

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ένα βοήθημα που παρέχει στους μαθητές του γυμνασίου

- ΘΕΩΡΙΑ
- ΣΧΟΛΙΑ
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
- ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
- ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Μπέκας Χρήστος  
Μαθηματικός



**Α' ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> (ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ)**

- 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (επαναλήψεις – συμπληρώσεις)
- 1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα
- 1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων
- 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων
- 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες
- 1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων
- 1.7 Διάρθρωση πολυωνύμων (εκτός ύλης)
- 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων
- 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
- 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ)**

- 2.1 Η εξίσωση  $ax + b = 0$
- 2.2 Εξισώσεις 2ου βαθμού
- 2.3 Προβλήματα εξισώσεων 2ου βαθμού
- 2.4 Κλασματικές εξισώσεις
- 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις με έναν άγνωστο

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3<sup>ο</sup> (ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ)**

- 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης
- 3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του
- 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

**Β' ΜΕΡΟΣ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)****ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)**

- 1.1 Ισότητα τριγώνων
- 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων
- 1.3 Θεώρημα του Θαλή
- 1.4 Ομοιοθεσία
- 1.5 Ομοιότητα
- 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2<sup>ο</sup> (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ)**

- 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $\omega$  με  $0^\circ < \omega < 180^\circ$
- 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών
- 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

**Γ' ΜΕΡΟΣ (ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ)**

- 1.Θεωρία
- 2.Ασκήσεις
- 3.Συλλογή διαγωνισμάτων



## Α' Μέρος

# Άλγεβρα





## 1.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

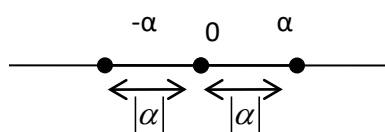
- 1) Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους
  - Θυμάμαι ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί και τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού.
  - Εμπεδώνω τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους.
- 2) Δυνάμεις πραγματικών αριθμών
  - Εμπεδώνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.
  - Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες των δυνάμεων στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.
  - Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων
- 3) Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού
  - Θυμάμαι τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και τις άμεσες συνέπειές του
  - Να γνωρίζω τις ιδιότητες των ριζών και να μάθω να τις χρησιμοποιώ
  - Να αποδεικνύω τις ιδιότητες των ριζών

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

- ❖ **ΘΕΤΙΚΟΙ** : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο +
- ❖ **ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ** : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο -
- ❖ **ΤΟ ΜΗΔΕΝ** : δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός
- ❖ **ΟΜΟΣΗΜΟΙ** : είναι οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο
- ❖ **ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ** : είναι οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$  ονομάζεται η απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό  $a$  από την αρχή του άξονα και συμβολίζεται με  $|a|$ .



$$\text{Π.χ. } |-5| = 5, | +5| = 5, |0| = 0, \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}, \left| +\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

## ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσω δύο ομόσημους αριθμούς, γράφω το πρόσημό τους και προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους.

$$\text{Π.χ. } (-3) + (-2) = -5$$

## ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς, γράφω το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη.

$$\text{Π.χ. } (-7) + (+3) = -4$$

## ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (+) απαλείφουμε το (+) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με τα πρόσημά τους

Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (-) τότε απαλείφουμε το (-) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με αλλαγμένα πρόσημα.

$$\text{Π.χ. } -(2 + 4 + 5) + (1 - 7 + 2) = -2 - 4 - 5 + 1 - 7 + 2 = -16 + 1 = -15$$

## ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός

$$\text{Π.χ. } (-3)(-2) = +6$$

## ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι πάντα αρνητικός αριθμός.

$$\text{Π.χ. } (-7)(+3) = -21$$

| Γινόμενο ομόσημων   | Γινόμενο ετερόσημων |
|---------------------|---------------------|
| $(+) \cdot (+) = +$ | $(+) \cdot (-) = -$ |
| $(-) \cdot (-) = +$ | $(-) \cdot (+) = -$ |

## Σχόλια

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

- Θετικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.
- Αρνητικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό



## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού :

|                       | Πρόσθεση                                                                   | Πολλαπλασιασμός                                                         |
|-----------------------|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Αντιμεταθετική        | $\alpha + \beta = \beta + \alpha$                                          | $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$                               |
| Προσεταιριστική       | $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$                    | $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ |
| Ουδέτερο στοιχείο     | $\alpha + 0 = \alpha$                                                      | $\alpha \cdot 1 = \alpha$                                               |
| Αντίθετο στοιχείο     | $\alpha + (-\alpha) = 0$                                                   | $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ όταν $\alpha \neq 0$                |
| Επιμεριστική ιδιότητα | $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ |                                                                         |

### Σχόλια

- 1) Αντίθετοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν.
- 2) Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα.

**Παράδειγμα 28ο :** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K = -5 + 3 - (-2) \cdot (-3) - (-5 - 7) : (-3)$$

#### Λύση

$$\begin{aligned} K &= -5 + 3 - (-2) \cdot (-3) - \underbrace{(-5 - 7)} : (-3) = -5 + 3 - \underbrace{(-2) \cdot (-3)} - \underbrace{(-12) : (-3)} = \\ &= -5 + 3 - (+6) - (+4) = -5 + 3 - 6 - 4 = 3 - 15 = -12 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 29ο :** Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:  $\frac{5}{3} + 3 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5}$

#### Λύση

$$\begin{aligned} &\frac{5}{3} + 3 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{5}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left( \frac{3}{12} - \frac{5}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \\ &= \frac{5}{3} + 3 \cdot \left( \frac{3}{12} - \frac{5}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left( -\frac{2}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left( -\frac{2}{12} \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} = \\ &= \frac{5}{3} - \frac{6}{12} - \frac{5}{12} = \frac{20}{12} - \frac{6}{12} - \frac{5}{12} = \frac{20 - 6 - 5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 30ο :** Να υπολογίσετε την παράσταση:  $\Lambda = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{2 - \frac{7}{2}}$

**Λύση**

$$\Lambda = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{2 - \frac{7}{2}} = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{1} - \frac{7}{2}} = 1 - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4-7}{2}} = 1 - \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{3}{2}} = 1 - \left(+\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

**Παράδειγμα 31ο :** Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$\Delta = 2 \cdot (3\alpha + 2\delta) - 3 \cdot (\beta + \gamma - 5)$ , όταν  $2\alpha - \beta = 7$  και  $3\gamma - 4\delta = -5$ .

**Λύση**

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot (3\alpha + 2\delta) - 3 \cdot (\beta + \gamma - 5) = 6\alpha + 4\delta - 3\beta - 3\gamma + 15 = \\ &= (6\alpha - 3\beta) + (4\delta - 3\gamma) + 15 = 3 \cdot (2\alpha - \beta) - (3\gamma - 4\delta) + 15 = 3 \cdot 7 - (-5) + 15 = \\ &= 21 + 5 + 15 = 41 \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 3**

- 1) Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή, μπορεί όμως να είναι λάθος. Επίλεξε το Σ αν αυτή είναι σωστή και το Λ αν αυτή είναι λάθος.

|                                                                                                                                                            |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| α) Ο αριθμός $-x$ είναι ένας αρνητικός ρητός αριθμός.                                                                                                      | Σ | Λ |
| β) Ο αριθμός $-x$ είναι ο αντίθετος του αριθμού $x$ και μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αν ο $x$ είναι αρνητικός ή θετικός αντίστοιχα.                 | Σ | Λ |
| γ) Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες απόλυτες τιμές.                                                                                                    | Σ | Λ |
| δ) Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια πάντα απόλυτη τιμή αφού αυτή εκφράζει την απόσταση των σημείων του άξονα στα οποία αυτοί μπαίνουν από την αρχή του. | Σ | Λ |
| ε) Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.                                                                                           | Σ | Λ |
| στ) Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.                                                                                     | Σ | Λ |
| ζ) Ο αντίθετος του $x$ είναι ίσος με το γινόμενο του $-1$ με $x$ δηλαδή $-x = (-1) \cdot x$                                                                | Σ | Λ |
| η) Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αριθμό ομόσημο μ' αυτούς.                                                                                            | Σ | Λ |
| θ) Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο έναν θετικό αριθμό.                                                                                                  | Σ | Λ |
| ι) Οι ετερόσημοι έχουν γινόμενο έναν αρνητικό αριθμό.                                                                                                      | Σ | Λ |

- 2) Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

α)  $-5 - 7 = \dots$       β)  $3 - 5 = \dots$       γ)  $(-3) \cdot (-5) = \dots$   
 δ)  $-2 \cdot (+5) = \dots$       ε)  $-3 \cdot \frac{2}{5} = \dots$       στ)  $\left(-\frac{5}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$

- 3) Να κάνετε τις πράξεις :

α)  $-3 + 5(-2) - 6 : (-2)$   
 β)  $1 - 2(3 - 7) - (-2 + 5) \cdot (-4) : (-6) - 1$   
 γ)  $2 - [1 - (5 - 7)]$   
 δ)  $5 - 2[3 - (5 - 7)]$

- 4) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α)  $1 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$       β)  $\frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - 1}$       γ)  $1 - \frac{\frac{2}{5} - 1}{3}$

- 5) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης  $A = xy + 3x - 5(x + y) - 11$  για  $x = -2$  και  $y = 3$ .
- 6) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης  $B = x(2 - y) + 3x - 5(x - y) + xy$  για  $x = 1$  και  $y = 3$ .
- 7) Να απλοποιήσετε την παράσταση  $B = 2x - 3[x - (2x - y)] - y$  και μετά να βρείτε την τιμή της για  $x = 0,2$  και  $y = 0,25$ .

- 8) Να γίνουν οι πράξεις :

α) 
$$\frac{\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$$

β) 
$$\frac{\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{2}{3}}{\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right)}$$

- 9) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α)  $1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$     β)  $1 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

γ)  $2 - \left(1 + \frac{1}{-2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) : \left(-\frac{1}{6}\right)$

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΟΡΙΣΜΟΣ**

Δύναμη με βάση έναν πραγματικό αριθμό  $a$  και εκθέτη έναν φυσικό αριθμό  $n$  ονομάζουμε, το γινόμενο από  $n$  παράγοντες ίσους με  $a$  :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

| Σχέση                                                           | Παράδειγμα                                                      |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$                                    | $2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$                                        |
| 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$                                        | $5^{100} : 5^{98} = 5^2 = 25$                                   |
| 3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$                                    | $(3^4)^5 = 3^{20}$                                              |
| 4) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$                              | $7^5 \cdot 3^5 = 21^5$                                          |
| 5) $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$               | $\frac{100^3}{25^3} = \left(\frac{100}{25}\right)^3 = 4^3 = 64$ |
| 6) $a^0 = 1$                                                    | $3^0 = 1$                                                       |
| 7) $a^1 = a$                                                    | $7^1 = 7$                                                       |
| 8) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$                                     | $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$                          |
| 9) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ | $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$    |

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- 1) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός
- 2) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός
- 3) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

**Προσοχή !!!!**

✚ Δεν υπάρχουν οι ιδιότητες για τις παραστάσεις :  $\alpha^{\mu} + \alpha^{\nu}$  και  $\alpha^{\mu} - \alpha^{\nu}$ .

✚ Υπάρχει διαφορά μεταξύ των συμβολισμών :  $(-\alpha)^{\nu}$  και  $-\alpha^{\nu}$ .

**Παράδειγμα 32ο :** Εφαρμόσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων :

α)  $2^5 \cdot 2^3$     β)  $(-3)^2 \cdot (-3)^3$     γ)  $(-3)^2 : (-3)^3$     δ)  $[(-3)^9]^3$     ε)  $(2x)^3$     στ)  $[(-3) : \alpha]^4$

**Λύση**

α)  $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$

β)  $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -3^5$

γ)  $(-3)^2 : (-3)^3 = (-3)^{2-3} = (-3)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}$

δ)  $[(-3)^9]^3 = (-3)^{9 \cdot 3} = (-3)^{27} = -3^{27}$

ε)  $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

στ)  $[(-3) : \alpha]^4 = \left(-\frac{3}{\alpha}\right)^4 = \left(-\frac{\alpha}{3}\right)^4 = +\frac{\alpha^4}{3^4} = \frac{\alpha^4}{81}$

**ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ**

Οι πράξεις γίνονται με την εξής σειρά:

1<sup>ov</sup> : οι πράξεις σε παρενθέσεις και αγκύλες

2<sup>ov</sup> : υπολογισμοί δυνάμεων

3<sup>ov</sup> : πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

4<sup>ov</sup> : οι προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

**Παράδειγμα 33ο :** Να υπολογιστεί η παράσταση:  $A = (-2)^3 - 5^2 + [(3^2 - 4) : 5 - 11]$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= (-2)^3 - 5^2 + \left[ \underbrace{(3^2 - 4)} : 5 - 11 \right] = (-2)^3 - 5^2 + [(9 - 4) : 5 - 11] \\ &= (-2)^3 - 5^2 + \left( \underbrace{5 : 5} - 11 \right) = (-2)^3 - 5^2 + \left( \underbrace{1 - 11} \right) = \underbrace{(-2)^3} - \underbrace{5^2} + (-10) = -8 - 25 - 10 = -43. \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 3****10)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

|         |       |               |    |                 |                   |                 |                |
|---------|-------|---------------|----|-----------------|-------------------|-----------------|----------------|
| Αριθμός | 9     | $\frac{1}{8}$ | 27 | $\frac{16}{81}$ | $\frac{144}{169}$ | $\frac{1}{121}$ | $\frac{8}{27}$ |
| Δύναμη  | $3^2$ |               |    |                 |                   |                 |                |

**11)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμα της από τη στήλη Β

Στήλη Α

Στήλη Β

α)  $(-3)^2$

1. 9

β)  $-2^3$

2. 6

γ)  $-3^2$

3. -9

δ)  $-(-2)^3$

4. -8

5. 8

|    |  |
|----|--|
| α. |  |
| β. |  |
| γ. |  |
| δ. |  |

**12)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμα της από τη στήλη Β

Στήλη Α

Στήλη Β

α)  $(-1)^{2009}$

1.  $\frac{1}{9}$

β)  $-3^{-2}$

2. 1

γ)  $9^{-4} \cdot 3^8$

3.  $-\frac{1}{9}$

δ)  $(3^5 : 3) : 3^6$

4. -1

5. 9

|    |  |
|----|--|
| α. |  |
| β. |  |
| γ. |  |
| δ. |  |

**13)** α γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη .

α)  $3^5 \cdot 3^{-7}$

β)  $2^6 : 2^{-3}$

γ)  $(2^{-5})^{-2}$

δ)  $2^5 \cdot 3^5$

**14)** Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη :

α)  $8 \cdot 2^5$     β)  $9 \cdot 3^{-5}$     γ)  $(-2)^7 \cdot 16$     δ)  $(-3)^2 \cdot 3^5$     ε)  $\frac{12^5}{(-3)^5}$

**15)** Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη

$A = 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$      $B = 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$   
 $\Gamma = 2^{59} - 2^{29}$      $\Delta = 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

**16)** Να υπολογίσετε την παράσταση:  $A = (-9)^2 + 4^3 - (-2)^3 - [(2^3 - 4) : 2 - 6]$

**17)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{10} : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$     β)  $[(-2)^7]^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{55}$

**18)** Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = \alpha^2 - 2\alpha\beta^3 - 3\alpha^3\beta$  για :

α)  $\alpha = -1$  και  $\beta = -2$     β)  $\alpha = -2$  και  $\beta = -\frac{1}{2}$

**19)** Βρείτε την αριθμητική τιμή της παρακάτω παράστασης για  $x = -1$  :

$K = 3^x - 3^{x+1} - 3^{x-1} - x^5$

**20)** Να βρείτε τον φυσικό αριθμό  $\kappa$  , ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α)  $\left(\frac{1}{2}\right)^\kappa = \frac{1}{16}$     β)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{2\kappa+1} = \frac{8}{27}$



**3<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΟΡΙΣΜΟΣ**

Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού  $a$  ονομάζουμε έναν μη αρνητικό αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό  $a$  και συμβολίζουμε  $\sqrt{a}$ , οπότε :  $\sqrt{a} = x$  όταν  $x^2 = a$

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

- 1) Για  $a \geq 0$  τότε  $(\sqrt{a})^2 = a$
- 2) Για κάθε  $a$  τότε  $\sqrt{a^2} = |a|$
- 3) Αν  $a \geq 0$  και  $b \geq 0$  τότε  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- 4) Αν  $a \geq 0$  και  $b \geq 0$  τότε  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
- 5) Αν  $a \geq 0$  και  $b \geq 0$  τότε  $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$

**Σχόλια**

- 1) Δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού
- 2) Προσοχή δεν ισχύει η σχέση :  $\sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

**Παράδειγμα 34ο :** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2}\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{81}}$$

**Λύση**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2}\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{22 + \sqrt{5 + 4}} - \sqrt{8\sqrt{2} \cdot 2} + \sqrt{9} = \\ &= \sqrt{22 + \sqrt{9}} - \sqrt{8\sqrt{4}} + 3 = \sqrt{22 + 3} - \sqrt{8 \cdot 2} + 3 = \sqrt{22 + 3} - \sqrt{8 \cdot 2} + 3 = \\ &= \sqrt{25} - \sqrt{16} + 3 = 5 - 4 + 3 = 4 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 35ο :** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \quad \beta) \sqrt{45} + 4\sqrt{5} - \sqrt{125}$$

**Λύση**

$$\alpha) 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (5 + 4 - 2)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

$$\beta) \sqrt{9 \cdot 5} + 4\sqrt{5} - \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} + 4\sqrt{5} - \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 3 ΑΠΟ 3**

- 21)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες

$$\alpha) \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15} \quad \beta) \sqrt{3} + \sqrt{7} = \sqrt{10} \quad \gamma) \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad \delta) \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- 22)** Να κάνετε τις πράξεις :

$$\alpha) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \quad \beta) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{27}} \quad \gamma) \frac{6\sqrt{30}}{\sqrt{5}} \quad \delta) \frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{5}} \quad \epsilon) \frac{5\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$$

- 23)** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) \sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{300} \quad \beta) \sqrt{8} - \sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{200}$$

- 24)** Να απλοποιήσετε την παράσταση :  $A = \frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$

- 25)** Να κάνετε τις πράξεις :

$$\alpha) \sqrt{2} \cdot (3\sqrt{8} - \sqrt{50}) \quad \beta) \sqrt{3} \cdot (5\sqrt{12} - \sqrt{27}) \quad \gamma) (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad \delta) (1 - \sqrt{5}) \cdot (1 + \sqrt{5})$$

- 26)** Να βρείτε ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{12}}$$

$$\beta) 3\sqrt{8}, \sqrt{72}, 2\sqrt{18}, 6\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$$

- 27)** Να βρείτε ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι

$$\alpha) \alpha = \sqrt{8}, \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \gamma = 2\sqrt{2}, \delta = \frac{4}{\sqrt{2}}, \epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma\tau = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

$$\beta) \alpha = \sqrt{3} + \sqrt{3}, \beta = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}, \gamma = \sqrt{12}, \delta = \sqrt{3+3}, \epsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$$

- 28)** Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων :

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}} \quad , \quad B = \sqrt{57 + \sqrt{44 + \sqrt{15 + \sqrt{99 + \sqrt{1}}}}}$$

- 29)** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές:

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \beta) \frac{5}{\sqrt{5}} \quad \gamma) \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad \delta) \frac{2}{\sqrt{8}}$$

## 1.2 ΜΟΝΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα
  - Μαθαίνω τι είναι αλγεβρική παράσταση και πώς να βρίσκω την αριθμητική τιμή της.
  - Διακρίνω αν μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο και προσδιορίζω το βαθμό του.
- 2) Μαθαίνω να προσθέτω, να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ μονώνυμα.

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

##### ✓ Αριθμητική παράσταση,

Είναι κάθε παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Π.χ.  $2 \cdot 3^2 + 4 : 2$

##### ✓ Αλγεβρική παράσταση,

είναι κάθε παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές.

Π.χ.  $3x^2 - \frac{5x}{y}$

##### ✓ Ακέραια αλγεβρική παράσταση,

λέγεται η αλγεβρική παράσταση όπου μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι φυσικοί αριθμοί

Π.χ.  $2x^2 + y$

##### ✓ Αριθμητική τιμή ή τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης,

λέγεται ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς.

##### ✓ Μονώνυμο,

λέγεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού

Π.χ.  $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot \omega^3$

##### ✓ Συντελεστής μονωνύμου,

λέγεται ο αριθμός που βρίσκεται μπροστά από τις μεταβλητές.

Π.χ. το  $\frac{1}{2}x^2y\omega^3$  έχει συντελεστή  $\frac{1}{2}$ .

✓ **Κύριο μέρος**

του μονωνύμου λέγεται το γινόμενο των μεταβλητών μαζί με τους εκθέτες τους

Π.χ. το  $-2x^2y^3$  έχει κύριο μέρος  $x^2y^3$ .

✓ **Βαθμός μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή,**

λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Π.χ. το  $3xy^2$  έχει βαθμό ως προς  $y$  το 2

✓ **Βαθμός μονωνύμου,**

λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Π.χ. το  $3xy^2$  έχει βαθμό συνολικά 3

✓ **Όμοια μονώνυμα,**

λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Π.χ.  $3x^2y$  και  $2x^2y$

✓ **Ίσα μονώνυμα,**

λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή.

✓ **Αντίθετα μονώνυμα,**

λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

✓ **Σταθερό μονώνυμο,**

λέγετε ο οποιοσδήποτε αριθμός.

✓ **Μηδενικό μονώνυμο,**

λέγετε το σταθερό μονώνυμο 0.

**ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ**

1.Κάθε σταθερό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού

2.Για το μηδενικό μονώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

**Παράδειγμα 36ο :** Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα :

| Μονώνυμο       | Συντελεστής | Κύριο μέρος | Βαθμός ως προς $x$ | Βαθμός ως προς $y$ | Βαθμός ως προς $x$ και $y$ |
|----------------|-------------|-------------|--------------------|--------------------|----------------------------|
| $5xy^4$        | 5           | $xy^4$      | 1                  | 4                  | 5                          |
| $-xy^2$        | -1          | $-xy^2$     | 1                  | 2                  | 3                          |
| $1/7x^2y^5$    | $1/7$       | $7x^2y^5$   | 2                  | 5                  | 7                          |
| $-\sqrt{3}x^4$ | $-\sqrt{3}$ | $x^4$       | 4                  | 0                  | 4                          |

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2**

- 30)** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- Μονώνυμο λέγεται η ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των ..... σημειώνεται μόνο η πράξη .....
  - ..... του μονωνύμου λέγεται ο αριθμητικός παράγοντας του μονωνύμου.
  - Κύριο μέρος του μονωνύμου λέγεται το γινόμενο των ..... με τους αντίστοιχους.....
  - Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται ..... μονώνυμα
  - Το σταθερό μονώνυμο 0 λέγεται ..... μονώνυμο.

- 31)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Μονώνυμο         | Συντελεστής | Κύριο μέρος | Βαθμός ως προς x | Βαθμός ως προς y | Βαθμός ως προς x και y |
|------------------|-------------|-------------|------------------|------------------|------------------------|
| $7x^2y^3$        |             |             |                  |                  |                        |
| $-2x^3y$         |             |             |                  |                  |                        |
| $\frac{1}{3}x^4$ |             |             |                  |                  |                        |
| $\sqrt{2}$       |             |             |                  |                  |                        |

- 32)** Ένα ορθογώνιο έχει τριπλάσιο μήκος από το πλάτος του x. Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του είναι :

|         |           |          |         |
|---------|-----------|----------|---------|
| A) $3x$ | B) $3x^2$ | Γ) $x^2$ | Δ) $4x$ |
|---------|-----------|----------|---------|

- 33)** Η Μαρία έχει x ευρώ, ενώ η Ελένη έχει 2 ευρώ λιγότερα από το τριπλάσιο ποσό της Μαρίας. Η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το χρηματικό ποσό της Ελένης είναι :

|            |             |         |             |
|------------|-------------|---------|-------------|
| A) $x - 2$ | B) $3x + 2$ | Γ) $3x$ | Δ) $3x - 2$ |
|------------|-------------|---------|-------------|

- 34)** Ένα μονώνυμο έχει συντελεστή και μεταβλητές x, y. Να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός του ως προς x είναι 3 και ως προς x και y είναι 7.

- 35)** Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης :

α)  $A = 2xy - x^2 + 3xy^2$  για  $x = -3$  και  $y = 2$ .

β)  $B = x^2y^5 + 2x^3y^2$  για  $x = -3$  και  $y = -1$ .

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΟΜΟΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ**

Το άθροισμα δύο όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους

Π.χ.  $2x^2y + 4x^2y = 6x^2y$

**ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ**

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα νέο μονώνυμο το οποίο έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών.

Π.χ.  $2x \cdot 3x^2y = 6x^3y$

**ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ**

Για να βρω το πηλίκο δύο μονωνύμων πολλαπλασιάζω τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

Π.χ.  $\frac{3x^3y}{xy} = 3 \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y}{y} = 3x^2$

**Προσοχή !!!**

Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι απαραίτητα μονώνυμο

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 2**

**36)** Να αντιστοιχίσετε τα δεδομένα της 1<sup>ης</sup> στήλης με τα δεδομένα της 2<sup>ης</sup> στήλης

| 1 <sup>η</sup> στήλη       | 2 <sup>η</sup> στήλη |
|----------------------------|----------------------|
| α) $4x^2y + 2yx^2$         | 1) $4xy^2$           |
| β) $4y^2x + 2xy^2$         | 2) $8x^3y^3$         |
| γ) $(4x^2y) \cdot (2yx^2)$ | 3) $6x^2y^3$         |
| δ) $(4x^2y) : (2yx^2)$     | 4) 2                 |
| ε) $(4x^2y) : (2xy^2)$     | 5) $\frac{2x}{y}$    |
|                            | 6) $6x^4y^2$         |
|                            | 7) Δεν γίνεται πράξη |

**37)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με ( Σ ) αν είναι σωστές ή με ( Λ ) αν είναι λάθος :

- α) Το γινόμενο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά.  
 β) Το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο προς αυτά.  
 γ) Το πηλίκο όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο.

**38)** Να κάνετε τις πράξεις, (άθροισμα ομοίων μονωνύμων):

α)  $5x + 3x - 2x - x$       β)  $-x^2 + x^2$       γ)  $2ax^3 - 0,5ax^3 + 1,25ax^3$   
 δ)  $-x^3y + \frac{1}{3}x^3y + \frac{8}{12}x^3y$     ε)  $-\frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha^3$     στ)  $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}x}{4} + x$

**39)** Να κάνετε τις πράξεις (αναγωγή ομοίων όρων) :

α)  $3a - 5\beta + 2a - \beta$   
 β)  $x\sqrt{2} + x - 2 + 3x - 1$   
 γ)  $\frac{1}{5}x^2y - xy + xy^2 - \frac{2}{3}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + xy + 1$   
 δ)  $-\frac{\kappa}{2} - \frac{\lambda}{3} + 2\kappa - \lambda + \frac{\kappa}{3}$   
 ε)  $x^2 - xy - yx + y^2 - x^2$   
 στ)  $2 - 3x + x^2 + 5x - 3 + 7x^2$

$$\zeta) \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\eta) -(2\alpha - \beta) + (3\alpha - 4\beta) - \alpha - (1 - 3\beta) + 2$$

$$\theta) 1 + x + x^2 - (1 - x + x^2) - 2x$$

**40)** Έστω  $\alpha = -2x + \psi + \omega$ ,  $\beta = x - 2\psi + \omega$ ,  $\gamma = x + \psi - 2\omega$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\alpha + \beta + \gamma$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $(2\alpha - \beta) + (2\beta - \gamma) + (2\gamma - \alpha)$ .

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $(\alpha + 2x) - (\beta + 2\psi) + (\gamma + 2\omega) - 2\psi$ .

**41)** Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\alpha) 3x^3\psi \cdot (-5x^2\psi^3) \quad \beta) -\alpha^2\beta \cdot (-2\alpha\gamma^3) \cdot 5\alpha^3\beta^2 \quad \gamma) 3x^2 \cdot (-2x^3) \cdot 5x$$

**42)** Να υπολογίσετε τα πηλίκα:  $\alpha) \frac{3}{4}x^2 : \left(-\frac{1}{4}x^2\right) \quad \beta) 6x^3\psi^4 : (-2x^2\psi)$

**43)** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) 6x^3 : \dots = 3x \quad \beta) -3\alpha^2\beta \cdot \dots = 15\alpha^3\beta^4 \quad \gamma) \frac{2x^5\psi^2}{\dots} = \frac{x^3}{5\psi}$$

**44)** Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$ ,  $\lambda$  ώστε να ισχύουν οι ισότητες :

$$\alpha) (-15x^{3\kappa-1}\psi^\lambda) : (-3x^\kappa\psi^2) = 5x^3\psi \quad \beta) (4\alpha^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}) : (12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1}) = \frac{2}{3}\alpha\beta^3$$

**45)** Για τα παρακάτω μονώνυμα με μεταβλητές  $x$  και  $\psi$ , να βρείτε τις τιμές των αριθμών  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  ώστε να ισχύουν οι ισότητες :

$$\alpha) (\kappa x^\lambda \psi) \cdot (3x^2\psi^\mu) = -12x^5\psi \quad \beta) (12x^{3\lambda}\psi^{2\kappa}) : (\mu x^\lambda \psi^\kappa) = -3x^4\psi^3$$

**46)** Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες  $3x$  και  $4x$  αντίστοιχα . Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών κύκλων .



## 1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΡΟΣΘΕΣΗ & ΑΦΑΙΡΕΣΗ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Πολυώνυμο
  - Διακρίνω πότε μια αλγεβρική παράσταση καλείται πολυώνυμο, προσδιορίζω τον βαθμό του και μαθαίνω πότε δύο πολυώνυμα είναι ίσα.
- 2) Πρόσθεση - Αφαίρεση
  - Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ πολυώνυμα.
  - Χρησιμοποιώ την αναγωγή ομοίων όρων για την απλούστερη γραφή μιας αλγεβρικής παράστασης εμπεδώνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

##### ✓ Πολυώνυμο,

Λέγεται το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

Π.χ.  $2x^2 + 5x + 6$

##### ✓ Όρος πολυωνύμου,

Λέγεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται στο πολυώνυμο.

Π.χ. στο πολυώνυμο  $2x^2 + 5x + 6$  οι όροι είναι  $2x^2, 5x, 6$

##### ✓ Διώνυμο,

Λέγεται το πολυώνυμο που περιέχει δύο όρους.

Π.χ.  $3x - 5$

##### ✓ Τριώνυμο,

Λέγεται το πολυώνυμο που περιέχει τρεις όρους

Π.χ.  $x^2 - x + 2$

##### ✓ Βαθμός πολυωνύμου,

Λέγεται ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Π.χ.  $2x^2 + 5x + 6$  βαθμός 2

##### ✓ Σταθερό πολυώνυμο,

Λέγεται ο κάθε πραγματικός αριθμός.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Δυο πολυώνυμα θα λέμε ότι είναι ίσα εάν και μόνο εάν έχουν :

-Ιδιο βαθμό

-Οι συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους είναι ίσοι

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ**

Αναγωγή όμοιων όρων είναι η αντικατάσταση των όμοιων πολυωνύμων με το άθροισμά τους

Π.χ.  $x^2 + 5xy + 7x^2 - 8xy = 8x^2 - 3xy$

**Παράδειγμα 37ο :** Δίνονται τα πολυώνυμα  $A(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 8$  και  $B(x) = -8x^3 + 6x$ . Να υπολογιστεί το άθροισμά τους και η διαφορά τους.

