

ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Αφιερωμένο στους μαθητές μου !!!

ΘΕΩΡΙΑ**ΑΛΓΕΒΡΑ**

1. Ποιες παραστάσεις λέγονται αριθμητικές και ποιες αλγεβρικές; Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια; Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης;

Απάντηση

• Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις**.

• Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές (γράμματα που παριστάνουν αριθμούς) λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

• Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

• Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά τιμή της.

2. Τι ονομάζεται μονώνυμο; Τι ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου και τι συντελεστής του; Τι ονομάζεται βαθμός του μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή του και τι βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές;

Απάντηση

• Οι **ακέραιες αλγεβρικές** παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα** π.χ. $-3x^2y^4\omega$

• Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

• Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το **άθροισμα των εκθετών** των μεταβλητών του.

3. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια, πότε ίσα και πότε αντίθετα; Ποιο μονώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

Όμοια μονώνυμα λέγονται εκείνα που έχουν ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα τα μονώνυμα είναι όμοια : $-3x^2y^4\omega$ και $\sqrt{7}x^2y^4\omega$

• Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα** π.χ. $\sqrt{7}x^2y^4\omega$ και $-\sqrt{7}x^2y^4\omega$

• Οι αριθμοί είναι μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά μονώνυμα** και είναι **μηδενικού βαθμού**. Ειδικότερα, ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**.

4. Τι ονομάζεται πολυώνυμο; Τι ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου; Ποιο πολυώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

• Τα Αθροίσματα μη ομοίων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

• **Βαθμός ενός πολυωνύμου** ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

• Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**. Ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι **μηδενικού βαθμού**.

5. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

Απάντηση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

6. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

4. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

5. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

7. Ποια διαδικασία ονομάζεται παραγοντοποίηση; Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τους;

Απάντηση

• Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

• **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

• **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

8. Τι είναι η Διακρίνουσα; Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$;

Απάντηση

Διακρίνουσα Δ είναι ο αριθμός $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, δηλαδή $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει **δύο άνισες** λύσεις τις: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή** λύση την: $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (**αδύνατη**).

9. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ; Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ; Πως ερμηνεύεται γραφικά ότι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μία λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις;

Απάντηση

- **Γραμμική εξίσωση** με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.
- **Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων** με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.
- Αν οι δύο ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις δύο εξισώσεις του συστήματος τέμνονται, τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους αποτελούν τη μοναδική λύση του συστήματος. Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο και όταν οι ευθείες ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα; (ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Απάντηση

1. Όταν οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου τριγώνου, τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Π - Π - Π**)
2. Όταν 2 πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με 2 πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Π - Γ - Π**)
3. Όταν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες, τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Γ - Π - Γ**)

2. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

1. Όταν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
2. Όταν 2 πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με 2 αντίστοιχες πλευρές ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

3. Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, να αποδείξετε ότι θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει.

Απάντηση

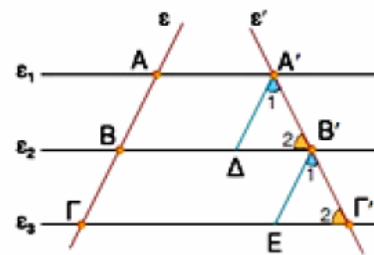
Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία A', B', Γ' αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$ είναι ίσα μεταξύ τους.

Πράγματι, αν φέρουμε $A'\Delta // \varepsilon, B'E // \varepsilon$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A'B'\Delta$ και $B'\Gamma'E$ παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A'\Delta = B'E$ γιατί $A'\Delta = AB, B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'\Delta B, BB'E\Gamma$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.
- $\widehat{B'}_2 = \widehat{\Gamma'}_2$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ που τέμνονται από την ε' .
- $\widehat{A'}_1 = \widehat{B'}_1$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'\Delta, B'E$ που τέμνονται από την ε' .

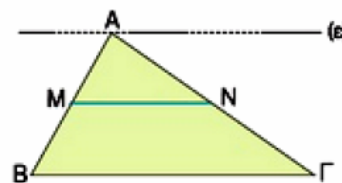
Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'\Gamma'$.



4. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απάντηση

Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ από την κορυφή A φέρουμε ευθεία $\varepsilon // B\Gamma$ και από το μέσο M της AB φέρουμε $MN // B\Gamma$. Οι παράλληλες $\varepsilon, MN, B\Gamma$ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Άρα $AN = N\Gamma$.



3. Τι είναι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων; Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ ; Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών;

Απάντηση

• Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

• Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

• 1. Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο

$$\text{των μέσων όρων. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

2. Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να

$$\text{προκύψει πάλι αναλογία. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

3. Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και

$$\text{παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

4. Με τι είναι ίση η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου;

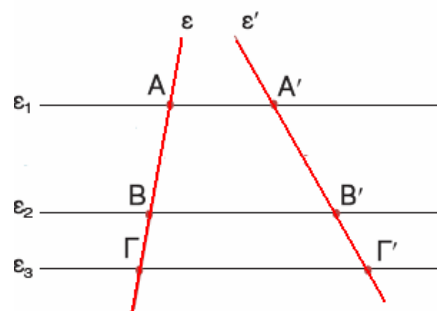
Απάντηση

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή**Απάντηση**

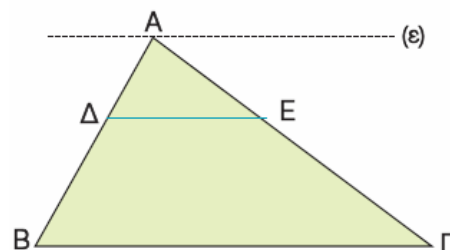
Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν 2 άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

$$\text{δηλ.: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{A'G'}$$

**Εφαρμογή σε τρίγωνο**

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$
- Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ τότε $\Delta E \parallel B\Gamma$

**5. α) Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; Τι σχέση έχουν οι πλευρές τους στη περίπτωση αυτή;**

β) Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

α) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια. Τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

β) • Όταν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες ή

• Όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

5. α) Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του επιπέδου. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας

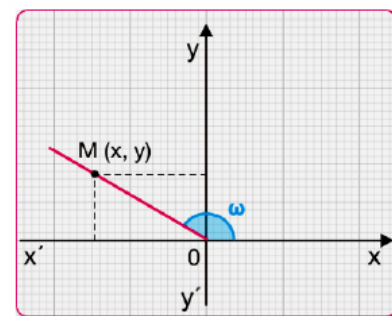
$$\hat{\omega} = \hat{xOM};$$

Απάντηση

Έστω ρ η απόσταση του M από την αρχή O των αξόνων. Είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$



β) Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω ;

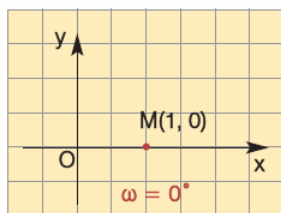
Απάντηση

Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0, y > 0, \rho > 0$, οπότε: **$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \epsilon\phi\omega > 0$.**

Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0, y > 0, \rho > 0$, οπότε: **$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$.**

γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0° , 90° και 180° .

