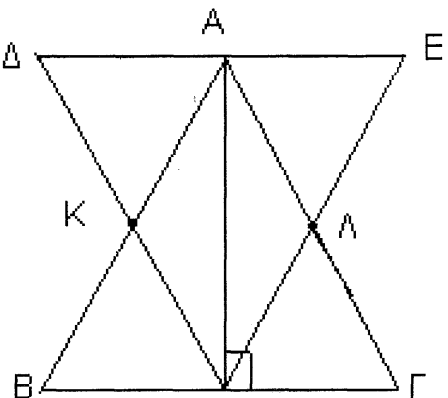


26. Το $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο, η $AM \perp B\Gamma$, $MK \parallel A\Gamma$, $\Delta MA \parallel AB$ και $\Delta E \parallel K\Lambda$. Να δείξετε ότι:

A. $KA \parallel B\Gamma$ και ότι τα σημεία K, Λ είναι μέσα των $M\Delta$, ME .

B. Τα τρίγωνα $K\Lambda M$, $M\Delta E$ είναι όμοια και ότι

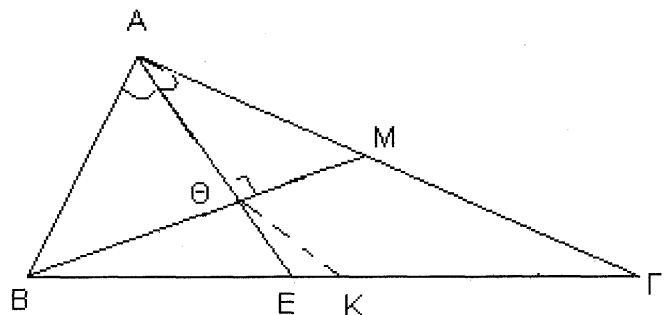
$$\frac{E(K\Lambda M)}{E(M\Delta E)} = \frac{1}{4} = \left(\frac{K\Lambda}{B\Gamma}\right)^2$$



27. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AE είναι διχοτόμος, η $BM \perp AE$ και το K μέσο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι:

A. Το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές και ότι το Θ είναι μέσο της BM .

B. $\Theta K \parallel \frac{M\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}$



28. Τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων είναι κ και

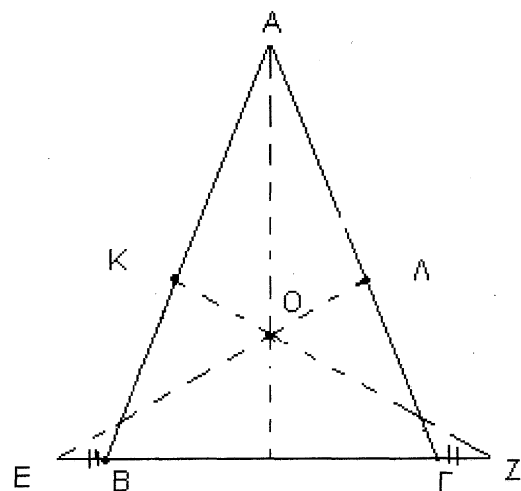
Α. Αν $\frac{\kappa}{\lambda} = 2$ να υπολογίσετε τους λόγους:

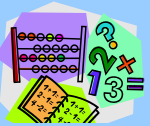
A. $\frac{\lambda}{\kappa}$, B. $\frac{5\kappa - \lambda}{\kappa + 3\lambda}$

29. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, $AB = A\Gamma$, $BE = \Gamma Z$, και τα K, Λ είναι μέσα των $AB, A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

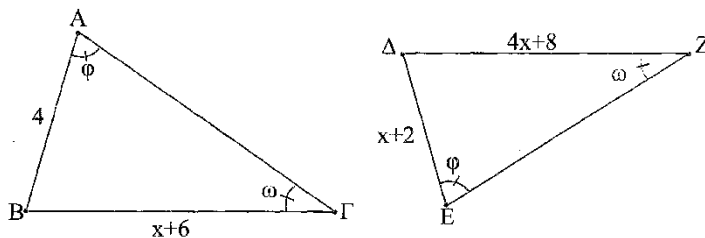
A. $E\Lambda = KZ$ και EOZ είναι ισοσκελές

B. AO είναι διχοτόμος της γωνίας A και κάθετη στη $B\Gamma$





30. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ στο παρακάτω σχήμα:



A. Δείξτε ότι τα τρίγωνα είναι όμοια

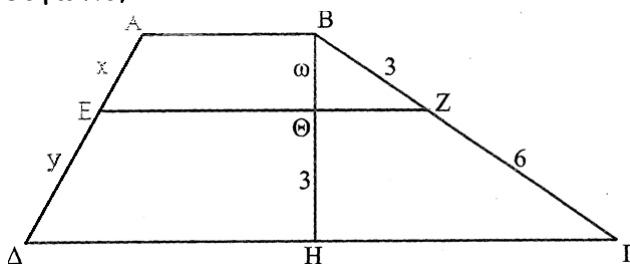
B. Να δείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας τους είναι $\lambda = \frac{1}{3}$

31. Ποιο το χ αν το διπλανό τρίγωνο είναι ορθογώνιο;

32. Αν χ είναι η ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{\chi - 3}{\chi + 3} - \frac{3\chi - 7}{3\chi - 1} = 0$$

να υπολογιστούν τα γ και ω στο διπλανό σχήμα.



33. Στο διπλανό σχήμα η $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $AB = 15\text{cm}$, $\Delta E = 24\text{cm}$.

A. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABZ και ΔEZ είναι όμοια.

B. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους

Γ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ABZ είναι 325cm^2 να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

