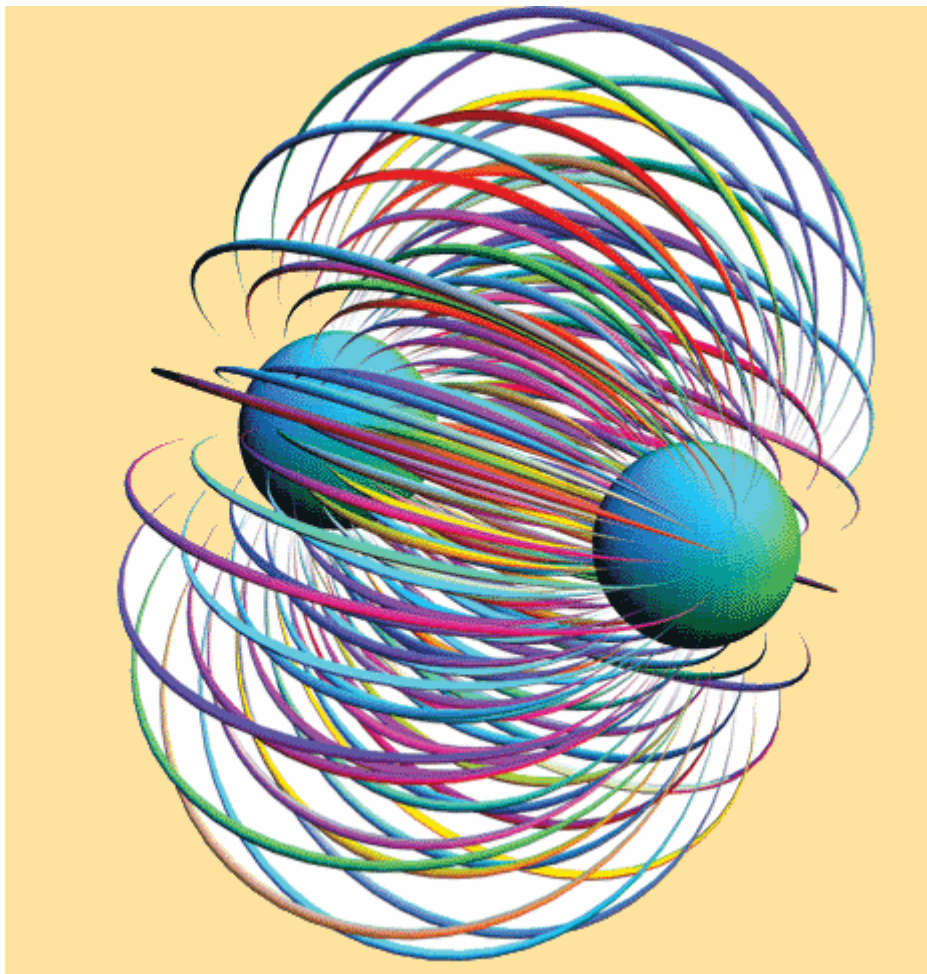


ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ:

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ



*Αφιερωμένο στους ακούραστους μαθητές μου που
διψούν για μάθηση!!!*

6^ο Γυμνάσιο Χαλκίδας



ΘΕΩΡΙΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Ποιες παραστάσεις λέγονται αριθμητικές και ποιες αλγεβρικές; Πότε μια αλγεβρική παράσταση λέγεται ακέραια; Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης;

Απάντηση

• Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς ονομάζονται **αριθμητικές παραστάσεις**.

• Μαθηματικές εκφράσεις-παραστάσεις οι οποίες, εκτός από αριθμούς, περιέχουν και μεταβλητές (γράμματα που παριστάνουν αριθμούς) λέγονται **αλγεβρικές παραστάσεις**.

• Ειδικότερα μια αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

• Αν σε μια αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά τιμή της.

2. Τι ονομάζεται μονώνυμο; Τι ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου και τι συντελεστής του; Τι ονομάζεται βαθμός του μονωνύμου ως προς μια μεταβλητή του και τι βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές;

Απάντηση

• Οι **ακέραιες αλγεβρικές** παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα** π.χ. $-3x^2y^4\omega$

• Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του με τους αντίστοιχους εκθέτες τους λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

• Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ ο βαθμός του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το **άθροισμα των εκθετών** των μεταβλητών του.

3. Πότε δύο μονώνυμα λέγονται όμοια, πότε ίσα και πότε αντίθετα; Ποιο μονώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

Όμοια μονώνυμα λέγονται εκείνα που έχουν ίδιο κύριο μέρος. Για παράδειγμα τα μονώνυμα είναι όμοια : $-3x^2y^4\omega$ και $\sqrt{7}x^2y^4\omega$

• Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα** ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα** π.χ. $\sqrt{7}x^2y^4\omega$ και $-\sqrt{7}x^2y^4\omega$

• Οι αριθμοί είναι μονώνυμα και τα ονομάζουμε **σταθερά μονώνυμα** και είναι **μηδενικού βαθμού**. Ειδικότερα, ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**.

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



4. Τι ονομάζεται πολυώνυμο; Τι ονομάζεται βαθμός του πολυωνύμου; Ποιο πολυώνυμο λέγεται σταθερό και ποιο μηδενικό;

Απάντηση

• Τα Αθροίσματα μη ομοίων μονωνύμων είναι μια αλγεβρική παράσταση, που λέγεται **πολυώνυμο**.