**Λύση**

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (5x^3 - 6x^2 + x - 8) + (-8x^3 + 6x) \\ &= 5x^3 - 6x^2 + x - 8 - 8x^3 + 6x \\ &= -3x^3 - 6x^2 + 7x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (5x^3 - 6x^2 + x - 8) - (-8x^3 + 6x) \\ &= 5x^3 - 6x^2 + x - 8 + 8x^3 - 6x \\ &= 13x^3 - 6x^2 - 5x - 8 \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 47)** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.  
Α) Πολυώνυμο λέγεται μια ..... παράσταση που είναι ..... τουλάχιστον δύο μη ομοίων πολυωνύμων.  
Β) Δύο πολυώνυμα είναι ίσα, όταν έχουν όρους ..... μονώνυμα.  
Γ) Αν το πολυώνυμο  $P(x)$  είναι 2<sup>ου</sup> βαθμού τότε έχει τη μορφή  
 $P(x)=\dots\dots\dots$  και .....  
Δ) Η τιμή του πολυωνύμου για  $x = 1$  είναι ίση με το ..... των συντελεστών του .  
Ε) Το ..... πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.
- 48)** Να γίνουν οι αναγωγές ομοίων όρων στις ακόλουθες παραστάσεις:  
 $A = 7x^2 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^4 + 6x^2 + 7x - 9 + 12x^3$   
 $B = 3ax^2 - 2ax - 7a^2x + 9ax^2 - 11ax$   
 $\Gamma = 5xy + 3x(x + y) - 7y^2(x^2 + 2) + 3x^2y^2$
- 49)** Αν  $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$  ,  $Q(x) = -x^3 + 2x - 1$  και  $H(x) = x^2 + 2x$  , να βρεθούν τα πολυώνυμα:  
α)  $P(x) + H(x)$   
β)  $P(x) - Q(x)$   
γ)  $P(x) - [Q(x) - H(x)]$   
δ)  $P(-x) + Q(-2x)$
- 50)** Αν  $P(x) = 2x^2 + 3x - 1$  και  $Q(x) = x^2 - x$  , να βρεθούν τα πολυώνυμα:  
α)  $P(x) + Q(x)$   
β)  $P(x) - Q(x)$   
γ)  $P(2x) + Q(3x)$   
δ)  $P(-x) + Q(-2x)$
- 51)** Αν  $P(x) = 4x^2 - 3x$  και  $Q(x) = 36x^2 + 9x$  να αποδείξετε ότι:  $P(3x) - Q(-x) = 0$
- 52)** Να επιλέξετε την σωστή απάντηση.  
Τα πολυώνυμα  $P(x) = (x - 2) \cdot (x - 3)$  και  $Q(x) = ax^2 + bx + 6$  είναι ίσα, όταν:  
α)  $\alpha = 1$  και  $\beta = 5$       β)  $\alpha = 2$  και  $\beta = 3$   
γ)  $\alpha = 1$  και  $\beta = -5$       δ)  $\alpha = -5$  και  $\beta = 1$

## 1.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Διακρίνω και μελετώ τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων σε

- μονώνυμο  $\times$  πολυώνυμο
- πολυώνυμο  $\times$  πολυώνυμο

### ΓΕΝΙΚΑ

Ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γίνεται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

$$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

### 1<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ΜΟΝΩΝΥΜΟ $\times$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ)

πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

$$2x^2(x^3 + x^2 - 5x) = 2x^2x^3 + 2x^2x^2 - 2x^2 \cdot 5x = 2x^5 + 2x^4 - 10x^3$$

### 2<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ $\times$ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ)

πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

$$(x + 1)(x^2 + x - 3) = x \cdot x^2 + x \cdot x - 3x + x^2 + x - 3 = x^3 - 3x + x^2 + x - 3 = x^3 + x^2 - 2x - 3$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**53)** Να κάνετε τις πράξεις:

- $2(x - y)$
- $3(-x + 2)$
- $-\frac{3}{2}(-2x + 6y)$
- $\alpha(\beta - \alpha + 2)$
- $x(x^2 - 3 + x)$
- $-y(xy - y + 6)$
- $xy(x - y)$
- $\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$
- $-3x(x^3 - 2x + 5)$

**54)** Να κάνετε τις πράξεις:

- $2x(x - y) + 2y(y - x) - 2(y^2 - x^2)$
- $3a(3 - 2a) - 6(2 - a^2) - 9(a + 1) + 20$
- $x^2(x - 2) + x(x^2 - 1) + x(2x + 1)$
- $a(a - \beta + 1) - \beta(\beta - a - 1) - a(a + 1) - \beta(\beta + 1)$
- $ax(a - x) - a(1 - x^2) + x(1 - a^2) - (x - a)$
- $(x + 2)(x + 3) - x(x + 5) - 5$
- $(x - 1)(x + 4) + 6 - x(x + 3)$
- $(x - 4)(x - 5) + x(9 - x) - 17$
- $(2x + 3)(2x - 3) - 4(x^2 - \frac{13}{4})$

**55)** Να κάνετε τις πράξεις:

- $(a - 2\beta)(a + \beta) - (a + \beta)(a - \beta) + \beta(\beta + a)$
- $a(3a - 2\beta - 5) + (3a + \beta)(a - \beta) + \beta^2 - 5(a - 1)$
- $(2\kappa - 3\lambda)(4\kappa^2 + 6\kappa\lambda + 9\lambda^2) - 8\kappa^3 + 27\lambda^3 + 10$
- $(3\mu - 2\nu)(3\nu - 2\mu) - 6(\mu + \nu)(\mu + \nu) - \nu\mu + 15$
- $(x - 1)(x - 2)(x + 1)(x + 2) - x^2(x^2 - 5) + 6$
- $(x^2 - 4x + 4)(x - 2) - x^3 + 108 + 6x(x - 2)$

**56)** Να κάνετε τις πράξεις:

- $(x + 10)(x^2 + 20x + 100) - x^2(x + 30) - 300x$
- $x^2 + (3x - 2)(1 - x)$
- $x - (2x - 1) \cdot (x - 3)$
- $x^2 - 3x(x - 2) - (x - 1) \cdot (1 - 3x)$
- $3x(x - 1) \cdot (2x - 3)$
- $(x - 1) \cdot (2x^2 - x) \cdot (2x + 1)$

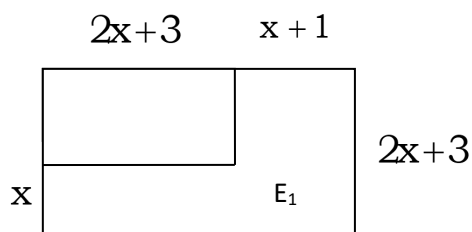
**57)** Αν  $P(x) = 2x^2 - x - 1$  και  $Q(x) = 3x - 2$ , να βρείτε τα πολυώνυμα:

- α)  $P(x) \cdot Q(x)$   
 β)  $P(x) \cdot [Q(x) - 3x(x + 1)]$   
 γ)  $[P(x) - 1] \cdot [Q(x) - x]$

**58)** Να αποδείξετε τις ισότητες:

- α)  $5x - 2x(3x - 1) - (6x - 1)(1 - x) = 1$   
 β)  $3\beta^2 - 2\alpha(\alpha + 3\beta) - 3(\alpha + \beta) \cdot (\beta - 2\alpha) - 4\alpha^2 = -3\alpha\beta$

**59)** Να παραστήσετε με ένα πολυώνυμο το εμβαδόν  $E_1$  του παρακάτω σχήματος.



**60)** Με ποιο πολυώνυμο πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το  $5x - 2$ , ώστε το γινόμενο τους να είναι το πολυώνυμο  $10x^2 - 9x + 2$ .

## 1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Πότε μια ισότητα λέγεται ταυτότητα.
- Αποδεικνύω και χρησιμοποιώ τις βασικές ταυτότητες.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Ταυτότητα γενικά καλείται κάθε ισότητα όπου περιέχει μεταβλητές, και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

### ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

➤  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

#### Απόδειξη

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

➤  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

#### Απόδειξη :

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

➤  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

#### Απόδειξη :

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \beta^2$$

➤  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

#### Απόδειξη :

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

➤  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

#### Απόδειξη

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^3 &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3\end{aligned}$$

➤  $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$

#### Απόδειξη

$$(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3$$

➤  $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$

#### Απόδειξη

$$(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3$$

**ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ**

**Δύο ακόμα πολύ χρήσιμες ταυτότητες οι οποίες παράγονται από τις βασικές**

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

**Συγκεντρωτικά**

| <b>ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ</b>     | <b>ΟΝΟΜΑΣΙΑ</b>       | <b>ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ</b>                                       |
|----------------------|-----------------------|--------------------------------------------------------|
| $(\alpha + \beta)^2$ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ | $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$                    |
| $(\alpha - \beta)^2$ | ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ    | $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$                    |
| $\alpha^2 - \beta^2$ | ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ    | $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$                     |
| $(\alpha + \beta)^3$ | ΚΥΒΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ     | $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ |
| $(\alpha - \beta)^3$ | ΚΥΒΟΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ        | $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ |
| $\alpha^3 + \beta^3$ | ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΥΒΩΝ        | $(\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$   |
| $\alpha^3 - \beta^3$ | ΔΙΑΦΟΡΑ ΚΥΒΩΝ         | $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$   |

**Παράδειγμα 38ο :** Να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα :

$$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2 = \alpha(2\beta + \alpha) + \beta(2\alpha - \beta)$$

**Λύση**

**Α' Μέλος:**

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + (\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 + 4\alpha\beta - \beta^2 \end{aligned}$$

**Β' Μέλος:**

$$\alpha(2\beta + \alpha) + \beta(2\alpha - \beta) = 2\alpha\beta + \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 + 4\alpha\beta - \beta^2$$

Επειδή καταλήγουμε στην ίδια παράσταση η ταυτότητα ισχύει .

**Παράδειγμα 39ο :** Αν  $\alpha + \beta = 1$  να αποδείξετε ότι:  $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = 1$

**Λύση**

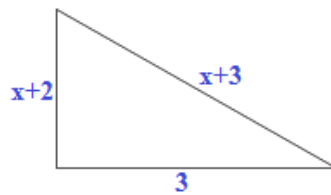
$$\text{Είναι: } \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\alpha\beta \stackrel{\text{λόγω της (1)}}{=} 1^3 - 3\alpha\beta \cdot 1 + 3\alpha\beta = 1$$

Η παραπάνω ταυτότητα καλείται ταυτότητα υπό συνθήκη μιας και η απόδειξη της στηρίζεται αναγκαστικά σε κάποιο δεδομένο



**Παράδειγμα 40ο :** Βρείτε το  $x$  στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο.

**Λύση**



Αφού το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα, άρα θα ισχύει :

$$(x+3)^2 = (x+2)^2 + 3^2$$

$$\cancel{x^2} + 2x3 + \cancel{3^2} = \cancel{x^2} + 2x2 + 2^2 + 9$$

$$6x = 4x + 4$$

$$6x - 4x = 4$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

**Παράδειγμα 41ο :** Αν  $f(x) = x^2 - 3x + 5$ , να βρείτε το  $f(x-2)$  και το  $f(\omega+3)$ .

**Λύση**

Θα θέσουμε όπου  $x$  το  $x-2$  στην  $f(x)$ .

Έχουμε:

$$f(x-2) = (x-2)^2 - 3(x-2) + 5 = x^2 - 2x2 + 2^2 - 3x + 6 + 5 = x^2 - 4x + 4 - 3x + 6 + 5 = x^2 - 7x + 15.$$

Θα θέσουμε όπου  $x$  το  $\omega+3$  στην  $f(x)$ .

Έχουμε:

$$f(\omega+3) = (\omega+3)^2 - 3(\omega+3) + 5 = \omega^2 + 2\omega3 + 3^2 - 3\omega - 9 + 5 = \omega^2 + 3\omega + 5.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 62)** Για τους οποιουδήποτε αριθμούς  $x, y$  να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης A τη συμβολική γραφή από τη στήλη B

| Στήλη A                                               | Στήλη B            |
|-------------------------------------------------------|--------------------|
| α. Το διπλάσιο γινόμενο τους                          | 1. $2(x + y)^2$    |
| β. Το τετράγωνο του αθροίσματος τους                  | 2. $2xy$           |
| γ. Το άθροισμα των τετραγώνων τους                    | 3. $(x + y)^2$     |
| δ. Το τετράγωνο του γινομένου τους .                  | 4. $x^2 + y^2$     |
| ε. Το διπλάσιο του αθροίσματός τους .                 | 5. $(x \cdot y)^2$ |
| στ. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματός τους . | 6. $2(x + y)$      |

- 63)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με ( Σ ) αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

|                                                                              |                      |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1. $(-α + β)^2 = (β - α)^2$                                                  | <input type="text"/> |
| 2. $(-α + β)^2 = (α - β)^2$                                                  | <input type="text"/> |
| 3. $(-α + β)^3 = -(α - β)^3$                                                 | <input type="text"/> |
| 4. $(-α - β)^3 = -(α + β)^3$                                                 | <input type="text"/> |
| 5. $(-α - β)^2 = (α + β)^2$                                                  | <input type="text"/> |
| 6. $(-α - β) \cdot (α - β) = -(α + β) \cdot (α - β) = -(\alpha^2 - \beta^2)$ | <input type="text"/> |

- 64)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με ( Σ ) αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες.

|                                        |                      |
|----------------------------------------|----------------------|
| 1. $(α + β)^2 = α^2 + β^2$             | <input type="text"/> |
| 2. $(α - β)^2 = α^2 - β^2$             | <input type="text"/> |
| 3. $(α - β)^3 = α^3 - β^3$             | <input type="text"/> |
| 4. $(α + β)^3 = α^3 + β^3$             | <input type="text"/> |
| 5. $(α + β) \cdot (α + β) = α^2 + β^2$ | <input type="text"/> |

**65)** Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

β)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$

γ)  $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

δ)  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

ε)  $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$

στ)  $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$

ζ)  $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

η)  $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

θ)  $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$

**66)** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $(x+3)^2$  β)  $(x-4)^2$  γ)  $(2x+5)^2$  δ)  $(1-3x)^2$  ε)  $(2x+5y)^2$  στ)  $(x^2+1)^2$

**67)** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$  β)  $(-x+5)^2$  γ)  $(-1-x)^2$  δ)  $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{y^3}{3}\right)^2$  ε)  $(x^{1002} - 1)^2$

**68)** Κάντε τις παρακάτω πράξεις χρησιμοποιώντας την ταυτότητα διαφορά τετραγώνων,  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ :

α)  $(x+3)(x-3)$  β)  $(x-1)(x+1)$  γ)  $(2x-5)(2x+5)$

δ)  $(1-3x)(1+3x)$  ε)  $(2x+5y)(2x-5y)$  στ)  $(x^2+1)(x^2-1)$

**69)** Να βρείτε τα αναπτύγματα

α)  $(\alpha+1)^3$  β)  $(x-2)^3$  γ)  $(2\alpha+3)^3$  δ)  $(1-3\alpha)^3$  ε)  $(\alpha+5\beta)^3$  στ)  $(x^2-1)^3$

**70)** Να βρείτε το τελικό αποτέλεσμα στις παρακάτω παραστάσεις:

α)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$  β)  $(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{3} + \sqrt{2})$

γ)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$  δ)  $(\sqrt{5} + 1)^2 - (\sqrt{5} - 1)^2 - 4\sqrt{5}$

**71)** Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$   $B = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων  $A$ ,  $B$

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης  $\Gamma = A \cdot B$  είναι ίση με 1

**72)** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α)  $(x \cdots \cdots)^2 = \cdots + \cdots + 25$

β)  $(\cdots \cdots 3)^2 = \omega^2 - \cdots \cdots \cdots$

γ)  $(\cdots + \cdots)^2 = 9x^2 \cdots 12xy \cdots \cdots$

δ)  $(\cdots \cdots 3\alpha)^2 = \cdots - 30x^2\alpha \cdots \cdots$

**73)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $3 + (x-1)^2 - (x-2)^2$       β)  $1 + 2x(x-3)^2$

γ)  $x - 3x(2x-1)^2$       δ)  $x^2 - (2x-1) \cdot (x+1)^2$

**74)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-2)$       β)  $-10x^2 + 2(x+3)^3 - (2x-1)^2$

**75)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $5 + (x-7) \cdot (x+7)$

β)  $1 - (x-1) \cdot (x+1)$

γ)  $2x^2 - (x-4)^2 - (x-2) \cdot (2+x)$

δ)  $1 - 3x(2x-1) - (3-x) \cdot (-x-3)^2$

**76)** Βρείτε τις ταυτότητες των αναπτυγμάτων:

α)  $(x+2) \cdot (x^2 - 2x + 4)$

β)  $(x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$

γ)  $(3\omega+1) \cdot (9\omega^2 - 3\omega + 1)$

**77)** Έστω  $\alpha = \sqrt{5} - \sqrt{3}$  και  $\beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των  $\alpha$ ,  $\beta$ .

β) Με τη βοήθεια της ταυτότητας  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ , να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των  $\alpha$ ,  $\beta$ .

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των κύβων των  $\alpha$ ,  $\beta$

## 1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Μάθουμε τις διάφορες μεθόδους όπου θα μπορούμε να μετατρέψουμε αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.

#### **Μέθοδος του κοινού παράγοντα**

Αν σε κάθε όρο μιας αλγεβρικής παράστασης υπάρχει κοινός παράγοντας αριθμός, γράμμα, παρένθεση ή και συνδυασμός αυτών τότε αυτό βγαίνει έξω από μια παρένθεση.

Η λογική του κοινού παράγοντα βασίζεται στο αντίστροφο της πράξης του επιμερισμού  $ax + ay = a(x + y)$ .

#### **Παραδείγματα**

$$2x - 2y = 2(x - y)$$

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

$$4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$$

$$x^3y - y^2x = xy(x^2 - y)$$

$$2x(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = 2x(\alpha - \beta) - 1 \cdot (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) \cdot (2x - 1)$$

#### **Μέθοδος του κοινού παράγοντα κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)**

Ο κοινός παράγοντας κατά ομάδες βασίζεται στην λογική κοινός παράγοντας ανά ομάδα και εκ νέου κοινός παράγοντας :

$$\alpha x + \alpha y + \beta x + \beta y = \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta)$$

#### **Παραδείγματα**

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2) = x^2(x - 2) + 1 \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot (x^2 + 1)$$

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - x + 1 &= (x - 1)^2 + (-x + 1) = (x - 1)^2 - (x - 1) \\ &= (x - 1) \cdot [(x - 1) - 1] = (x - 1) \cdot (x - 2) \end{aligned}$$

**Μέθοδος της διαφοράς τετραγώνων**

Μάθαμε στην προηγούμενη ενότητα τις ταυτότητες. Μια από αυτές θεωρητικά «άχρηστη» ως προς τις πράξεις την χρίζουμε πολύτιμη στην παραγοντοποίηση. Είναι η διαφορά τετραγώνων :  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$

**Παραδείγματα**

$$4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1) \cdot (2x + 1)$$

**Μέθοδος του αναπτύγματος τέλειου τετραγώνου**

Από τις ταυτότητες και η επόμενη μέθοδος. Χρησιμοποιώντας «ανάποδα» από το συνηθισμένο στις πράξεις τις ταυτότητες των τέλειων τετραγώνων, έχουμε :

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2, \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

**Παραδείγματα**

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = \alpha^2 - 2 \cdot 2 \cdot \alpha + 2^2 = (\alpha - 2)^2$$

$$25x^2 - 30xy + 9y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = (5x - 3y)^2$$

**Μέθοδος του αναπτύγματος τέλειου κύβου**

Ομοίως όπως και στο ανάπτυγμα τετραγώνου χρησιμοποιώ τις ταυτότητες των τέλειων κύβων ανάποδα, δηλαδή :

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3, \quad \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3$$

**Συνδυασμός των προηγούμενων περιπτώσεων****Παράδειγμα**

$$\begin{aligned} 4 - x^2 - y^2 + 2xy &= 4 + (-x^2 - y^2 + 2xy) \\ &= 4 - (x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= 2^2 - (x - y)^2 \\ &= [2 - (x - y)] \cdot [2 + (x - y)] \\ &= (2 - x + y) \cdot (2 + x - y) \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ**

**78)** Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α.  $2αβ - 2αδ$

β.  $8x^2 - 4x$

γ.  $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

δ.  $4κλ^2 - 10κ^2λ + 13κλ$

**79)** Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α.  $β(x + 2y) + γ(x + 2y)$

β.  $2α^2β(x + y) - 4αβ^2(x + y)$

γ.  $3α(κ - 3λ) + 6αβ(κ - 3λ) + 12α^2β(κ - 3λ)$

δ.  $(x + y)^3 - (x + y)^2$

ε.  $α(x - y) + γ(y - x)$

στ.  $2α(γ - 2δ) + 2αβ(2δ - γ) - 4α^2(γ - 2δ)$

ζ.  $α(x + y) + β(x + y) - (α - β)(x + y)$

η.  $(x - 2)(x - 1)^2 - 4(2 - x)$

θ.  $2α(α - 2β) + α - 2β$

ι.  $3x^2(x - 3y) - x + 3y$

**ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ**

**80)** Να μετατραπούν σε γινόμενα πρώτων παραγόντων οι παραστάσεις:

α.  $2x + 2y + ay + ax$

β.  $a^2 - 4a + ay - 4y$

γ.  $a^2y^2 - ayδ + αβγ - βδ$

δ.  $5ax - 4by + 5ay - 4bx$

ε.  $4ay - 2by + 2αω - βω$

στ.  $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$

ζ.  $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$

η.  $7αβ + 7αγ - 9βδ - 9γδ$

θ.  $αβx - αβy - αγx + αγy$

ι.  $5x^3 + x^2 - 20x - 4$

ια.  $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$

ιβ.  $x^3 + x^2 - 4x - 4$

ιγ.  $βx - αβ + x^2 - αx$

ιδ.  $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$

ιε.  $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$

ιστ.  $αx - 2αy - βx + 2βy + γx - 2γγ$

ιζ.  $αβ(x^2 + y^2) + xy(α^2 + β^2)$

ιη.  $αx^v + αy^u + βx^v + βy^u$

**ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ****81)** Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α.  $x^2 - 16$

β.  $x^2 - 9$

γ.  $25 - x^2$

δ.  $36x^4 - 121y^2$

ε.  $\frac{49}{64}x^2 - 9$

στ.  $81x^4 - 16y^4$

ζ.  $16x^2y^2 - 25$

η.  $3x^{v+2} - 12x^v$

θ.  $x^8 - y^8$

ι.  $x^{2v} - y^{2v}$

ια.  $(2x - 3)^2 - 16$

ιβ.  $25 - (x + 7y)^2$

ιγ.  $(x - 3y)^2 - (-x + 2y)^2$

ιδ.  $25(x - 1)^2 - 9$

ιε.  $(x - 8y)^2 - 49(x + 1)^2$

ιστ.  $\frac{25}{9}x^2 - (x - 3)^2$

**ΤΕΛΕΙΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ****82)** Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α.  $x^2 + 2x + 1$

β.  $x^2 - 4x + 4$

γ.  $x^2 - 2xy + y^2$

δ.  $4x^2 + 12x + 9$

ε.  $16x^2 + 40xy + 25y^2$

στ.  $49x^2 - 14xy + y^2$

ζ.  $25x^2 - 60xy + 36y^2$

η.  $x^2y^2 - 14xy + 49$

θ.  $x^6 - 2x^3 + 1$

ι.  $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$

ια.  $x^2 + x + \frac{1}{4}$

ιβ.  $\frac{x^2}{16} + \frac{xy}{4} + \frac{y^2}{4}$

ιγ.  $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

ιδ.  $\frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$

ιε.  $100x^2 + \frac{45}{2}x + \frac{81}{64}$

ιστ.  $(x - 3)^2 - 6(x - 3) + 9$

**ΚΥΒΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ / ΔΙΑΦΟΡΑΣ****83)** Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α.  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

β.  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

γ.  $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

δ.  $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

ε.  $y^6 + 3y^4 + 3y^2 + 1$

ζ.  $(x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1$



**ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ & ΆΛΛΕΣ****84)** Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α.  $a\beta^2 - a\gamma^2$

β.  $x^4 - 64x^2y^2$

γ.  $x^3 - x(y-z)^2$

δ.  $x^3y - xy^3$

ε.  $x^3 - 9x$

στ.  $2x^3 - 18xy^2$

ζ.  $5a^3 - 5ax^2$

η.  $81x^4 - 16y^4$

θ.  $3x^{v+2} - 12x^v$

**85)** Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

α.  $x^2 - 4y^2 - x - 2y$

β.  $ax^2 + \beta y^2 - ay^2 - \beta x^2$

γ.  $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

δ.  $ax^2 - \beta x^2 - a - \beta$

ε.  $a^2 - \beta^2 - a - \beta$

στ.  $3x^3 + 6x^2 - 9x$

ζ.  $x^{2n+1} - xy^2$

η.  $9x^{2n+2} - 4y^{2n+2}$

θ.  $x^2 - y^2 + \omega^2 + 2x\omega$

ι.  $x^2 - y^2 - 2ay - a^2$

ια.  $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1$

ιβ.  $4a^2 - 4a\beta + \beta^2 - 9a^2\beta^2$

ιγ.  $1 - x^2 + 2xy - y^2$

ιδ.  $a^2 + x^2 - \beta^2 - y^2 - 2ax + 2\beta y$

**86)** Ομοίως για τις παραστάσεις:

α.  $x^4 - 7x^2 + 10$

β.  $4x^4 - 4x^3 + x^2$

γ.  $2x^2 - 5x + 3$

δ.  $4x^3 - xy^2$

ε.  $x^3 + x^2 - 4x - 4$

στ.  $x^3 - 6x^2y + 9xy^2$

ζ.  $x + \sqrt{x} - 2$

η.  $y^3 - 2y^2 - 5y + 6$

θ.  $a^2 + 2a\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$

ι.  $x^2 - 2xy - 3y^2$

ια.  $x^3 - 7x + 6$

ιβ.  $x^4 + x^2 + 1$

**87)** Ομοίως:

α.  $(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 4a^2\beta^2$

β.  $(3x-1)(x+1)^2 - 9(3x-1)$

γ.  $(x^2 + 3) - 16x^2$

δ.  $(a^2 + \beta^2)^2 - 4a^2\beta^2$

ε.  $(x^2 - 4)^2 - (3x-2)(x+2)^2$

στ.  $(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 9a^2\beta^2$

ζ.  $x^3 - 1 + x^2 - 1 - (x-1)^2$

η.  $(x+1)^3 - x^2 - 1$

- θ.  $(x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$       ι.  $(x^2 - 3x + 1)^2 - 1$   
 ια.  $(x^2 - 25)(x + 5) - 25(x - 5)$       ιβ.  $2(x + 5)^2 + 20(x + 5) + 50$   
 ιγ.  $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2$   
 ιδ.  $(2x - 3)(3x - 5) + 9x^2 - 25 - (5 - 3x)(3x + 2)$

**88)** Αν ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta$ , ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

- Α.  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$   
 Β.  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$   
 Γ.  $\alpha = 1$  και  $\beta = 1$   
 Δ.  $\alpha = \beta$   
 Ε. Κανένα από τα προηγούμενα.

**89)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  $A = x^4 - x^2$ ,  $B = x^2 - x$  και  $A - B$

**90)** Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- α)  $x^2 - a^2 + 2a\beta - \beta^2$       β)  $x^2 - 6ax + 9a^2 - 25\psi^2$   
 γ)  $a^2 - 2a\beta + \beta^2 - a + \beta$       δ)  $a^2 - \beta^2 + 4\beta - 4$   
 ε)  $x^2 + 4x\psi + 4\psi^2 - 9$       στ)  $x^2 + 6x + 9 - \psi^2 + 2\psi - 1$

**91)** Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- α)  $(x - y) - (\alpha + \beta)^2 \cdot (x - y)$       β)  $x^2y^2 - 9y^2 - x^2 + 9$   
 γ)  $a^2 + 2a\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$       δ)  $y^2 + 2x - x^2 - 1$   
 ε)  $4(x + 2y)^2 - 9(3x - y)^2$

**92)** Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- α)  $(3x - 6) \cdot (x^2 - 1) - (5x - 10) \cdot (x - 1)^2$   
 β)  $5(4 - x^2) - (x - 2)^2$   
 γ)  $(\alpha^2 - 9) - (\alpha + 3)^2$

## 1.8 ΕΚΠ-ΜΚΔ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Μαθαίνω να βρίσκω το Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων (μονωνύμων και πολυωνύμων)

### ΟΡΙΣΜΟΣ (ΕΚΠ)

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

### ΟΡΙΣΜΟΣ (ΜΚΔ)

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

**Παράδειγμα 42ο :** Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω παραστάσεων  
 $3a^2-3a$  ,  $2a^2-4a+2$  ,  $a^2-3a+2$

### Λύση

Είναι :  $3a^2-3a=3a(a^2-1)=3a(a-1) \cdot (a+1) \Rightarrow 2a^2-4a+2=2(a^2-2a+1)=2(a-1)^2 \Rightarrow$   
 $a^2-3a+2=(a-1) \cdot (a-2)$

Άρα : ΕΚΠ =  $6a(a-1)^2 \cdot (a+1) \cdot (a-1)$  και ΜΚΔ =  $a-1$

### Εφαρμογή

Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παρακάτω παραστάσεων

- α)  $3a^2xy^3$  ,  $4ax^2y^2$  ,  $6a^3x$
- β)  $x^2-1$  ,  $x^3-1$  ,  $x^2+x-2$
- γ)  $3a-3b$  ,  $a^2+b^2-2ab$  ,  $a^2-b^2$
- δ)  $x^3-4x$  ,  $x^2y-4xy+4y$  ,  $x^3-8$

## 1.9 ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Μαθαίνω πότε μια παράσταση λέγεται ρητή και πότε ορίζεται και μαθαίνω να απλοποιώ ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται ρητή αλγεβρική παράσταση ή απλώς ρητή παράσταση.

### Σχόλιο

1) Μία ρητή παράσταση ορίζεται αν ο παρονομαστής είναι διαφορετικός από το 0. Οι τιμές των μεταβλητών για τις οποίες έχει νόημα μία ρητή παράσταση λέγεται πεδίο ορισμού.

Σημειώνουμε δε ότι :  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$

2) Στις κλασματικές παραστάσεις πρώτα παραγοντοποιώ και μετά απλοποιώ.

**Παράδειγμα 43ο :** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των κλασμάτων:

$$\alpha) \frac{x^2 + 5}{2x - 1} \quad \beta) \frac{x + 3}{x^2 - 4} \quad \gamma) \frac{5x^7 + 7x}{x^2 - 3x}$$

### Λύση

$$\alpha) \text{ Πρέπει } 2x - 1 \neq 0 \text{ άρα } x \neq \frac{1}{2}$$

$$\beta) \text{ Πρέπει } x^2 - 4 \neq 0 \text{ ή } (x - 2)(x + 2) \neq 0, \text{ άρα } x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

$$\gamma) \text{ Πρέπει } x^2 - 3x \neq 0 \text{ ή } x(x - 3) \neq 0, \text{ άρα } x \neq 0 \text{ και } x \neq 3.$$

**Παράδειγμα 44ο :** Να απλοποιήσετε τα κλάσματα :  $\alpha) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad \beta) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

### Λύση

$$\alpha) \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} = \frac{(x - 2)(\cancel{x + 2})}{x(\cancel{x + 2})} = \frac{x - 2}{x}.$$

$$\beta) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(\cancel{x - 1})(x + 3)}{(\cancel{x - 1})(x - 2)} = \frac{x + 3}{x - 2}.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**93)** Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι σωστή, μπορεί όμως να είναι λάθος. Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση Σωστό αν αυτή είναι σωστή και Λάθος αν αυτή είναι λάθος.

α) Η παράσταση  $\frac{2x}{(x-1)x}$  ορίζεται για  $x = 0$  εφ' όσον αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή  $\frac{2}{x-1}$ .

β) Η παράσταση  $\frac{2x-4}{x-1}$  δεν ορίζεται για  $x = 2$

γ) Η παράσταση  $\frac{x+3}{(x-1)(x+3)(x-3)}$  δεν ορίζεται για τα  $x = 1$ ,  $x = 3$  και  $x = -3$

δ) Η παράσταση  $\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$  ορίζεται για όλους τους αριθμούς εκτός του 0

ε) Η τιμή της παράστασης  $\frac{\alpha x - x^2}{\alpha - 1}$  για  $x = 1$  και οποιοδήποτε  $\alpha$  είναι ίση με το 0

στ) Η παράσταση  $\frac{3\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - \alpha^2 + \beta^2}$  δεν έχει νόημα για καμιά τιμή των  $\alpha$ ,  $\beta$ .

ζ) Ισχύει  $\frac{\frac{x-5}{1}}{x-6} = \frac{x-6}{x-5}$  για οποιαδήποτε τιμή του  $x$  εκτός του 5.

η) Ισχύει  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1 + \beta$ , εφ' όσον  $\alpha \neq 0$ .

θ) Ισχύει  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \beta$ , εφ' όσον  $\alpha \neq 0$ .

ι) Ισχύει  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$ , εφ' όσον  $\alpha \neq 0$ .

ια) Ισχύει  $\frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta$ , εφ' όσον  $\alpha \neq 0$ . .....

