

Ασκήσεις στις ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ - Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γεώργιος Χ. Δομουχτσής *

21 Μαΐου 2019

*ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - Γ. Μπούσγου, Ι. Ταμβακλή - 1974

1 Ρητές Παραστάσεις

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω κλασμάτων:

$$1. f(x) = \frac{5}{2x - 6}$$

$$2. g(x) = \frac{7x + 1}{2x^2 - 3}$$

$$3. h(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 4x + 4}$$

$$4. j(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 7x + 10}$$

$$5. k(x) = \frac{-3}{x^3 - 4x}$$

$$6. m(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

2 Απλοποίηση

Να απλοποιηθούν τα παρακάτω κλάσματα:

$$1. \frac{12x^3 \alpha y^2}{14 \alpha^2 y^2}$$

$$2. \frac{27 \alpha^3 \beta^2 \omega y}{18 \alpha^4 \beta \omega^2 y^3}$$

$$3. \frac{3x^2 + 3x}{2x^3 - 2x}$$

$$4. \frac{\omega^4 - 81}{\omega^2 - 9}$$

$$5. \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3}$$

$$6. \frac{(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha + 1)^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$7. \frac{(x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$8. \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \alpha - \beta - \beta^2}$$

$$9. \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

3 Πρόσθεση-Αφαίρεση Ρητών Παραστάσεων

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(\alpha') \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{w} - \frac{1}{xyw} =$$

$$(\beta') \frac{x}{3\alpha\beta} + \frac{2y}{5\beta\gamma} - \frac{w}{6\alpha\gamma} =$$

$$(\gamma') \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^2-1} =$$

$$(\delta') \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{y-x} =$$

$$(ε') \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3} =$$

$$(στ') \frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2} =$$

$$(ζ') \frac{2x-1}{5} + \frac{x+3}{4} - \frac{9x-1}{10} =$$

$$(η') \frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{6}{\alpha^2-9} =$$

$$(θ') \frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1} =$$

$$(ι') \frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)} =$$

$$(ια') 2x-1 + \frac{3-5x^2}{x+3} =$$

$$(ιβ') 7 + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{3\beta}{\alpha-\beta} =$$

$$(ιγ') \frac{2xy}{x+y} - x =$$

$$(ιδ') \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-2\alpha} =$$

$$(ιε') \frac{7}{3\alpha+5} - \frac{2}{\alpha-1} =$$

$$(ιοστ') \frac{\alpha+2\beta}{\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2} + \frac{\alpha+3\beta}{4(\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2)} - \frac{\alpha+\beta}{4(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)} =$$

2. Δίνεται η ρητή παράσταση: $A = \frac{w-3}{4(w^2-3w+2)} + \frac{w-2}{w^2-4w+3} - \frac{w-1}{4(w^2-5w+6)}$ με $w \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β') Να τεθεί στη μορφή μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης.

(γ') Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της όταν $w = 1$.

(δ') Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της όταν $w = -2$.

3. Δίνεται η ρητή παράσταση: $B = \frac{1}{y+y^2} + \frac{1}{y^2+3y+2} + \frac{1}{y^2+5y+6} - \frac{2}{y(y+3)}$ με $y \in \mathbb{R}$.

(α') Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β') Να τεθεί στη μορφή μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης.

(γ') Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της όταν $y = -2$.

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{(x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2}{(x^2+x-12)^2}$ και $B = \frac{(x^2-1)^2 + 9(x+1)^2}{(x^2+6x+5)^2}$.

(α') Να απλοποιηθεί η A .

(β') Να απλοποιηθεί η B .

(γ') Να προσδιορισθεί το άθροισμα $A+B$.