• **Βαθμός ενός πολυωνύμου** ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

• Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται **σταθερό πολυώνυμο**. Ο αριθμός μηδέν λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο** και **δεν έχει βαθμό**, ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι **μηδενικού βαθμού**.

5. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

Απάντηση

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

6. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

3. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

4. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη: $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) =$
 $= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

5. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

Απόδειξη: $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

7. Ποια διαδικασία ονομάζεται παραγοντοποίηση; Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τους;

Απάντηση

• Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

• **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

• **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.



8. Τι είναι η Διακρίνουσα; Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης: $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$;

Απάντηση

Διακρίνουσα Δ είναι ο αριθμός $b^2 - 4ac$, δηλαδή $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει **δύο άνισες** λύσεις τις : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει **μία διπλή** λύση την : $x = -\frac{b}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (**αδύνατη**).

9. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, y ; Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ; Πως ερμηνεύεται γραφικά ότι ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μία λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις;

Απάντηση

- **Γραμμική εξίσωση** με αγνώστους x, y ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ και παριστάνει ευθεία όταν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.
- **Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων** με δύο αγνώστους x και y ονομάζεται κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.
- Αν οι δύο ευθείες που αντιπροσωπεύουν τις δύο εξισώσεις του συστήματος τέμνονται, τότε οι συντεταγμένες του σημείου τομής τους αποτελούν τη μοναδική λύση του συστήματος. Αν οι δύο ευθείες είναι παράλληλες τότε το σύστημα είναι αδύνατο και όταν οι ευθείες ταυτίζονται, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα; (ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ)

Απάντηση

1. Όταν οι πλευρές του ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές του άλλου τριγώνου, τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Π - Π - Π**)
2. Όταν 2 πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με 2 πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες γωνίες είναι ίσες τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Π - Γ - Π**)
3. Όταν μία πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες, τότε τα 2 τρίγωνα είναι ίσα. (**Γ - Π - Γ**)

2. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Απάντηση

1. Όταν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μία πλευρά και μία οξεία γωνία ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.
2. Όταν 2 πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με 2 πλευρές ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.



3. Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, να αποδείξετε ότι θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε οποιαδήποτε άλλη ευθεία τις τέμνει.

Απάντηση

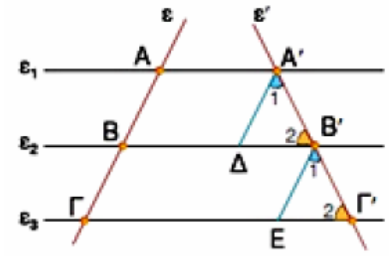
Παίρνουμε τρεις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ που τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία A, B, Γ αντιστοίχως, έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

Αν μια άλλη ευθεία ε' τέμνει τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ στα σημεία A', B', Γ' αντιστοίχως, τότε θα αποδείξουμε ότι και τα ευθύγραμμα τμήματα $A'B', B'\Gamma'$ είναι ίσα μεταξύ τους.

Πράγματι, αν φέρουμε $A'\Delta // \varepsilon, B'E // \varepsilon$ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A'B'\Delta$ και $B'\Gamma'E$ παρατηρούμε ότι έχουν:

- $A'\Delta = B'E$ γιατί $A'\Delta = AB, B'E = B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων $AA'\Delta B, BB'E\Gamma$ αντιστοίχως και από την υπόθεση έχουμε $AB = B\Gamma$.
- $\widehat{B'}_2 = \widehat{\Gamma'}_2$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ που τέμνονται από την ε' .
- $\widehat{A'}_1 = \widehat{B'}_1$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων $A'\Delta, B'E$ που τέμνονται από την ε' .

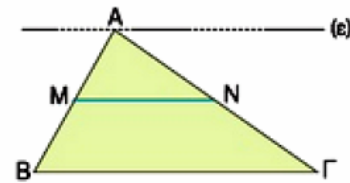
Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα, γιατί έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία. Άρα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $A'B' = B'\Gamma'$.



4. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απάντηση

Σ' ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ από την κορυφή A φέρουμε ευθεία $\varepsilon // B\Gamma$ και από το μέσο M της AB φέρουμε $MN // B\Gamma$. Οι παράλληλες $\varepsilon, MN, B\Gamma$ αφού ορίζουν ίσα τμήματα στην AB , θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην $A\Gamma$. Άρα $AN = N\Gamma$.



3. Τι είναι ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων; Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ ; Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών;

Απάντηση

• Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους, εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

• Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β, δ , όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

• 1. Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο

$$\text{των μέσων όρων. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

2. Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να

$$\text{προκύψει πάλι αναλογία. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ή} \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

3. Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και

$$\text{παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών. Δηλαδή αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

4. Με τι είναι ίση η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας.

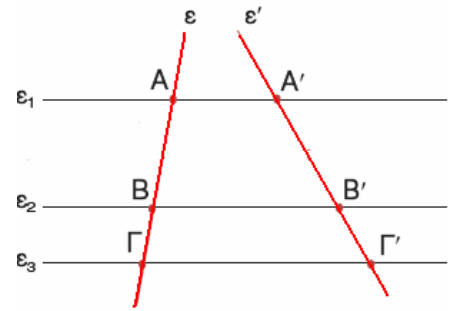


4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Θαλή

Απάντηση

Όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν 2 άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα με τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη.