Απάντηση

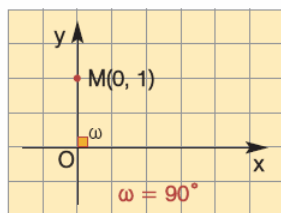


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Ox
π.χ. το $M(1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

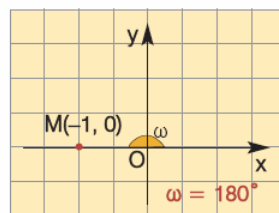


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Oy
π.χ. το $M(0,1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται
(γιατί $x=0$)



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Ox'
π.χ. το $M(-1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

δ) Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ και $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$

Απάντηση

$$\bullet \eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

$$\bullet \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{\rho \cdot x} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi \omega$$

ε) Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τους;

Απάντηση

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega$, $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi \omega$

6. Να διατυπώσετε τον **Νόμο Ημιτόνων** και τον **Νόμο Συνημιτόνων**

Απάντηση

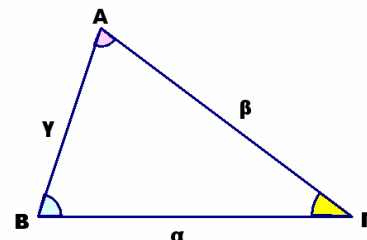
Νόμο Ημιτόνων: Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες

προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

Νόμο Συνημιτόνων:

Το τετράγωνο κάθε πλευράς τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \hat{A} \quad , \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu \hat{B} \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma}$$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**ΘΕΜΑ 1**

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(5x-3)(5x+3) - (2x+3)^2 - 18x^2 + 18 = 3x(x-4)$

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση: $A(x) = \frac{9x^3 - 144x}{(5x-3)(5x+3) - (2x+3)^2 - 18x^2 + 18}$

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A(x)$ και να λυθεί η εξίσωση: $A(x) = x(x-7) + 12$.

ΘΕΜΑ 2

A) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(x-1)^2 - (x+2)^3 = -8(x+1)^2 + 5x$

B) 1. Να γίνουν γινόμενο οι παρακάτω παραστάσεις:

$$A = x^2 - x, \quad B = x^2 - 1 \quad \text{και} \quad \Gamma = x^2 - 2x + 1$$

2. Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε να ορίζονται τα κλάσματα: $\frac{A}{B}$ και $\frac{\Gamma}{A}$

3. Να γίνουν οι πράξεις: $\left(\frac{A}{B} - \frac{\Gamma}{A}\right) : \frac{1}{x^2 + x}$

ΘΕΜΑ 3

A) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{\alpha+1}{2} - \beta = -2 \\ \alpha + 3\beta = 5 \end{cases}$$

B) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - \beta x + 3\alpha = 0$, όπου α, β οι λύσεις του παραπάνω συστήματος.

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί αλγεβρικά το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} 3\alpha + \frac{\beta}{2} = 4 \\ \beta - \frac{2\alpha-5}{3} = 3 \end{cases}$$

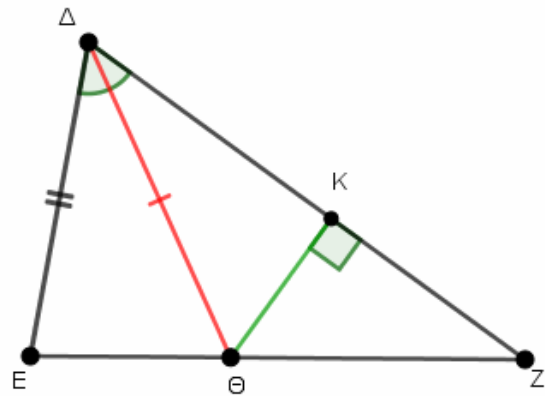
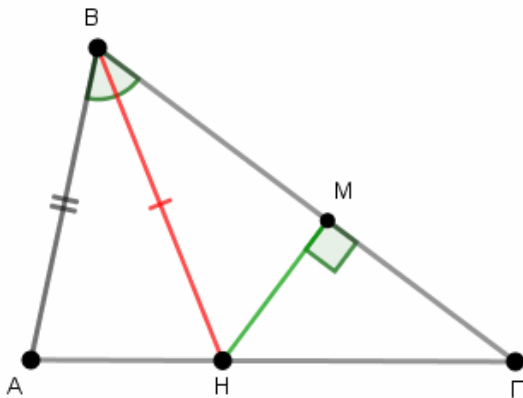
β) Αν $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ η λύση του συστήματος (Σ), να βρεθεί η ακέραια λύση της εξίσωσης: $(\alpha + \beta) \cdot x^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x = 2 \cdot (\beta + 2 \cdot \alpha)$.

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 5



Δεδομένα: $AB = \Delta E$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, $BH = \Delta\Theta$ (διχοτόμοι)

Ζητούμενα: α) $\widehat{ABH} = \widehat{\Delta E\Theta}$, β) $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta E Z}$ και γ) $HM = \Theta K$

ΘΕΜΑ 6

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 + x$, $B = x^3 - x$ και $\Gamma = x^2 + 2x + 1$
 1) Να γίνουν γινόμενο οι παραπάνω παραστάσεις.

2) α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται τα κλάσματα $\frac{A}{B}$ και $\frac{\Gamma}{A}$;
 β) Στην συνέχεια να απλοποιήσετε τα παραπάνω κλάσματα.

3) Να γίνουν οι πράξεις: $\Delta = \left(\frac{A}{B} + \frac{\Gamma}{A} - 1 \right) : \frac{x}{x-1}$

4) Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{B}{A} \right)^2 + \left(x \cdot \frac{\Gamma}{A} \right)^2 - 2x^2 = 2$

ΘΕΜΑ 7

1) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 4x - 5 = 0$

2) Αν x_1 , x_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 < x_2$, να λυθεί το

σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{x-x_1}{3} + y = \frac{y+x_2}{2} + x - 2 \\ -x + x_2 + y = 2 \cdot (y - 1 - x_1) \end{cases}$$

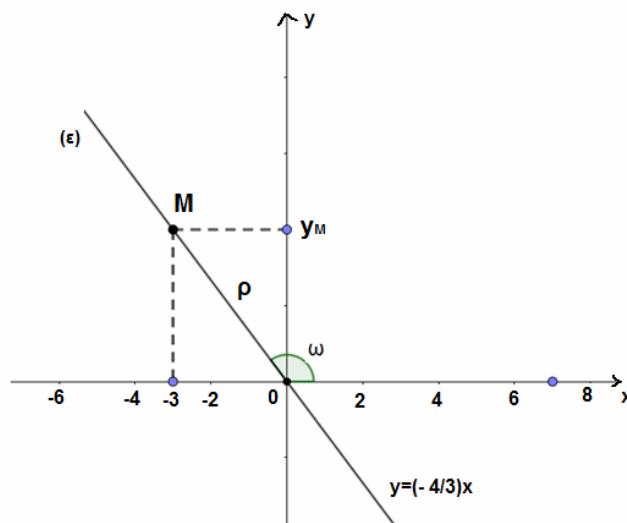
ΘΕΜΑ 8

Το σημείο $M(-3, y_M)$ ανήκει στην ευθεία (ε)

με εξίσωση $y = -\frac{4}{3} \cdot x$.