ιβ) Η πράξη  $\frac{x}{x-1} : \frac{x-2}{x-1}$  έχει νόημα για οποιαδήποτε τιμή του  $x$  εκτός του 1.

ιγ) Όταν  $x$ ,  $\psi$  είναι αντίθετοι η παράσταση  $\frac{2x+4\psi}{x^2-\psi^2}$  δεν ορίζεται.

ιδ) Η πράξη  $\alpha:(\alpha-1)$  μας δίνει την κλασματική παράσταση  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ , εφ' όσον  $\alpha \neq 1$

ιε) Η πράξη  $x:x^2$  μας δίνει την κλασματική παράσταση  $\frac{1}{x}$ , εφ' όσον  $x \neq 0$ .

- 94) Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από την στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

| Στήλη Α                 | Στήλη Β                       |
|-------------------------|-------------------------------|
| α. $\frac{x^2}{x-3}$    | 1. $x \neq -3$                |
| β. $\frac{1}{x+3}$      | 2. $x \neq 0$ και $x \neq 3$  |
| γ. $\frac{x+5}{x^2-3x}$ | 3. $x \neq 3$ και $x \neq -3$ |
| δ. $\frac{5}{x^2-9}$    | 4. $x \neq 3$                 |
| ε. $\frac{5}{x^2+9}$    | 5. $x \neq 3$ ή $x \neq -3$   |
|                         | 6. Οποιοσδήποτε αριθμός       |

- 95) Για ποιες τιμές του  $x$  έχουν έννοια οι παραστάσεις:

α.  $\frac{2x+7}{x-3}$       β.  $\frac{4x-1}{1-3x}$       γ.  $\frac{1}{x^2-9}$       δ.  $\frac{3x+11}{x^2-3x}$   
 ε.  $\frac{3y-4}{(y-3)(1-2y)}$       στ.  $\frac{1}{x^2}$       ζ.  $\frac{1}{x^2+1}$       η.  $\frac{1}{x^2-5x+6}$

- 96) Να απλοποιήσετε τα παρακάτω κλάσματα:

α.  $\frac{5y-10}{y^2-2y}$       β.  $\frac{6a^2\beta}{2a^3\beta\gamma^2}$   
 γ.  $\frac{4a-4\beta}{8a-8\beta}$       δ.  $\frac{x^3-x}{x^2+x}$   
 ε.  $\frac{4a^3-16a}{2a^3+4a^2}$       στ.  $\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2-8x+15}$   
 ζ.  $\frac{3x-6}{4-x^2}$       η.  $\frac{(3x-2y)^2}{4y^2-9x^2}$   
 θ.  $\frac{x^2+4x+4}{3x^2-12}$       ι.  $\frac{(a+\beta)^2-a\beta}{a^3\beta-\beta^4}$   
 ια.  $\frac{2x^2-6x}{2x^2-18}$       ιβ.  $\frac{x^2+10x+25}{3x^2-75}$

## 1.10 ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Πολλαπλασιασμός - Διάρθρωση
  - Μαθαίνω να πολλαπλασιάζω και να διαιρώ αλγεβρικές παραστάσεις.
  - Μαθαίνω να μετατρέπω σύνθετα κλάσματα σε απλά.
- 2) Μαθαίνω να προσθέτω και να αφαιρώ ρητές αλγεβρικές παραστάσεις.

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Ας κάνουμε τις παρακάτω πράξεις :

$$\left(-\frac{2x^3}{5\psi^4}\right) \cdot \left(-\frac{15\psi^2}{4x}\right) = + \frac{2x^3 \cdot 15\psi^2}{5\psi^4 \cdot 4x} = \frac{30x^3\psi^2}{20x\psi^4} = \frac{3x^2}{2\psi^2}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} : \frac{x^3+1}{x^2+4x+4} = \frac{x^2-1}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^3+1} = \frac{(x-1) \cdot \cancel{(x+1)}}{x \cdot \cancel{(x+2)}} \cdot \frac{(x+2)^2}{\cancel{(x+1)} \cdot (x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{(x-1) \cdot (x+2)}{x \cdot (x^2-x+1)}$$

$$\frac{x^2-1}{\frac{2x-2}{x}} = \frac{\frac{x^2-1}{1}}{\frac{2x-2}{x}} = \frac{x(x^2-1)}{1 \cdot (2x-2)} = \frac{x \cdot \cancel{(x-1)} \cdot (x+1)}{2 \cdot \cancel{(x-1)}} = \frac{x \cdot (x+1)}{2}$$

### 2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο κλασματικές παραστάσεις:

1<sup>ον</sup> παραγοντοποιώ τους παρονομαστές

2<sup>ον</sup> βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών.

3<sup>ον</sup> τα κάνω ομώνυμα.

**Προσοχή !!!**  $\frac{a}{\beta} - \frac{\beta+\gamma}{\beta} = \frac{a-(\beta+\gamma)}{\beta} = \frac{a-\beta-\gamma}{\beta}$

**Παράδειγμα 45ο :** Να γίνουν οι πράξεις:  $A = \frac{3}{2\alpha + 2} - \frac{2}{3\alpha - 3} + \frac{5\alpha + 3}{6\alpha^2 - 6}$

### Λυση

**α) Μετατρέπουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο:**

$$A = \frac{3}{2(\alpha + 1)} - \frac{2}{3(\alpha - 1)} + \frac{5\alpha + 3}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)}$$

**β) Βρίσκουμε το ΕΚΠ:**

$$\left. \begin{array}{l} 2(\alpha + 1) \\ 3(\alpha - 1) \\ 2 \cdot 3(\alpha - 1)(\alpha + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ΕΚΠ} = 2 \cdot 3(\alpha - 1)(\alpha + 1)$$

**γ) Διαιρούμε το ΕΚΠ με κάθε παρονομαστή και το πηλίκο το πολλαπλασιάζουμε και με τους δύο όρους:**

$$A = \frac{\overbrace{3}^{3(\alpha-1)}}{2(\alpha + 1)} - \frac{\overbrace{2}^{2(\alpha+1)}}{3(\alpha - 1)} + \frac{\overbrace{5\alpha + 3}^1}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)} = \frac{3 \cdot 3(\alpha - 1)}{2(\alpha + 1)3(\alpha - 1)} - \frac{2 \cdot 2(\alpha + 1)}{3(\alpha - 1)2(\alpha + 1)} + \frac{5\alpha + 3}{6(\alpha - 1)(\alpha + 1)}$$

**δ) Κάνουμε τις πράξεις:**

$$A = \frac{9\alpha - 9 - 4\alpha - 4 + 5\alpha + 3}{2(\alpha + 1)3(\alpha - 1)} = \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha + 1)(\alpha - 1)}$$

**ε) Ελέγχουμε για τυχόν απλοποιήσεις:**

$$A = \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha + 1)(\alpha - 1)} = \frac{10(\cancel{\alpha - 1})}{6(\alpha + 1)(\cancel{\alpha - 1})} = \frac{5}{3(\alpha + 1)}$$

**Παράδειγμα 46ο :** Ομοίως  $A = 1 - \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x - 2}{x - x^2}$

### Λύση

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x - 2}{x - x^2} \\ &= 1 - \frac{x}{(x - 1) \cdot (x + 1)} - \frac{x - 2}{x(1 - x)} \end{aligned}$$



$$\frac{\overbrace{1}^{x(x-1)(x+1)}}{1} - \frac{\overbrace{x}^x}{(x-1) \cdot (x+1)} + \frac{\overbrace{x-2}^{x+1}}{x(x-1)} =$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x+1) - x \cdot x + (x-2) \cdot (x+1)}{x(x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$\frac{x(x^2-1) - x^2 + (x^2-2x+x-2)}{x(x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$\frac{x^3 - x - x^2 + x^2 - 2x + x - 2}{x(x-1) \cdot (x+1)} =$$

$$\frac{x^3 - 2x - 2}{x(x-1) \cdot (x+1)}$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****97)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta}$

β)  $(\alpha - 2\alpha^2) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha - 2}\right)^2$

γ)  $\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2 - x}{x^3}$

δ)  $\frac{2\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta - 2\alpha} \cdot \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^3}$

ε)  $\frac{x + \alpha}{\beta^2 - x^2} \cdot \frac{x + \beta}{\alpha^2 - x^2}$

στ)  $\frac{1}{\alpha^3 + \beta^3} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}$

ζ)  $\frac{x+2}{y-4} \cdot \frac{y^2 - xy}{4 - x^2}$

η)  $\frac{\frac{x - \omega}{x + \omega}}{(x - \omega)^2}$

θ)  $\frac{\frac{x\psi - x\psi^3}{4 + 4\psi}}{\frac{x\psi - x^3\psi}{6 - 6x}}$

ι)  $\frac{\frac{x - \omega}{x + \omega}}{(x + \omega)^2}$

ια)  $\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - 1}}$

ιβ)  $\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x-1}{x+1}} : \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

**98)** Να κάνετε τις πράξεις:

α)  $\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$

β)  $\frac{1}{2x-4} - \frac{1}{3x-6} + \frac{x+8}{3x^2-12}$

γ)  $\frac{2x+4}{x^2-2x} + \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{6x+4}{x^2-4}$

δ)  $\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} - \frac{x}{x-1}$

ε)  $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} + \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$

στ)  $\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 + \alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2 - 2\alpha\beta}$

## 2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Θυμάμαι την επίλυση εξισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού (ή πρωτοβάθμια εξίσωση) με άγνωστο  $x$  ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής  $ax + b = 0$  ή  $ax = b$  με  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Συνοπτικά είναι:

$$ax = b \Rightarrow \begin{cases} \text{εάν } a \neq 0 \text{ τότε έχω την μοναδική λύση } x = \frac{b}{a} \\ \text{εάν } a = 0 \text{ τότε } \begin{cases} \text{για } b \neq 0 \text{ η εξίσωση είναι αδύνατη} \\ \text{για } b = 0 \text{ η εξίσωση είναι αόριστη ή ταυτότητα} \end{cases} \end{cases}$$

### Μεθοδολογία

Για την επίλυση εξισώσεων 1<sup>ου</sup> βαθμού ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Απαλείφουμε τους παρονομαστές με την βοήθεια του ΕΚΠ αυτών
2. Απαλείφουμε τις παρενθέσεις
3. Χωρίζουμε γνωστούς από άγνωστους όρους
4. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
5. Αν ο συντελεστής του άγνωστου όρου είναι διάφορος του μηδενός διαιρούμε και τα δύο της μέλη με τον συντελεστή του αγνώστου.

### Εφαρμογή

1) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$1) \quad 3(x+2) - 4x = -3(1-2x) + 5$$

$$2) \quad \frac{x-5}{3} = \frac{x}{2}$$

$$3) \quad \frac{7-2x}{3} + \frac{5x}{4} = 1$$

$$4) \quad \frac{x-2}{3} + 1 = \frac{4x-7}{4} - 5$$

$$5) \quad \sqrt{3x+4} = x + \sqrt{48}$$

2) Να βρείτε τον αριθμό  $a$  ώστε η εξίσωση:  $(a+1)x + 5 = x + 3a$  να έχει ως λύση τον αριθμό 1

## 2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2<sup>ΟΥ</sup> ΒΑΘΜΟΥ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Η εξίσωση 2ου βαθμού
- 2) Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού (ελλιπής μορφή)
- 3) Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού (πλήρης μορφής)
- 4) Παραγοντοποίηση τριωνύμου

### 1<sup>ΟΣ</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού με ένα άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που γράφεται ή μπορεί να γραφεί στη μορφή  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$ .

Για παράδειγμα,  $2x^2 + 3x - \sqrt{7} = 0$

#### Σχόλιο

Η μορφή  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  λέγεται πλήρης ή κανονική μορφή της εξίσωσης 2<sup>ου</sup> βαθμού.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Εξίσωση 2ου βαθμού ελλιπής μορφής ονομάζεται κάθε εξίσωση 2ου βαθμού με μορφή :  $ax^2 + bx = 0$  ή  $ax^2 + \gamma = 0$

Για παράδειγμα,  $2x^2 - 5x = 0$  ( $\gamma = 0$ ) και  $4x^2 - 36 = 0$  ( $\beta = 0$ )

### 2<sup>ΟΣ</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### 1<sup>Η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Αρχικά θυμάμαι ότι :  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  ή  $\beta = 0$

Αν έχουμε λοιπόν μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού στην ελλιπή μορφή  $ax^2 + bx = 0$

Τότε η επίλυση αυτής στηρίζεται στην παραγοντοποίηση :

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ή  $ax + \beta = 0$  και συνεχίζουμε κατά τα γνωστά.

Για παράδειγμα :

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x = 0 &\Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } 2x - 5 = 0 \\ 2x &= 5 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{5}{2} \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

## 2<sup>Η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Αρχικά θυμάμαι ότι :  $x^2 = \alpha$  με  $\alpha \geq 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\alpha}$

Αν έχουμε λοιπόν μια εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού στην ελλειπή μορφή  $ax^2 + \gamma = 0$  τότε η επίλυση αυτής στηρίζεται στην θεωρία της ρίζας:

$$ax^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\gamma}{a} \text{ και αυτή λύνεται κατά τα γνωστά.}$$

Για παράδειγμα

$$4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{36}{4} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow x = -3 \text{ ή } x = 3$$

**Παράδειγμα 1ο :** Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$1) 3x^2 - 12 = 0 \quad 2) 4x^2 + 20 = 0 \quad 3) 3x^2 - 12x = 0 \quad 4) 2x^2 + x = 0$$

### Λύση

$$1) 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$2) 4x^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = -20 \Leftrightarrow x^2 = -5, \text{ Αδύνατη}$$

$$3) 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 4$$

$$4) 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

**3<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**

Η λύση τώρα της εξίσωσης  $ax^2 + bx + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$  στηρίζεται σε τυπολόγιο.

- Αρχικά υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα  $\Delta = b^2 - 4a\gamma$  η οποία ονομάζεται **διακρίνουσα**.
- Στην συνέχεια απαντάμε σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

| Εάν $\Delta$ ..... | Τότε έχω ....                                                             |
|--------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta > 0$       | 2 ρίζες άνισες βάση του τύπου $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$       | 1 διπλή ρίζα βάση του τύπου $x = -\frac{b}{2a}$                           |
| $\Delta < 0$       | 0 ρίζες στο $\mathbb{R}$ δηλαδή αδύνατη                                   |

**Σχόλιο**

Στην περίπτωση που η εξίσωση δεν είναι αναγνωρίσιμου βαθμού ακολουθώ τα ίδια βήματα που κάναμε και στο 1<sup>ο</sup> βαθμού όπως :

- 1) Απαλοιφή παρονομαστών με την βοήθεια του ΕΚΠ αυτών
- 2) Απαλείφουμε τις παρενθέσεις
- 3) Μεταφορά όλων των όρων στο 1<sup>ο</sup> μέλος
- 4) Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
- 5) Παίρνω την μορφή της εξίσωσης

**Παράδειγμα 2ο :** Να λυθεί η  $6x^2 - 5x + 1 = 0$

**Λύση**

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:  $a = 6$ ,  $b = -5$ ,  $\gamma = 1$

Άρα :  $\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$

$$\text{Οπότε : } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ x_2 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Παράδειγμα 3ο :** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $6x^2 - 5x + 1 = 0$

### Λύση

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:  $\alpha = 6, \beta = -5, \gamma = 1$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1 > 0$

$$\text{Συνεπώς: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

**Παράδειγμα 4ο :** Να επιλυθεί η εξίσωση:  $x^2 + (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

### Λύση

Οι συντελεστές της εξίσωσης είναι:  $\alpha = 1, \beta = \sqrt{3} - 1, \gamma = -\sqrt{3}$

Έτσι η διακρίνουσα είναι:

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\sqrt{3} - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1 = \\ &= (\sqrt{3} + 1)^2 > 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot \alpha} = \frac{-(\sqrt{3} - 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{3} + 1 \pm (\sqrt{3} + 1)}{2} = \\ x_1 &= \frac{-\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} + 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ ή } x_2 = \frac{-\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 5ο :** Να εξετάσετε αν έχουν ή όχι πραγματικές ρίζες οι εξισώσεις:

α)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  , β)  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

### Λύση

α) Βρίσκουμε την διακρίνουσα :  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

Συνεπώς η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα άρα έχουμε 1 πραγματική ρίζα.

β) Βρίσκουμε την διακρίνουσα :  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$

Συνεπώς η εξίσωση έχει δυο ρίζες άρα έχουμε 2 πραγματικές και άνισες ρίζες.

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2****ΕΛΛΙΠΗΣ ΜΟΡΦΗ**

1) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α)  $(x-2) \cdot (x-3) = 0$

β)  $3(x-1)x^2 = 0$

γ)  $(1-2\psi)\psi = 0$

δ)  $(x^2-x) \cdot (x^2-4) = 0$

ε)  $(x^2-1) \cdot (x^2+2) = 0$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α)  $x^2 - 5x = 0$

β)  $2x^2 + x = 0$

γ)  $12x^2 + 15x = 0$

δ)  $3x^2 = 6x$

3) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α)  $x^2 - 25 = 0$

β)  $3x^2 - 12 = 0$

γ)  $x^2 - 8 = 0$

δ)  $8x^2 = 18$

ε)  $x^2 + 15 = 0$

στ)  $2x^2 - 4 = 0$

4) Να λυθούν οι εξισώσεις

α)  $2(x-3) = x^2 - 6$

β)  $2x(x-3) = x^2$

**ΠΛΗΡΗΣ ΜΟΡΦΗ**

5) Να λυθούν οι εξισώσεις

α)  $2x^2 + x + 1 = 0$

β)  $-2x^2 + 6x - 4 = 0$

γ)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

δ)  $x^2 + x - 2 = 0$

ε)  $2x^2 - x - 3 = 0$

στ)  $10x^2 + x - 2 = 0$

ζ)  $x^2 + 3x - 2 = 0$

η)  $3x^2 + 5x + 1 = 0$

θ)  $2x^2 + 6x + 3 = 0$

ι)  $7x^2 - 4x + 1 = 0$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $2x(x-3) = x^2 - 6$

β)  $7x^2 - 5x + 9 = 3(2x^2 + 1)$

γ)  $(2x+1)^2 + 5(x+2) = 6$

δ)  $(x+1)^2 - 3x(x+2) = (x-1)^2$

ε)  $3x^2 - 3(x-1)(2x-1) = 2x+1$

στ)  $7x^2 - (3x-1)^2 = x+2$

7) Να λυθούν οι εξισώσεις:

α)  $x - \frac{x^2-2}{2} = -3$

β)  $x^2 - \frac{2x-1}{6} = x - \frac{x^2}{3}$

γ)  $(x-1) \cdot (x^2-9) = (x+3) \cdot (x^2-1)$

δ)  $(5x-10) \cdot (x-1)^2 = (3x-6) \cdot (x^2-1)$



**4<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΟΡΙΣΜΟΙ**

Τι ονομάζουμε τριώνυμο;

Η παράσταση  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  με  $\alpha \neq 0$ , λέγεται τριώνυμο.

Τι ονομάζουμε διακρίνουσα τριωνύμου;

Διακρίνουσα του τριωνύμου ονομάζεται η διακρίνουσα της αντίστοιχης εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ .

Τι ονομάζουμε ρίζες τριωνύμου;

Ρίζες του τριωνύμου ονομάζονται οι ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  και είναι ρίζες και της πολυωνυμικής συνάρτησης 2<sup>ου</sup> βαθμού.

Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο;

Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου γίνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

|                                                                                                              |                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Αν <math>\Delta &gt; 0</math></b><br/>και <math>\rho_1, \rho_2</math> οι ρίζες του τριωνύμου τότε:</p> | <p>Τότε <math>\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)</math></p> |
| <p><b>Αν <math>\Delta = 0</math></b><br/>και <math>\rho</math> η μία διπλή ρίζα του τριωνύμου τότε:</p>      | <p>Τότε <math>\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2</math></p>             |
| <p><b>Αν <math>\Delta &lt; 0</math></b></p>                                                                  | <p>Τότε δεν παραγοντοποιείται</p>                                                       |

**Παράδειγμα 6ο :** Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α)  $f(x) = 2x^2 - x - 1$ .

β)  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

γ)  $h(x) = 2x^2 - 3x + 7$

### Λύση

α) Έχουμε  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9 > 0$ , οπότε το τριώνυμο έχει

δυο ρίζες τις  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 1$  ή  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . Επομένως

$$f(x) = 2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x-1)(2x+1).$$

β) Έχουμε  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 16 - 16 = 0$ , οπότε το τριώνυμο έχει δι-

πλή ρίζα την  $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-4)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{1} = 4$ .

$$\text{Επομένως } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = \frac{1}{2}(x-4)^2.$$

γ) Έχουμε  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 9 - 56 = -47 < 0$ , οπότε το τριώνυμο δεν έχει ρίζες και έτσι το τριώνυμο δεν μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων.

**Παράδειγμα 7ο :** Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $A = \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 5x - 3}$ .

### Λύση

Το τριώνυμο  $x^2 - 7x + 12$  έχει ρίζες  $x_1 = 3$  και  $x_2 = 4$ , ενώ το τριώνυμο

$2x^2 - 5x - 3$  έχει ρίζες  $x_1 = 3$  και  $x_2 = -\frac{1}{2}$ . Επομένως:

$$A = \frac{(x-3)(x-4)}{2(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x-4}{2x+1}.$$

**Προσοχή !!!!!!!**

πρέπει να τονίσουμε ότι η παράσταση  $A$  ορίζεται αν  $x \neq 3$  και  $x \neq -\frac{1}{2}$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 2**

**8)** Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α)  $x^2 + x - 6$

β)  $x^2 - 7x + 12$

γ)  $5x^2 + x - 4$

δ)  $2x^2 - x - 1$

**9)** Να γίνουν γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

α)  $f(x) = 3x^2 - 7x - 6$

β)  $g(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

γ)  $h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

**10)** Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $A = \frac{x^2 - 5x + 4}{3x^2 - 11x - 4}$ .

**11)** Να απλοποιηθεί η παράσταση:  $K = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}$ .

## 2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

**Παράδειγμα 8ο :** Να βρείτε τις δύο πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68 cm και διαγώνιο 26 cm.

### Λύση

Έστω  $x, y$  οι πλευρές του ορθογωνίου.

$$2x + 2y = 68 \text{ και } x^2 + y^2 = 26^2$$

$$x + y = 34 \text{ και } x^2 + y^2 = 676$$

$$y = 34 - x \text{ και } x^2 + (34 - x)^2 = 676$$

$$x^2 + 34^2 - 2 * 34 * x + x^2 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 1156 - 676 = 0$$

$$2x^2 - 68x + 480 = 0$$

$$x^2 - 34x + 240 = 0$$

$$\Delta = 34^2 - 4 * 240 = 1156 - 960 = 196$$

$$x = \frac{34 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{34 \pm 14}{2} = \frac{34 + 14}{2} \text{ ή } \frac{34 - 14}{2} = 24 \text{ ή } 10$$

Από την εξίσωση  $y = 34 - x$  θα έχουμε  $y = 10$  ή  $24$ .

Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 24 και 10

**Παράδειγμα 9ο :** Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

### Λύση

Έστω  $x - 1, x, x + 1$  διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

$$\begin{aligned} \text{Πυθαγόρειο: } (x + 1)^2 &= x^2 + (x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\ -x^2 + 4x &= 0 \Leftrightarrow -x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ αφού } x \neq 0 \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι, μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και είναι οι  $4 - 1, 4, 4 + 1$ , δηλαδή οι 3, 4, 5

**Παράδειγμα 10ο :** Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δύο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δύο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

### Λύση

Αν  $t$  είναι ο χρόνος που χρειάζεται το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο, ο αντίστοιχος χρόνος για το Β είναι  $t + 12$ .

Σε 1 ώρα, το Α θα εκτελέσει το  $\frac{1}{t}$  του έργου και

το Β θα εκτελέσει το  $\frac{1}{t+12}$  του έργου

Σε 8 ώρες, που τα δυο μαζί τελειώσουν το έργο,

το Α θα εκτελέσει το  $8 * \frac{1}{t}$  του έργου και

το Β θα εκτελέσει το  $8 * \frac{1}{t+12}$  του έργου

$$8 * \frac{1}{t} + 8 * \frac{1}{t+12} = 1 \Rightarrow 8(t+12) + 8t = t(t+12)$$

$$8t + 96 + 8t = t^2 + 12t \Rightarrow t^2 - 4t - 96 = 0$$

Άρα θα έχουμε

$$\Delta = 16 + 4 * 96 = 16 + 384 = 400$$

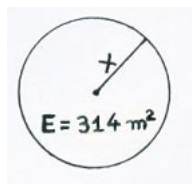
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{4 \pm 20}{2} = 12 \text{ ή } -8 \text{ απορρίπτεται αφού } t \geq 0$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

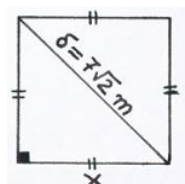
- 14)** Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.
- 15)** Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι  $25 \text{ cm}^2$ . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;
- 16)** Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.  
α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο;  
β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;
- 17)** Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι  $4 \text{ cm}$  μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι  $88 \text{ cm}^2$ .
- 18)** Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με  $n$  πλευρές δίνεται από τον τύπο:  
$$\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$$
. Αν το πολύγωνο έχει 104 διαγώνιους, πόσες είναι οι πλευρές του;
- 19)** Το άθροισμα των  $n$  πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:  
$$\sum_v = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
  
Βρείτε το  $n$ , αν ξέρουμε ότι  $\sum_v = 300$ .
- 20)** Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι  $300 \text{ cm}^2$ . Αν το μήκος της είναι  $5 \text{ cm}$  μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.
- 21)** Η χωρητικότητα ενός δοχείου λαδιού είναι  $10$  λίτρα. Αν το δοχείο έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με ύψος  $25 \text{ cm}$  και βάση τετράγωνο, να βρείτε το μήκος της πλευράς της βάσης του.

**22)** Να υπολογίσετε το  $x$  σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

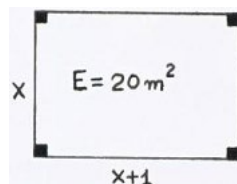
(α)



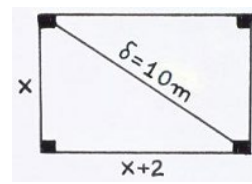
(β)



(γ)



(δ)



**23)** Να βρείτε ένα θετικό αριθμό, τέτοιο ώστε :

α) Το μισό του τετραγώνου του να είναι ίσο με το διπλάσιό του.

β) Το γινόμενο του μ' έναν αριθμό, που είναι κατά 2 μικρότερος, να είναι 24.

γ) Το διπλάσιο του τετραγώνου του, να είναι κατά 3 μεγαλύτερο από το πενταπλάσιό του.

**24)** Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιου με εμβαδόν 150 m. Αν το μήκος του είναι 5m μεγαλύτερο από το πλάτος του, να βρείτε πόσα μέτρα συρματοπλέγμα χρειάζονται για την περίφραξή του.

**25)** Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακέραιους, που το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 74.

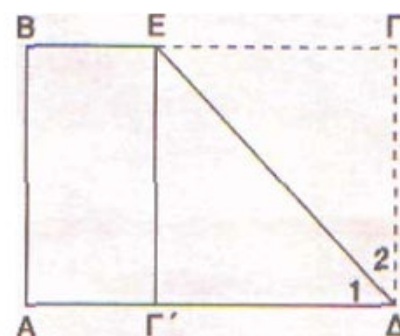
**26)** Ο καθηγητής των Μαθηματικών πρότεινε στους μαθητές του να λύσουν ορισμένες ασκήσεις για να εμπεδώσουν την ενότητα που διδάχτηκαν. Όταν αυτοί τον ρώτησαν σε ποια σελίδα είναι γραμμένες οι ασκήσεις, αυτός απάντησε: «Αν ανοίξετε το βιβλίο σας, το γινόμενο των δύο αντικριστών σελίδων μέσα στις οποίες είναι γραμμένες οι ασκήσεις, είναι 506». Μπορείτε να βρείτε σε ποιες σελίδες είναι γραμμένες οι ασκήσεις;

**27)** Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δύο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

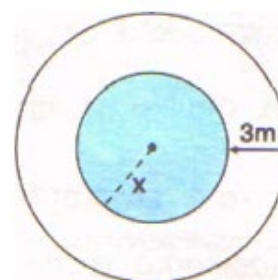
**28)** Ένα τρίγωνο έχει πλευρές 4 cm, 6 cm και 8 cm. Αν κάθε πλευρά του ήταν μεγαλύτερη κατά  $x$  cm, τότε το τρίγωνο θα ήταν ορθογώνιο. Να βρείτε τον αριθμό  $x$ .

**29)** Οι μαθητές μιας τάξης ρώτησαν τον καθηγητή τους πόσο ετών είναι και ποια είναι η ηλικία των παιδιών του. Εκείνος δεν έχασε την ευκαιρία και τους προβλημάτισε για μια ακόμη φορά, αφού τους είπε: «Αν πολλαπλασιάσετε την ηλικία που είχα πριν 5 χρόνια, με την ηλικία που θα έχω μετά από 5 χρόνια θα βρείτε 1200. Όσον αφορά τα δύο παιδιά μου, αυτά είναι δίδυμα και αν πολλαπλασιάσετε ή προσθέσετε τις ηλικίες τους βρίσκετε τον ίδιο αριθμό». Μπορείτε να βρείτε την ηλικία του καθηγητή και των παιδιών του;

**30)** Το μήκος κάθε φύλλου ενός βιβλίου είναι μεγαλύτερο από το πλάτος του κατά 6 cm. Αν διπλώσουμε ένα φύλλο ΑΒΓΔ, έτσι ώστε η πλευρά ΓΔ να πέσει πάνω στην ΑΔ, τότε το εμβαδόν του φύλλου μειώνεται κατά τα  $\frac{3}{8}$  του αρχικού εμβαδού του. Να βρείτε τις διαστάσεις κάθε φύλλου του βιβλίου.



**31)** Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι γύρω από αυτό να στρώσουμε με πλακάκια ένα διάδρομο πλάτους 3 m. Αν ο διάδρομος πρέπει να έχει εμβαδόν τριπλάσιο από το εμβαδόν που καλύπτει το σιντριβάνι, να βρείτε την ακτίνα του σιντριβανιού.



και



## 2.4 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Ορισμός και επίλυση μιας κλασματικής εξίσωσης

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Κλασματική ή ρητή εξίσωση ονομάζεται η εξίσωση που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή.