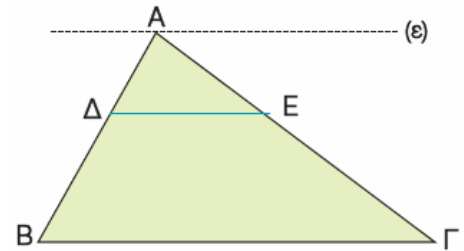
$$\text{δηλ.: } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{AG}{A'G'}$$



Εφαρμογή σε τρίγωνο

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ τότε $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$
- Αν $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$ τότε $\Delta E \parallel B\Gamma$



5. α) Πότε δύο πολύγωνα είναι όμοια; Τι σχέση έχουν οι πλευρές τους στη περίπτωση αυτή;

β) Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

Απάντηση

α) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια. Τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

- β) • Όταν έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες ή
• Όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

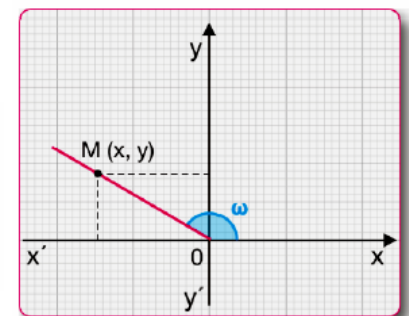
5. α) Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του επιπέδου. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\hat{\omega} = \hat{xOM}$;

Απάντηση

Έστω ρ η απόσταση του M από την αρχή O των αξόνων. Είναι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$



β) Ποιο είναι το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω ;

Απάντηση

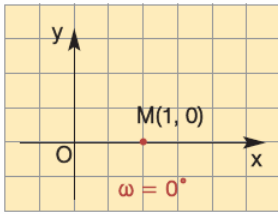
Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε είναι $x > 0, y > 0, \rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \epsilon\phi\omega > 0$.

Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε είναι $x < 0, y > 0, \rho > 0$, οπότε: $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$.



γ) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0° , 90° και 180° .

Απάντηση

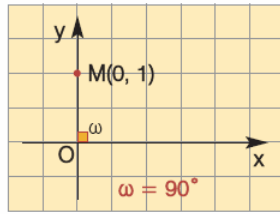


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Ox
π.χ. το $M(1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 0^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\epsilon\phi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

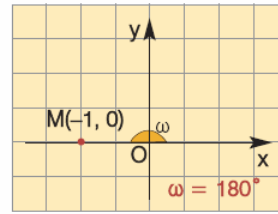


Αν Μ σημείο του ημιάξονα Oy
π.χ. το $M(0,1)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 90^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$\epsilon\phi 90^\circ$ δεν ορίζεται
(γιατί $x=0$)



Αν Μ σημείο του ημιάξονα Ox'
π.χ. το $M(-1,0)$, τότε $\omega = \widehat{xOM} = 180^\circ$
και $\rho = OM = 1$. Άρα:

$$\eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\epsilon\phi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

δ) Να δείξετε ότι: $\eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = 1$ και $\epsilon\phi \omega = \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega}$

Απάντηση

$$\bullet \eta\mu^2 \omega + \sigma\upsilon\nu^2 \omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

$$\bullet \frac{\eta\mu \omega}{\sigma\upsilon\nu \omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{\rho \cdot x} = \frac{y}{x} = \epsilon\phi \omega$$

ε) Αν δύο γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε ποια σχέση έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί τους;

Απάντηση

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu \omega$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu \omega$, $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\phi \omega$

6. Να διατυπώσετε τον **Νόμο Ημιτόνων** και τον **Νόμο Συνημιτόνων**

Απάντηση

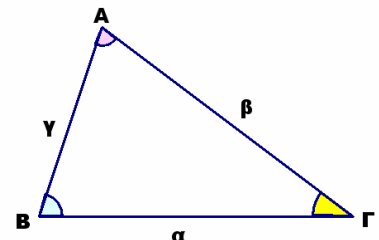
Νόμο Ημιτόνων: Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες

προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

Νόμο Συνημιτόνων:

Το τετράγωνο κάθε πλευράς τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο των πλευρών αυτών επί το συνημίτονο της περιεχόμενης γωνίας.

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \hat{A} \quad , \quad \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu \hat{B} \quad \text{και} \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \hat{\Gamma}$$





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ, ν ώστε :

(i) οι παραστάσεις $(\lambda + 2) \cdot x^3 \cdot y^{\mu-1}$, $-4x^{\nu+1} \cdot y^3$ να είναι αντίθετα μονώνυμα.

(ii) οι παραστάσεις $(2\lambda + 1) \cdot x^{\mu-1} \cdot y^2$, $-5x^2 \cdot y^{\nu+2}$ να είναι ίσα μονώνυμα

2. Να συμπληρωθούν οι παρακάτω ισότητες :

α) $(x+2)^2 = x^2 + 4x + \dots$ β) $(x+\dots)^2 = x^2 + \dots + 9$ γ) $(\dots-5)^2 = \dots - 10x + \dots$

δ) $\left(\frac{x}{3} - \dots\right)^2 = \dots - 2x + \dots$ ε) $x^2 - \dots = (\dots + 5) \cdot (\dots - \dots)$ στ) $(x+\dots)^3 = \dots + 6x^2 + \dots + \dots$

3. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες :

α) $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$ β) $(\alpha^2 + 4) \cdot (\beta^2 + 1) - (\alpha\beta + 2)^2 = (2\beta - \alpha)^2$

γ) $(\alpha + \beta)^3 + 2(\alpha^3 + \beta^3) = 3 \cdot (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta^2)$ δ) $(2\alpha + \beta)^2 + \beta^2 = 2 \cdot [\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2]$.