- 1) Να δείξετε ότι $y_M = 4$
- 2) Να υπολογίσετε την απόσταση $\rho = (OM)$
- 3) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω
- 4) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$\Sigma = \frac{3 \cdot \varepsilon\phi(180^\circ - \omega) + 5 \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) + 2}{10 \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) - 1}$$

**ΘΕΜΑ 9**

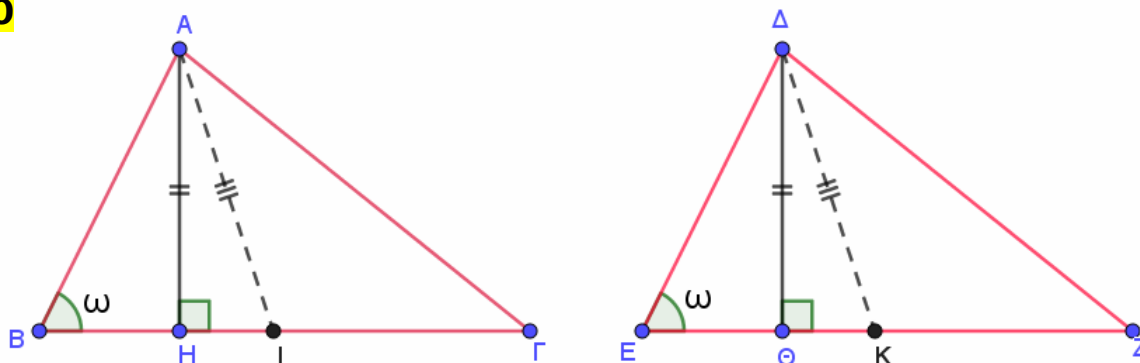
α) Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(2x-1)^2 + 3 \cdot (x+2)^3 - 3x^3 = (4x+5)^2 + x \cdot (9x-2) - 3x \cdot (x+2)$

β) Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = x^3 - x$, $B = x^2 + 2x + 1$ και $\Gamma = 2x + xy + y + 2$

β₁) Να γίνουν γινόμενα τα παραπάνω πολυώνυμα,

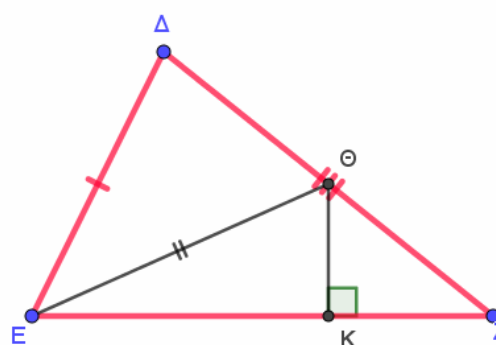
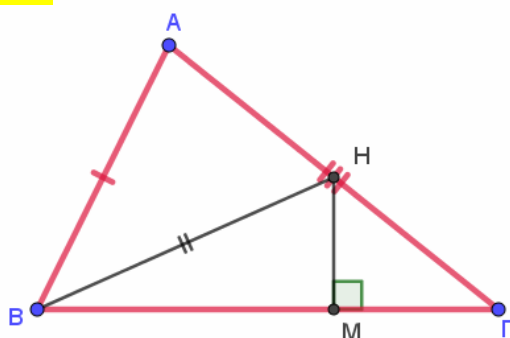
β₂) Για ποιες τιμές των x και y ορίζονται τα κλάσματα: $K_1 = \frac{B}{A}$ και $K_2 = \frac{A}{\Gamma}$

β₃) Να γίνουν οι πράξεις: $\Sigma = \left(\frac{B}{A} \cdot \frac{y+2}{\Gamma} + \frac{1}{x^2+x} \right) : \frac{2x}{x^2-1}$

ΘΕΜΑ 10

Δεδομένα: • $AH = E\Theta$ (ύψη) • $\widehat{ABH} = \widehat{EZ\Theta} = \omega$
• $AI = EK$ (διχοτόμοι στα τρίγωνα $BA\Gamma$ και $E\Delta Z$ αντίστοιχα).

Ζητούμενα: α) τρίγωνα BAH και $DE\Theta$ ίσα β) $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{E\hat{\Delta}Z}$ γ) $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$

ΘΕΜΑ 11

Δεδομένα:

- $ΑΓ = ΔΖ$, $ΑΒ = ΔΕ$ • $ΗΜ \perp ΒΓ$ και $ΘΚ \perp ΕΖ$
- $ΒΗ = ΕΘ$ (διάμεσοι στα τρίγωνα $ΒΑΓ$ και $ΕΔΖ$ αντίστοιχα).

Ζητούμενα: α) τρίγωνα $ΒΑΗ$ και $ΔΕΘ$ ίσα β) $\hat{ΒΑΓ} = \hat{ΕΔΖ}$ γ) $ΗΜ = ΘΚ$

ΘΕΜΑ 12

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = -(x-1) \cdot (x+2) + 3(x-1)^2$

α) Να δείξετε μετά από πράξεις το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = 2x^2 - 7x + 5$

β) Στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.

γ) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το $P(x)$.

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = 2x \cdot (x-3) - (x-2)^2 + 1$

α) Να δείξετε μετά από πράξεις το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = x^2 - 2x - 3$

β) Στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$.

γ) Να γίνει γινόμενο παραγόντων το $P(x)$.

ΘΕΜΑ 14

Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$ και $B = \frac{x^2 - x}{x^3 + x^2}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα;

β) Να δείξετε ότι : $A = \frac{x(x-1)}{x+1}$ και $B = \frac{x-1}{x(x+1)}$

γ) Να δείξετε ότι: $(A-B) : \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} = 2$

ΘΕΜΑ 15

Δίνονται τα κλάσματα $A = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$ και $B = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα;

β) Να δείξετε ότι : $A = x - 2$ και $B = \frac{x}{x-2}$

γ) Να δείξετε ότι: $\frac{2x-2}{x^2-2x} : \left(\frac{x}{A} - \frac{1}{B} \right) = 2$

ΘΕΜΑ 16

Α) Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

$$3 \cdot (x-3) + 24 > 5 \cdot (x+1) \quad \text{και} \quad \frac{3 \cdot (x+1)}{2} \geq \frac{3x-2}{3} - \frac{x+3}{6}$$

Β) Να παραστήσετε γραφικά τη λύση τους στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Γ) Να γράψετε τις κοινές τους λύσεις σε μορφή ανίσωσης.

Δ) Να γράψετε την **μικρότερη** και τη **μεγαλύτερη** ακέραια κοινή τους λύση.

Ε) Αν διαλέξετε στην τύχη μια από τις κοινές ακέραιες λύσεις, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: «Η κοινή ακέραια λύση να είναι θετική».