### Επίλυση κλασματικών εξισώσεων

- Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.
- Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.
- Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Από τις λύσεις που βρήκαμε απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

**Παράδειγμα 11ο :** Να λυθεί η εξίσωση :  $\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$

### Λύση

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x^2-3x}$$

$$\frac{x+3}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x-3)\frac{x+3}{x-3} - x(x-3)\frac{1}{x} = x(x-3)\frac{3}{x(x-3)}$$

$$x(x+3) - (x-3) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - x + 3 = 3$$

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ (απορρίπτεται λόγω περιορισμών)} \\ \text{ή} \\ x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \end{array} \right.$$

**Παράδειγμα 12ο :** Να επιλυθεί η εξίσωση  $\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x}$ .

### Λύση

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{3x-2x^2} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{x(3-2x)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{x(2x-3)} = \frac{5}{x} \Leftrightarrow \quad (\text{Πρέπει } x(2x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{3}{2})$$

$$x(2x-3) \frac{1}{2x-3} - x(2x-3) \frac{3}{x(2x-3)} = x(2x-3) \frac{5}{x} \Leftrightarrow$$

$$x-3 = 5(2x-3) \Leftrightarrow x-3 = 10x-15 \Leftrightarrow x-10x = 3-15 \Leftrightarrow -9x = -12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{9} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

**Παράδειγμα 13ο :** Να επιλυθεί η εξίσωση  $\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}$ .

### Λύση

$$\frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{2(2-x)} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow (\text{Πρέπει } 8(1-x)(2-x) \neq 0)$$

$$8(2-x)(1-x) \frac{3}{2(2-x)} + 8(2-x)(1-x) \frac{30}{8(1-x)} =$$

$$= 8(2-x)(1-x) \frac{3}{2-x} + 8(2-x)(1-x) \frac{5}{2(1-x)} \Leftrightarrow$$

$$12(1-x) + 30(2-x) = 24(1-x) + 20(2-x) \Leftrightarrow$$

$$12-12x+60-30x = 24-24x+40-20x \Leftrightarrow$$

$$-12x-30x+24x+20x = -12-60+24+40 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow x = -4$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**32)** Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

$$\alpha. \quad \frac{5}{x-2} = 4$$

$$\beta. \quad \frac{x+1}{x-3} = \frac{2x+2}{3x-6}$$

$$\gamma. \quad x - \frac{1}{3} = 3 - \frac{1}{x}$$

$$\delta. \quad \frac{3}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{-1+5x}{x^2+1}$$

$$\epsilon. \quad \frac{4x}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{8}{3x+1} - \frac{2}{3x-1} = \frac{x}{9x^2-1}$$

$$\zeta. \quad \frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} - \frac{2x-1}{2x+2}$$

$$\eta. \quad \frac{4x+2}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3-x}$$

$$\theta. \quad \frac{2x}{x^2-4} = 1 + \frac{1}{x-2}$$

$$\iota. \quad \frac{3}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} = \frac{-2}{x+2}$$

$$\iota\alpha. \quad \frac{x-1}{x^2+2} - \frac{3}{x^2-4} = 0$$

**33)** Να λυθούν οι κλασματικές εξισώσεις:

$$\alpha. \quad \frac{2x+1}{x-3} - \frac{1}{x-1} = 1 + 7 \cdot \frac{x-1}{x^2-4x+3}$$

$$\beta. \quad \frac{3x-1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} = 2 \cdot \frac{1-x}{x-2}$$

$$\gamma. \quad \frac{x}{2x-4} - \frac{x+2}{3x+3} = \frac{x^2}{6(x-2)(2x-1)}$$

$$\delta. \quad \frac{3}{y} - \frac{2}{y+3} = \frac{y}{y^2-9}$$

$$\epsilon. \quad \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{(2x+3)(2x-1)}$$

$$\sigma\tau. \quad \frac{8}{2x^2-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{x}$$

$$\zeta. \quad \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x} = \frac{5}{x-4}$$

$$\eta. \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$$

$$\theta. \quad \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x}$$

$$\iota. \quad \frac{x^2-x-1}{x-1} - \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{x}{2 \cdot (x^2-1)}$$

$$\iota\alpha. \quad \frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{2x-5}{x^2-x-12} = \frac{7x-10}{x^2-6x+8}$$

$$\iota\beta. \quad \frac{3x}{x^2-x-2} + \frac{2x+5}{x^2-2x-3} = \frac{5x-1}{x^2-5x+6}$$

**34)** Να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $2x^{-2} - 5x^{-1} + 3 = 0$

β.  $x^{-2} - 4x^{-1} + 3 = 0$

**35)** Να λυθεί η εξίσωση:  $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0$

**36)** Αν  $A = 4x^2 + 12x + 9$ ,  $B = 4x^2 - 2x$  και  $\Gamma = (x - 2)^2 - 9$ , τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $A = 0$       β.  $B = 0$       γ.  $\Gamma = 0$       δ.  $\frac{\Gamma}{B} = 0$

**37)** Αν είναι:

- $A = (8x - 6)(4 - 2x) + (6x - 3)(4 - 2x)$

- $B = (10x - 6)^2 - (4x - 3)^2$

τότε να λυθούν οι εξισώσεις:

α.  $A = 0$       β.  $B = 0$       γ.  $\frac{A}{B} = 0$       δ.  $\frac{B}{A} = 0$

**38)** Αφού απλοποιήσετε την παράσταση A, να λύσετε την εξίσωση  $A = 9$ .

$$A = \frac{8x - 12}{4x^2 - 12x + 9} - \frac{5x}{2x^2 + 3x} - \frac{20x}{9 - 4x^2}$$

**39)** Αφού απλοποιήσετε τις παρακάτω ρητές παραστάσεις A και B, να λύσετε την εξίσωση  $A - B = 0$ .

$$A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}, B = \frac{9 \cdot (2x + 1)^2 - (4x - 1)^2}{4 \cdot (x^2 + 4x + 4)}$$

**40)** Δίνονται τα κλάσματα  $A = \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 4}$  και  $B = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$ .

α. Να βρείτε πότε ορίζονται.

β. Να τα απλοποιήσετε.

γ. Να λύσετε την εξίσωση:  $A = B$ .

**41)** Ομοίως για τα κλάσματα  $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$  και  $B = \frac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 9}$ .

## 2.5 ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Διάταξη πραγματικών αριθμών
- 2) Ιδιότητες της διάταξης
- 3) Επίλυση ανισώσεων με έναν άγνωστο.

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΠΟΥ ΠΑΡΙΣΤΑΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΣΗΜΕΙΑ ΕΝΟΣ ΑΞΟΝΑ.

- 1) **Άξονας πραγματικών αριθμών**, ονομάζεται η ευθεία στην οποία ορίζουμε ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 0 και δεξιά αυτού άλλο ένα σημείο στο οποίο αντιστοιχούμε τον αριθμό 1. Τότε σε κάθε σημείο του άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και το αντίστροφο σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο του άξονα.
- 2) **Διάταξη πραγματικών αριθμών** ονομάζουμε την τοποθέτηση τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- 3) **Ανισότητα** ονομάζουμε μια σχέση διάταξης μεταξύ πραγματικών αριθμών.
- 4) Ένας αριθμός  $\alpha$  λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν άλλο αριθμό  $\beta$  όταν ο  $\alpha$  βρίσκεται στον άξονα δεξιότερα του  $\beta$  και συμβολίζουμε  $\alpha > \beta$ .
- 5) Ένας αριθμός  $\alpha$  λέμε ότι είναι **μικρότερος** από έναν άλλο αριθμό  $\beta$  όταν ο  $\alpha$  βρίσκεται στον άξονα αριστερότερα του  $\beta$  και συμβολίζουμε  $\alpha < \beta$ .

### Πορίσματα

- 1) Γενικότερα αν στον άξονα έχουμε δύο αριθμούς τότε μεγαλύτερος είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα.
- 2) Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- 3) Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.
- 4) Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό αριθμό.
- 5) Δύο αριθμοί λέγονται **ομόσημοι**, αν και οι δύο είναι θετικοί ή αν και οι δύο είναι αρνητικοί.
- 6) Δύο αριθμοί λέγονται **ετερόσημοι**, αν ο ένας είναι θετικός και ο άλλος είναι αρνητικός αριθμός.

**ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ**

| Αξιώματα                                                       | Συμβολισμός                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1) Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός      | Αν $\alpha > 0$ , $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$                                                          |
| (2) Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός  | Αν $\alpha < 0$ , $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$                                                          |
| (3) Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός     | Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$   |
| (4) Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός       | Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} > 0$ |
| (5) Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός | Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$   |
| (6) Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός   | Αν $(\alpha > 0 \text{ και } \beta < 0)$ ή $(\alpha < 0 \text{ και } \beta > 0)$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ |

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**

| Ιδιότητα                                                                                                        | Συμβολισμός                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| (1) Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. | Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ |
| (2) Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. | Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$ |

|     |                                                                                                                             |                                                                                          |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| (3) | Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.   | Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$     |
| (4) | Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.        | Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ |
| (5) | Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά. | Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$     |
| (6) | Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά.      | Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ |

### Πορίσματα

- 1) Το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός  $\alpha^2 \geq 0$
- 2) Αν το άθροισμα τετραγώνων δύο αριθμών είναι μηδέν τότε οι αριθμοί είναι ίσοι με μηδέν Αν  $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ , τότε  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$

### ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Όταν μας ζητάνε να αποδείξουμε μια ανισοτική σχέση τότε

- Πάμε όλους τους όρους στο 1<sup>ο</sup> μέλος της ανισότητας
- Παραγοντοποιούμε το 1<sup>ο</sup> μέλος της ανισότητας
- Καταλήγουμε σε προφανή ανισοτική σχέση

**Παράδειγμα 14ο :** Αν  $\alpha > -3$ , να αποδείξετε ότι  $6 + 2\alpha > 3 + \alpha$

#### Λύση

$$6 + 2\alpha > 3 + \alpha \Rightarrow 6 + 2\alpha - 3 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha + 3 > 0 \text{ (ισχύει)}$$

**Παράδειγμα 15ο :** Αν  $\alpha > 1 > \beta$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

**Λύση**

$$\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$$

$$\alpha + \beta - 1 - \alpha\beta > 0$$

$$(\alpha - 1) + \beta(1 - \alpha) > 0$$

$$(\alpha - 1) - \beta(\alpha - 1) > 0$$

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0 \text{ (ισχύει)}$$

**Παράδειγμα 16ο :** Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$

**Λύση**

$$\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha \Rightarrow \alpha^2 + 9 - 6\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 3 + 3^2 \geq 0 \Rightarrow (\alpha - 3)^2 \geq 0 \text{ (ισχύει)}$$

**Παράδειγμα 17ο :** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta \geq -8\beta^2$

**Λύση**

$$(\alpha + \beta)^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 4\alpha\beta + 8\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 \geq 0$$

$$(\alpha + 3\beta)^2 \geq 0 \text{ (ισχύει)}$$



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2**

**42)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ .

**43)** Να αποδείξετε ότι  $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

**44)** Να αποδείξετε ότι  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$ . Πότε ισχύει η ισότητα;

**45)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) Αν  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$

β) Αν  $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

**46)** Αν  $4,5 < x < 4,6$  και  $5,3 < y < 5,4$  να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

i)  $x+y$       ii)  $x-y$       iii)  $\frac{x}{y}$       iv)  $x^2 + y^2$

**47)** Το πλάτος  $x$  και το μήκος  $y$  ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες  $2 < x < 3$  και  $3 < y < 5$ . Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά  $0,2$  και ελαττώσουμε το μήκος κατά  $0,1$ , να βρείτε τις δυνατές τιμές :

i) της περιμέτρου      ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου

**48)** Αν  $0 \leq \alpha < \beta$ , να δείξετε ότι  $\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta}$

**49)** Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς :  
Έστω  $x > 5$ . Τότε  $x > 5$

$$5x > 25$$

$$5x - x^2 > 25 - x^2$$

$$x(5-x) > (5+x)(5-x)$$

$$x > 5+x$$

$$0 > 5$$

**50)** Αν  $\alpha > 1 > \beta$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$ .

**51)** Αν  $\alpha, \beta$  θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι  $(\alpha + \beta) \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$

**52)** Να αποδείξετε ότι:

i)  $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$       ii)  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

**53)** Να δείξετε ότι:

i)  $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$       ii)  $\beta^2 + 6\beta + 11 > 0$

**54)** Αν  $x > 2$  τότε  $x^3 > 2x^2 - x + 2$

**55)** Να δείξετε ότι  $\alpha^2 + \gamma^2 \geq 2\beta(\alpha - \beta + \gamma)$

**56)** Αν  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

**57)** Αν  $\alpha + \beta = 1$  να δειχθεί ότι  $\alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$

**58)** Αν  $x > 0$  να συγκριθούν οι αριθμοί:  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  και  $x + \frac{1}{x}$

**59)** Να αποδείξετε ότι:  $x^2 + y^2 + z^2 + 14 \geq 2x - 4y + 6z$

**60)** Για τους θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} < \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta}$$

**61)** Αν  $\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma(\alpha + 2\beta) + 5\gamma^2 \leq 0$  να αποδείξετε ότι:  $\alpha = \frac{\beta}{2} = \gamma$

**62)** Αν  $3\alpha < \beta$  να αποδείξετε ότι:  $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{4} < \frac{\beta}{3}$

**63)** Αν  $x, y$  θετικοί αριθμοί να αποδειχθεί ότι:  $\frac{1}{2} \leq \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2} < 1$

**64)** Αν  $\alpha < \beta$  και  $\gamma < \delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:  $\alpha - \delta < \beta - \gamma$

**65)** Αν  $\alpha > \beta > \gamma$  τότε να δείξετε ότι:  $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) < 0$

**66)** Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

i)  $\alpha^2 + 1 \geq 2\alpha$       ii)  $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1)(\gamma^2 + 1) \geq 8\alpha\beta\gamma$

**67)** Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι θετικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

i)  $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$       ii)  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$

**68)** Δίνονται οι θετικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  με  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$  β)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 9$

**3<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**

Για την επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού μ' ένα άγνωστο ακολουθούμε τα ίδια βήματα που ακολουθούμε για την επίλυση των εξισώσεων πρώτου βαθμού μ' ένα άγνωστο.

Με την διαφορά ότι όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δύο μέλη της ανίσωσης, αν αυτός είναι αρνητικός αλλάζουμε την φορά της ανίσωσης.

**Παράδειγμα 18ο :** Να επιλύσετε την ανίσωση:  $\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$

**Λύση**

$$\frac{33}{10} - \frac{3(x+1)}{5} < 4 + \frac{2(x-3)+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-6+1}{10}$$

$$\frac{33}{10} - \frac{3x+3}{5} < 4 + \frac{2x-5}{10}$$

$$\cancel{10} \cdot \frac{33}{\cancel{10}} - \cancel{10}^2 \cdot \frac{3x+3}{\cancel{5}} < 10 \cdot 4 + \cancel{10} \cdot \frac{2x-5}{\cancel{10}}$$

$$33 - 2(3x+3) < 40 + (2x-5)$$

$$33 - 6x - 6 < 40 + 2x - 5$$

$$-6x - 2x < 40 - 5 - 33 + 6$$

$$-8x < -38 + 46$$

$$-8x < 8$$

$$\frac{-8x}{-8} > \frac{8}{-8}$$

$$x > -1$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**69)** Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

- α)  $7x + 3 \leq 15 + 4x$
- β)  $x + 5 > -3$
- γ)  $-(2 - x) > 3x - 2$
- δ)  $-(7 + x) < 4x - 1$

**70)** Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

- α)  $4(\omega - 2) > \omega - 2$
- β)  $3x + 3 - (x - 1) \geq 5 - x$
- γ)  $4y - 2 - (y + 3) < 3(y + 3) + 2$
- δ)  $5(2 - t) < t - 2$

**71)** Να επιλύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.

- α)  $\frac{2x - 3}{4} - \frac{3 - x}{5} > 2$
- β)  $3(1 - x) - \frac{2}{3}(x + 2) < \frac{x}{2}$
- γ)  $x + 5 + \frac{x - 3}{3} - \frac{x - 2}{2} > 0$
- δ)  $\frac{1}{3} \left( \frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2}{3} \right) - \frac{x + 1}{6} > 3$
- ε)  $\omega - \frac{3 - \omega}{3} > \frac{\omega + 1}{2} - \frac{\omega - 2}{4}$
- στ)  $t + \frac{t + 1}{3} > \frac{2t - 1}{4} + \frac{11t}{12}$

**72)** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

- α)  $x - 3 < 2$  και  $4 - x < 3$
- β)  $3(x - 1) + x > 7 - x$  και  $6x - 7 \leq 2(x + 2) + 9$
- γ)  $4x - 1 > 3(1 - x) + 10$  και  $2(1 - x) \geq 8$
- δ)  $2y - 8 > \frac{3}{4}(y + 1)$  και  $\frac{3}{2}y + \frac{1}{12} < y - 2$
- ε)  $4x - 3 < 5$  και  $2(x - 3) > -4$  και  $2x \geq 3(x - 1)$
- στ)  $\frac{2x + 3}{2} > \frac{3x - 1}{3}$  και  $3(2x - 1) + x > -3(x + 4) - 1$

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### **ΕΝΟΤΗΤΑ : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ**

#### **ΘΕΜΑ Α**

A<sub>1</sub>) Να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ.

**Μονάδες 7**

A<sub>2</sub>) Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης  $\alpha x + \beta < 0$  για τις διάφορες τιμές του α.

**Μονάδες 7**

A<sub>3</sub>) Δίνεται η εξίσωση  $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$ , όπου α και β πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha \neq 0$ .

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα της εξίσωσης και να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση.

**Μονάδες 5**

β) Αν η εξίσωση έχει λύση τους αριθμούς  $-1$  και  $\frac{1}{2}$  να υπολογίσετε τους α και β.

**Μονάδες 6**

#### **ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = (x+1)^2 + (x-1)3 - x^3 + 7$

B<sub>1</sub>) Να αποδείξετε ότι  $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

**Μονάδες 9**

B<sub>2</sub>) Να παραγοντοποιήσετε το P(x)

**Μονάδες 8**

B<sub>3</sub>) Να λύσετε την εξίσωση  $P(x) = 0$ .

**Μονάδες 8**

#### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι παραστάσεις :  $K = (2x-1)^2 + 4x(x-2)$  και  $\Lambda = (3x-2)(2+3x) - (x^2-2)$

Γ<sub>1</sub>) Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις K και Λ.

**Μονάδες 6**

Γ<sub>2</sub>) Να υπολογιστεί η διαφορά  $K - \Lambda$ .

**Μονάδες 4**

Γ<sub>3</sub>) Να λυθεί η εξίσωση  $K - \Lambda = 0$ .

**Μονάδες 7**

Γ<sub>4</sub>) Να λυθεί η εξίσωση  $A - 3B = -17x^2 - 20$ .

**Μονάδες 8**

#### **ΘΕΜΑ Δ**

Δ<sub>1</sub>) Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

α)  $x^2 - 1$

**Μονάδες**

**2**

β)  $(x+2)(x-2)^2 - 81(x+2)$

**Μονάδες 8**

Δ<sub>2</sub>) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{(x+2)(x-2)^2 - 81(x+2)}{(x+7)(x-11)} \quad \text{και} \quad B = \frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{1}{(-x-1)(x+2)}$$

**Μονάδες 12**

Δ<sub>3</sub>) Να δείξετε ότι  $(AB)^{2015} < 0$ .

**Μονάδες 3**



### 3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

#### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Βασικοί ορισμοί.
- 2) Ειδικές περιπτώσεις γραμμικών εξισώσεων.

#### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

##### ΟΡΙΣΜΟΣ

Κάθε εξίσωση της μορφής  $ax + by = \gamma$  όπου  $a, b, \gamma$  πραγματικοί αριθμοί θα ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους.

Παράδειγμα :  $2x + y = 6$ ,  $\sqrt{2}x - y = 4$ ,  $y = 4$ ,  $2x = 5$

##### ΟΡΙΣΜΟΣ

Λύση μιας εξίσωσης  $ax + by = \gamma$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

#### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους  $ax + by = \gamma$  αν  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  παριστάνει ευθεία γραμμή.  
Στην Β Γυμνάσιου μάθαμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής  $y = Ax + B$  παριστάνει μια ευθεία γραμμή.  
Πράγματι αν ψάξουμε μέσα σε μια γραμμική υπάρχει μια κρυμμένη ευθεία :  

$$ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma \Leftrightarrow \frac{by}{b} = \frac{-ax}{b} + \frac{\gamma}{b} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b} \Leftrightarrow y = Ax + B$$
- 2) Εξαιτίας τις τελευταίας παρατήρησης συνδέουμε την λύση μιας γραμμικής με την αντίστοιχη ευθείας της γραμμικής ως εξής :
  - α) Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
  - β) Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

#### 2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

##### 1<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΕΥΘΕΙΑ)

Η εξίσωση  $y = \kappa$  με  $\kappa \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $(0, \kappa)$ .

##### 2<sup>η</sup> ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΕΥΘΕΙΑ)

Η εξίσωση  $x = \kappa$  με  $\kappa \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $(\kappa, 0)$ .

**Παράδειγμα 1ο :** Να σχεδιαστεί η ευθεία:  $3x - 2y = 6$ .

### Λύση

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία.

Για  $x = 0$  έχουμε:  $-2y = 6$  δηλαδή  $y = -3$

Για  $y = 0$  έχουμε:  $3x = 6$  δηλαδή  $x = 2$

Άρα η εξίσωση  $3x - 2y = 6$  παριστάνει ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται από τα σημεία  $A(0, -3)$  και  $B(2, 0)$ .



**Παράδειγμα 2ο :** Ένα σημείο  $M$  της ευθείας  $\varepsilon : 3x - 2y = 6$  έχει τεταγμένη 9. Να βρείτε την τετμημένη του.

### Λύση

Το σημείο  $M$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ , άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Αφού το  $M$  έχει τεταγμένη  $y = 9$  για την τετμημένη του  $x$  πρέπει να ισχύει:  $3x - 2 \cdot 9 = 6 \Rightarrow 3x - 18 = 6 \Rightarrow 3x = 6 + 18 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

Άρα η τετμημένη του  $M$  είναι  $x = 8$ .

**Παράδειγμα 3ο :** Αν η ευθεία  $\varepsilon : \lambda x - (\lambda - 1)y = 11$  διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 3)$ , τότε να προσδιορίσετε τη τιμή του  $\lambda$  και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της  $\varepsilon$  με τους άξονες.

### Λύση

Η ευθεία  $\varepsilon : \lambda x - (\lambda - 1)y = 11$  διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 3)$ , οπότε οι συντεταγμένες του σημείου  $A$  επαληθεύουν την εξίσωση  $\lambda x - (\lambda - 1)y = 11$ .

Άρα,  $\lambda(-1) - (\lambda - 1) \cdot 3 = 11 \Rightarrow -\lambda - 3\lambda + 3 = 11 \Rightarrow -\lambda - 3\lambda = 11 - 3 \Rightarrow -4\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = -2$

Συνεπώς η εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$  παίρνει τη μορφή:  $-2x + 3y = 11$

Για  $x = 0$  έχουμε  $3y = 11$  ή  $y = \frac{11}{3}$ , δηλαδή η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $\left(0, \frac{11}{3}\right)$ .

Για  $y = 0$  έχουμε  $-2x = 11$  ή  $x = -\frac{11}{2}$ , δηλαδή η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$ .



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 1)** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)
- Η εξίσωση  $2x + y^2 = 4$  είναι γραμμική.
  - Η εξίσωση  $\frac{4}{x} + 3y = 1$  είναι γραμμική.
  - Η εξίσωση  $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4)y = 5$  είναι γραμμική για κάθε τιμή  $\lambda$ .
  - Η ευθεία  $x = -2$  είναι συνάρτηση.
  - Η ευθεία  $y = -2$  είναι συνάρτηση.
  - Οι ευθείες  $x = 3$  και  $x = -2$  είναι παράλληλες.
  - Οι ευθείες  $x = 3$  και  $y = -2$  είναι κάθετες.
  - Η ευθεία  $x = -7$  είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .
  - Η εξίσωση  $(\kappa^2 - 1)x - (\kappa - 1)y = 0$  παριστάνει πάντα ευθεία.
  - Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
  - Η εξίσωση  $y = -3$  έχει άπειρες λύσεις.
  - Η εξίσωση  $-4x + 2y = 0$  είναι γραμμική.
  - Αν  $(x_0, y_0)$  είναι μια λύση της γραμμικής εξίσωσης  $ax + by = \gamma$  τότε  $ax_0 + by_0 = \gamma$ .
  - Η εξίσωση  $ax + by = \gamma$  γραφικά παριστάνει πάντα ευθεία γραμμή.
  - Η εξίσωση  $4x + \kappa y = 4$  γραφικά παριστάνει ευθεία για κάθε  $\kappa$ .
  - Το σημείο  $K(-3, 4)$  ανήκει στην ευθεία  $x = 4$ .
  - Κάθε σημείο της ευθείας  $y = x$  ισαπέχει από τους άξονες.
  - Το σημείο τομής των ευθειών  $2x - y = 5$  και  $x - 2y = 3$  είναι το  $(0, 0)$ .
  - Η ευθεία  $3x - 2y = 6$  τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο  $(2, 0)$ .
  - Οι ευθείες  $x = -1$  και  $y = 3$  τέμνονται στο σημείο  $A(-1, 3)$ .
  - Η ευθεία  $x = 3$  τέμνει τον  $y'y$  το  $A(0, 3)$ .
  - Η ευθεία  $3x - 2y = 0$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 2)** Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:
- Η ευθεία  $y = -4$  είναι κάθετη:
    - στον  $x'x$
    - στον  $y'y$
    - στην ευθεία  $y = -5$
    - στην ευθεία  $y = 3x$
  - Αν η ευθεία  $2x - (\kappa + 1)y = 2$  περνάει από το σημείο  $A(-1, 1)$  τότε η τιμή του  $\kappa$  είναι:
    - $\kappa = 1$
    - $\kappa = 0$
    - $\kappa = 0$  ή  $\kappa = 1$
    - $\kappa = -5$
  - Το σημείο τομής των ευθειών  $2x - 3y = 1$  και  $x - 4y = -5$  είναι:
    - $(0, 0)$
    - $(-1, 1)$
    - $(1, 1)$
    - $(1, -1)$
  - Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(-2, 3)$  και είναι παράλληλα στον  $y'y$  έχει εξίσωση:
    - $x = -2$
    - $x = 2$
    - $y = 3$
    - $y = 2$

v) Η ευθεία  $3x + 6y - 12 = 0$ , τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο:

(α)  $(0, 4)$  (β)  $(4, 0)$  (γ)  $(0, 3)$  (δ)  $(3, 0)$

vi) Η ευθεία  $x = -2$  είναι παράλληλη:

(α) στον  $x'x$  (β) τον  $y'y$  (γ) στην ευθεία  $y = -x$  (δ) στην ευθεία  $y = x$

vii) Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμική είναι:

(α)  $3x - xy = 5$  (β)  $3x - 5y + 1 = 0$  (γ)  $x - 2 + y = 5$  (δ)  $x + 2y - 3 = 4$

viii) Η εξίσωση  $(\kappa^2 - \kappa)x + \kappa y = 3$ . Παριστάνει ευθεία όταν:

(α)  $\kappa = 0$  (β)  $\kappa \neq 0$  (γ)  $\kappa = 1$  (δ)  $\kappa \neq 1$

ix) Η ευθεία  $x - 3y = 6$ , σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν:

(α) 8 τ.μ. (β) 4 τ.μ. (γ) 6 τ.μ. (δ) 12 τ.μ.

**3)** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων στις ευθείες:

α)  $x - 3y = 4$  (β)  $x - y = 0$  (γ)  $x = 4$  (δ)  $y = -2$

**4)** Δίνεται η ευθεία  $2x - y = 8$ .

α) Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  ώστε η ευθεία να τέμνει το  $x'x$  στο σημείο  $(\lambda^2 - 2, 0)$ .

β) Για τη μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε από το α) ερώτημα να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας:  $\lambda x + 2y = 3$ .

**5)** Δίνεται η ευθεία  $x - 3y = 6$ .

α) Να βρείτε τα σημεία που η ευθεία τέμνει τους άξονες.

β) Αν  $A$  το σημείο τομής με τον άξονα  $x'x$ , να βρείτε την ευθεία που περνάει από το  $A$  και είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$ .

**6)** Δίνεται η ευθεία  $\kappa x + 3y = 6$ . Να βρείτε:

α) Τον αριθμό  $\kappa$  αν η ευθεία τέμνει τον  $x'x$  στο 3.

β) Για την τιμή του  $\kappa$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.

## 3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ & ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Βασικοί ορισμοί.
- 2) Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε ζευγάρι γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Παράδειγμα :  $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε ζεύγος  $(x, y)$  που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

### 2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Γενικά επίλυση ενός συστήματος ονομάζουμε την διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την λύση του.

Η διαδικασία αυτή θα δούμε ότι επιτυγχάνεται με δύο τρόπους:

- Γραφικά
- Αλγεβρικά

#### ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

Η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους γίνεται με γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων των ευθειών όπου εγκλείουν οι εξισώσεις μέσα τους και ο προσδιορισμός της θέσης τους αποτελεί και την λύση Συγκεκριμένα :

|                                     |                                |
|-------------------------------------|--------------------------------|
| Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο. | Το σύστημα έχει μοναδική λύση. |
| Οι ευθείες είναι παράλληλες.        | Το σύστημα είναι αδύνατο.      |
| Οι ευθείες συμπίπτουν               | Το σύστημα είναι αόριστο       |

**Σχόλιο**

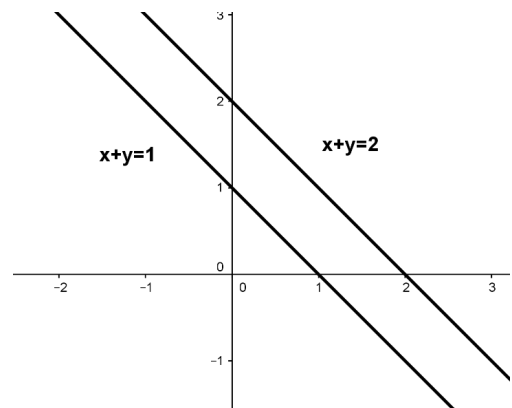
Η γραφική επίλυση έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα, τον μη ακριβή προσδιορισμό των λύσεων του συστήματος που οφείλεται σε σχεδιαστικά σφάλματα ή στην αδυναμία να προσδιορίσουμε με ακρίβεια πάνω στους άξονες κλασματικούς ή άρρητους αριθμούς.

**Παράδειγμα 4ο :** Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

**Λύση**

Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων κάνοντας ένα πίνακα τιμών ξεχωριστά για κάθε μια εξίσωση.

Παρατηρούμε από το σχήμα, ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο. Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.



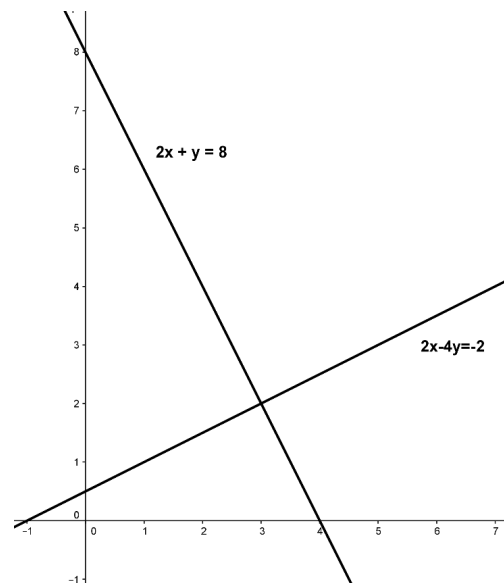
**Παράδειγμα 5ο :** Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα  $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$

**Λύση**

Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων κάνοντας ένα πίνακα τιμών ξεχωριστά

για κάθε μια εξίσωση.

Παρατηρούμε από το σχήμα, ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες που έχουν ένα κοινό σημείο με συντεταγμένες  $(3, 2)$ . Επομένως η λύση του συστήματος είναι  $(x, y) = (2, 3)$ .



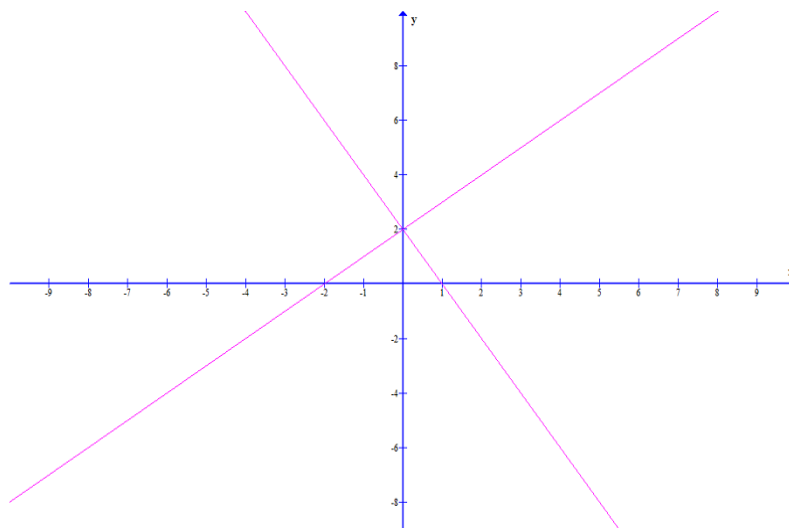
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 7)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.
- α) Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο. Τότε οι ευθείες που παριστάνουν αυτές οι εξισώσεις είναι παράλληλες στον άξονα  $x'x$ .
- β) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο.
- γ) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει μόνο δύο πραγματικές λύσεις.
- δ) Το σύστημα των εξισώσεων  $\begin{cases} y = 2 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$  είναι αδύνατο.
- ε) Το σύστημα των εξισώσεων  $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$  έχει μοναδική λύση.
- στ) Το σύνολο των εξισώσεων  $2x + 3y = 1$ ,  $x - 3y = 4$  αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα.
- ζ) Το ζεύγος  $(-2, 1)$  είναι λύση του συστήματος  $\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$
- η) Το σύστημα  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$  είναι αδύνατο.
- 8)** Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:
- i) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $(-1, -1)$  και  $(2, 2)$  είναι:  
 (α)  $y = -x$     (β)  $y = 2x + 1$     (γ)  $x - y = 0$     (δ)  $y = x + 1$
- ii) Η ευθεία  $y + 3x = 6$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο:  
 (α)  $A(6, 2)$     (β)  $B(-2, -6)$     (γ)  $\Gamma(2, 6)$     (δ)  $\Delta(2, 0)$
- iii) Οι ευθείες (ε)  $3x - 5y = -7$ , (ζ)  $-2x - 3y = 3$   
 (α) είναι παράλληλες    (β) ταυτίζονται  
 (γ) τέμνονται σε ένα σημείο    (δ) διέρχονται από το  $(0, 0)$
- iv) Οι ευθείες: (ε)  $3x + y = 0$ , (ζ)  $x - y = 0$  τέμνονται στο:  
 (α)  $A(0, 0)$     (β)  $B(-3, -1)$     (γ)  $\Gamma(2, 6)$     (δ)  $\Delta(1, 1)$
- 9)** Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα:  $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

10) α επιλύσετε γραφικά το σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{5}x + 1 \end{cases}$$

11) Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα: 
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ y = \frac{4}{5}x - 1 \end{cases}$$

12) Να βρείτε το σύστημα που παριστάνεται γραφικά από το παρακάτω σχήμα:



### 3.3 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

#### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Επίλυση με αντικατάσταση.
- 2) Επίλυση με αντίθετους συντελεστές.

#### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Έστω ότι μας ζητάνε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

|                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.<br>Συνήθως λύνουμε ως προς εκείνο τον άγνωστο που σε κάποια από τις δύο εξισώσεις εμφανίζεται με συντελεστή 1 ή -1 | $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow$                                  |
| Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράσταση του και προκύπτει μια νέα εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε                       | $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ 3x + 2(2x - 5) = 4 \end{cases} \Rightarrow$ $3x + 4x - 10 = 4 \Rightarrow$ $3x + 4x = 10 + 4 \Rightarrow$ $7x = 14 \Rightarrow$ $x = 2$ |
| Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα την αντικαθιστούμε σε μια από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος ή ακόμα καλύτερα στην που δημιουργήσαμε .                   | <p>Για <math>x = 2</math> στην <math>y = 2x - 5</math> έχουμε :</p> $y = 2 \cdot 2 - 5$ $y = 4 - 5$ $y = -1$                                                         |

Αρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος  $(x, y) = (2, -1)$

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**

Έστω ότι μας ζητάνε να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

|                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Επιλέγω να απαλείψω έναν από τους δυο αγνώστους πολλαπλασιάζοντας τους όρους της κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές.                                                                       | $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \cdot (-2) \\ 2x - 5y = 9 \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} -6x - 4y = -8 \\ 6x - 15y = 27 \end{cases} \Rightarrow$ |
| Στην συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και προκύπτει μια νέα εξίσωση με έναν άγνωστο, που μαζί με μία από τις αρχικές εξισώσεις σχηματίζουν ισοδύναμο σύστημα.<br>Λύνω την εξίσωση που προκύπτει με τον έναν άγνωστο. | $\begin{cases} -6x - 4y = -8 \\ 6x - 15y = 27 \end{cases} \begin{matrix} \\ (+) \end{matrix}$ <hr/> $-19y = 19 \Rightarrow y = -1$                                                                                               |
| Την τιμή που βρήκαμε στο προηγούμενο βήμα την αντικαθιστούμε σε μια από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος και βρίσκουμε έτσι και τον άλλο άγνωστο.                                                                                | <p>Για <math>y = -1</math> έστω στην <math>3x + 2y = 4</math></p> $3x + 2 \cdot (-1) = 4$ $3x - 2 = 4$ $3x = 4 + 2$ $3x = 6$ $x = 2$                                                                                             |

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος  $(x, y) = (2, -1)$



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 13)** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)
- α) Το σημείο  $A(2, 1)$  είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών  $2y = x$  και  $y = 1$ .
- β) Οι ευθείες  $y - 3x = 2$  και  $y - x = 0$  τέμνονται στην αρχή των αξόνων.
- γ) Οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x - 2y = 3$ ,  $\varepsilon_2 : 6x - 4y = -3$  είναι παράλληλες.
- δ) Οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 4x - y = 1$ ,  $\varepsilon_2 : x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}$  τέμνονται.
- ε) Η εξίσωση  $(3x - 2y + 1)(x - 2y + 5) = 0$  εκφράζει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- στ) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- ζ) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x, y$  είναι αόριστο, τότε αυτό αληθεύει για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- η) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x, y$  έχει λύσεις τα ζεύγη  $(3, 2)$  και  $(-1, 2)$  τότε θα έχει λύση και το  $(-2, 2)$ .
- θ) Το σύστημα  $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$  δεν είναι ποτέ αδύνατο.
- 14)** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
- α) Για την επίλυση του συστήματος  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$  με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
- Την πρώτη εξίσωση ως προς  $x$ ;
  - Την πρώτη εξίσωση ως προς  $y$ ;
  - Τη δεύτερη εξίσωση ως προς  $x$ ;
  - Τη δεύτερη εξίσωση ως προς  $y$ ;
- β) Οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 3x + 2y = 5$  και  $\varepsilon_2 : 2x - 5y = -3$  έχουν κοινό σημείο το:
- $A(1, 1)$
  - $B(3, -2)$
  - $\Gamma(-4, -1)$
  - $\Delta(6, 3)$
- γ) Η παράσταση  $(x - 3y + 5)^2 + (2x + y - 4)^2 + 2.013$  γίνεται ελάχιστη όταν:
- $x = 1$  ή  $y = 2$
  - $x = 1$  και  $y = 2$
  - $x = 2$  ή  $y = 1$
  - $x = -1$  ή  $y = 2$ .
- δ) Το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 6x - 12y = 5 \end{cases}$  είναι:
- αδύνατο
  - αόριστο
  - έχει δύο λύσεις
  - έχει μοναδική λύση

ε) Το σύστημα  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$  παριστάνει δύο ευθείες:

- i) που είναι παράλληλες                      ii) που τέμνονται  
iii) που ταυτίζονται                      iv) τίποτα από τα παραπάνω

**15)** Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντικατάσταση)

α)  $\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$       β)  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$       γ)  $\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

**16)** Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντίθετους συντελεστές)

α)  $\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$       β)  $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$       γ)  $\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = -1 \end{cases}$

**17)** Να επιλυθεί το σύστημα:  $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases}$

**18)** Το σύστημα  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - 4y = -10 \end{cases}$

- α) έχει μια λύση      β) είναι αόριστο      γ) είναι αδύνατο

**19)** Το σύστημα  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$

- α) έχει μια λύση      β) είναι αόριστο      γ) είναι αδύνατο

**20)** Να επιλυθεί το σύστημα  $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases}$

**21)** Να επιλυθούν τα συστήματα:

α)  $\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$   
β)  $\begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$   
γ)  $\begin{cases} 2x - y(x - 1) = -1 + x(3 - y) \\ xy - x(2x - 1) = 1 - (2x - y)(x + 1) \end{cases}$

**22)** Να επιλυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = \frac{x-2y}{3} \\ x - \frac{2x-y}{4} = \frac{y}{2} \end{cases} \quad (x, y) = (-2, -4)$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{7x+y}{3} - \frac{y-1}{2} = x+3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases} \quad (x, y) = (2, 1)$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases} \quad (x, y) = (4, 6)$$

**23)** Αν το σύστημα  $\begin{cases} 2\alpha x - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$  έχει λύση  $x = -1$  και  $y = 1$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

**24)** Αν το σύστημα  $\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$  έχει λύση την  $x = 3$  και  $y = 2$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

**25)** Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} (x-2y)(x+y-1) = 0 \\ x-y = 2 \end{cases}$

**26)** Ο Γιάννης έχει στο αγρόκτημα του κοτόπουλα και κουνέλια. Όταν τον ρώτησε κάποιος πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει, ο Γιάννης του απάντησε: Αν μετρήσεις τα κεφάλια τους είναι 35, αν μετρήσεις τα πόδια τους είναι 100 πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει ο Γιάννης;

**27)** Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

**28)** Ο Γιώργος γράφει ένα διαγώνισμα, το οποίο αποτελείται από 18 θέματα. Για κάθε σωστό θέμα παίρνει 10 βαθμούς ενώ για κάθε λάθος χάνει 5 βαθμούς. Αν η τελική βαθμολογία είναι 135 βαθμοί, να βρείτε το πλήθος των σωστών και λανθασμένων θεμάτων.

**ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ****1. ΕΝΟΤΗΤΕΣ (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ)****ΘΕΜΑ Α**

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{2(x^2 - 3)}{x - 1} \quad \text{και} \quad B = \frac{(x - 3)(x + 2)}{x^2 - x}$$

**A1.** Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζονται οι παραπάνω παραστάσεις.

**Μονάδες 10**

**A2.** Να λύσετε την εξίσωση

$$A + B = \frac{2(x^2 - 3)}{x - 1} - \frac{11}{x^2 - x}$$

**Μονάδες 15**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι παραστάσεις

$$K = 2(x - 3) + x \quad \text{και} \quad \Lambda = (x - 2)^2 - x^2$$

**B1.** Να λυθούν οι ανισώσεις

$$K \leq \Lambda \quad \text{και} \quad K > 9$$

**Μονάδες 14**

**B2.** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

**Μονάδες 11**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται οι ευθείες 
$$\begin{cases} (\varepsilon_1): x + 2(x + 3y) = -9 \\ (\varepsilon_2): (x - 3)^2 - x(x - y) = y(x + 1) + 5 \end{cases}$$

**Γ1.** Να βρεθεί το σημείο τομής των δύο ευθειών.

**Μονάδες 15**

**Γ2.** Η ευθεία  $\varepsilon_3: x + y = 1$  διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ;

**Μονάδες 10**

**2. ΕΝΟΤΗΤΑ (ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ)****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

**Μονάδες 9**

**A2.** Τι σημαίνει γραφικά ότι ένα γραμμικό σύστημα:

- i) είναι αδύνατο
- ii) είναι αόριστο

**Μονάδες 6**

**A3.** Να σημειώσετε **Σ** για τις **Σωστές** και **Λ** για τις **Λάθος** προτάσεις.

**α.** Το σημείο  $A(2,1)$  ανήκει στην ευθεία  $x + 2y = 4$

**β.** Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι αόριστο, δεν έχει καμία λύση.

**γ.** Οι ευθείες  $x + y = 1$  και  $2x = 3 - 2y$  είναι παράλληλες.

**δ.** Οι ευθείες  $x + y = 5$  και  $x + y = -5$  έχουν ακριβώς μία λύση.

**ε.** Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο, οι ευθείες που ορίζονται ταυτίζονται.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

**B<sub>1</sub>**. Να λυθεί το σύστημα: 
$$\begin{cases} \frac{2x-y}{2} = \frac{-y+4x}{3} \\ \frac{x-y}{3} = 2 - \frac{x+3}{4} \end{cases}$$
 **Μονάδες 12**

**B<sub>2</sub>**. Να λυθεί το σύστημα : 
$$\begin{cases} x+3+(y+1)^2 = y^2 \\ 3(x+2y) = 2x \end{cases}$$
 **Μονάδες 13**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon : y = ax + \beta$ .

**Γ<sub>1</sub>**. Να βρεθούν τα  $a$  και  $\beta$  ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία  $A(1,3)$  και  $B(-3,-1)$ . **Μονάδες 9**

**Γ<sub>2</sub>**. Για  $a=1$  και  $\beta=2$  να βρεθούν τα κοινά σημεία της  $\varepsilon$  με τους άξονες.

**Μονάδες 8**

**Γ<sub>3</sub>**. Αν είναι  $K$  και  $\Lambda$  τα παραπάνω σημεία να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $K\Omega\Lambda$ .

**Μονάδες 8**







## 4.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Στοιχεία τριγώνων
  - Γωνία
  - Κύρια στοιχεία τριγώνου
  - Είδη τριγώνων
  - Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου
- 2) Κριτήρια ισότητας τυχαίων τριγώνων
- 3) Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων και βασικές ιδιότητες.

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

- **Γωνιά** λέγεται ένα μέρος του επιπέδου μεταξύ δυο ημιευθειών με κοινή αρχή.
- **Δικοτόμος** μιας γωνίας λέγεται η ημιευθεία που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες
- **Είδη γωνιών :**
  - Ορθή γωνία είναι η γωνία που έχει μέτρο  $90^\circ$ .
  - Οξεία γωνία είναι η γωνία που είναι μικρότερη των  $90^\circ$ .
  - Αμβλεία γωνία είναι η γωνία που είναι μεγαλύτερη των  $90^\circ$ .
  - Ευθεία γωνία είναι η γωνία που είναι  $180^\circ$ .
  - Κυρτή γωνία είναι κάθε γωνία που είναι  $0^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$ .
  - Μη κυρτή είναι η γωνία που είναι  $180^\circ < \hat{\omega} < 360^\circ$ .
  - Πλήρης είναι η γωνία που έχει μέτρο  $360^\circ$ .
  - Μηδενική είναι η γωνία που έχει μέτρο  $0^\circ$ .
- Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** όταν έχουν την ίδια κορυφή, μια κοινή πλευρά και δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο
- Τρεις ή και περισσότερες γωνίες λέγονται **διαδοχικές** όταν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και κάθε μία από αυτές είναι εφεξής με την προηγούμενη ή την επόμενη της
- Δύο γωνίες  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\phi}$  λέγονται **παραπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα  $180^\circ$
- Δύο γωνίες  $\hat{\omega}$ ,  $\hat{\phi}$  λέγονται **συμπληρωματικές** όταν έχουν άθροισμα  $90^\circ$

- **Κατακορυφήν** λέγονται δυο γωνίες με κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι προέκταση των πλευρών της άλλης.

*Δυο κατακορυφήν γωνίες είναι πάντα ίσες μεταξύ τους.*

## ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

- **Κύρια στοιχεία τριγώνου** λέγονται οι πλευρές και οι γωνίες του.
- Το **άθροισμα των γωνιών** του τριγώνου ισούται με  $180^\circ$ .
- **Περιεχόμενη γωνία** λέγεται η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών.
- **Προσκειμένες γωνίες** λέγονται οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς.

## ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΓΩΝΙΕΣ

- **Οξυγώνιο** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **Αμβλυγώνιο** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία αμβλεία.
- **Ορθογώνιο** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή.  
*Υποτείνουσα ονομάζεται η πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία.*

## ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΙΣ ΠΛΕΥΡΕΣ

- **Σκαληνό** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.
- **Ισόπλευρο** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.
- **Ισοσκελές** ονομάζεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.  
*Βάση ισοσκελούς τριγώνου ονομάζεται η πλευρά που δεν είναι ίση με καμιά ενώ κορυφή ισοσκελές τριγώνου ονομάζεται η κορυφή που βρίσκεται απέναντι από τη βάση του*

## ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

- **Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου** λέγονται οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη.
- **Διάμεσος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.
- **Ύψος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μια κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς.

## 2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

### ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

### ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΥΧΑΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ;

1ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν **δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία** του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία του άλλου τριγώνου.

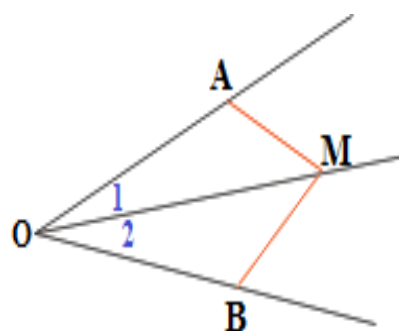
**Παράδειγμα 1ο :** Αν  $OA=OB$  και η  $OM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $O$ , να δείξετε ότι  $MA=MB$ .

#### Λύση

Για να αποδείξουμε ότι τα δύο τμήματα είναι ίσα θα ψάξουμε να βρούμε δύο τρίγωνα. Το ένα θα έχει πλευρά την  $MA$  και το άλλο την  $MB$ . (Τις περισσότερες φορές διακρίνονται εύκολα).

Τα τρίγωνα  $AOM$  και  $BOM$  έχουν:

- 1) Τις γωνίες  $O_1=O_2$  λόγω διχοτόμου (αιτιολογείται)
- 2) Την  $OM$  κοινή (φαίνεται)
- 3)  $OA=OB$  (δίνεται)



**Παράδειγμα 2ο :** Αν  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές τρίγωνο και  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών του, να δείξετε ότι και το  $\Delta EZ$  είναι ισοσκελές τρίγωνο.

### Λύση

Για να είναι το  $\Delta EZ$  ισοσκελές τρίγωνο πρέπει  $\Delta Z = ZE$ .

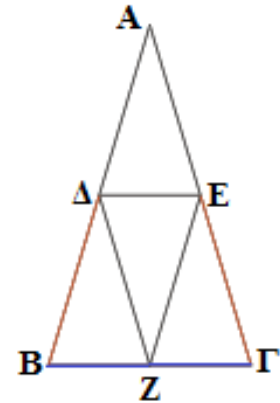
Θα ψάξουμε να βρούμε δύο τρίγωνα.

Το ένα να έχει πλευρά την  $\Delta Z$  και το άλλο την  $EZ$ .

Τα τρίγωνα είναι τα  $\Delta BZ$  και  $EZ\Gamma$ , τα οποία έχουν:

- 1)  $\Delta B = E\Gamma$  ως μισά ίσων πλευρών (με κόκκινο χρώμα)
- 2)  $BZ = Z\Gamma$  διότι το  $Z$  είναι μέσον (με μπλε χρώμα)
- 3) Οι γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  είναι ίσες λόγω ισοσκελούς.

Άρα  $\Delta BZ = EZ\Gamma$  επομένως και  $\Delta Z = EZ$  δηλαδή το  $\Delta EZ$  είναι ισοσκελές τρίγωνο.



*Μέχρι να αρχίσει να...κόβει το μάτι, χρησιμοποιείτε στα σχήματα το ίδιο χρώμα στα ίσα τμήματα. Βοηθάει πολύ.*

**Παράδειγμα 3ο :** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε την βάση του εκκατέρωθεν (τί θα πει αυτό;) κατά τμήματα  $B\Delta = \Gamma E$ .

Να δείξετε ότι το  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές τρίγωνο.

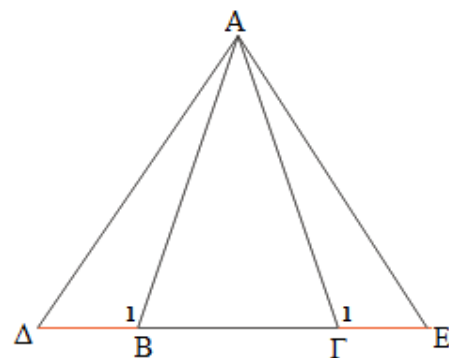
### Λύση

Για να είναι το  $A\Delta E$  ισοσκελές τρίγωνο πρέπει να έχει  $A\Delta = AE$ .

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $A\Gamma E$ .

- 1)  $AB = A\Gamma$  επειδή το  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές
- 2)  $B\Delta = \Gamma E$  δίνεται.
- 3)  $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$  ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και θα έχουν  $A\Delta = AE$ .



2ο κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν **μία πλευρά και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες** του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτήν γωνίες στο άλλο τρίγωνο

**Παράδειγμα 4ο :** Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές δύο ίσων τριγώνου είναι ίσες.

### Λύση

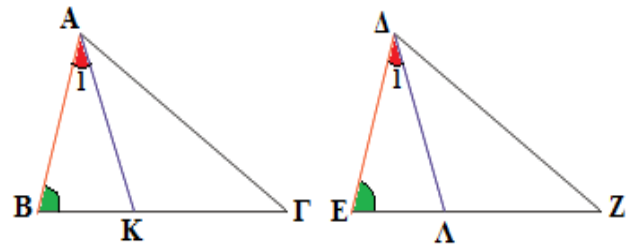
Έστω  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  τα δύο ίσα τρίγωνα και  $AK$ ,  $\Delta\Lambda$  οι διχοτόμοι.

Θα δείξουμε ότι  $AK=\Delta\Lambda$ .

Τα τρίγωνα  $ABK$  και  $\Delta E\Lambda$  έχουν:

- 1)  $AB=\Delta E$  ως πλευρές ίσων τριγώνων.
- 2)  $\hat{B}=\hat{E}$  ως γωνίες ίσων τριγώνων.
- 3)  $\hat{A}_1=\hat{\Delta}_1$  ως μισά ίσων γωνιών.

Άρα  $ABK=\Delta E\Lambda$  (Γ-Π-Γ) και επομένως  $AK=\Delta\Lambda$ .



### 3ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν **οι τρεις πλευρές** του ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου τριγώνου.

**Παράδειγμα 5ο :** Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν  $AB=\Delta E$ ,  $B\Gamma=EZ$  και τις διαμέσους  $AK$  και  $\Delta\Lambda$  ίσες. Να δείξετε ότι τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

### Λύση

Παρατηρούμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν από δύο πλευρές ίσες.

Να είχαν και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες...τι καλά που θα ήταν!

Τα τρίγωνα  $ABK$  και  $\Delta E\Lambda$  έχουν:

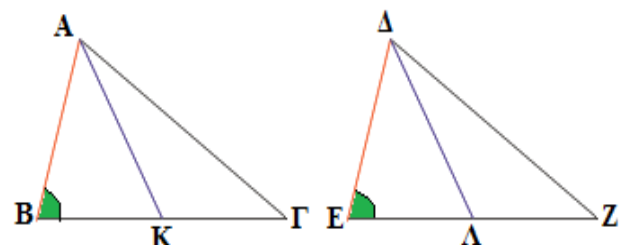
- 1)  $AB=\Delta E$ , δίνεται.
- 2)  $AK=\Delta\Lambda$ , δίνεται.
- 3)  $BK=\Delta\Lambda$  ως μισά ίσων πλευρών.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως και  $\hat{B}=\hat{E}$  (**α**)

Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

- 1)  $AB=\Delta E$ , δίνεται.
- 2)  $B\Gamma=EZ$ , δίνεται.
- 3)  $\hat{B}=\hat{E}$  λόγω (**α**).

Άρα είναι ίσα (Π-Γ-Π)



**Παράδειγμα 6ο :** Να δείξετε ότι οι απέναντι πλευρές και γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

### Λύση

Το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι οι απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι παράλληλες.

Φέρουμε την διαγώνιο ΑΓ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:

1) ΑΓ κοινή πλευρά

2)  $\hat{A}_1 = \hat{G}_1$  ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ

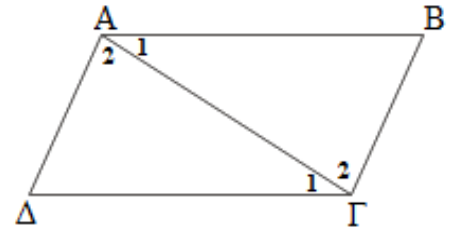
και ΔΓ που τέμνονται από την ΑΓ.

3)  $\hat{A}_2 = \hat{G}_2$  ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και θα έχουν όλα τα στοιχεία τους ίσα.

Επομένως ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ.

Επίσης  $\hat{B} = \hat{D}$  και  $\hat{A} = \hat{G}$ .



### 3<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ;

##### 1<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

##### 2<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

### Σχόλιο

Από τις εφαρμογές του σχολικού μας βιβλίου σελ.191 προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες όπου πλέον μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως θεωρία σε κάθε άσκηση.

#### 1<sup>η</sup> ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Σε κάθε **ισοσκελές τρίγωνο** ισχύει :

✚ Οι γωνίες της βάσεις του είναι ίσες.

✚ Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

## 2<sup>Η</sup> ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Για την **μεσοκαθέτου** ενός ευθυγράμμου τμήματος ισχύει :

- ✚ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του
- ✚ και αντίστροφα κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος.

## 3<sup>Η</sup> ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Για την **δικοτόμο κάθε γωνίας** ισχύει :

- ✚ Κάθε σημείο της δικοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας
- ✚ και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο μιας γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της δικοτόμου της.

**Παράδειγμα 7ο :** Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από την βάση του.

### Λύση

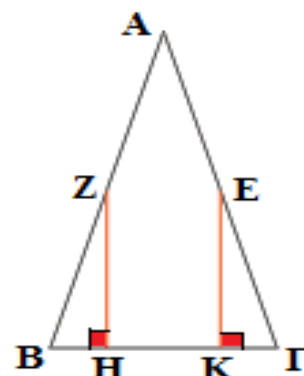
Η απόσταση του Z από την βάση ΒΓ είναι κάθετη στην ΒΓ.  
Άρα το ZBH είναι ορθογώνιο.

1) Τα τρίγωνα ZBH και EKG είναι ορθογώνια λόγω αποστάσεων

2)  $B = \Gamma$  ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

3)  $ZB = EG$  ως μισά ίσων πλευρών.

Άρα  $ZBH = EKG$  επομένως  $ZH = EK$ .



**Παράδειγμα 8ο :** Να δείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισαπέχουν από την διάμεσο ΑΜ.

### Λύση

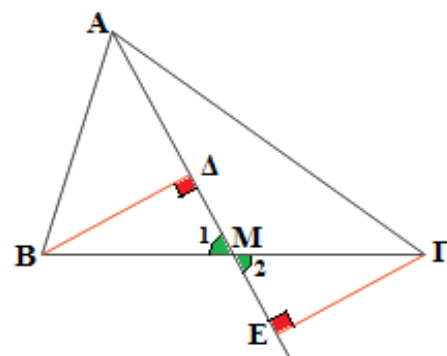
Θυμίζουμε ότι απόσταση σημείου από ευθεία είναι το κάθετο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο στην ευθεία. Άρα  $BD \perp AM$  και  $GE \perp AM$ .

1) Τα τρίγωνα BDM και GEM είναι ορθογώνια, λόγω αποστάσεων.

2)  $BM = MG$  λόγω διαμέσου.

3)  $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$  ως κατακορυφήν.

Άρα  $BDM = GEM$  και επομένως  $BD = GE$ .



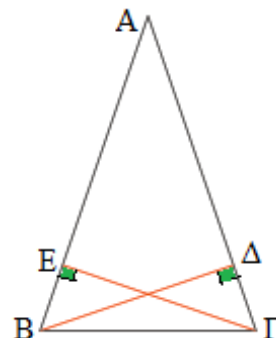
**Παράδειγμα 9ο :** Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$ . Να δείξετε ότι είναι ίσα.

### Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $\Gamma E\Delta$ .

- 1)  $B\Gamma$  κοινή πλευρά
- 2) Ορθογώνια λόγω υψών
- 3)  $\hat{B} = \hat{\Gamma}$  ως γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως  $B\Delta = \Gamma E$ .



**Παράδειγμα 10ο :** Να αποδειχθεί ότι τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς τον κύκλο είναι ίσα.

### Λύση

Κατασκευάζω το σχήμα της άσκησης:

Συγκρίνω τα τρίγωνα  $\triangle A\Gamma O$  και  $\triangle A\Delta O$  :

- 1) Ορθογώνια ( $\Delta$  μέσο της  $B\Gamma$ )
- 2)  $OG = OD$  (ακτίνες του ίδιου κύκλου)
- 3)  $OA$  (κοινή πλευρά)

Από κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

συμπεραίνω ότι  $\triangle A\Gamma O = \triangle A\Delta O$ .

Συνεπώς θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $A\Gamma = A\Delta$ .

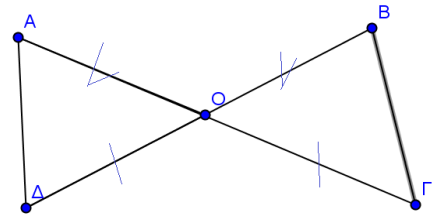


**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2**

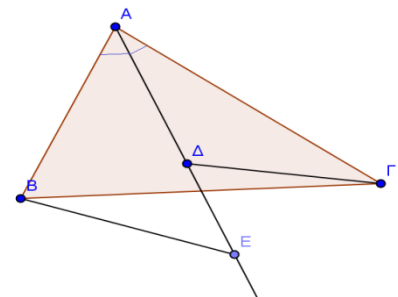
- 1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος
- α) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές
  - β) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μία και μία πλευρά ίση τότε είναι ίσα
  - γ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα
  - δ) Στο ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία που ορίζει η διχοτόμος από την κορυφή του είναι μεσοκάθετος της βάσης του .
  - ε) Υπάρχει σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας που δεν ισαπέχει από τις πλευρές της
  - στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία τότε είναι ίσα

**ΜΕ ΣΧΗΜΑ**

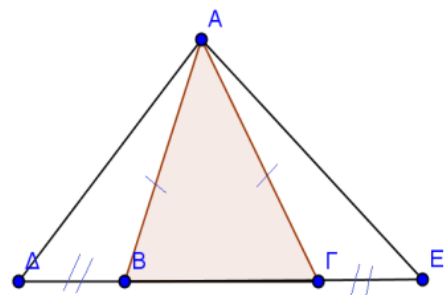
- 2) Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι  $AD=BG$



- 3) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τη διχοτόμο  $A\alpha$  της γωνίας  $\hat{A}$  και τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  ώστε  $A\Delta=AB$  και  $AE=A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $BE=\Gamma\Delta$ .

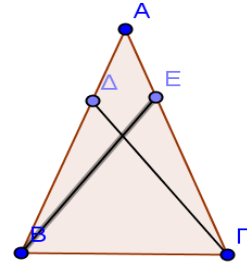


- 4) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές .  
Αν  $B\Delta=\Gamma E$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές



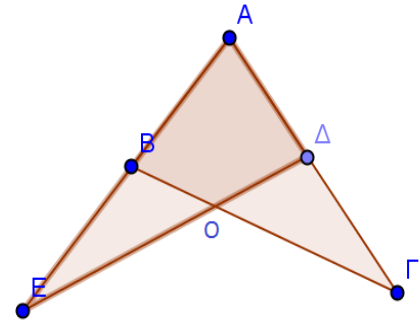
- 5) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με βάση  $B\Gamma$ . Αν  $AD=AE$ , να δείξετε ότι :

$$\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{BE\Gamma}$$



Στο διπλανό σχήμα έχουμε  $AD=AB$  και  $AE=AG$ .  
Να αποδείξετε ότι :

- α)  $\hat{E} = \hat{\Gamma}$  και  $\widehat{EBO} = \widehat{\Gamma\Delta O}$   
 β)  $OB=OD$   
 γ) η  $AO$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$



### ΧΩΡΙΣ ΣΧΗΜΑ

- 6) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της διαμέσου  $BM$ , το τμήμα  $\Delta M=BM$ .  
Να αποδείξετε ότι  $AB=\Gamma\Delta$ .
- 7) Έστω δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  τα οποία έχουν  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  κι επιπλέον  $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
- 8) Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημεία  $K, \Lambda, M$  πάνω στις πλευρές του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ , αντίστοιχα, έτσι ώστε  $AK = B\Lambda = \Gamma M$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισόπλευρο, επίσης.
- 9) Σε έναν κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ , παίρνουμε τρία διαδοχικά σημεία  $A, B, \Gamma$ . Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της χορδής  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Να δείξετε ότι:
- α) Τα τρίγωνα  $O\Delta B$  και  $O\Delta \Gamma$  είναι ίσα.  
 β) Οι γωνίες  $O\hat{A}\Delta$  και  $O\hat{B}\Delta$  είναι ίσες.

### Υπόδειξη

Θυμίζουμε ότι η μεσοκάθετος μιας οποιασδήποτε χορδής ενός κύκλου διέρχεται υποχρεωτικά από το κέντρο του.

- 10) Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα, τότε να αποδείξετε ότι  $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$  και  $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$ .
- 11) Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι, με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho_1 > \rho_2$ . Αν  $AB$  είναι μια διάμετρος του ενός κύκλου και  $\Gamma\Delta$  μια διάμετρος του άλλου, τότε να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AO\Gamma$  και  $BO\Delta$  είναι ίσα. Στη συνέχεια, να συγκρίνετε τις απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου  $A\Gamma B\Delta$ .

**12)** Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ :

- α) το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διάμεσος, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .
- β) το ύψος του  $A\Delta$  είναι και διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ , τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, με βάση  $B\Gamma$ .