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του x

α) $(x+2)^2 + (x+1)^2 - 2 \cdot (x-1)^2 - 5 \cdot (2x+1)$ β) $(x^2-2)^2 - 2 \cdot (x^2+1)^2 - 4 \cdot (x^2-1)^2 + 5x^4$

5. Να αναλυθούν σε γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω πολυώνυμα :

α) $x^2 + xy - x - y$ β) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$ γ) $(x-2y)^2 - 4y^2$ δ) $(x^2+1)^2 - 4x^2$

ε) $\alpha \cdot x^2 - \alpha \cdot y^2 + \beta \cdot x^2 - \beta \cdot y^2$ στ) $(x-1)^2 \cdot (x^2-4) - (x^2-4)$ ζ) $x^3 + 2x^2 + x + xy + y$

6. Να γίνουν οι πράξεις :

α) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+7x+12} : \frac{x-3}{x+3}$ β) $\frac{x^2-x}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2+3x+2}{2-x} : \frac{x^2-1}{x^2-4}$

γ) $\left(\frac{2}{3x} - x + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)$ δ) $\left[\frac{1}{\alpha} : (-\alpha) + \frac{1}{\alpha^3}\right] : \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$

ε) $\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} - 2\alpha\right) \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2} : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$ στ) $\frac{1-x^2}{1-2y+y^2} \cdot \frac{1-y^2}{y^2-2xy+x^2} \cdot \left(\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right) : \frac{1+x}{x-y}$

7. Να γίνουν οι πράξεις :

α) $\left(\frac{\alpha}{\alpha-x} - \frac{\alpha}{\alpha+x}\right) : \left(\frac{x}{\alpha-x} + \frac{x}{\alpha+x}\right)$ β) $\left(\frac{x^4-1}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+x}{x-1}\right) : \frac{x^2+1}{x}$ γ) $\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}\right) : \frac{3}{x^2+3x}$

δ) $(4x^2+2x) : \left[\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) : (2x^2+2x)\right]$ ε) $\frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}\right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2 \cdot y + x \cdot y^2} \cdot (x+y)$



8. Να γίνουν οι πράξεις :

$$\alpha) \frac{4x}{x^2-x} - \frac{4}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} \quad \beta) 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} - \frac{2x}{x^2-4} \quad \gamma) \frac{x}{x+4} + \frac{3}{x-1} - \frac{20}{x^2+3x-4}$$

$$\delta) 1 - \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-10}{x^2-2x} - \frac{x+2}{x} \quad \epsilon) \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x^2-x-2} \quad \sigma\tau) \frac{2x}{x-2} + \frac{x}{x+3} - \frac{11x-2}{x^2+x-6}$$

9. Δίνεται η παράσταση $K(x) = (x^2-9)^2 - (x-3)^2 \cdot (x^2+4x+3)$

(i) να γίνει γινόμενο παραγόντων (ii) να λυθεί η εξίσωση $K(x) = 0$

10. Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A(x) = (x^2-4)^2 - 9 \cdot (x^3-4x^2+4x) \quad \text{και} \quad B(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-3x+2} : \frac{x^3+2x^2}{x^3-x}$$

(i) να παραγοντοποιηθεί η $A(x)$ και να απλοποιηθεί η $B(x)$

(ii) να γίνουν οι πράξεις : $\frac{A(x)}{B(x)} : \left(\frac{x+1}{x^2-4x+4} \right)^{-1} - 10$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2-4)^2 - (3x+12) \cdot (x^2+4x+4)$

(i) να γραφεί η f ως γινόμενο παραγόντων (ii) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$

12. Α. Να λύσετε την εξίσωση: $1 - \frac{2x-5}{3} = x - \frac{x-16}{6}$ (1)

Β. Να λύσετε την ανίσωση: $x - \frac{2(3x-1)}{3} - 1 < \frac{x}{2}$ (2)

Γ. Να εξετάσετε, αν η λύση της εξίσωσης (1) είναι και λύση της ανίσωσης (2).

13. Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) 1 - \frac{x}{4} < \frac{2-x}{3} + \frac{x}{6} \quad \text{και} \quad \chi - \frac{x-2}{2} < \frac{4-x}{2} + 9$$

$$\beta) -\frac{x}{4} - \frac{2-x}{3} \leq \frac{x}{6} \quad \text{και} \quad 2(x-8) - (11-x) < -3$$

$$\gamma) 4(x-3) < -8(3-2x) + 2(7-3x) \quad \text{και} \quad \frac{4x-2}{12} - \frac{2(1-x)}{9} - \frac{21}{30} \leq -\frac{3-5x}{15}$$

14. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\text{Α)} \begin{cases} \frac{2x-3}{5} + \frac{y+1}{2} = 3 \\ \frac{x-y}{10} + 2y = -1 \end{cases} \quad \text{Β)} \begin{cases} \frac{x-2}{5} + \frac{y+3}{2} = \frac{x+y+1}{4} \\ \frac{2x-3}{2} + \frac{y-2}{5} = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Γ)} \begin{cases} \frac{3 \cdot (1-2x)+1}{4} + \frac{y-1}{2} = 1 \\ \frac{x+y+2}{3} - \frac{3y-x}{4} = \frac{y-x}{4} \end{cases}$$

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

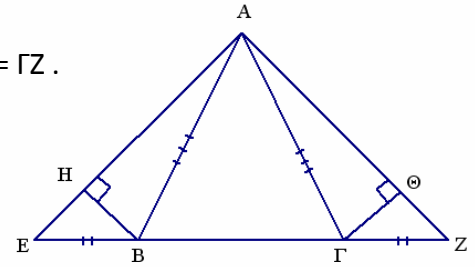


15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$.

Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία E, Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$.

Να δείξετε ότι :

- (i) το τρίγωνο $A\epsilon Z$ είναι ισοσκελές και
- (ii) οι αποστάσεις των κορυφών B και Γ από τις AE και AZ είναι ίσες

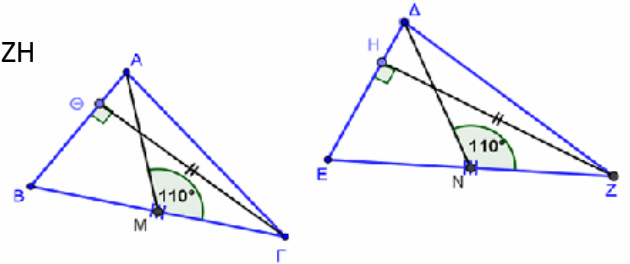


16. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν $B\Gamma = EZ$, τα ύψη $\Gamma\Theta = ZH$

και $\widehat{A\hat{M}\Gamma} = \widehat{A\hat{N}Z} = 110^\circ$ όπου M, N τα μέσα των $B\Gamma$ και EZ αντίστοιχα. Να δείξετε

α) $\widehat{B} = \widehat{E}$ και

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.



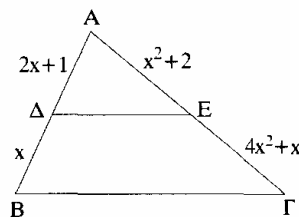
17. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ παίρνουμε πάνω στην $A\Gamma$ το τμήμα $A\Delta = AB$ και στην προέκταση της AB το σημείο E έτσι ώστε $AE = A\Gamma$. Να δείξετε ότι :

α) $E\Delta = B\Gamma$, β) τα τρίγωνα BKE και $K\Delta\Gamma$ είναι ίσα, όπου K το σημείο τομής της $E\Delta$ με την $B\Gamma$, γ) τα τρίγωνα $E\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ είναι ίσα.

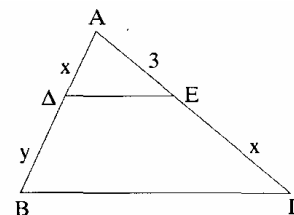
18. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ και παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο M πάνω στην $A\Delta$. Φέρνουμε τις αποστάσεις του M από τις AB και $A\Gamma$ και τις ονομάζουμε ME και MZ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι $ME = MZ$. β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

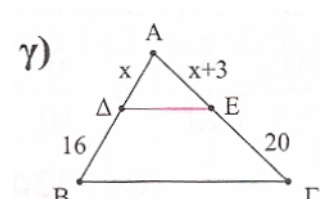
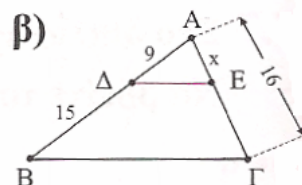
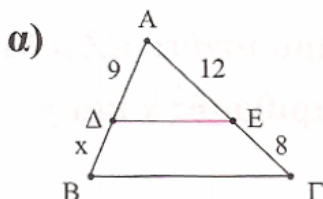
19. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ να βρεθεί το x



20. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $3 \cdot AB = 4$ να βρεθούν τα x, y .



21. Σε καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις ισχύει $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να βρείτε τον αριθμό x .





22. Δίνεται ότι $\epsilon\phi\omega = -1$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$. Να υπολογίσετε :

α) το $\eta\mu\omega$ β) το $\sigma\upsilon\nu\omega$

γ) την αριθμητική τιμή της παράστασης : $K = \frac{3 \cdot \eta\mu\omega - 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega}$

23. α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω , αν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\omega = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 1$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \eta\mu^2 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ \sigma\upsilon\nu^2 110^\circ$

γ) Να αποδείξετε ότι:

1) $(\sigma\upsilon\nu 35^\circ + \eta\mu 35^\circ)^2 + (\eta\mu 145^\circ - \sigma\upsilon\nu 145^\circ)^2 = 2$

2) $(3\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\phi)^2 + (3\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\phi)^2 + (3\eta\mu\alpha)^2 = 9$

3) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \epsilon\phi\omega + \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega} = 1$

24. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}$ και $90^\circ < x < 180^\circ$ να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{3 \cdot \epsilon\phi x + 5 \cdot \eta\mu x - 2(\epsilon\phi x)^{-1}}{2 \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}$$

25. Να δείξετε ότι : (i) $\frac{\epsilon\phi x - \eta\mu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x}$ (ii) $\epsilon\phi^2 x - \eta\mu^2 x = \epsilon\phi^2 x \cdot \eta\mu^2 x$