ΘΕΜΑ 17

α) Να αποδείξετε ότι: $3 \cdot (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha - \beta)^2 - 10 \cdot \alpha \cdot \beta = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$

β) Να δείξετε ότι: $\Sigma = \frac{3 \cdot (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot (\alpha - \beta)^2 - 10 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha^3 \cdot \beta - \alpha \cdot \beta^3} = \frac{1}{\alpha \cdot \beta}$

γ) Να γίνουν οι πράξεις: $M = \left[(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \Sigma - 2 \right] : \frac{\alpha^2 \cdot \beta - \alpha \cdot \beta^2}{\frac{1}{\Sigma}} + \beta - \alpha$

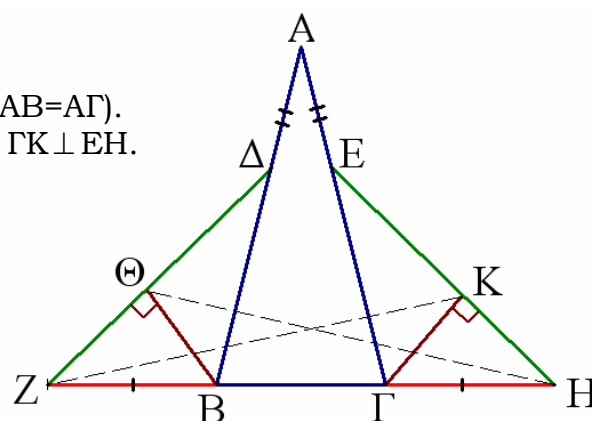
ΘΕΜΑ 18

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ).
Επίσης δίνονται : ΑΔ = ΑΕ, ΒΖ = ΓΗ και ΒΘ ⊥ ΔΖ, ΓΚ ⊥ ΕΗ.
Να δείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΕΓΗ είναι ίσα.

β) ΒΘ = ΓΚ

γ) ΖΚ = ΗΘ



ΘΕΜΑ 19

Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = 2x \cdot (1 - x^2)$, $B(x) = 2 \cdot (x+1)^3 - (x-2)^2$, $\Gamma(x) = (x+2) \cdot (x-2)$
και $\Delta(x) = 2 \cdot (4x - 3 + 5x^2)$.

1. Να γίνουν οι πράξεις στα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$ και $\Delta(x)$ ώστε να γραφούν κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .
2. Να αποδείξετε ότι: $A(x) - \Gamma(x) = B(x) - \Delta(x)$

ΘΕΜΑ 20

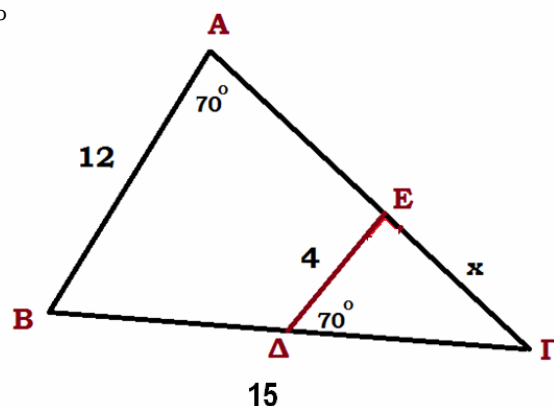
Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = x^2 - 2x$, $B = x^2 - 4$ και $\Gamma = x^2 - 4x + 4$.

1. Να γίνουν τα πολυώνυμα γινόμενο παραγόντων.
2. Για ποιες τιμές ορίζονται οι παραστάσεις: $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{\Gamma}$ και να απλοποιηθούν.
3. Να υπολογισθεί η παράσταση μετά από πράξεις: $\left(\frac{B}{\Gamma} - \frac{A}{B} \right) : \frac{9x^2 - 4}{B}$

ΘΕΜΑ 21

Στο διπλανό σχήμα δίνονται $AB = 12$, $B\Gamma = 15$ και $\Delta E = 4$
όπου ΔE είναι κάθετο στην $A\Gamma$. Επίσης: $\hat{A} = \hat{E\Delta\Gamma} = 70^\circ$

1. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια.
2. Να γραφούν οι αναλογίες των αντίστοιχων πλευρών τους καθώς και ο λόγος ομοιότητάς τους.
3. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $E\Gamma$.

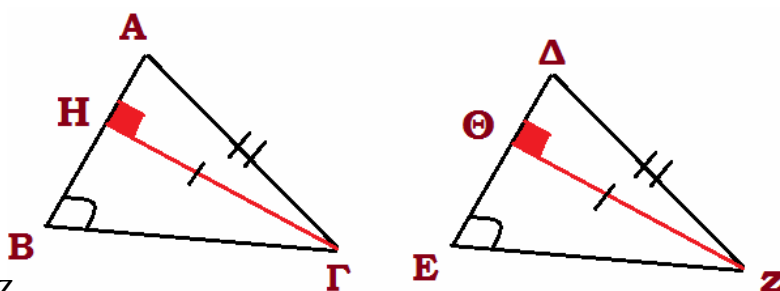
**ΘΕΜΑ 22**

Δεδομένα:

- $A\Gamma = \Delta Z$
- $\Gamma H = Z\Theta$ (ύψη)
- $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ B = \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\ E$

Ζητούμενα:

1. $B\Gamma = EZ$
2. $\triangle A\Gamma H = \triangle \Delta\Theta Z$
3. $\triangle A\Gamma B = \triangle \Delta EZ$



ΘΕΜΑ 23

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} - y = \frac{y-1}{2} - 1 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 24

Δίνονται τα πολυώνυμα: $B(x) = x^2 - 3x$, $\Gamma(x) = x^2 - 6x + 9$ και $A(x) = 2(x-1)^2 - (x^2 - 1)$.

1. Να γίνουν τα πολυώνυμα γινόμενο παραγόντων.

2. Για ποιες τιμές ορίζονται οι παραστάσεις: $\frac{B(x)}{A(x)}$, $\frac{B(x)}{\Gamma(x)}$ και να απλοποιηθούν.

3. Να υπολογισθεί η παράσταση μετά από πράξεις: $\left(\frac{B(x)}{A(x)} + \frac{B(x)}{\Gamma(x)} \right) : \frac{2x}{x^2 - 4}$

ΘΕΜΑ 25

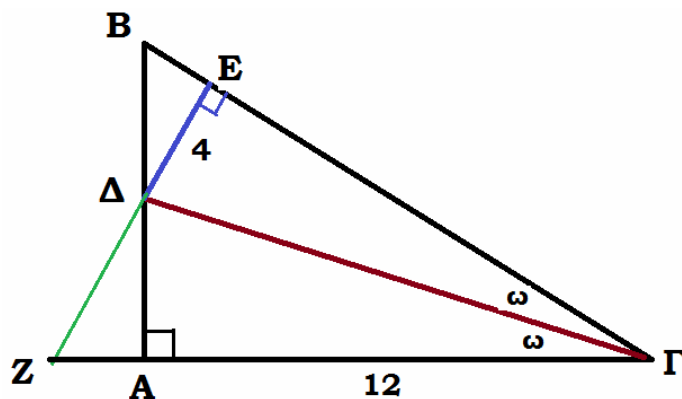
Στο διπλανό σχήμα :

Δίνονται :

- $AB\Gamma$ τρίγωνο ορθογώνιο
- $\Gamma\Delta$ διχοτόμος της γωνίας Γ
- Z : σημείο τομής της ΔE με ΓA
- $\Delta E = 4$ και $A\Gamma = 12$

Ζητούμενα:

1. Τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ = Τρίγωνο $\Delta E\Gamma$
2. Τρίγωνο $AB\Gamma$ = Τρίγωνο $ZE\Gamma$
3. Τρίγωνο $AZ\Delta$ όμοιο με τρίγωνο $AB\Gamma$

**ΘΕΜΑ 26**

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = x^2 - 3x$, $B = x^2 - 9$ και $\Gamma = x^3 - 6x^2 + 9x$

(α) Να μετατρέψετε τα πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων.

(β) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: $\frac{\Gamma}{A}$ και $\frac{B}{A}$.