**13)** Στις ίσες πλευρές  $AB, A\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$ , παίρνουμε αντίστοιχα σημεία  $E, \Delta$  τέτοια, ώστε  $AE = A\Delta$ . Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής των  $B\Delta$  και  $E\Gamma$ , τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**14)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και τυχαίο σημείο  $K$ , της πλευράς  $AB$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = KB$ . Ονομάζουμε  $M$  το σημείο, στο οποίο η  $K\Delta$  τέμνει τη βάση  $B\Gamma$ . Τέλος, προεκτείνουμε τη βάση  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $B$ ) κατά τμήμα  $BE = M\Gamma$ .

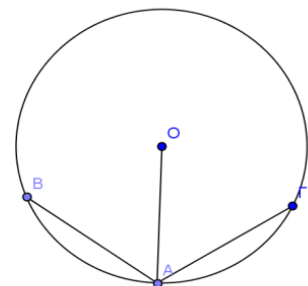
- α) Να δείξετε ότι  $KE = M\Delta$  και  $\hat{K\epsilon B} = \hat{\Gamma M \Delta}$ .
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $KEM$  είναι ισοσκελές.
- γ) Να δείξετε ότι  $KM = M\Delta$ .

**ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 2**

### ΜΕ ΣΧΗΜΑ

**15)** Αν  $O$  το κέντρο του κύκλου του διπλανού σχήματος και  $AB=A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι :

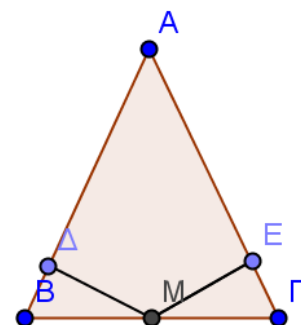
- α) η  $AO$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{BA\Gamma}$
- β) η  $AO$  είναι μεσοκάθετος της χορδής  $B\Gamma$



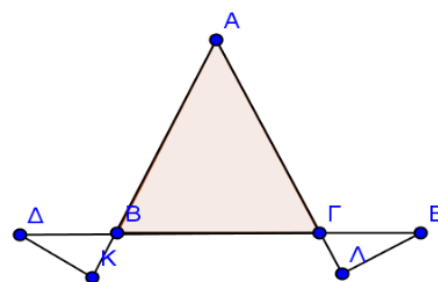
**16)** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M$  το μέσο της βάσης του  $B\Gamma$ .

Αν  $M\Delta \perp AB$  και  $ME \perp A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι :

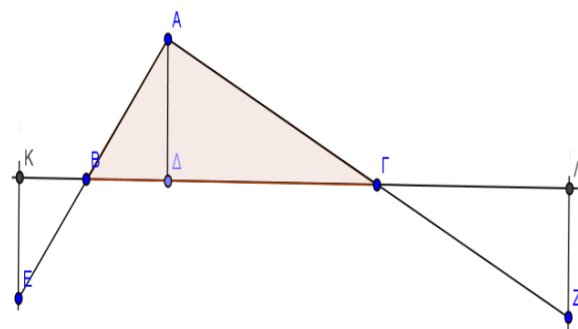
- α)  $M\Delta = ME$
- β) η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta M E}$



- 17)** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφή το  $A$ ,  $B\Delta = \Gamma E$  και  $\Delta K \perp AB$ ,  $E\Lambda \perp A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα  $\Delta$  και  $E$  ισαπέχουν από τις  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα



- 18)** Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Αν  $BE = AB$ ,  $\Gamma Z = A\Gamma$  και  $E\kappa \perp B\Gamma$ ,  $Z\Lambda \perp B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι :
- $E\kappa = A\Delta$
  - Τα σημεία  $E$  και  $Z$  ισαπέχουν από τη  $B\Gamma$



### ΧΩΡΙΣ ΣΧΗΜΑ

- 19)** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AM$  η διάμεσός του .  
Να αποδείξετε ότι οι κορυφές  $B, \Gamma$  ισαπέχουν από την  $AM$
- 20)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το μέσο  $M$  της βάσης  $B\Gamma$ .  
α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις  $M\kappa$  και  $M\Lambda$ , του σημείου  $M$  από τις ίσες πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , είναι ίσες.  
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\kappa\Lambda$  είναι ισοσκελές.
- 21)** Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  και  $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
- 22)** Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$  και  $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.
- 23)** Σε κύκλο με κέντρο  $O$ , φέρνουμε τη διάμετρο  $AB$  και τις ίσες χορδές  $A\Gamma, B\Delta$ .  
Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .
- 24)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $M$  το μέσο της υποτεινουσας  $B\Gamma$ .  
Από το  $M$  φέρνουμε τις κάθετες  $ME$  και  $M\Delta$ , προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma\Delta M$  και  $MEB$  είναι ίσα.

## 1.2 ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

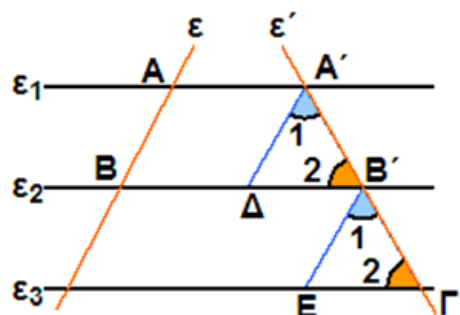
### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Εισαγωγή με κάποια βασικά θεωρήματα.
- 2) Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε  $n$  ίσα τμήματα
- 3) Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

### 2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

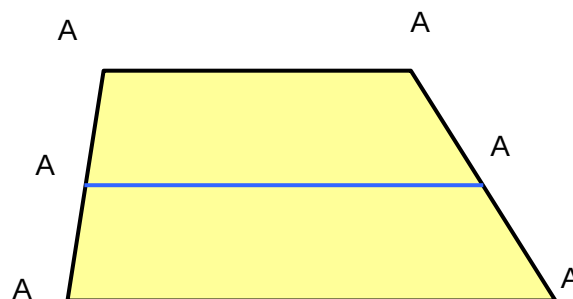
#### ΘΕΩΡΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία που τις τέμνει.



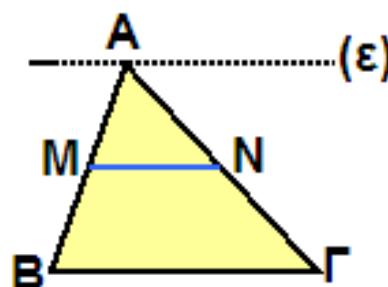
#### ΘΕΩΡΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), η παράλληλη από το μέσο της ΑΔ προς τις βάσεις, διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.



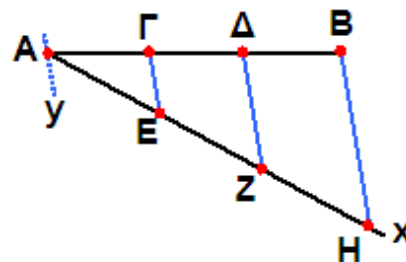
#### ΘΕΩΡΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.



**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**

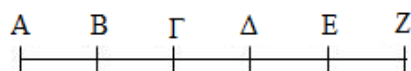
Από το σημείο Α φέρουμε μια τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ. Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε ΖΔ, ΕΓ, Αγ παράλληλες προς τη ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ. Άρα έχουμε  $ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ$

**Σχόλιο**

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ευθύγραμμο ΑΒ σε 4, 5, 6,..., ν ίσα τμήματα.

**3<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΟΡΙΣΜΟΣ**

Λόγος δύο τμημάτων είναι ο αριθμός που δηλώνει πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το ένα τμήμα από το άλλο. Εκφράζεται με το πηλίκο της διαίρεσης των

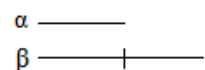


Το ΑΔ είναι τριπλάσιο του ΑΒ, δηλαδή  $ΑΔ = 3ΑΒ$  ή  $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = 3$  ή  $\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{1}{3}$ .

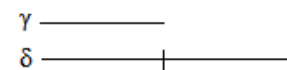
Το ΑΓ αποτελείται από 2 τμήματα, ενώ το ΑΖ από 5. Άρα  $\frac{ΑΓ}{ΑΖ} = \frac{2}{5}$  ή  $\frac{ΑΖ}{ΑΓ} = \frac{5}{2}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Αναλογία λέγεται η ισότητα δύο λόγων, (κλασμάτων).



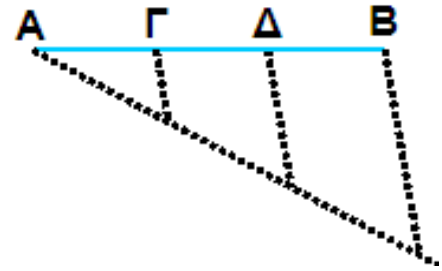
Το α είναι το μισό του β. Άρα  $\frac{α}{β} = \frac{1}{2}$



Το γ είναι το μισό του δ. Άρα  $\frac{γ}{δ} = \frac{1}{2}$ .

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ**

Ο λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ συμβολίζεται  $\frac{\Gamma\Delta}{\text{ΑΒ}}$  και είναι ο αριθμός λ, για τον οποίο ισχύει  $\Gamma\Delta = \lambda \cdot \text{ΑΒ}$

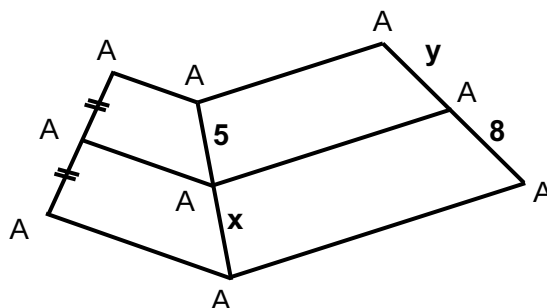


Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

**ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ**

|                                                                                                                                            |                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.                                                       | Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$                                                                    |
| Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.                                    | Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ |
| Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών. | Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$         |

**Παράδειγμα 11ο :** Αν δοθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, να το διαιρέσετε σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

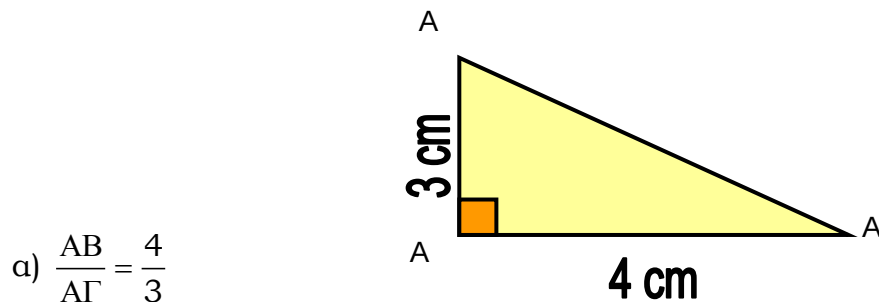
**Λύση**

Γράφουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία Αχ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη 5 ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  $AK = ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΡ$

Ενώνουμε το Ρ με το Β και από τα Κ, Λ, Μ, Ν φέρουμε τις παράλληλες προς την ΒΡ, οι οποίες τέμνουν το ΑΒ στα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Έτσι, το ΑΒ θα έχει διαιρεθεί σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα  $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΒ$

**Παράδειγμα 12ο :** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος να βρείτε τους λόγους: (α)  $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$  (β)  $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}$  (γ)  $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$

### Λύση



α)  $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{4}{3}$

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την υποτείνουσα ΒΓ:

$$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow ΒΓ^2 = 9 + 16 \Rightarrow ΒΓ^2 = 25 \Rightarrow ΒΓ = \sqrt{25} \Rightarrow ΒΓ = 5 \text{ cm}$$

Συνεπώς  $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{5}{4}$

γ)  $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$

**Παράδειγμα 13ο :** Στο παρακάτω σχήμα είναι:  $ΑΒ // ΔΕ // ΗΘ$  και  $ΒΓ // ΕΖ // ΘΙ$ . Αν  $ΑΔ = ΔΗ$ , να υπολογίσετε το x και το y

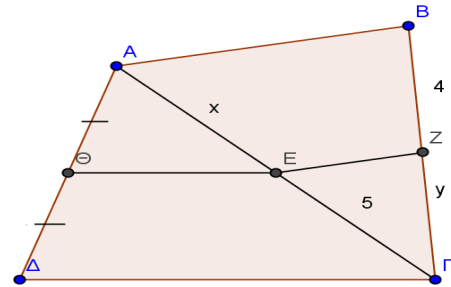
### Λύση

Το Δ είναι μέσο της ΑΒ και  $ΑΒ // ΔΕ // ΗΘ$  άρα το Ε είναι μέσο της ΒΘ. Συνεπώς  $x = 5$ . Με παρόμοια λογική  $y = 8$ .

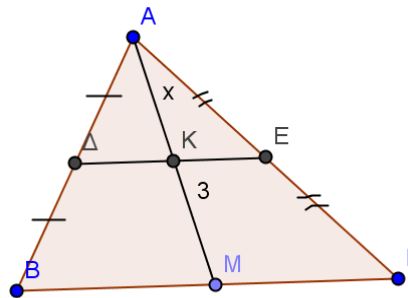


## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

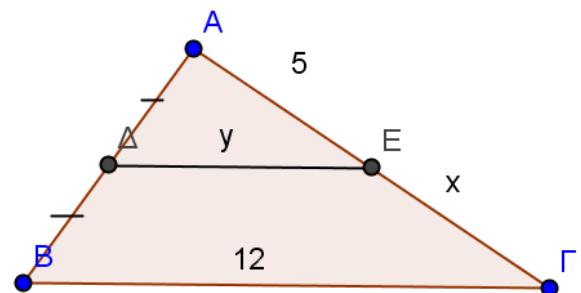
- 25) Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  και είναι  $ΕΖ // ΑΒ$  και  $ΕΘ // ΓΔ$ .  
Να υπολογίσετε το  $x$  και το  $y$



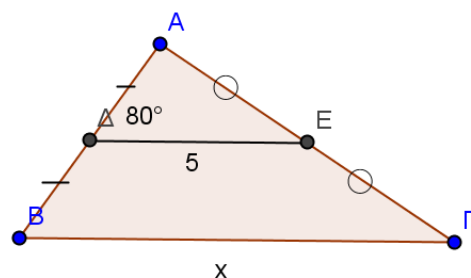
- 26) Στο διπλανό σχήμα ,  
να υπολογίσετε το  $x$



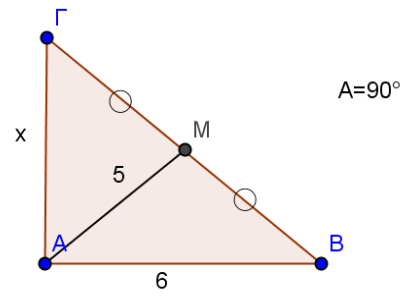
- 27) Στο διπλανό σχήμα είναι  $\hat{B} = \hat{A\hat{D}E}$ . Να υπολογίσετε το  $x$  και  $y$



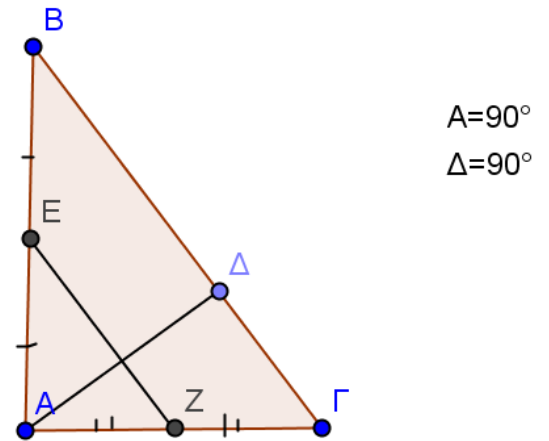
- 28) Στο διπλανό σχήμα , να υπολογίσετε τη γωνία B και το  $x$



- 29)** Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το  $x$



- 30)** Στο διπλανό σχήμα είναι  $AB=6$  και  $AG=12$ . Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου  $\Delta EZ$



### 1.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

#### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Το Θεώρημα του Θαλή στις αναλογίες

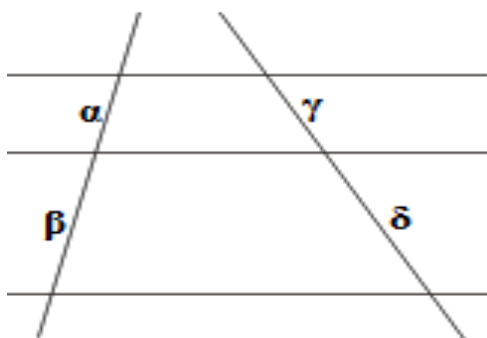
#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\gamma$  είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta$ ,  $\delta$ , όταν ισχύει  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  και η αυτή καλείται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ .

Επιπλέον τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\delta$  ονομάζονται άκροι όροι, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta$ ,  $\gamma$  ονομάζονται μέσοι όροι της αναλογίας.

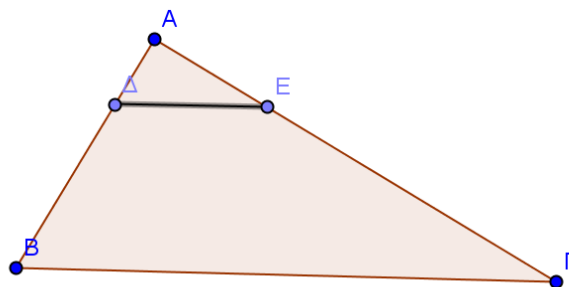
#### ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες, τότε τα τμήματα της μιας είναι ανάλογα με τα τμήματα της άλλης, δηλαδή :  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$



#### ΕΦΑΡΜΟΓΗ

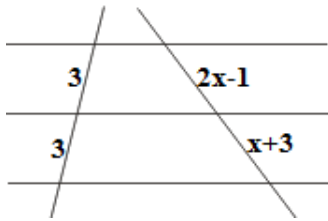
Έστω τα σημεία  $\Delta$ ,  $\text{Ε}$  των πλευρών  $\text{ΑΒ}$ ,  $\text{ΑΓ}$  αντιστοίχως του τριγώνου  $\text{ΑΒΓ}$



Αν  $\text{ΔΕ} \parallel \text{ΒΓ}$  τότε  $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$  και ανάποδα αν  $\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}} = \frac{\text{ΑΕ}}{\text{ΕΓ}}$  τότε  $\text{ΔΕ} \parallel \text{ΒΓ}$

**Παράδειγμα 14ο :** Να υπολογίσετε το  $x$

**Λύση**



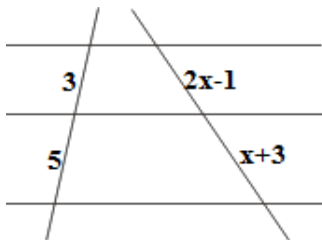
Σύμφωνα με το Θ.Θ. (Θεώρημα Θαλή) πρέπει  $\frac{3}{3} = \frac{2x-1}{x+3}$ .

Άρα  $2x-1=x+3$

ή  $x=4$ .

**Παράδειγμα 15ο :** Να υπολογίσετε το  $x$

**Λύση**



Σύμφωνα με το Θ.Θ. πρέπει  $\frac{3}{5} = \frac{2x-1}{x+3}$ .

Άρα  $5(2x-1)=3(x+3)$

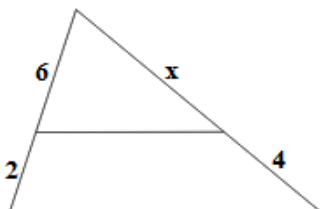
ή  $10x-5=3x+9$

ή  $7x=14$

ή  $x=2$

**Παράδειγμα 16ο :** Να υπολογίσετε το  $x$

**Λύση**



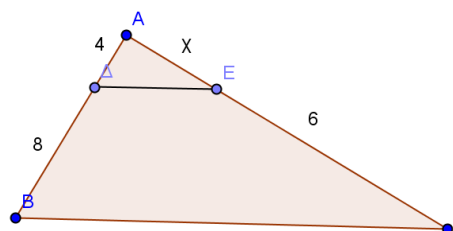
Σύμφωνα με το Θ.Θ. πρέπει  $\frac{6}{2} = \frac{x}{4}$ .

Άρα  $x=12$ .

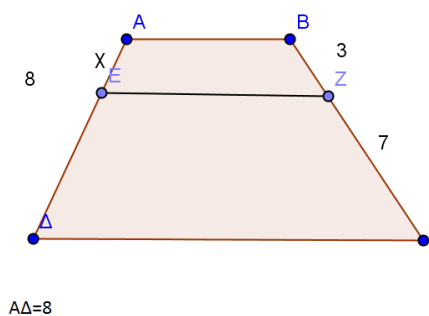
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 31)** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

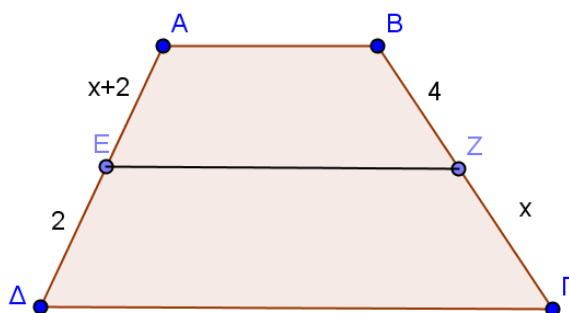
Να υπολογίσετε το  $x$ .



- 32)** Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  η  $EZ$  είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το  $x$ .

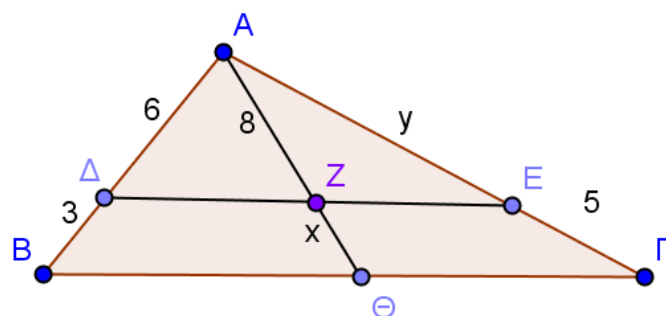


- 33)** Στο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  η  $EZ$  είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το  $x$ .



- 34)** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\Delta E \parallel B\Gamma$ .

Να υπολογίσετε τα  $x$  και  $y$ .



## 1.5 ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Όμοια πολύγωνα βασικές έννοιες και ορισμοί
- 2) Όμοια τρίγωνα

### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο **πολύγωνα** λέγονται **όμοια**, όταν το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες και συμβολίζονται  $\Pi \approx \Pi'$ .

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Ομόλογες πλευρές** δύο όμοιων πολυγώνων ονομάζονται δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Λόγος ομοιότητας** δύο όμοιων πολυγώνων ονομάζεται ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών.

#### ΟΡΙΣΜΟΣ

**Κλίμακα** ενός χάρτη ονομάζουμε τον λόγο της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση.

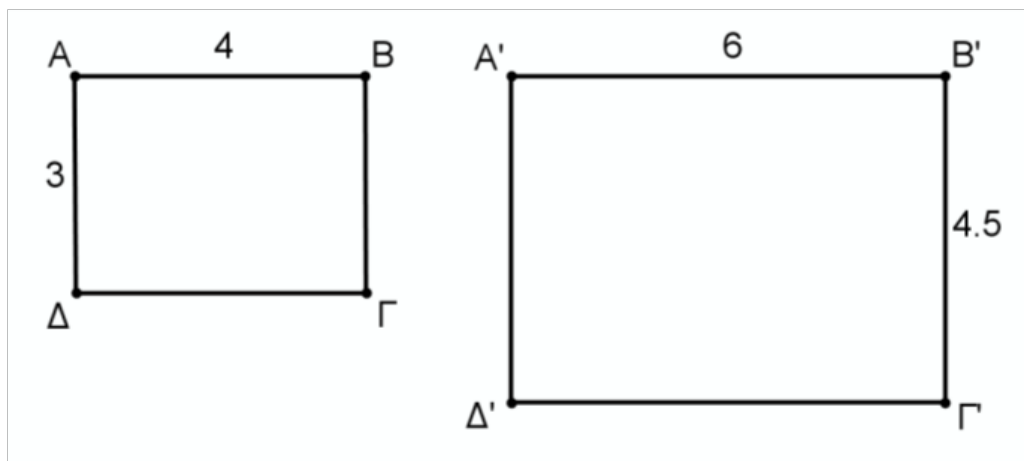
### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Ορισμένες βασικές προτάσεις που προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων

- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους
- Δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.
- Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

**Παράδειγμα 17ο :** Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 3 cm και 4 cm, ενώ οι διαστάσεις ενός άλλου ορθογωνίου είναι 4,5 cm και 6 cm. Να αποδείξετε ότι τα δύο ορθογώνια είναι όμοια.

### Λύση



Οι γωνίες των δύο ορθογωνίων είναι ορθές και επομένως έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Ο λόγος των διαστάσεων 4 cm και 6 cm είναι  $\frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{2}{3}$ .

Ομοίως, ο λόγος των διαστάσεων 3 cm και 4,5 cm είναι  $\frac{3 \text{ cm}}{4,5 \text{ cm}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

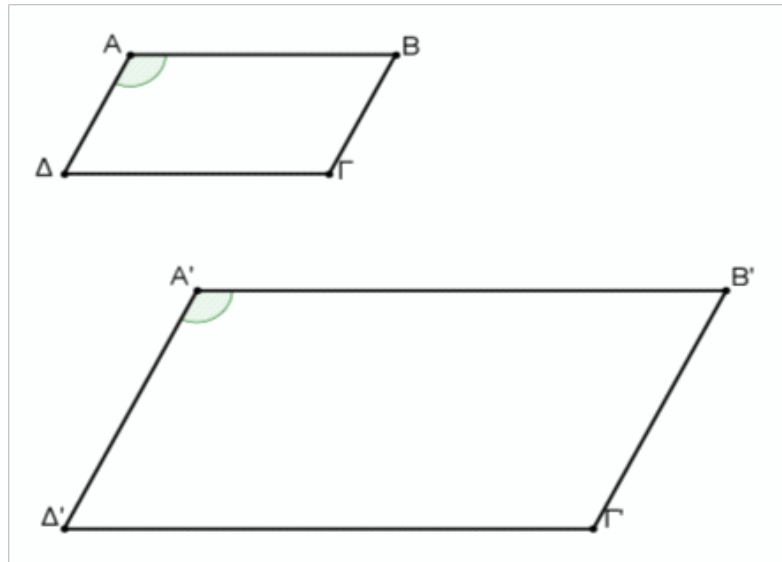
Επομένως, ισχύει  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \frac{2}{3}$  δηλαδή τα δύο ορθογώνια έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι, τα δύο ορθογώνια έχουν πλευρές ανάλογες και γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

**Παράδειγμα 18ο :** Αν σε δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' ισχύει  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$  να αποδείξετε ότι είναι όμοια.

### Λύση

Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες,



Οπότε η αναλογία  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'}$ , γράφεται και  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$  που σημαίνει ότι τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν πλευρές ανάλογες.

Οι απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Έτσι, εκτός από την ισότητα  $\hat{A} = \hat{A}'$ , έχουμε και την  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ .

Οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$ , ως εντός και επί τα αυτά, είναι παραπληρωματικές.

Επομένως,  $\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - \hat{A}' = \hat{B}'$ , οπότε και  $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}'$ .

Άρα, τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες κι επομένως είναι όμοια.



**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2**

- 26)** Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο:  
α) Ερωτήσεις κατανόησης 1-4, σελ. 217, 218  
β) Ασκήσεις 1-3, 6, σελ. 218, 219
- 27)** Δίνονται τα ορθογώνια ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ. Να τα εξετάσετε ως προς την ομοιότητα, και αν είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας στις παρακάτω περιπτώσεις:  
α) ΑΒ=14 cm, ΑΔ=14 cm, ΚΛ= 7 cm, ΚΜ=4 cm  
β) ΑΒ=16 cm, ΑΔ=10 cm, ΚΛ= 9 cm, ΚΜ=6 cm
- 28)** Δίνονται τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ. Να τα εξετάσετε ως προς την ομοιότητα, και αν είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας στις παρακάτω περιπτώσεις:  
α) ΑΒ=5 cm, ΑΔ=7 cm, ΚΛ= 15 cm, ΚΜ=21 cm και Α=Κ=100°  
β) ΑΒ=6 cm, ΑΔ=8 cm, ΚΛ= 3 cm, ΚΜ=4 cm και Α=Λ=110°
- 29)** Δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{3}{5}$ . Αν η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι ίση με 36 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΚΛΜΝ.
- 30)** Αν τα τραπέζια ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{2}{3}$ , να υπολογιστούν τα μήκη α, β, γ, x και y.
- 31)** Αν τα τραπέζια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ είναι όμοια, να υπολογίσετε το μήκος x.

**2<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ****ΟΡΙΣΜΟΣ**

Δύο τρίγωνα λέγονται όμοια όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ**

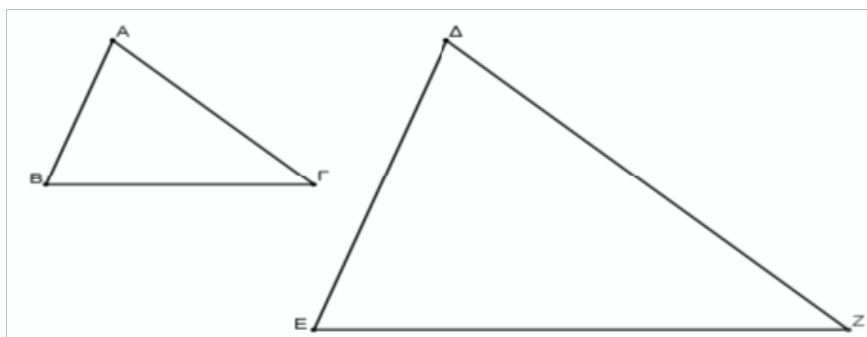
Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.

**ΘΕΩΡΗΜΑ**

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

**ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑΣ ΙΣΩΝ ΛΟΓΩΝ ΣΤΑ ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ**

Έστω ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.



Για τη δημιουργία των ίσων λόγων ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

**(1<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ)**

Βρίσκουμε τις ίσες γωνίες των δύο τριγώνων. Εδώ είναι  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .

**(2<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ)**

Γράφουμε τρία ίσα κλάσματα τα οποία έχουν ως αριθμητές τις πλευρές του πρώτου τριγώνου. Εδώ έχουμε  $\frac{AB}{\dots} = \frac{B\Gamma}{\dots} = \frac{\Gamma A}{\dots}$ .

**(3<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ)**

Συμπληρώνουμε τους παρονομαστές με βάση τα εξής:

- η πλευρά AB είναι απέναντι από  $\hat{\Gamma}$
  - η γωνία  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου ABΓ είναι ίση με τη γωνία  $\hat{Z}$  του τριγώνου ΔΕΖ
  - απέναντι από τη γωνία  $\hat{Z}$  του τριγώνου ΔΕΖ βρίσκεται η πλευρά ΔΕ
- Άρα ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος είναι το ΔΕ.

Σχόλια

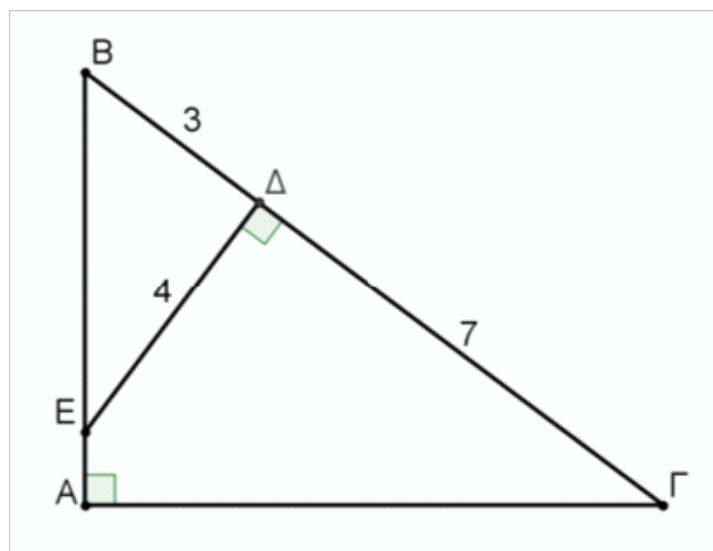
1. **Προσοχή!!!** σε κάθε κλάσμα οι όροι του είναι πλευρές που βρίσκονται υποχρεωτικά απέναντι από ίσες γωνίες.
2. Ένας πρακτικός τρόπος για τον υπολογισμό των ίσων λόγων (εκτός από αυτόν που αναφέραμε παραπάνω) είναι ο παρακάτω.
  - Προσδιορίζουμε τα όμοια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$ .
  - Αν γωνία  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  και  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ , τότε γράφουμε τα τρίγωνα ως  $AB\Gamma \approx \Delta EZ$ .  

$$\begin{array}{ccc} A & B & \Gamma \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \Delta & E & Z \end{array}$$
  - Οι ίσοι λόγοι δημιουργούνται παίρνοντας δύο γράμματα από την πρώτη σειρά και τα αντίστοιχά τους από τη δεύτερη. Έτσι, προκύπτει η αναλογία  

$$\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$$

**Παράδειγμα 19ο :** Από σημείο  $\Delta$  της υποτείνουσας  $B\Gamma$  ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε την κάθετη στη  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .

- α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Delta E$  είναι όμοια.
- β) Αν  $B\Delta = 3\text{ cm}$ ,  $\Delta\Gamma = 7\text{ cm}$  και  $\Delta E = 4\text{ cm}$ , να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$  και του τμήματος  $BE$ .

Λύση

α) Συγκρίνω ως προς την ομοιότητα τα τρίγωνα  $\triangle \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  και  $\triangle \hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$ :

1.  $\hat{A} = \hat{\Delta}$  (ορθές και οι δύο)

2.  $\hat{B} = \hat{B}$  (κοινή γωνία)

Οπότε  $\triangle \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx \triangle \hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$  (1)

- Γράφω πρώτα τα γράμματα A, B όπως έγραψα στη σύγκριση κάτω από το τρίγωνο  $\triangle \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$  και μετά το γράμμα Γ που περισσεύει από τις κορυφές του.
- Μετά γράφω το σύμβολο της ομοιότητας  $\approx$ .
- Τέλος γράφω τα γράμματα Δ, B όπως έγραψα στη σύγκριση κάτω από το τρίγωνο  $\triangle \hat{B}\hat{\Delta}\hat{E}$  και μετά το γράμμα E που περισσεύει από τις κορυφές του.

β) Η πλευρά  $B\Gamma = 3 + 7$  συνεπώς  $B\Gamma = 10$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $B\Delta E$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) από το Πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει:

$$BE^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow BE^2 = 9 + 16 \rightarrow BE^2 = 25 \rightarrow BE = \sqrt{25} \rightarrow BE = 5$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει η αναλογία  $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{A\Gamma}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{BE}$

Συνεπώς:  $\frac{AB}{3} = \frac{A\Gamma}{4} = \frac{10}{BE}$  (2)

Έτσι η σχέση (2) γίνεται:  $\frac{AB}{3} = \frac{A\Gamma}{4} = \frac{10}{5}$

Οπότε:

$$\frac{AB}{3} = \frac{10}{5} \quad \text{και} \quad \frac{A\Gamma}{4} = \frac{10}{5}$$

$$5AB = 3 \cdot 10 \quad 5A\Gamma = 4 \cdot 10$$

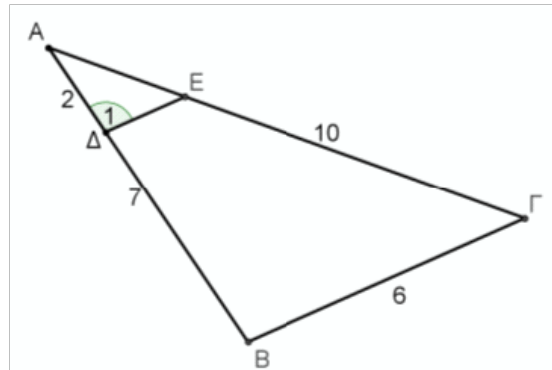
$$5AB = 30 \quad 5A\Gamma = 40$$

$$\frac{5AB}{5} = \frac{30}{5} \quad \frac{5A\Gamma}{5} = \frac{40}{5}$$

$$AB = 6 \quad A\Gamma = 8$$

**Παράδειγμα 20ο :** Αν  $AB=7$  cm,  $AG=10$  cm,  $BΓ = 6$  cm,  $ΑΔ = 2$  cm και  $ΔΕ // ΒΓ$ , να υπολογιστούν τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων  $ΑΕ$  και  $ΔΕ$ .

### Λύση



Συγκρίνω ως προς την ομοιότητα τα τρίγωνα  $\hat{A}\hat{\Delta}E$  και  $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ :

1.  $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}$  ( $ΔΕ // ΒΓ$ , εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη)
2.  $\hat{A} = \hat{A}$  (κοινή γωνία)

Οπότε  $\hat{A}\hat{\Delta}E \approx \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$

$$\text{Επομένως } \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

$$\text{Δηλαδή } \frac{2}{7} = \frac{AE}{10} = \frac{\Delta E}{6}$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{2}{7} = \frac{AE}{10} \quad \text{και} \quad \frac{2}{7} = \frac{\Delta E}{6}$$

$$7AE = 2 \cdot 10$$

$$7\Delta E = 2 \cdot 6$$

$$7AE = 20$$

$$7\Delta E = 12$$

$$AE = \frac{20}{7}$$

$$\Delta E = \frac{12}{9}$$

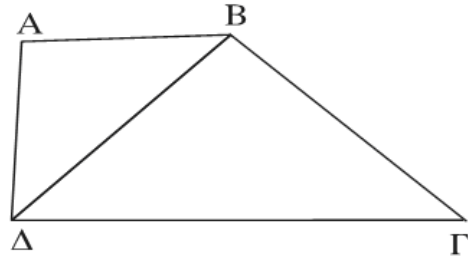
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΜΕΡΟΣ 2 ΑΠΟ 2**

- 32)** Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο  
α) Ερωτήσεις κατανόησης 1-5 σελ. 221, 222  
β) Ασκήσεις 1-2, 4-8 σελ. 223, 224
- 33)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ) και το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια  
α)  $AB\Delta$ ,  $AB\Gamma$   
β)  $AB\Gamma$ ,  $AD\Gamma$   
γ)  $AB\Delta$ ,  $AD\Gamma$   
Σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους ίσους λόγους των ομολόγων πλευρών.
- 34)** Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $DEZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{BA}{ED} = \frac{2}{5}$ . Αν είναι  $AB=8\text{cm}$ ,  $B\Gamma=10\text{cm}$  και  $GA=12\text{cm}$  να υπολογίσετε τις πλευρές του  $DEZ$ .
- 35)** Από τυχαίο σημείο  $K$  της υποτεινούσας  $B\Gamma$  ενός ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ , φέρνουμε κάθετη  $K\Lambda$  στη  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AG$  στο σημείο  $\Lambda$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $K\Lambda\Gamma$  είναι όμοια  
β)  $AB \cdot \Gamma\Lambda = \Lambda K \cdot B\Gamma$
- 36)** Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), το σημείο τομής  $O$  των διαγωνίων και η παράλληλη από το  $O$  προς τη  $\Gamma\Delta$  που τέμνει τις  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) τα τρίγωνα  $AOE$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι όμοια  
β) τα τρίγωνα  $BOZ$  και  $B\Delta\Gamma$  είναι όμοια  
γ)  $\frac{EA}{A\Delta} = \frac{BZ}{\Gamma B}$   
δ)  $OE=OZ$
- 37)** Να γράψετε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο και να φέρετε τη διχοτόμο της γωνίας. Αν η διχοτόμος τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Lambda$  και την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $K$ , τότε να αποδείξετε ότι:  $\frac{B\Lambda}{A\Lambda} = \frac{K\Lambda}{B\Lambda}$
- 38)** Στις παρακάτω προτάσεις πρέπει να επιλέξετε την σωστή απάντηση.

- Στο σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $B\Gamma\Delta$  είναι όμοια. Αν  $\Delta A = 4$ ,  $\Gamma\Delta = 9$ , τότε η  $B\Delta$  είναι:

(α) 5      (β) 6      (γ)  $5\sqrt{3}$

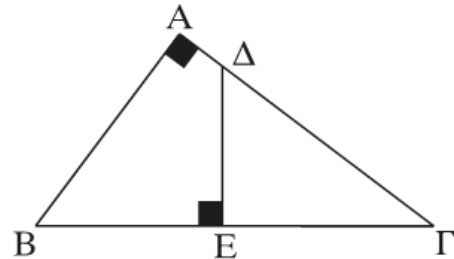
(δ) 8      (ε)  $8 + \sqrt{3}$



- Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ),  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Αν  $AB = 6$ ,  $A\Gamma = 8$  και  $\Delta E = 4$ , τότε το  $E\Gamma$  ισούται με:

(α)  $\frac{16}{3}$       (β)  $\frac{20}{3}$       (γ) 5

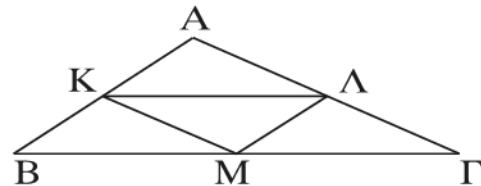
(δ) 8      (ε)  $8 + \sqrt{3}$



- Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει πλευρές με μήκη 12 cm, 8 cm και 6 cm. Το τρίγωνο που έχει κορυφές τα μέσα των πλευρών του  $AB\Gamma$  έχει περίμετρο ίση με:

(α) 20 cm      (β) 18 cm      (γ) 14 cm

(δ) 13 cm      (ε) 10 cm



### 39) Δίνονται οι προτάσεις:

α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

β) Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

γ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

δ) Δύο παραλληλόγραμμα με μια γωνία ίση είναι όμοια.

Ποιες από τις παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς;

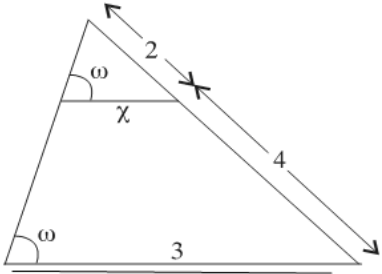
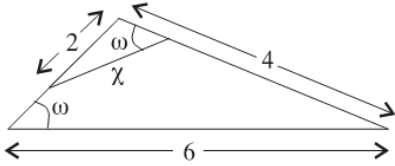
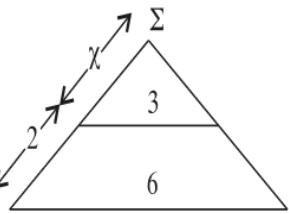
A) όλες      B) η (α) και η (β)      Γ) η (δ)      Δ) η (α) και η (γ)      E) η (β)

### 40) Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε το ύψος του $B\Delta$ . Έστω M, K τα μέσα των $B\Gamma$ και $BA$ αντίστοιχα.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $K\Delta M$  είναι όμοια και βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.

β) Γράψτε τις ισότητες των γωνιών των δύο τριγώνων που προκύπτουν από την ομοιότητα τους.

- 41) Η τιμή του  $x$  που εμφανίζεται σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α), για κάθε σχήμα, δίνεται με αριθμό στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με γραμμές τα αντίστοιχα σχήματα με τους αντίστοιχους αριθμούς.

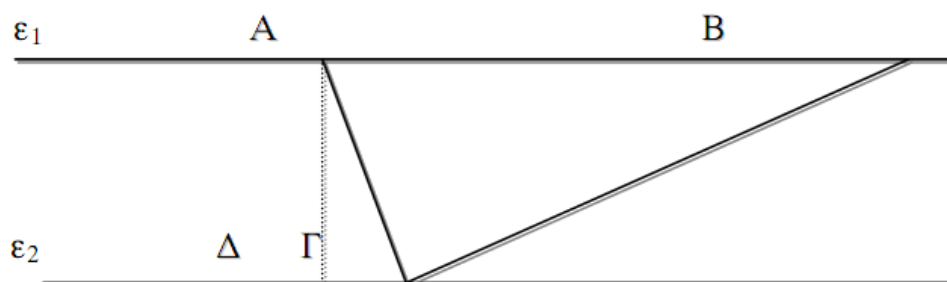
| Στήλη (Α)                                                                          | Στήλη (Β) |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
|   | 1         |
|   | 1,5       |
|  | 2         |
|                                                                                    | 3         |
|                                                                                    | 4         |
|                                                                                    | 4,5       |

- 42) ο παρακάτω σχήμα παριστάνει τμήμα ενός δρόμου που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ). Θέλουμε να χρωματίσουμε το τριγωνικό τμήμα του δρόμου ΑΒΓ στο οποίο οι πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι κάθετες και η ΑΓ είναι 3-πλάσια του ΔΓ.

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι όμοια.

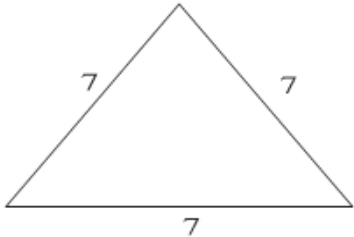
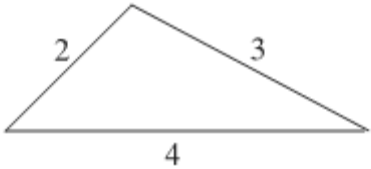
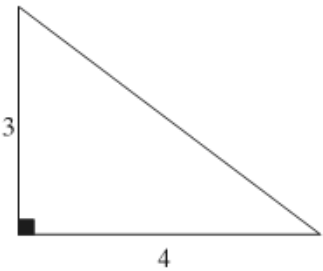
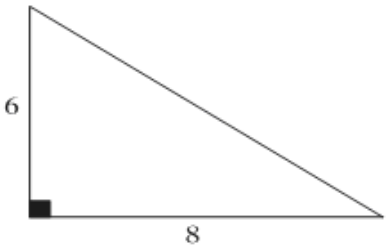
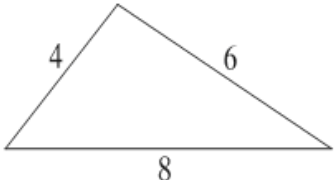
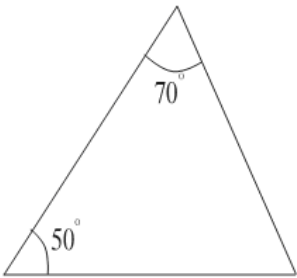
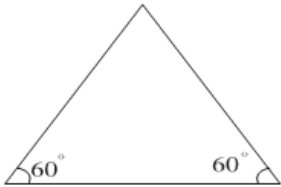
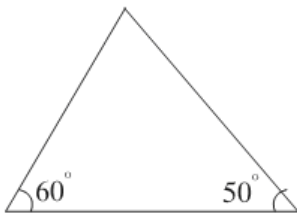
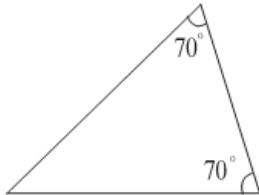
β) Βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.

γ) Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος που θα χρωματίσουμε γνωρίζοντας ότι το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι  $10 \text{ m}^2$ .





- 43)** Κάθε τρίγωνο της πρώτης στήλης είναι όμοιο με ένα τρίγωνο της δεύτερης στήλης. Συνδέστε με μία γραμμή τα όμοια τρίγωνα:

| Στήλη (Α)                                                                           | Στήλη (Β)                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |
|   |    |
|  |                                                                                      |
|  |  |
|  |  |

- 44)** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AD$  το ύψος του προς την υποτείνουσά του.  
α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $AD\Gamma$  και  $ADB$  είναι όμοια.  
β) Αν  $BD = 4\text{ cm}$ ,  $D\Gamma = 9\text{ cm}$  τότε το ύψος του τριγώνου  $AD$  θα είναι:  
(1)  $36\text{ cm}$       (2)  $6\text{ cm}$       (3)  $18\text{ cm}$       (4)  $8\text{ cm}$   
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.  
γ) Αν  $BD = 2\text{ cm}$  και  $AD = 6\text{ cm}$  υπολογίστε τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- 45)** Απαντήστε γράφοντας Σ αν είναι σωστή και Λ αν είναι λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:  
➤ Δύο ίσα τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια. ....  
➤ Δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα. ....  
➤ Το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο όμοια τρίγωνα. ....
- 46)** Ποια από τα παρακάτω επίπεδα σχήματα είναι πάντοτε όμοια; Γράψτε, εφ' όσον είναι όμοια, το λόγο ομοιότητας τους.  
➤ Ορθογώνια  
➤ Κύκλοι  
➤ Ισοπλευρά τρίγωνα  
➤ Παραλληλόγραμμα  
➤ Κανονικά πολύγωνα
- 47)** Σ' ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$   $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Δείξτε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $K\Lambda M$  είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδό του  $K\Lambda M$  αν το εμβαδόν του  $AB\Gamma$  είναι  $20\text{ cm}^2$ .
- 48)** Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι  $4$ ,  $5$ ,  $6\text{ cm}$  αντίστοιχα. Σε ένα όμοιο τρίγωνο η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη είναι  $4\text{ cm}$ . Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του δεύτερου τριγώνου καθώς και το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων.
- 49)** Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διπλάσιες από τις κάθετες πλευρές ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου. Να δείξετε ότι τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.
- 50)** Κάποια χρονική στιγμή η σκιά ενός δένδρου στο οριζόντιο έδαφος είναι  $14\text{ m}$ . Την ίδια χρονική στιγμή ένα κατακόρυφο ραβδί μήκους  $4\text{ m}$  έχει σκιά  $7\text{ m}$ . Να υπολογίσετε το ύψος του δένδρου.

- 51)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  οι κάθετες πλευρές του είναι  $AB = 9\text{ cm}$ ,  $A\Gamma = \frac{1}{3}AB$  και  $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ .
- α) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $AD$ ,  $AE$ ,  $DE$  και  $B\Gamma$ .
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ADE$  είναι όμοια.
- γ) Οι ευθείες  $DE$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες.
- 52)** Από σημείο  $\Delta$  της υποτεινούσας  $B\Gamma$  ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  που τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .
- α) Να δείξετε ότι τα  $AB\Gamma$  και  $BDE$  είναι όμοια.
- β) Αν  $BD = 3\text{ cm}$ ,  $\Delta\Gamma = 7\text{ cm}$ ,  $DE = 4\text{ cm}$  να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και το μήκος του  $BE$ .
- 53)** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 5\text{ cm}$  και  $A\Gamma = 7\text{ cm}$ . Στη πλευρά  $AB$  παίρνουμε το  $\Delta$  ώστε  $A\Delta = \frac{4}{5}AB$ . Να βρείτε το σημείο  $E$  της  $A\Gamma$  για το οποίο είναι  $DE \parallel B\Gamma$ .
- 54)** Να γράψετε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να δείξετε ότι:
- α) τα τρίγωνα  $O\Delta\Delta$  και  $O\Gamma\Delta$  είναι όμοια
- β) να γράψετε τους ίσους λόγους.
- 55)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), φέρνουμε το ύψος  $AK$  και από το  $K$  φέρνουμε  $KL$  τμήμα κάθετο στην  $AB$ . Να δείξετε ότι:
- α) τα τρίγωνα  $AK\Gamma$ ,  $ALK$  είναι όμοια,
- β) να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα.

## **1.6 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ**

Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών και ο λόγος των όγκων δύο ομοίων σχημάτων;

- Ο λόγος των εμβαδών ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.
- Ο λόγος των όγκων ισούται με τον κύβο του λόγου ομοιότητας.

Ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο

Ερωτήσεις κατανόησης 1-3, σελ. 227

Ασκήσεις 1-10, σελ. 227, 228

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 56)** Ένα τρίγωνο έχει βάση 8 cm και εμβαδόν  $20 \text{ cm}^2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός άλλου τριγώνου που είναι όμοιο με το ΑΒΓ και έχει βάση 4 cm.
- 57)** Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου έχουν μήκη 15, 3, 9, 10 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις πλευρές ενός όμοιου τετραπλεύρου που έχει τετραπλάσιο εμβαδόν.
- 58)** Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:  
(α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.  
(β) Το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του ΑΒΓ.
- 59)** Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι  $AB = 3 \text{ cm}$  και  $AG = 5 \text{ cm}$ . Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ  
(α) Να αποδείξετε ότι τα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.  
(β) Αν το τρίγωνο ΑΒΔ έχει εμβαδόν  $9 \text{ cm}^2$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΓΔ.
- 60)** Δύο όμοια πολύγωνα έχουν εμβαδά  $15 \text{ cm}^2$  και  $135 \text{ cm}^2$ . Να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητας τους.
- 61)** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τραπέζιο ΒΔΕΓ έχει τριπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο ΑΔΕ.

## 5.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

#### 1) Ορισμοί τριγωνομετρικών αριθμών

#### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

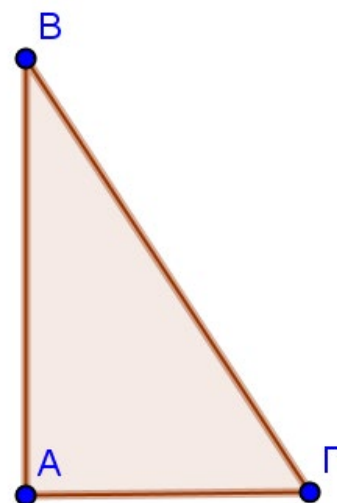
#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο ορίζονται ως εξής :

$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκεείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$



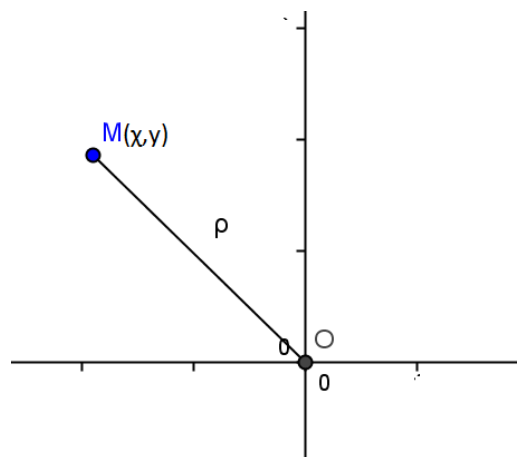
#### ΟΡΙΣΜΟΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας  $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$  σε συστημα αξόνων ορίζονται ως εξής :

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση του M από το O}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{τεταγμένη του M}} = \frac{y}{x}$$



$$\text{Όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

1) Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

|            | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°  | 180° |
|------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|------|------|
| <b>ημ</b>  | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1    | 0    |
| <b>συν</b> | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0    | -1   |
| <b>εφ</b>  | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | Δ.Ο. | 0    |

2) Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας  $\omega$ 

- Αν η γωνία  $\omega$  είναι οξεία τότε όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί  
 $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \epsilon\phi\omega > 0$
- Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία τότε μόνο το ημίτονο είναι θετικό  
 $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$

**Παράδειγμα 1ο :** Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο  $M(-3,4)$  . Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega = \widehat{xOM}$

**Λύση**Σύμφωνα με τυπολόγιο για το  $OM=r$  ισχύει :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Τότε θα ισχύει :

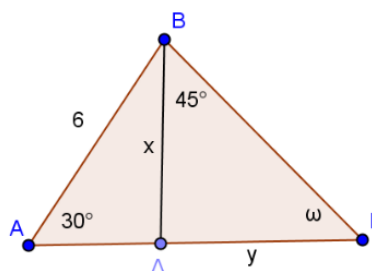
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να υπολογίσετε τα  $x$ ,  $y$  και  $\omega$



- 2) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega = \hat{xOM}$

α)  $M(6,8)$       β)  $M(12,-5)$       γ)  $M(-2,0)$

- 2) Μια ευθεία ( $\epsilon$ ) έχει εξίσωση  $y = -3x$

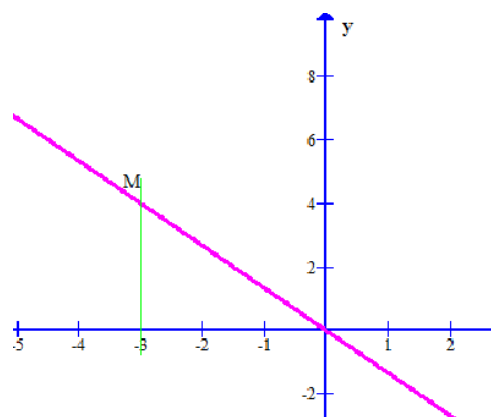
α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ( $\epsilon$ ) και να προσδιορίσετε την τετμημένη ενός σημείου της  $M$  που έχει τεταγμένη 6.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega = \hat{xOM}$

- 3) Στο είναι διπλανό σχήμα  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ .

Αν η τετμημένη του σημείου  $M$  είναι  $-3$  να υπολογίσετε:

- α) Την τεταγμένη του σημείου  $M$   
β) Το  $\eta\mu\omega$  και την  $\epsilon\phi\omega$



- 4) Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία, να αποδείξετε ότι :

- α)  $\eta\mu\omega > \sin\omega$   
β)  $2\epsilon\phi\omega - 3\eta\mu\omega + 5\sin\omega < 0$



## 5.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ

### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

1) Η τριγωνομετρική σχέση μεταξύ παραπληρωματικών γωνιών.

#### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi\omega$$

**Παράδειγμα 2ο :** Να υπολογίσετε την παράσταση:  $\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 60^\circ$ .

#### Λύση

$$\text{Έχουμε: } \eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

**Παράδειγμα 3ο :** Να υπολογίσετε την παράσταση  $A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 135^\circ}{\sigma\upsilon\nu 150^\circ}$

#### Λύση

- $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\epsilon\phi 135^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$

Άρα

$$A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \epsilon\phi 135^\circ}{\sigma\upsilon\nu 150^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3})^2} = -\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

**Παράδειγμα 4ο :** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $5\eta\mu x - 4 = 0$     β)  $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$     γ)  $3\eta\mu x - 6 = 0$ .

**Λύση**

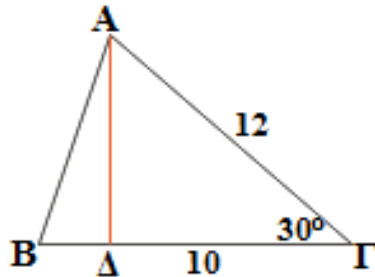
α)  $5\eta\mu x - 4 = 0$ , χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.  
 $5\eta\mu x = 4$ , διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.  
 $\eta\mu x = \frac{4}{5} = 0,8$ . Άρα  $x = 54^\circ$  ή  $x = 126^\circ$ .

β)  $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$   
 $2\sigma\upsilon\nu x = -1$   
 $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ . Άρα  $x = 120^\circ$ .

γ)  $3\eta\mu x - 6 = 0$   
 $3\eta\mu x = 6$   
 $\eta\mu x = 2$ . Η εξίσωση είναι αδύνατη (γιατί;)

**Παράδειγμα 5ο :** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παρακάτω τριγώνου ΑΒΓ.

**Λύση**



Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο :

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}.$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το ύψος.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ:  $\eta\mu\Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$  ή  $\eta\mu 30^\circ = \frac{A\Delta}{12}$  ή  $\frac{1}{2} = \frac{A\Delta}{12}$  άρα  $A\Delta = 6$ .

Επομένως  $E = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 5) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:  
α)  $\eta\mu 150^\circ$ , β)  $\sigma\upsilon\nu 120^\circ$ , γ)  $\epsilon\phi 135^\circ$ , δ)  $\eta\mu 100^\circ$ , ε)  $\epsilon\phi 170^\circ$ , στ)  $\sigma\upsilon\nu 110^\circ$

- 6) Να κάνετε την παρακάτω αντιστοίχιση

| Στήλη Α                          | Στήλη Β                          |
|----------------------------------|----------------------------------|
| α) $\eta\mu 130^\circ$           | 1. $\eta\mu 50^\circ$            |
| β) $\sigma\upsilon\nu 130^\circ$ | 2. $\sigma\upsilon\nu 50^\circ$  |
| γ) $\epsilon\phi 130^\circ$      | 3. $\epsilon\phi 50^\circ$       |
|                                  | 4. $-\eta\mu 50^\circ$           |
|                                  | 5. $-\sigma\upsilon\nu 50^\circ$ |
|                                  | 6. $-\epsilon\phi 50^\circ$      |

|    |  |
|----|--|
| α) |  |
| β) |  |
| γ) |  |

- 7) Αν για τη γωνία  $x$  ισχύει  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις :

α) Αν  $\eta\mu x = \eta\mu 30^\circ$  τότε  $x = \dots$  ή  $x = \dots$

β) Αν  $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 150^\circ$  τότε  $x = \dots$

γ) Αν  $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 130^\circ$  τότε  $x = \dots$

- 8) Να αποδείξετε ότι

α)  $\eta\mu 110^\circ + \sigma\upsilon\nu 80^\circ - \eta\mu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ = 0$

β)  $\eta\mu 25^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 125^\circ + \eta\mu 155^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 55^\circ = 0$

γ)  $2\eta\mu 107^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \eta\mu 73^\circ = 0$

δ)  $\epsilon\phi 130^\circ - \epsilon\phi 150^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ = 0$

### 5.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

#### ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

1) Βασικές σχέσεις τριγωνομετρικών αριθμών μεταξύ τους.

#### 1<sup>ος</sup> ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει :  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

$$\text{Απόδειξη : } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει :  $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

$$\text{Απόδειξη: } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$$

**Προσοχή !!!!**  $\eta\mu^2\omega = (\eta\mu\omega)^2$

**Παράδειγμα 6ο :** Να αποδείξετε ότι:  $(\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 10$

#### Λύση

$$\begin{aligned} (\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 &= \eta\mu^2\omega + 6\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 9\sigma\upsilon\nu^2\omega + 9\eta\mu^2\omega \\ &\quad - 6\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 10\eta\mu^2\omega + 10\sigma\upsilon\nu^2\omega = 10(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 10 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7ο :** Να αποδείξετε ότι  $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 1$ .

#### Λύση

(Αν θέσουμε  $\eta\mu\omega = a$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega = b$  η παραπάνω ισότητα γίνεται  $(a-b)^2 - 2ab$  και μετά τις πράξεις με το ανάπτυγμα  $a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$ )

Το ίδιο θα κάνουμε και τώρα:

$$\begin{aligned} (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega &= \eta\mu^2\omega - 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \\ &= \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = (\text{τώρα μπαίνει...στο παιχνίδι η τριγωνομετρία}) = 1 \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 8ο :** Να αποδείξετε ότι  $\varepsilon\varphi\omega + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

### Λύση

(Όταν στην ισότητα υπάρχει ο όρος  $\varepsilon\varphi\omega$  συνήθως τον μετατρέπουμε σε  $\eta\mu\omega$  και  $\sigma\upsilon\nu\omega$ , σύμφωνα με την δεύτερη ταυτότητα)

Έχουμε:

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\omega + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} &= \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \quad (\text{ομώνυμα}) \\ &= \frac{\eta\mu\omega(1 + \eta\mu\omega)}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 + \eta\mu\omega)} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 + \eta\mu\omega)} = \quad (\text{πράξεις}) \\ &= \frac{\eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 + \eta\mu\omega)} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 + \eta\mu\omega)} = \quad (\text{πράξεις}) \\ &= \frac{\eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 + \eta\mu\omega)} = \frac{\cancel{\eta\mu\omega} + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega(\cancel{1 + \eta\mu\omega})} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}.\end{aligned}$$

**Παράδειγμα 9ο :** Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$

### Λύση

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}.$$

Όμως επειδή η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία  $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$  άρα  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$ .

$$\text{Άρα } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

- 9) Αν για την οξεία γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ , τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .
- 10) Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$ , τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .
- 11) Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{15}$ , τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .
- 12) Αν για την αμβλεία γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{5\epsilon\varphi\omega - 13\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + 13\eta\mu\omega}$
- 13) Να αποδείξετε ότι:
- $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$
  - $(\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega) \cdot (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
- 14) Να αποδείξετε ότι:
- $6\eta\mu^2\omega + 6\sigma\upsilon\nu^2\omega = 6$
  - $\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = \sigma\upsilon\nu\theta$
  - $\sigma\upsilon\nu^3\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$
- 15) Να αποδείξετε ότι :
- $\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$
  - $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$
- Να αποδείξετε ότι :
- $\frac{\eta\mu^2\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$
  - $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \eta\mu\omega$
- 16) Να αποδείξετε ότι
- $\frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$
  - $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\epsilon\varphi\alpha$



## Γ' Μέρος

# Επανάληψη







## **ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

### **1.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ**

Ποιος αριθμός λέγεται ρητός και ποιος άρρητος;

Τι λέγεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού  $a$ ;

Να γράψετε την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό.