(iii) $\frac{\epsilon\phi^2 x - 1}{\epsilon\phi^2 x + 1} = 2 \cdot \eta\mu^2 x - 1$

(iv) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - (\epsilon\phi x)^{-1}} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

(v) $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$

(vi) $\left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \eta\mu\alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu\alpha \right) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$

26. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου ABΓ με $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha \cdot \beta}$

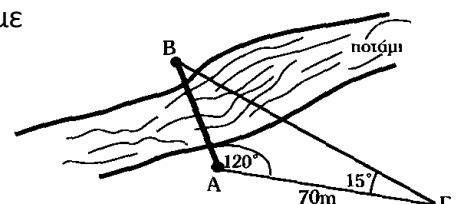
(i) Ποια είναι η μεγαλύτερη γωνία του ;

(ii) Να υπολογιστεί η μεγαλύτερη γωνία του

27. Αν $\beta = 2 \text{ cm}$, $\gamma = \sqrt{2} \text{ cm}$ και $\hat{A} = 45^\circ$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές

28. Θέλουμε να μετρήσουμε την απόσταση AB για να κατασκευάσουμε μια γέφυρα που θα μας επιτρέψει να περνάμε πάνω από το ποτάμι στα A, B. Στηθήκαμε από τη μια όχθη του ποταμού και με κατάλληλα όργανα μετρήσαμε, $AG = 70 \text{ m}$.

Επίσης μετρήσαμε δύο γωνίες $\widehat{BAG} = 120^\circ$, $\widehat{AGB} = 15^\circ$.





Ασκήσεις

Θέμα 1^ο

Δίνεται η παράσταση $A = (x + 9)^2 - 3x(x + 9)$.

- α) Να κάνετε όλες τις δυνατές πράξεις .
 β) Να λυθεί η εξίσωση $A=0$. (Δίνεται ότι : $\sqrt{729} = 27$)
 γ) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση A .

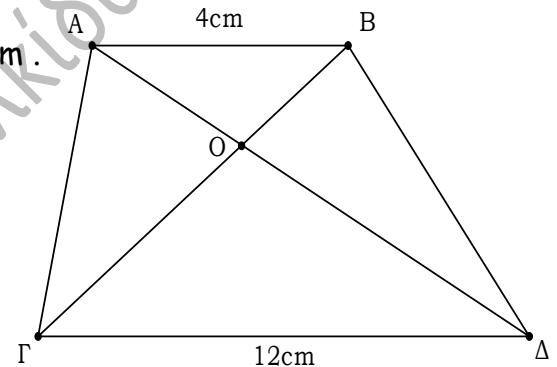
Θέμα 2^ο

Αν το σύστημα : $(a-1)x + \beta y = a+3$
 $\alpha x + (2\beta-1)y = 3\beta+5$ έχει λύση την $x=3$ και $y=2$ να βρείτε α και β .

Θέμα 3^ο

Στο διπλανό τραπέζιο ($AB \parallel \Gamma\Delta$) είναι $AB=4\text{cm}$ και $\Gamma\Delta=12\text{cm}$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma\Delta$ είναι όμοια .
 β) Να βρείτε τον λόγο λ ομοιότητας των παραπάνω τριγώνων .



Θέμα 4^ο

Δίνεται η παράσταση $A = (x-3)^2 - 4(x-3) \cdot (x+3) + 7x - 21$

- A. Να δείξετε μετά από πράξεις ότι: $A = -3x^2 + x + 24$
 B. Στην συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $A = 0$

Θέμα 5^ο

Αν τα συστήματα (Σ_1) και (Σ_2) με αγνώστους x και y έχουν κοινή λύση , να βρεθούν τα α και β

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ -4x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2): \begin{cases} \frac{\alpha x - 4}{4} - \frac{3y - \beta}{2} = -\frac{1}{2} \\ 3\alpha - 2x = 2\beta - 2 + y \end{cases}$$

$$(x, y) = (1, 2)$$

$$(\alpha, \beta) = (4, 5)$$



Θέμα 6^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x+1)^3 - x(x-1)(x+1) - (2x-1)^2 - 7$

A. Να δείξετε ότι : $P(x) = -x^2 + 8x - 7$

B. Να γίνει το $P(x)$ γινόμενο παραγόντων.

Θέμα 7^ο

Αν ω αμβλεία γωνία και $\sin \omega = -\frac{5}{13}$ τότε:

A) Να υπολογίσετε το $\eta\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$

B) Να υπολογίσετε την παράσταση: $\Sigma = 39 \cdot \eta\mu(180^\circ - \omega) - 26 \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) - 10 \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)$

Θέμα 8^ο

Να λυθούν τα συστήματα: α)
$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{x+4}{4} - 1 \\ \frac{x+1}{4} + \frac{y-6}{3} = -\frac{x}{2} \end{cases}$$
 $(x,y) = (1/2, 33/8)$

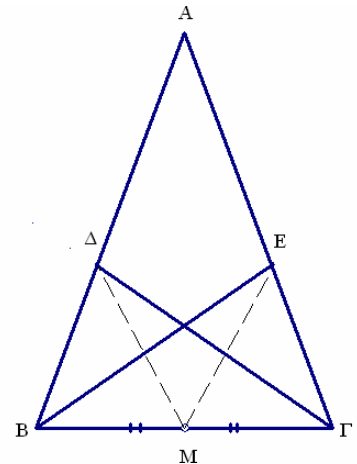
β)
$$\begin{cases} \frac{2x-y}{3} - \frac{x+y}{6} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + y = 7 \end{cases}$$
 $(x,y) = (4,5)$

Θέμα 9^ο

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) με BE και $\Gamma\Delta$ οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ αντίστοιχα.

Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να δείξετε ότι:

α. $BE = \Gamma\Delta$ και β. $\Delta M = EM$



Θέμα 10^ο

A) Να γίνουν οι πράξεις:
$$\frac{x}{x+4} + \frac{3}{x-1} - \frac{20}{x^2+3x-4}$$

B) Όμοια και:
$$\frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2 \cdot y + x \cdot y^2} \cdot (x+y)$$

Θέμα 11^ο

Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 - y^2)^2 = 2 \cdot (x^4 + y^4)$$

Θέμα 12^ο

Να λυθούν τα συστήματα :

α)
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{2} = \frac{x-y}{3} - 1 \\ \frac{x}{4} - \frac{3y+1}{2} = \frac{7x-4y}{12} \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{y+2(x+1)}{4} = \frac{2-x}{5} \\ \frac{x-1}{3} = \frac{3x+2y}{5} - \frac{11+x}{15} \end{cases}$$

γ)
$$\begin{cases} \frac{x+5}{4} - \frac{y-2}{3} = \frac{x+y}{3} + 1 \\ \frac{x+2y}{2} + \frac{y+4}{3} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Θέμα 13^ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $6x^2 + 5x + 1 = 0$

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 < x_2$, να λύσετε το γραμμικό ως προς α και β σύστημα που ακολουθεί :

$$(\Sigma) : \begin{cases} 2\alpha + 3x_1 = 3\beta + 6 \\ 2x_2 - 5\beta = 10 - 3\alpha \end{cases} \quad (\alpha, \beta) = (2, -1)$$

Θέμα 14^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A(x) = x^2 - 2x$, $B(x) = x^2 - 2x + 4$ και $\Gamma(x) = x^2 - 4$

α) Να γίνουν τα πολυώνυμα αυτά γινόμενο παραγόντων

β) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις : (i) $\frac{B(x)}{A(x)}$ και (ii) $\frac{A(x)}{\Gamma(x)}$

γ) Να γίνουν οι πράξεις: $\frac{B(x)}{A(x)} + \frac{A(x)}{\Gamma(x)} - \frac{1}{x}$

Θέμα 15^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και στην προέκταση του $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ

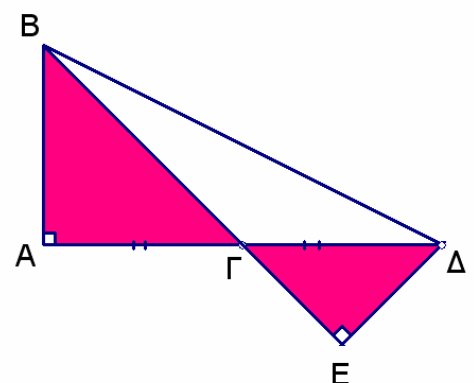
ώστε $A\Gamma = \Gamma\Delta$ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να δείξετε τι στοιχεία ίσα έχουν τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα ή όχι και γιατί ;

γ) Μπορούμε να πούμε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια ;

δ) Να υπολογίσετε το $A\Gamma$, αν $B\Gamma = 9$ και $\Gamma E = 4$





Θέμα 16^ο

α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι : $\beta = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 1 \text{ cm}$ και $\hat{A} = 30^\circ$, να βρεθεί η πλευρά α και η γωνία B του τριγώνου .

β) Αν A, B, Γ , είναι οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ και α, β, γ οι αντίστοιχες πλευρές του και ισχύει η σχέση $\beta = 2 \cdot \gamma \cdot \sin A$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές

Θέμα 17^ο

α. Να αποδείξετε την ισότητα : $\frac{(x-3y)^2 - (y-3x)^2}{8} + x^2 = y^2$

β. Αν είναι $x = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{7} - \sqrt{3}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $K = 5x^2 - 6xy + 5y^2$

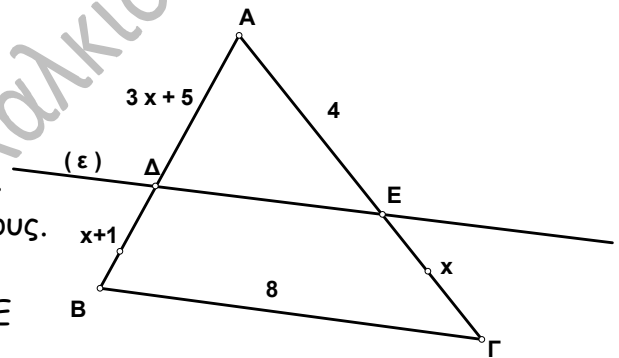
Θέμα 18^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και ευθεία (ε) παράλληλη στην $B\Gamma$.

A) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

B) Να γράψετε τους λόγους των αντίστοιχων πλευρών τους.