(γ) Να δείξετε ότι: $\left(\frac{\Gamma}{A} \right)^2 - \left(x \cdot \frac{B}{A} \right)^2 = -12 \cdot \frac{A}{x-3}$

ΘΕΜΑ 27

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 7x - 9 = 0$.

β) Αν x_1, x_2 οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 > x_2$, να βρεθούν οι **κοινές ακέραιες** λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x - x_1}{2} - x < 1 \quad \text{και} \quad 2x_2 + x \leq -2 \cdot (x - 3)$$

ΘΕΜΑ 28

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ έχουν :

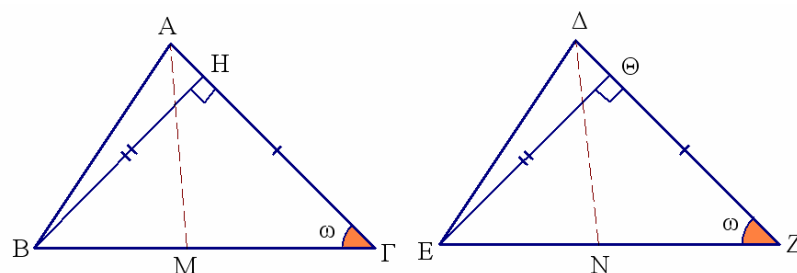
- $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$
- $ΑΓ = ΔΖ$
- και τα **ύψη** ΒΗ και ΕΘ ίσα.

Να αποδείξετε ότι:

α. $ΒΓ = ΕΖ$

β. τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

γ) Οι **διχοτόμοι** ΑΜ και ΔΝ των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα ίσες.

**ΘΕΜΑ 29**

(α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x+2)^2 - (x-2)^2 - 8 \cdot \left(x - \frac{3}{8}\right)$ είναι σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο του x).

(β) Αν $P(x) = 3$ τότε :

1. να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 2 \cdot P(x) \cdot x - 7 = 0$.

2. να απλοποιηθεί η παράσταση : $\Sigma = \frac{x^2 - 2 \cdot P(x) \cdot x - 7}{x^2 - 1}$

ΘΕΜΑ 30

A. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 7 \\ -3\alpha + 2\beta = -11 \end{cases}$$

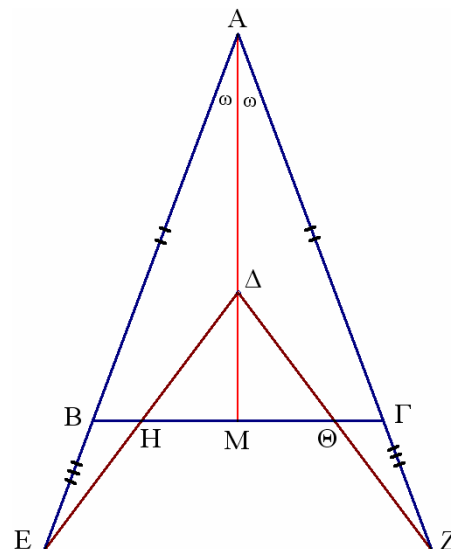
B. Αν $(\alpha, \beta) = (3, -1)$ η λύση του παραπάνω συστήματος, να βρεθούν οι **κοινές ακέραιες** λύσεις των ανισώσεων:

$$x - \alpha \leq \frac{x - 5}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x + \beta}{3} - 1 < x$$

ΘΕΜΑ 31

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($AB = AG$) και ΑΜ διχοτόμος του. Στις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ ώστε $BE = ΓΖ$. Αν Δ τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΑΜ τότε:

- α) να δείξετε ότι $ΔΕ = ΔΖ$.
 β) τα τρίγωνα ΒΗΕ και ΓΘΖ είναι ίσα.
 (τα σημεία Η και Θ είναι τα σημεία τομής των τμημάτων ΔΕ και ΔΖ με την ΒΓ αντίστοιχα.)
 γ) το τρίγωνο ΔΗΘ είναι ισοσκελές

**ΘΕΜΑ 32**

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2x-1)^2 - 3(x-1)(x+1)$ και $B = (2-x)(2+x) + 2(x+1) - 6$

(α) Αφού κάνεις τις πράξεις να δείξεις ότι $A = x^2 - 4x + 4$ και $B = -x^2 + 2x$

(β) 1. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις Α και Β

2. Να απλοποιηθεί το πηλίκο $\frac{A}{B}$, για τις τιμές του x που ορίζεται

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $A+B>0$ και να εμφανίσετε την λύση σε άξονα των πραγματικών αριθμών

ΘΕΜΑ 33

Δίνεται το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta-2}{5} = \alpha + \beta - 3 \\ 3(\alpha-2) - 5(\beta-1) = -8 \end{cases}$$

1. Να δείξετε ότι μετά από πράξεις το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} 5\alpha + 8\beta = 21 \\ 3\alpha - 5\beta = -7 \end{cases}$$

2. Να δείξετε ότι η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(\alpha, \beta) = (1, 2)$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $2(x-\alpha)^2 - 3(x-\beta) = -(2x-5)$, όπου α, β το ζεύγος λύσης του παραπάνω συστήματος.

ΘΕΜΑ 34

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = x^2 - 2x$, $B = x^2 - 4$ και $\Gamma = x^3 + 4x^2 + 4x$

(α) Να μετατρέψετε τα πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων.

(β) Για ποιες τιμές του x, ορίζετε η παράσταση $\Delta = \frac{2}{B} - \frac{1}{A}$.

(γ) Να δείξετε ότι: $\Delta = \frac{x+2}{\Gamma}$

ΘΕΜΑ 35

Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ και $\eta\mu\omega = 15/17$

Να υπολογίσετε:

(α) το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$

(β) Την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)}{\eta\mu(180^\circ - \omega)} + (2024 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega + 2024 \cdot \eta\mu^2\omega)$

ΘΕΜΑ 36

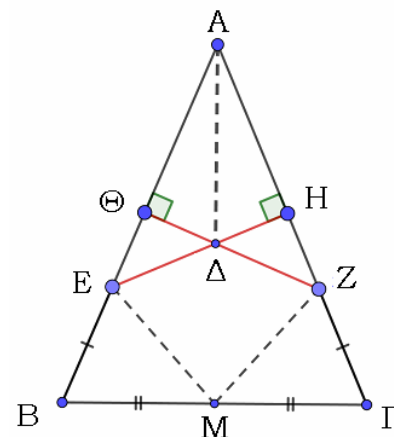
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$).

Τα σημεία M είναι μέσο του $B\Gamma$, $BE = \Gamma Z$ και EH , $Z\Theta$ κάθετες στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(α) $ME = MZ$,

(β) τα τρίγωνα AEH και $A\Theta Z$ είναι ίσα και

(γ) $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας A , όπου Δ η τομή των EH και $Z\Theta$

**ΘΕΜΑ 37**

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A = (x+1)^2 - 2(x-1)(x+1) - 1$, $B = (2x-3)^2 - 4(x-1)^2 - 10$

(α) Να γίνουν οι πράξεις και να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

(β) Να λυθεί η εξίσωση: $A - B = 4$

(γ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\Gamma = \frac{A + 2x - 5}{A - 3}$, αφού βρείτε τις τιμές του x στο οποίο ορίζεται.