4 Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση Ρητών Παραστάσεων

1. Να γίνουν οι πράξεις:

$$(α') \frac{7xy}{\omega^2} \cdot \frac{3\alpha\omega}{y^2} =$$

$$(β') \left(-\frac{3x^3\psi}{2\alpha\beta^2}\right) \cdot \left(-\frac{4\alpha\beta^3}{5x\psi^2}\right) \cdot \frac{10\alpha\psi}{\beta x^2} =$$

$$(γ') \frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4} =$$

$$(δ') \frac{x^2 - 1}{\alpha + \beta} : \frac{x + 1}{\alpha^2 - \beta^2} =$$

$$(ε') \left[\frac{6x^3\omega}{5\alpha\beta} \cdot \frac{\beta^2 x\omega}{\alpha\gamma} \right] : \frac{2x^2\omega}{5\alpha\beta\gamma} =$$

$$(στ') \left[\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right] : \left[\frac{1}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \right] =$$

$$(ζ') \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2} \right] : \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} =$$

$$(η') \left[\frac{\alpha}{\alpha + 1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right] : \left[\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right] =$$

$$(θ') \left[\alpha - \frac{4\psi^2}{\alpha} \right] \cdot \left[\beta - \frac{4x^2}{\beta} \right] : \left[1 + \frac{2x}{\beta} + \frac{2\psi}{\alpha} + \frac{4x\psi}{\alpha\beta} \right] =$$

$$(ι') \left[\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right] : \frac{2x^2}{1-x} =$$

$$(ια') \left[\frac{2a}{a^2 - x^2} + \frac{3}{a+x} - \frac{1}{a-x} \right] : \left[\frac{a^2 + x^2}{ax^2} + \frac{2}{x} \right] =$$

$$(ιβ') \left[\frac{\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4}{\alpha^2 - 4\alpha\beta - 21\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2}{\alpha^3 - \beta^3} \right] : \frac{1}{\alpha - 7\beta} =$$

$$(ιγ') \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^2 + 3xy + 2y^2}{x^2 - 3xy - 10y^2} : \frac{1}{x - 5y} =$$

$$(ιδ') \frac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \beta}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta - 2\alpha}} + \frac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} - \alpha}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha - 2\beta}} - \frac{1 - \frac{x - \alpha}{\alpha}}{\frac{x + 1}{\beta x} - \frac{1}{\beta}} =$$

$$(ιε') \frac{3}{1 + \frac{\alpha}{\beta + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\beta}{\alpha + \gamma}} + \frac{3}{1 + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}} =$$

$$(ιστ') \frac{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha - \frac{\beta}{1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta}}} + \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha\beta}} - \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha + \frac{\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha + \beta}}} =$$

$$(ιζ') \frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{1}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} =$$

$$(ιη') \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} =$$

$$(ιθ') \frac{\beta + \gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\gamma + \alpha}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\alpha + \beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} =$$

$$(κ') \frac{\beta\gamma}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\gamma\alpha}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \frac{\alpha\beta}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} =$$

2. Αν είναι $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$, δείξτε ότι:

$$(α') (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$(β') \frac{\alpha(\beta^3 - \gamma^3)}{\beta - \gamma} + \frac{\beta(\gamma^3 - \alpha^3)}{\gamma - \alpha} + \frac{\gamma(\alpha^3 - \beta^3)}{\alpha - \beta} = 0.$$

3. Αν είναι $\alpha = \frac{1}{1+x}$ και $\beta = \frac{1}{1-x}$, να προσδιορίσετε την τιμή της $T = \frac{\alpha + \beta x}{\beta - \alpha x}$.

4. Αν είναι $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, να βρεθεί η τιμή της $A = \frac{2x + y}{4(x - y)}$.

5. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = \frac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$ και $A = \frac{x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 2x + 4}$.

- (α') Δείξτε ότι είναι πάντοτε ορισμένες στο $\mathbb{R}$.
- (β') Δείξτε ότι ισοδυναμούν με ακέραιες παραστάσεις.
- (γ') Υπολογίστε την παράσταση $K^2 + \Lambda^2$.
- (δ') Υπολογίστε την παράσταση $K \cdot \Lambda$.