Συμπληρώστε τις ιδιότητες των δυνάμεων:

$$\alpha^v \cdot \alpha^u = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^v : \alpha^u = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha^v)^u = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^v \cdot \beta^v = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^v : \beta^v = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^{-v} = \dots\dots\dots$$

Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού  $a$ ;

Να συμπληρώσετε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών:

$$\sqrt{\alpha^2} = \dots\dots\dots$$

$$(\sqrt{\alpha})^2 = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \dots\dots\dots$$

### **1.2 ΜΟΝΩΝΥΜΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ**

Τι λέγεται αριθμητική και τι αλγεβρική παράσταση;

Τι λέγεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;

Τι λέγεται μονώνυμο;

Τι λέγεται συντελεστής και τι κύριο μέρος μονωνύμου;

Τι λέγεται βαθμός μονωνύμου;

Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια και ποια αντίθετα;

### **1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ**

Τι λέγεται πολυώνυμο και ποιος είναι ο βαθμός του;

Τι λέγεται σταθερό πολυώνυμο;

Ποιο είναι το μηδενικό πολυώνυμο;

## 1.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός ενός μονωνύμου με ένα πολυώνυμο;

Πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός δύο πολυωνύμων;

## 1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Τι λέγεται ταυτότητα;

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

## 1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Τι λέγεται παραγοντοποίηση;

## 1.8 ΕΚΠ – ΜΚΔ

Τι λέγεται ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αριθμών και τι μέγιστος κοινός διαιρέτης;

## 2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης δευτέρου βαθμού;

Γράψτε τον τύπο της διακρίνουσας  $\Delta$  της εξίσωσης  $ax^2 + bx + c = 0$  και τις ρίζες της για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας  $\Delta$ .

$\Delta = \dots\dots\dots$

Αν  $\Delta > 0$ , τότε.....

Αν  $\Delta < 0$ , τότε.....

Αν  $\Delta = 0$ , τότε.....

## 3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Να γράψετε την γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης.

Τι λέγεται λύση της εξίσωσης  $ax + by = \gamma$ ;

Πότε ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία;

Ποια η μορφή μιας ευθείας παράλληλης στον άξονα  $x'$  και ποια η μορφή όταν είναι παράλληλη στον  $y'$ ;

### 3.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Πότε ένα ζεύγος  $(x,y)$  λέγεται λύση ενός γραμμικού συστήματος;

Ποια η σχετική θέση δύο ευθειών όταν το σύστημα των εξισώσεών τους:

- α) έχει μοναδική λύση;
- β) είναι αδύνατο;
- γ) είναι αόριστο;

## ΘΕΩΡΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### 1.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ποια τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου και ποια τα δευτερεύοντα;

Ποια τα είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές και ποια τα είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες τους;

Με τι ισούται το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου;

Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα;

Να διατυπώσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

### 1.2 ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνουν 3 παράλληλες ευθείες  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$ . Τι γνωρίζετε για τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τις  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  πάνω στις  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ;

Τι γνωρίζετε για μια ευθεία που διέρχεται από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου και είναι παράλληλη σε μια άλλη πλευρά του;

Τι λέγεται λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος προς ένα άλλο;

Ποιες οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών;

### 1.5 ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

Τι λέγεται λόγος ομοιότητας δύο πολυγώνων;

Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

### 1.6 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ποια η σχέση του λόγου των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων με τον λόγο ομοιότητάς τους;

## 2.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ $\omega$

Ποιο το πρόσημο ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης μιας γωνίας:

- α) οξείας
- β) αμβλείας

Να γράψετε με τι είναι ίσοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  και  $60^\circ$ .

## 2.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Να συμπληρώσετε τις σχέσεις:

- α)  $\eta\mu(180 - \omega) = \dots\dots\dots$
- β)  $\sigma\upsilon\nu(180 - \omega) = \dots\dots\dots$
- γ)  $\epsilon\varphi(180 - \omega) = \dots\dots\dots$

## 2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ

Να συμπληρώσετε τις ισότητες

- α)  $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \dots\dots$
- β)  $\epsilon\varphi\omega = \dots\dots$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

### 1.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

- 1) Να γίνουν οι πράξεις  $-\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - 1\right) - (-1)^5 \cdot \frac{2}{3}$ .
- 2) Να γραφούν σε απλούστερη μορφή οι παραστάσεις:  
α)  $(x^2 \cdot x^{-3})^{-2}$     β)  $(x \cdot x^2 \cdot x^{-3})^{-1} : (x^2 : x^{-2})$
- 3) Να βρείτε την τιμή του θετικού αριθμού  $x$  ώστε να ισχύει η ισότητα  $\sqrt{2x + \sqrt{3 + \sqrt{31 + \sqrt{25}}}} = 3$ .
- 4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\frac{\sqrt{50} - \sqrt{72} + 5\sqrt{2} - \sqrt{32}}{\sqrt{2}}$ .
- 5) Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα, με ρητό παρονομαστή:  
α)  $\frac{2}{3\sqrt{5}}$     β)  $\frac{-3}{1 - \sqrt{2}}$

### 1.2 ΜΟΝΩΝΥΜΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

- 6) Να γίνουν οι πράξεις: α)  $(-2x^2y^3) : (-4x^{-3}y^{-4})$     β)  $(-2x^2y)^2 \cdot (x^{-4}y^3)$

### 1.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ – ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

- 7) Να γράψετε σε πολυωνυμική μορφή τα πολυώνυμα  $P(x) = (x-1)(x+2) + x^3 - 5$  και  $Q(x) = \alpha x(x-2) + \beta x^3 + 3x + \gamma$  και να βρείτε τα  $\alpha, \beta, \gamma$  ώστε  $P(x) = Q(x)$ .
- 8) Δίνονται τα πολυώνυμα  $P(x) = x^2 - x + 1$  και  $Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$ . Να βρείτε τα πολυώνυμα:  
α)  $K(x) = P(x) - 2Q(x) + 3x - 5$   
β)  $\Lambda(x) = (P(x) + Q(x))(x-1) + (P(x) + x)^2$   
γ)  $M(x) = P(-1) + 3Q(2)Q(x) - Q(-1)P(x)$

### 1.4 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

- 9) Να κάνετε τις πράξεις:  
α)  $(x^2 - 2)(x^3 + 2x^2 - x - 1) - (2x^3 - x)$     β)  $-2x(3x^2 + 5) - (x-1)(x+2)(x+1)$
- 10) Δίνεται τρίγωνο με πλευρές  $AB = 2x + 1$ ,  $B\Gamma = 3x + 1$  και  $A\Gamma = 5x - 2$ .  
α) Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει την περίμετρό του.  
β) Αν είναι  $u = x + 2$  το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση  $B\Gamma$ , να βρείτε το πολυώνυμο που εκφράζει το εμβαδό του τριγώνου.

### 1.5 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

- 11)** Να γράψετε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:  
 α)  $(-2x+3)^2$     β)  $(-2x-1)^2$     γ)  $(-x-2)^3$     δ)  $(-2x+1)^3$
- 12)** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:  
 α)  $(2x-3)^2 + (x+1)^2 - 1 = (2x+3)^2 + x^2 - 22x$   
 β)  $(2x-3)(2x+3) - (x-2)(x+2) = 3x^2 - 5$
- 13)** Δίνεται ότι  $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$  και  $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ . Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:  
 α)  $\alpha - \beta$     β)  $\alpha^2 - \beta^2$

### 1.6 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

- 14)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 α)  $x(x-2) - 3x^2(2-x)$     β)  $-x^2 + \frac{9}{4}$     γ)  $3(x-\alpha)^2 - 12\alpha^2$

### 1.8 ΕΚΠ – ΜΚΔ

- 15)** Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ των παραστάσεων  $2(x-1)^2$ ,  $4(x-1)$ ,  $6(x-1)^3$ .

### 1.9 ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- 16)** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 α)  $\frac{(x^2-4)(3x^2+3x)}{(x^2+2x)(x+1)}$     β)  $\frac{(x-2)^2-x^2}{x^2+x}$     γ)  $\frac{x(x+3)-x^2+9}{2(x+3)}$

### 1.10 ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

- 17)** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:  
 α)  $\frac{x^2-5x+6}{2(x^2-4)} : \frac{2x-6}{x+2}$     β)  $\left( \frac{x^2-1}{5x+15} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-x} \right) : \frac{x+5}{x-3}$
- 18)** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:  
 α)  $\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x} + \frac{1}{x}$     β)  $\left( \frac{2x}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{x} \right)$

### 2.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ



**19)** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $-(x-2)^2 + 3(x-1)(x+1) = 3x - 4$

β)  $(x+5)^2 - (2x-3)^2 = -9$

γ)  $\frac{x-1}{2} + \frac{x^2+1}{3} = \frac{x^2-5}{6} + \frac{4}{3}$

δ)  $x^2 - x = \frac{2x-1}{6} - \frac{x^2}{3}$

### 3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

**20)** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση  $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4)y = 8$ :

α) Να είναι παράλληλη στον  $y'y$

β) Να διέρχεται από το σημείο  $A(4,0)$

### 3.3 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

**21)** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων:

α) 
$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

β) 
$$\begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$$

γ) 
$$\begin{cases} \frac{7x+y}{3} - \frac{y-1}{2} = x+3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases}$$

**22)** Αποδείξτε ότι τα συστήματα  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$  και  $\begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$  έχουν κοινή λύση.

**23)** Να βρείτε (αν υπάρχει) το σημείο τομής των ευθειών  $y = -2x + 5$  και  $4x - y = 1$ .

**24)** Αν το σύστημα  $\begin{cases} 2\alpha x - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$  έχει λύση την  $x = -1, y = 1$ , να βρείτε τα  $\alpha, \beta$ .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

### 1.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

- 1) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) οι διάμεσοι  $BM$  και  $\Gamma N$  είναι ίσες  
β) οι διχοτόμοι  $BD$  και  $\Gamma E$  είναι ίσες  
γ) τα ύψη  $BK$  και  $\Gamma \Lambda$  είναι ίσα
- 2) Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $M$  και  $N$  των ίσων πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ , ισαπέχουν από τις απέναντι πλευρές καθώς και από τη βάση  $B\Gamma$  του τριγώνου.
- 3) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  φέρνουμε τη διάμεσο  $AM$ . Να αποδείξετε ότι οι κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  ισαπέχουν από την ευθεία  $AM$ .
- 4) Δύο τρίγωνα  $\triangle AB\Gamma$  και  $\triangle E\Delta Z$  έχουν  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $AB = \Delta E$  και τις διχοτόμους  $BM$ ,  $EN$  ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.
- 5) Σε ένα τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα  $M\Delta = AM$ . Να αποδείξετε ότι:  
α) τα τρίγωνα  $\triangle AMB$  και  $\triangle M\Gamma \Delta$  είναι ίσα  
β)  $AB = \Delta \Gamma$   
γ)  $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}$ .
- 6) Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  η διαγώνιος  $A\Gamma$  διχοτομεί τις γωνίας  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$ . Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma \perp B\Delta$ .
- 7) Να αποδείξετε ότι δύο σημεία χορδής κύκλου, που είναι συμμετρικά ως προς το μέσο της, ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου.

### 1.2 ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

- 8) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $M$ ,  $N$  των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $\Gamma A$  αντίστοιχα. Η παράλληλη από το μέσο  $E$  της διαμέσου  $AM$  προς την  $MN$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:  
α)  $A\Delta = \frac{1}{4} A\Gamma$   
β)  $\Delta E \parallel AB$   
γ)  $\frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{4}$

- 9) Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  φέρουμε τη διάμεσο  $AM$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MAB$  είναι ισόπλευρο και  $AB = \frac{B\Gamma}{2}$ .
- 10) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  είναι κορυφές παραλληλογράμμου του οποίου η κάθε πλευρά είναι ίση με το μισό μίας εκ των διαγωνίων του.

### 1.5 ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

- 11) Δίνονται τα παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  και  $K\Lambda MN$ . Να τα εξετάσετε ως προς την ομοιότητα και αν είναι όμοια να βρείτε το λόγο ομοιότητας στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α)  $AB = 5\text{ cm}$ ,  $A\Delta = 7\text{ cm}$ ,  $K\Lambda = 15\text{ cm}$ ,  $KM = 21\text{ cm}$  και  $A = K = 100^\circ$   
β)  $AB = 6\text{ cm}$ ,  $A\Delta = 8\text{ cm}$ ,  $K\Lambda = 3\text{ cm}$ ,  $KM = 4\text{ cm}$  και  $A = \Lambda = 110^\circ$
- 12) Δύο τετράπλευρα  $AB\Gamma\Delta$  και  $K\Lambda MN$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{3}{5}$ . Αν η περίμετρος του  $AB\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $36\text{ cm}$ , να υπολογίσετε την περίμετρο του  $K\Lambda MN$ .
- 13) Από σημείο  $\Delta$  της υποτείνουσας  $B\Gamma$  ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$  φέρουμε την κάθετη στη  $B\Gamma$ , που τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .
- α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Delta E$  είναι όμοια.  
β) Αν  $B\Delta = 3\text{ cm}$ ,  $\Delta\Gamma = 7\text{ cm}$  και  $\Delta E = 4\text{ cm}$ , να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου  $AB\Gamma$  και του τμήματος  $BE$ .
- 14) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ . Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια
- α)  $AB\Delta$ ,  $AB\Gamma$   
β)  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta\Gamma$   
γ)  $AB\Delta$ ,  $A\Delta\Gamma$
- 15) Σε κάθε περίπτωση να γράψετε τους ίσους λόγους των ομολόγων πλευρών.
- 16) Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{BA}{EZ} = \frac{2}{5}$ . Αν είναι  $AB = 8\text{ cm}$ ,  $B\Gamma = 10\text{ cm}$  και  $\Gamma A = 12\text{ cm}$  να υπολογίσετε τις πλευρές του  $\Delta EZ$ .

### 1.6 ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

- 17) Ένα τρίγωνο έχει βάση  $8\text{ cm}$  και εμβαδόν  $20\text{ cm}^2$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός άλλου τριγώνου που είναι όμοιο με το  $AB\Gamma$  και έχει βάση  $4\text{ cm}$ .
- 18) Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου έχουν μήκη  $15, 3, 9, 10\text{ cm}$  αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις πλευρές ενός όμοιου τετραπλεύρου που έχει τετραπλάσιο εμβαδόν.

- 19)** Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:  
 α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.  
 β) Το εμβαδόν του ΔΕΖ είναι  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του ΑΒΓ.
- 20)** Οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 5 cm. Φέρνουμε το ύψος του ΑΔ.  
 α) Να αποδείξετε ότι τα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια.  
 β) Αν το τρίγωνο ΑΒΔ έχει εμβαδόν  $9 \text{ cm}^2$ , υπολογίστε το εμβαδόν του ΑΓΔ.

## 2.1 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ Ω

- 21)** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) στο οποίο είναι ΑΓ = 10 και ΒΓ = 26.
- 22)** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $A = 90^\circ$ ) ισχύει  $\eta\mu B = \frac{3}{5}$  και ΑΓ = 9. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ.
- 23)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 15 και ΒΓ = 24. Να υπολογίσετε τις γωνίες του και το ύψος του ΑΔ.
- 24)** Να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν ΑΓ = 9 και  $\eta\mu B = \frac{3}{5}$ .

## 2.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

- 25)** Υπολογίστε την παράσταση:  
 $A = 2\eta\mu 150^\circ - \sigma\upsilon\nu 135^\circ + \eta\mu 135^\circ - 2\eta\mu 45^\circ + \epsilon\phi 135^\circ$
- 26)** Απλοποιήστε το κλάσμα  $\frac{\eta\mu(180 - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(180 - \phi) \cdot \epsilon\phi(180 - \alpha)}{\epsilon\phi\alpha \cdot \eta\mu(180 - \phi) \cdot \eta\mu\alpha}$ .

## 2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΓΩΝΙΑΣ

- 27)** Αν  $5\eta\mu\omega = 3$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.
- 28)** Αν  $17\sigma\upsilon\nu\omega + 8 = 0$  και  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  
 $A = \frac{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}{\epsilon\phi\omega}$ .
- 29)** Αποδείξτε ότι:  $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x \cdot \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} + \epsilon\phi x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΤΕΛΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

Από τις δυο θεωρίες απαντάτε μόνο την μια και από τις τρεις ασκήσεις λύνεται μόνο τις δυο

**1<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ****1<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**A1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ .

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

α)  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2$

β)  $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

γ) Η εξίσωση  $x^2 - \alpha = 0$  έχει δυο λύσεις  $x = \sqrt{\alpha}$  ή  $x = -\sqrt{\alpha}$

δ) Αν  $\Delta$  η διακρίνουσα της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  τότε αν  $\Delta = 0$ , η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.

**2<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**B1.** Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**B2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

β) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

γ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.

δ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

**1<sup>η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

α) Να λύσετε την εξίσωση  $x^2 - 3x - 4 = 0$ .

β) Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση και να εξετάσετε αν έχει τις ίδιες λύσεις με την

παραπάνω εξίσωση :

$$\frac{x-1}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+3}{x(x+1)}$$

**2η ΑΣΚΗΣΗ 2**

Δίνεται το σύστημα 
$$\begin{cases} 2(2x - y) - 5 = 3(x - y - 1) \\ \frac{x-1}{3} - \frac{y+2}{6} = 1 \end{cases}$$

- α) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα παίρνει την μορφή  $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$
- β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα .

**3η ΑΣΚΗΣΗ**

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $AB = 6 \text{ cm}$  και  $BG = 10 \text{ cm}$ .

Να υπολογίσετε τους λόγους α)  $\frac{AB}{BG}$  , β)  $\frac{AG}{BG}$  , γ)  $\frac{AB}{AG}$

**2ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ****1η ΘΕΩΡΙΑ**

**A1.** Να αποδείξεis ότι:  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ .

**A2.** Έστω η εξίσωση 2ου βαθμού  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ) και  $\Delta$  η διακρίνουσά της. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσεις καθεμιά από τις περιπτώσεις της Στήλης Α, με ένα μόνο συμπέρασμα της Στήλης Β.

| ΣΤΗΛΗ Α                   | ΣΤΗΛΗ Β                                     |
|---------------------------|---------------------------------------------|
| <b>α.</b> $\Delta > 0$    | <b>1.</b> Η (1) έχει μία τουλάχιστον λύση   |
| <b>β.</b> $\Delta = 0$    | <b>2.</b> Η (1) έχει δύο άνισες λύσεις      |
| <b>γ.</b> $\Delta < 0$    | <b>3.</b> Η (1) έχει μία διπλή λύση         |
| <b>δ.</b> $\Delta \geq 0$ | <b>4.</b> Η (1) δεν έχει πραγματικές λύσεις |

**A3.** Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σου, την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- α) Ισχύει  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  για κάθε τιμή των πραγματικών  $a$  και  $b$ .
- β) Η ισότητα  $a^2 + b^2 = (a + b)^2$  ισχύει για κάθε τιμή των πραγματικών  $a$  και  $b$ .
- γ) Η ευθεία  $\varepsilon : y = 3x - 5$  παριστάνει ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- δ) Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ .
- ε) Αν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος παριστάνονται από δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  οι οποίες ταυτίζονται, τότε το σύστημα αυτό θα είναι αόριστο.

**ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

**2<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**B1.** Διατυπώστε τα δύο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

**B2.** Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  με  $\sin \omega \neq 0$  ισχύει ότι  $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sin\omega}$

**B3.** Να χαρακτηρίσεις τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σου, την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο πλευρές του ίσες μία προς μία, και την περιεχόμενη σε αυτές τις πλευρές γωνία ίση.
- Για κάθε γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $(1 - \eta\mu\omega) \cdot (1 + \eta\mu\omega) = \sin^2 \omega$ .
- Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, οποιαδήποτε διχοτόμος του, είναι και διάμεσος και ύψος.
- Για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  ισχύει ότι  $-1 \leq \sin \omega \leq 1$ .
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα μίας πλευράς ενός τριγώνου, είναι πάντοτε σημείο της διχοτόμου της απέναντι γωνίας του.

**1<sup>η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

**α)** Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = x^2 - x$$

$$B = x^2 - 3x + 2$$

$$\Gamma = x^2 + 4x + 4$$

**β)** Αν Α, Β και Γ οι παραστάσεις του ερωτήματος Α, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{3x+6} \text{ έχει λύσεις τις } x_1 = -1 \text{ και } x_2 = 4.$$

**γ)** Αν  $\alpha$  η θετική ρίζα της παραπάνω εξίσωσης και  $\beta$  η αρνητική της ρίζα, να λυθεί

$$\text{το σύστημα } (\Sigma): \begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}.$$

**2<sup>η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

**α)** Αν  $0^\circ < \omega < 180^\circ$  και  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ , να υπολογισθούν:

i) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $\omega$ .

ii) Η τιμή της παράστασης  $A = \frac{5\eta\mu\omega - 3\varepsilon\phi\omega}{10\sin\omega} + \eta\mu^2\omega + \sin^2(180^\circ - \omega)$ .

**β)** Έστω οι παραστάσεις  $A = \eta\mu 32^\circ - \varepsilon\phi 124^\circ$  και  $B = \frac{(2 - \eta\mu\omega) \cdot \eta\mu 111^\circ}{(\sin\omega - 3)^3}$ .

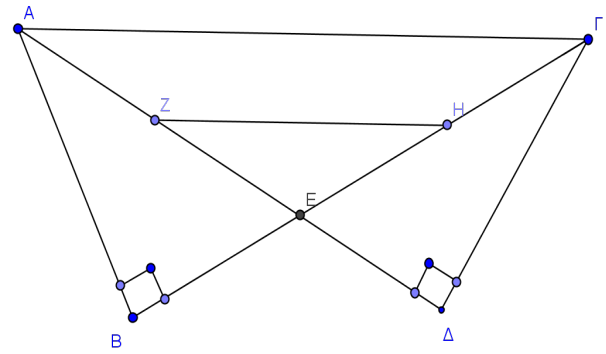
i) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης Α είναι θετική.

ii) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία  $\omega$ , ισχύει ότι  $A > B$ .

**ΤΕΛΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ**

**3<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

Στο διπλανό σχήμα θεωρούμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ και Ε το σημείο τομής των ΒΓ και ΔΑ. Αν Ζ το μέσο της ΑΕ και Η το μέσο της ΕΓ και ΑΒ = ΔΓ:



- α) Να αποδείξεις ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα.  
 β) Να αποδείξεις ότι το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές, και επιπλέον ότι το τμήμα ΖΗ είναι παράλληλο στο ΑΓ.  
 γ) Αν επιπλέον τα μήκη  $BZ = 10 \text{ cm}$  και  $ΑΓ = 20 \text{ cm}$ , να βρείτε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΖΗΓ.

**3<sup>Ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ****1<sup>Η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**A1.** Να αποδείξετε ότι  $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**A2.** Να αντιστοιχίσετε όσα μονώνυμα υπάρχουν στη ΣΤΗΛΗ 1 με τα όμοιά τους στη ΣΤΗΛΗ 2.

| ΣΤΗΛΗ 1             | ΣΤΗΛΗ 2       |
|---------------------|---------------|
| 1. $2x^2$           | Α. $2x^3$     |
| 2. $5\frac{x^3}{3}$ | Β. $(-3x)^2$  |
| 3. $2xy$            | Γ. $-2x^3y$   |
| 4. $-x^{-3}y$       | Δ. $4x^{-3}y$ |
| 5. $2x^0$           | Ε. $-xy$      |
|                     | Ζ. $-7$       |



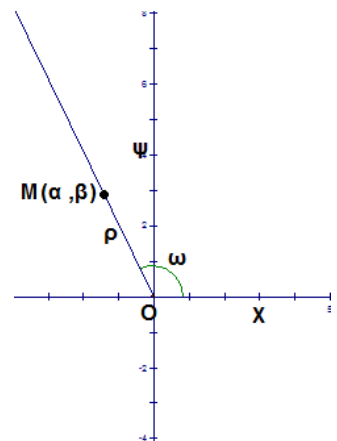
**A3.** Χαρακτηρίστε σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις

|                                                                                                                        |   |   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| 1. Η ισότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha, \beta$ | Σ | Λ |
| 2. Δύο αντίθετα μονώνυμα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.                                                                | Σ | Λ |
| 3. Η διαίρεση δύο μονώνυμων είναι πάντα μονώνυμο                                                                       | Σ | Λ |
| 4. Μπορούμε να προσθέσουμε μόνο όμοια μονώνυμα                                                                         | Σ | Λ |

### 2<sup>Η</sup> ΘΕΩΡΙΑ

**B1.** Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να δώσετε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας  $\omega$ .

**B2.** Με τη βοήθεια του ορισμού να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $180^\circ$ .



**B3.** Αν  $90^\circ < \omega < 180^\circ$  να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

|                                                                       |   |   |
|-----------------------------------------------------------------------|---|---|
| 1. $\eta\mu\omega < 0$                                                | Σ | Λ |
| 2. $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$ | Σ | Λ |
| 3. $\eta\mu\omega > 1$                                                | Σ | Λ |

### 1<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ

**α)** Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος  $\begin{cases} \beta = 18 - \alpha \\ \alpha + 5\beta = 50 \end{cases}$  είναι  $(\alpha, \beta) = (10, 8)$

**β)** Αν τα  $\alpha, \beta$  είναι οι αριθμοί που βρήκατε στο Α) ερώτημα, να αποδείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση  $(x - \alpha)^2 - (x - \beta)(x + \beta) + 20x$  είναι σταθερό πολυώνυμο.

**2<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

Ο κ. Σωτηράκης έφερε από το σπίτι την εξίσωση

$$\frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{20x}{25-x^2} = -2x + \frac{20}{x-5}$$

- α)** Η κ. Παπαλαζάρου μόλις την είδε ρώτησε ποιες τιμές δεν επιτρέπεται να πάρει ο  $x$ ; Απαντήστε με αιτιολόγηση στο ερώτημά της.  
**β)** Ο κ. Ρούσος πήρε το 1<sup>ο</sup> μέλος της εξίσωσης, το ονόμασε

$$A = \frac{x-5}{x+5} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{20x}{25-x^2} \text{ και κάνοντας τις κατάλληλες πράξεις απέδειξε ότι η παράσταση } A = \frac{2(x+5)}{x-5}.$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του κάνοντας κι εσείς τις πράξεις.

- γ)** Βοηθήστε τώρα τον κ. Σωτηράκη να λύσει επιτέλους την εξίσωση  $A = -2x + \frac{20}{x-5}$

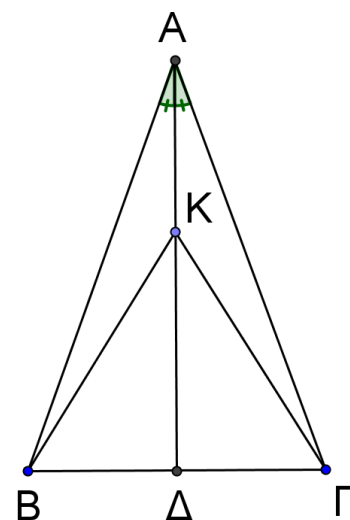
**3<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma$

και η  $AD$  είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

Αν  $K$  τυχαίο σημείο πάνω στην  $AD$ ,

- α)** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABK$  και  $AK\Gamma$  είναι ίσα.  
**β)** Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισοσκελές



**4<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ****1<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**A1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ .

**A2.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και μετά να τον μεταφέρετε στην κόλα σας, αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α, με ανάπτυγμα της που υπάρχει στην στήλη Β.

| Στήλη Α                                      | Στήλη Β                                                      |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $(\alpha - \beta)^2$                      | Α.<br>$\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ |
| 2. $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ | Β. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$                       |
| 3. $(\alpha - \beta)^3$                      | Γ. $\beta^2 - \alpha^2$                                      |
| 4. $(\alpha + \beta)^2$                      | Δ.<br>$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ |
|                                              | Ε. $\alpha^2 - \beta^2$                                      |
|                                              | ΣΤ. $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$                      |

|   |  |
|---|--|
| 1 |  |
| 2 |  |
| 3 |  |
| 4 |  |

**A3.** Τι ονομάζουμε ρητή αλγεβρική παράσταση;

**2<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**B1.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

β) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, είναι ίσα.

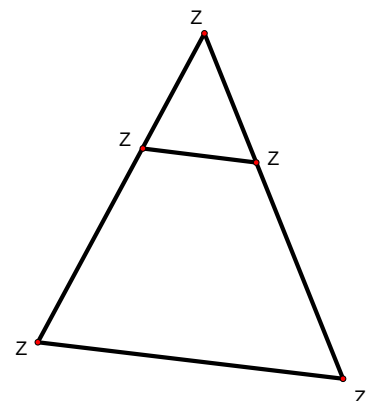
**B2.** Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; (Διατύπωση)

**B3.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα **όμοια**

τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $AEZ$  και  $EZ \parallel B\Gamma$ .

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\dots}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\dots} \quad \text{και} \quad \dots = A\hat{E}Z, \quad \hat{\Gamma} = \dots$$



**1<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x(x+2) - (x+1)(x-1) - 2(x-2) \text{ και } B = (2x-3)^2 - 2x(x-3) - 2(x^2 - 3x + 5).$$

**α)** Να αποδείξετε ότι  $A = 5$  και  $B = -1$ .

**β)** Να λύσετε το σύστημα : 
$$\begin{cases} 2x - y = A \\ x + 3y = B \end{cases}$$

**2<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

**α)** Να παραγοντοποιήσετε τις ποσότητες : α)  $x^2 - x$  , β)  $x^2 - 1$ .

**β)** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  που ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\text{i) } \frac{1}{x} \quad \text{ii) } \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \quad \text{iii) } \frac{2x-1}{x^2-x}$$

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{2x-1}{x^2-x} - \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{x} = 0$

**3<sup>Η</sup> ΑΣΚΗΣΗ**

Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία και  $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$ ,

**α)** Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{5}{13}$ ,  $\epsilon\phi\omega = -\frac{12}{5}$ .

**β)** Να συμπληρώσετε τα κενά :  $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \dots$ ,  $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots$

**γ)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: 
$$\frac{\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\epsilon\phi 135^\circ \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega)}$$

**5<sup>ο</sup> ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ****1<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**A1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα :  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

**A2.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

α) το κλάσμα  $A = \frac{x^2 + 2012}{x^2 - 4}$ , ορίζεται για κάθε  $x \neq 2$  και  $x \neq -2$  όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

β) ισχύει  $(-2x)^3 = 8x^3$ .

γ) ισχύει  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ .

δ) αν  $A(x) = x^3 - x^2 + 2012$ , τότε  $A(-x) = -x^3 + x^2 + 2012$ .

ε) ισχύει  $(-x-3)^2 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ .

**2<sup>η</sup> ΘΕΩΡΙΑ**

**B1.** Πότε δυο τρίγωνα είναι όμοια;

**B2.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α) Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ..... από τις πλευρές της γωνίας.

β) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες της βάσης του είναι .....

γ) Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ..... μια προς μια και την ..... γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

δ) Κάθε σημείο της ..... ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του

ε) Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις ..... στην πλευρά αυτή γωνίες ..... μια προς μια, τότε είναι ίσα..

**1η ΑΣΚΗΣΗ**

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A(x)=3(x-2)^2-2(1-2x)(1+2x)-8x^2-5(3-2x)+4 \quad , \quad B(x)=(x-2)^3+x^2(5-x)+9-12x.$$

- α)** Να αποδείξετε ότι :  $A(x)=3x^2-2x-1$  και  $B(x)=1-x^2$ .
- β)** Να λυθεί η εξίσωση :  $A(X)=0$  .
- γ)** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις  $A(x)$  και  $B(x)$  .
- δ)** Βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  ορίζεται το κλάσμα  $\frac{A(x)}{B(x)}$  και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

**2η ΑΣΚΗΣΗ**

Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x - 3(x - \psi) = 5 + x\psi - x(\psi + 1) \\ x - \frac{\psi}{2} = 2 \end{cases}$$

- α)** Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα (αφού κάνετε τις πράξεις) είναι ισοδύναμο με το σύστημα  $\begin{cases} x + 3\psi = 5 \\ 2x - \psi = -4 \end{cases}$
- β)** Να λύσετε το σύστημα του ερωτήματος Α.

**3η ΑΣΚΗΣΗ**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $M$  μέσον της  $B\Gamma$ . Αν  $MK, ML$  τα κάθετα τμήματα προς τις πλευρές  $AB, AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)** Τα τρίγωνα  $BMK, ΓML$  είναι ίσα.
- β)** Το τρίγωνο  $MKL$  είναι ισοσκελές.