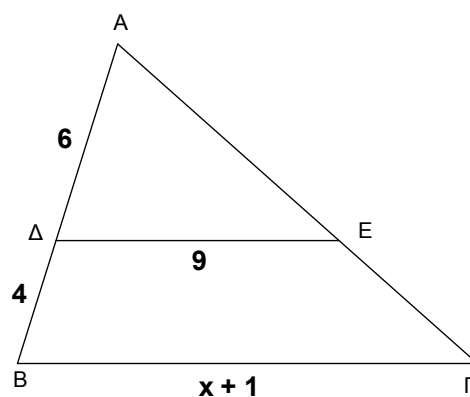
ΘΕΜΑ 38

Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$

και $A\Delta = 6$, $\Delta B = 4$, $\Delta E = 9$ και $B\Gamma = x + 1$

1. Ναδειχθεί ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ είναι όμοια.

2. Να υπολογιστεί το x

**ΘΕΜΑ 39**

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A = x^2 - 10x + 25$, $B = x^2 - 25$ και $\Gamma = 3x - 15$

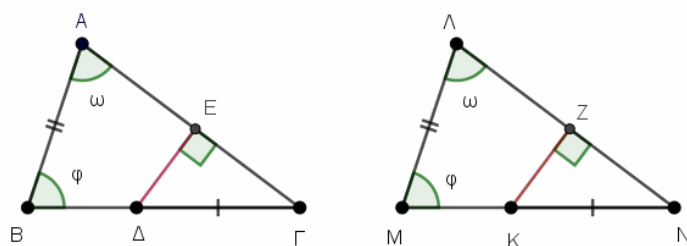
1. Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{A - \Gamma}{5}$, για $x = -2$

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις A , B και Γ

3. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα $\frac{A}{\Gamma}$ και $\frac{B}{A}$.

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 40

ΔΕΔΟΜΕΝΑ :

AB=ΛΜ και ΓΔ = ΝΚ

 $\angle A = \angle \Lambda = \omega$ και $\angle B = \angle M = \varphi$ $\angle E = \angle Z = 90^\circ$

ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ :

α) $\triangle AB\Gamma = \triangle \Lambda MN$ β) $DE = KZ$ **ΘΕΜΑ 41**α) Να αποδείξετε ότι: $2(x-1)^2 - (1-x) \cdot (x+1) = 2x \cdot (3x-1)$ β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση: $\Sigma(x) = \frac{9x^3 - x}{2(x-1)^2 - (1-x)(x+1)}$;γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\Sigma(x)$ και να υπολογίσετε το $\Sigma(333)$.**ΘΕΜΑ 42**α) Να λυθεί η εξίσωση: $-3x^2 + 2x + 1 = 0$ (1)

β) Να βρεθούν οι κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{x-1}{2} - 1 \leq x \quad \text{και} \quad \frac{2x+3}{4} - x > \frac{1}{2}$$

γ) Ποιες λύσεις της εξίσωσης (1) επαληθεύουν και τις δύο παραπάνω ανισώσεις;

ΘΕΜΑ 43α) Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma) : \begin{cases} \frac{\alpha+4}{3} + \beta = 3 \\ 2\alpha + \frac{\beta-3}{2} = -8 \end{cases}$ β) Αν $(\alpha, \beta) = (-4, 3)$ η λύση του συστήματος (Σ) και $M(\alpha, \beta)$ σημείο του επιπέδου των αξόνων $x'x$ και $y'y$ με $\hat{\omega} = \hat{xOM}$ τότε:β1. να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{\omega}$ β2. να δείξετε ότι: $\frac{10 \cdot \eta\mu\omega - 4 \cdot \epsilon\phi\omega}{5 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega} = \epsilon\phi\omega$.

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗ

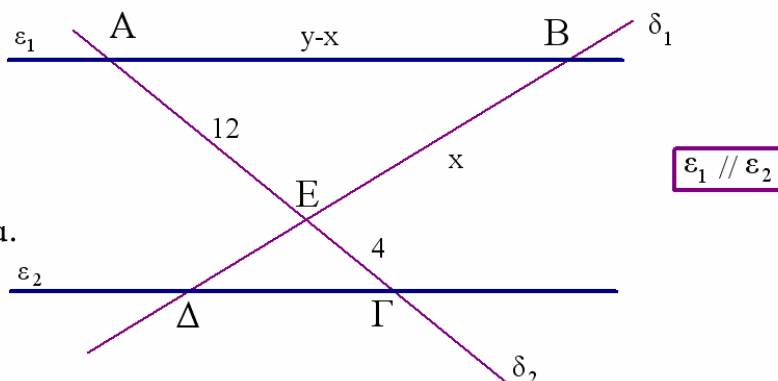
ΘΕΜΑ 44

Στο διπλανό σχήμα είναι

- $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ • $BD = 20$
- $AE = 12$ • $EG = 4$
- $BE = x$ • $AB = y - x$.

Να δείξετε ότι:

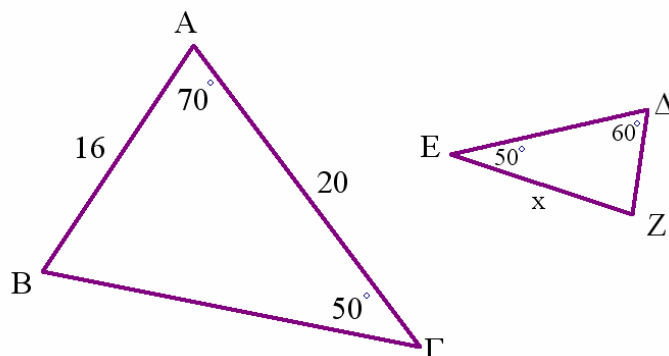
- α) Τα τρίγωνα AEB και GED είναι όμοια.
 β) Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητάς τους.
 γ) Να υπολογίσετε τα x και y .



ΘΕΜΑ 45

Στο διπλανό σχήμα :

- α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABG και DEZ είναι όμοια.
 β) Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητάς τους.
 γ) Να υπολογισθεί η πλευρά EZ .



ΘΕΜΑ 46

A) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

α) $2 \cdot (x - 2) - x < 1$ και β) $\frac{x-1}{3} - \frac{x}{2} \leq \frac{x+2}{6}$

B) Αν x_0 η μεγαλύτερη κοινή ακέραια λύση των παραπάνω ανισώσεων και ω αμβλεία γωνία τριγώνου ώστε : $\eta\mu\omega = \frac{x_0}{5}$ τότε:

1) Να υπολογίσετε : **συνω** και **εφω**

2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\Sigma = \frac{5 \cdot \text{συν}(180^\circ - \omega) - 3 \cdot \text{εφ}(180^\circ - \omega)}{10 \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) - 9}$

ΘΕΜΑ 47

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = (2x - 1)^2 - 3(x - 1) \cdot (x + 1) - (-1)^{2024}$

A) Να δείξετε μετά από πράξεις ότι : $P(x) = x^2 - 4x + 3$

B) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

$P(x)$, $A(x) = x^2 - x$, $B(x) = x^3 - 9x$ και $\Gamma(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

Γ) Να απλοποιηθούν οι ρητές παραστάσεις : $\frac{x}{A(x)}$ και $\frac{\Gamma(x)}{B(x)}$

ΘΕΜΑ 48

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^3 - x(x-1)(x+1) - (2x-1)^2 - 7$

A. Να δείξετε ότι : $P(x) = -x^2 + 8x - 7$

B. Να γίνει το $P(x)$ γινόμενο παραγόντων.

Γ. Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{3x}{x+1} - \frac{x-7}{P(x)} - \frac{6}{x^2-1}$

ΘΕΜΑ 49

Να λυθούν τα συστήματα :

$$(\Sigma_1): \begin{cases} \frac{x+2}{4} + \frac{y+1}{2} = -(x+y) \\ \frac{3x+y}{5} + y = \frac{2y+x}{3} \end{cases}$$

$$(\Sigma_2): \begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{y+1}{2} = x+y-1 \\ 3x-5y=11 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3): \begin{cases} \frac{3x-y}{2} - \frac{x-y}{8} = 1-y \\ 3(2x-1) + 2(y+2) = 9 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 50

A) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα πολυώνυμα:

$$A(x) = x^2 + 3x, \quad B(x) = x^2 - 6x + 9 \quad \text{και} \quad \Gamma(x) = x^3 - 9x$$

B) Να βρεθεί το **Ε. Κ. Π.** των πολυωνύμων: $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$

Γ) Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{1}{A(x)} + \frac{2}{B(x)} + \frac{6}{\Gamma(x)}$.

ΘΕΜΑ 51

A. Να παραγοντοποιήσετε τις ποσότητες : **α)** $x^2 - x$, **β)** $x^2 - 1$.

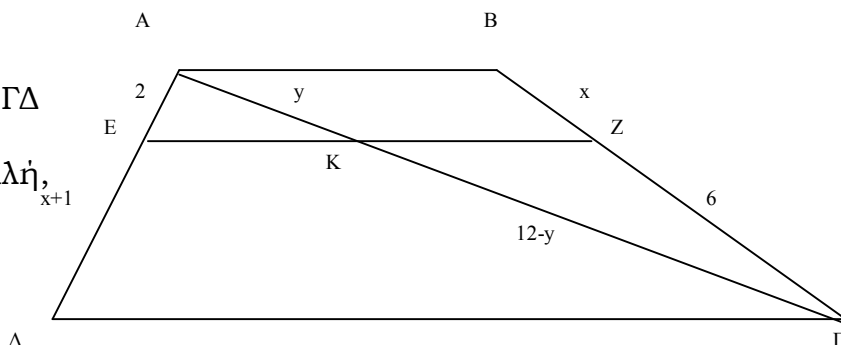
B. Να βρείτε τις τιμές του x που ορίζονται οι παραστάσεις: **α)** $\frac{1}{x}$ **β)** $\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$ **γ)** $\frac{2x-1}{x^2-x}$

Γ. Να γίνουν οι πράξεις: $\left(\frac{2x-1}{x^2-x} + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2-1} \right) : \frac{x^2-4}{x^3-x}$

ΘΕΜΑ 52

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και $EZ \parallel AB$.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή, να υπολογίσετε το x και το y .



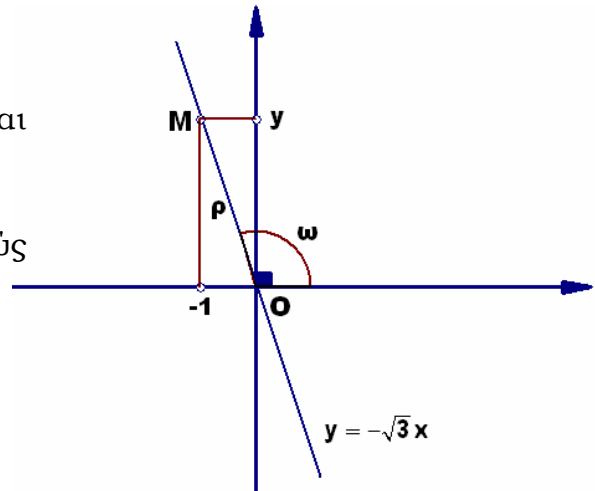
ΘΕΜΑ 53

Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα:

A) Να δείξετε ότι η τεταγμένη y του σημείου M είναι $y = \sqrt{3}$.

B) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Γ) Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας ω .

**ΘΕΜΑ 54**

Ο κυρ Μιχάλης έχει ένα χωράφι στο χωριό ΑΒΓΔ σχήματος τραπεζίου ($AD \parallel BG$) με $AD = 8 \text{ m}$ και $DG = 28 \text{ m}$. Η πλευρά AB και η πλευρά BG είναι καλυμμένη με νερό όπου μετά από έντονη βροχόπτωση πολλών ημερών είναι αδύνατο να μετρηθούν.

Θέλει να υπολογίσει επειγόντως την **περίμετρο** και το **εμβαδόν** του χωραφιού.

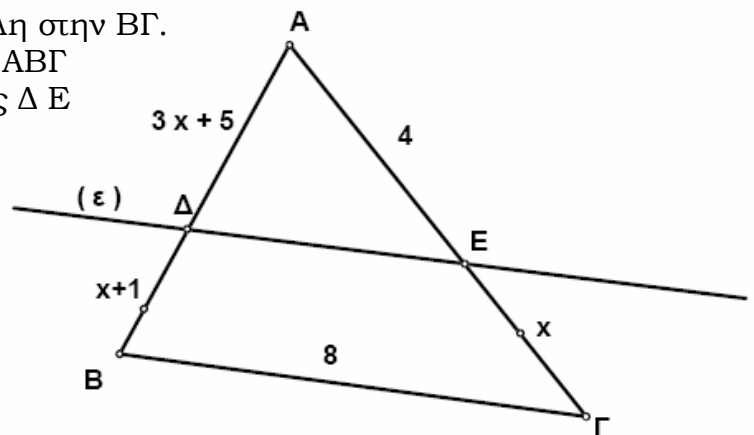
Ο εγγονός του ο Μπάμπης μαθητής της Γ' Γυμνασίου τον βοήθησε σχηματίζοντας ένα τρίγωνο ADE επί των πλευρών BA και GD , με $AE = 5 \text{ m}$, $DE = 7 \text{ m}$ όπως φαίνεται στο σχήμα.

Πως υπολόγισε ο Μπάμπης την περίμετρο του χωραφιού ;

**ΘΕΜΑ 55**

Δίνεται τρίγωνο ABG και ευθεία (ε) παράλληλη στην BG .

Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ABG αν $BG = 8$, καθώς και το μήκος της πλευράς AE

**ΘΕΜΑ 56**

Αν ω αμβλεία γωνία και $\sin \omega = -\frac{5}{13}$ τότε:

A) Να δείξετε ότι: $\eta \mu \omega = \frac{12}{13}$ και $\epsilon \phi \omega = -\frac{12}{5}$

B) Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\Sigma = 100 \cdot [39 \cdot \eta \mu(180^\circ - \omega) - 26 \cdot \sin(180^\circ - \omega) - \epsilon \phi(180^\circ - \omega) - 3,5]$$

ΘΕΜΑ 57

α) Να λυθεί η εξίσωση: $2 \cdot (x-1)^2 - x + 7 = (x+2)^2 - 3x$

β) Εξετάστε αν η μικρότερη λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη ακέραιη κοινή λύση των ανισώσεων:

$$\frac{3x+2}{2} - x < 2 \quad \text{και} \quad \frac{2x+1}{3} - 1 \leq x.$$

ΘΕΜΑ 58

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$).
Επίσης: $BE = \Gamma\Delta$, $\Delta Z \perp AB$, $EH \perp A\Gamma$ και M η τομή των ΔZ και EH .

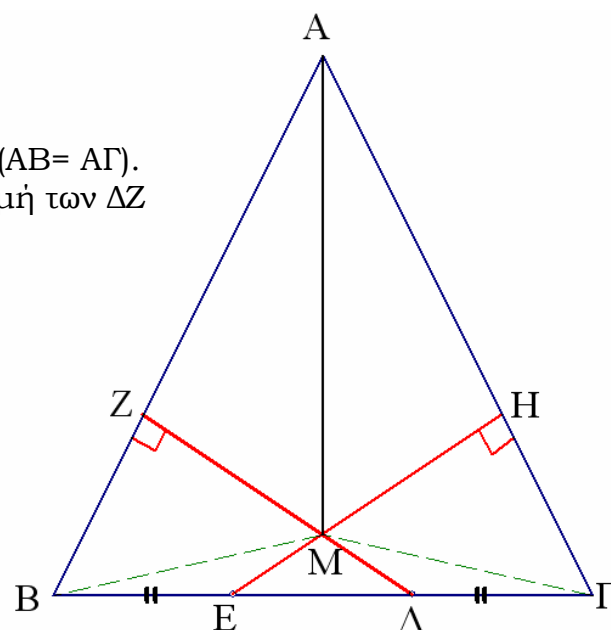
α) Να δείξετε ότι $\Delta Z = EH$.

β) Να δείξετε ότι: AM διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$.

γ) Τα τρίγωνα $BM\Delta$ και $EM\Gamma$ είναι ίσα.

δ) Το τρίγωνο $ME\Delta$ είναι ισοσκελές

ε) Τα τρίγωνα ABM και $AM\Gamma$ είναι ίσα.

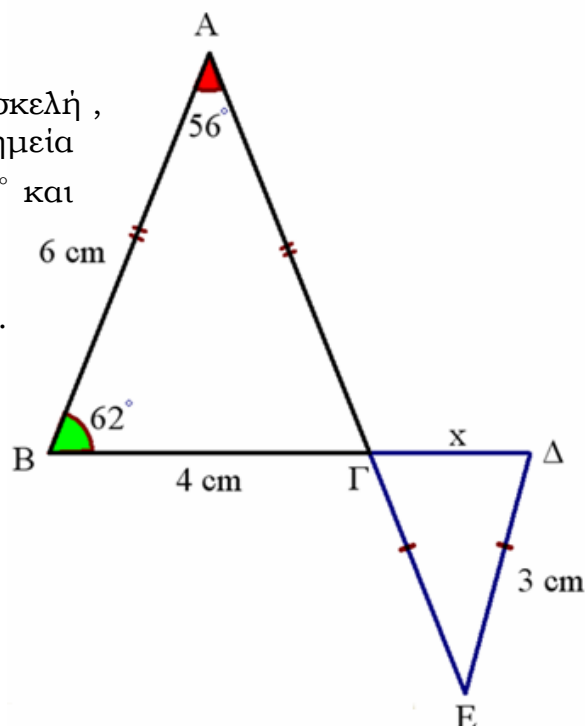
**ΘΕΜΑ 59**

Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελή, με $AB = A\Gamma = 6 \text{ cm}$ και $E\Gamma = E\Delta = 3 \text{ cm}$, όπου τα σημεία B, Γ, Δ είναι στην ίδια ευθεία, με $B\Gamma = 4 \text{ cm}$, $\widehat{A} = 56^\circ$ και $\widehat{B} = \widehat{A\Gamma B} = 62^\circ$.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια.

β) Να βρεθεί ο λόγος ομοιότητάς τους.

γ) Να υπολογίσετε την πλευρά $\Gamma\Delta$.



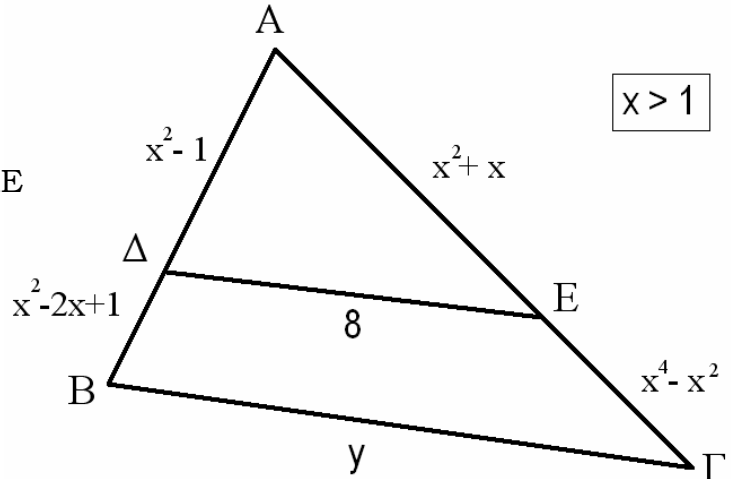
ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

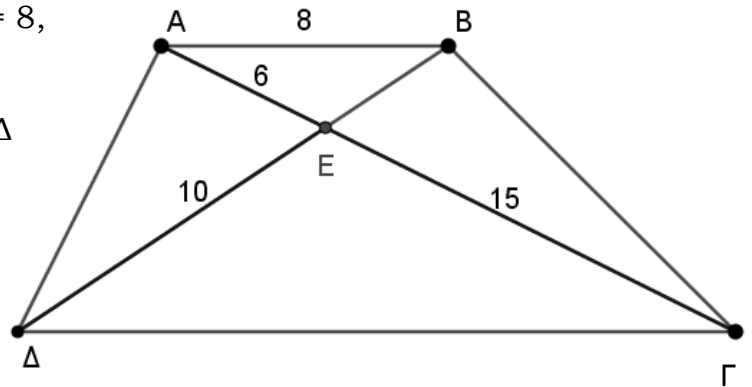
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 60

Στο διπλανό σχήμα

α) Να δείξετε ότι $ΔΕ \parallel ΒΓ$.**β)** Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΔΕ$ είναι όμοια.**γ)** Αν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = 3$ και $ΔΕ = 8$,
να βρεθούν τα x, y .**ΘΕΜΑ 61**

Δίνεται το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΔΓ$,
 $Ε$ σημείο τομής των διαγώνων, $ΑΕ = 6$, $ΑΒ = 8$,
 $ΓΕ = 15$ και $ΔΕ = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΕΒ$ και $ΓΕΔ$ είναι όμοια.**β)** Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.**γ)** Να υπολογίσετε τα τμήματα $ΒΕ$ και $ΓΔ$.

(Τράπεζα θεμάτων: άσκηση 16113)

ΘΕΜΑ 62

Στις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ τριγώνου $ΑΒΓ$ παίρνουμε σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα ώστε η $ΔΕ$ να είναι παράλληλη στην $ΒΓ$ και $ΑΔ = 1$, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ \cdot ΒΔ = ΓΕ$.**β)** Αν επιπλέον $ΒΔ = ΑΕ$ και $ΓΕ = 9$:**i.** Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = 3$ και $ΑΒ = 4$.**ii.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Τράπεζα θεμάτων: άσκηση 21986)