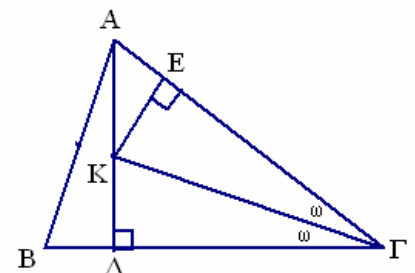
Γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$ αν $B\Gamma = 8$, καθώς και το μήκος της πλευράς ΔE



Θέμα 19^ο

Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$, το $A\Delta$ είναι ύψος του , ΓK διχοτόμος της γωνίας Γ και $KE \perp A\Gamma$

1. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΓKE και $\Gamma K\Delta$ είναι ίσα.
2. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AKE και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των αντίστοιχων πλευρών τους.
3. Αν $A\Delta = 9$ και $A\Gamma = 15$, να υπολογίσετε το KE .



Θέμα 20^ο

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = 2(x-1)^3 - 3(x+1)^2 - 2x(x-2)(x+2) + 6$

A. Να δείξετε αφού γίνουν οι πράξεις ότι : $P(x) = -9x^2 + 8x + 1$

B. Να γράψετε το $P(x)$ ως γινόμενο παραγόντων

Γ. Να λυθεί η εξίσωση : $P(x) = 0$.



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ 1

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

1) Δίνεται το πολυώνυμο

$$\phi(x) = 2x(x-5)(x+5) - 5(3x-4)^2 + (2x-x^2-5).$$

α) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

β) Ακολουθώντας να βρείτε την αριθμητική τιμή του $\phi(-1)$.

2) Δίνονται τα πολυώνυμα: $A=2x^3-5x^2+2$, $B=3x+4$, $\Gamma=x^2-6x+1$. Να βρείτε:

α) $A+B-\Gamma$ β) $A \cdot B$

3) Να δείξετε ότι: $3x(2x-1)(1+2x) - x(3x+2)^2 = 3x^3 + 12x^2 - 7x$

Εργασία 2η

α) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τις παραστάσεις:

$$A=3x+6x^2, \quad B=2x+2y+κx+κy, \quad \Gamma=x^2-4, \quad \Delta=x^2-5x+6,$$

$$E=x^2(x^2-5x+6) - (x-3)(x^2-4)$$

β) 1. Να κάνετε τις πράξεις: $K = \frac{x^2+2x}{x^2+5x+6} : \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

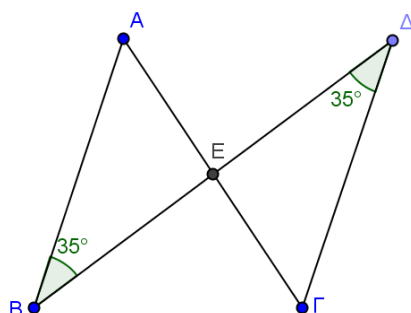
2. Να τρέψετε το σύνθετο κλάσμα σε απλό: $\Lambda = \frac{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}$

**Εργασία 3 η**

Να λυθούν τα συστήματα

$$1) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-y}{3} - \frac{3x-2}{2} = \frac{6y-5x}{12} \\ 8x + 3(y-x) = -1 \end{cases}$$

Εργασία 4 η**ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

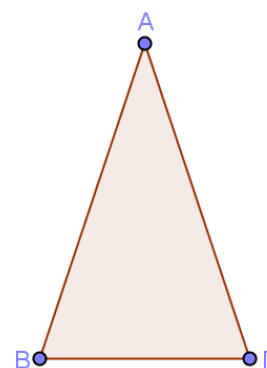
Ε μέσο του ΑΓ

 $\hat{B} = 35^\circ, \hat{D} = 35^\circ$ **ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ**

$$\hat{ABE} = \hat{GDE}$$

Εργασία 5 η

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Φέρουμε τις ΓΔ και ΒΕ. Πάνω στις προεκτάσεις των ΓΔ (προς το Δ) και ΒΕ (προς το Ε) παίρνουμε σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $K\Delta = \Delta\Gamma$ και $E\Lambda = BE$. Να δείξετε ότι: **α)** $\hat{B\Delta\Gamma} = \hat{G\epsilon\beta}$ και **β)** $KB = \Gamma\Lambda$.



καλή ενασχόληση !!!



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ 2

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & 5x + 2(x + 3) > 7(x + 3) - 4, \\ \beta) & \frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} \leq x - 2 + \frac{3 \cdot (x-2) + 1}{6}, \\ \gamma) & \frac{3(x-4)}{5} - \frac{2(x+5)}{6} > \frac{5x-1}{10}, \\ \delta) & \frac{x+1}{5} + \frac{x}{2} \leq x + 3 - \frac{3(x+1) - 11}{10} \end{array}$$

Εργασία 2η

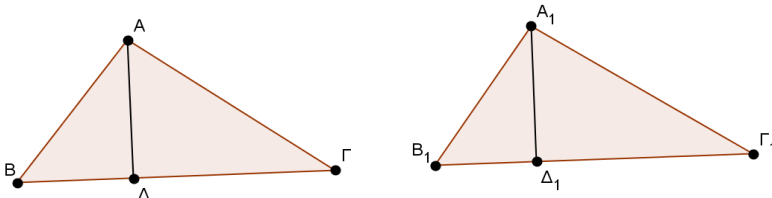
Να βρείτε τις κοινές λύσεις των:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & -2(x-19) > 7x+2 \quad \text{και} \quad 13-5x \leq 7(x-1)-4 \\ \beta) & 4 - 5(x-2) \geq 13 - 3(x+1) \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{2} > 1+x \\ \gamma) & \frac{x+1}{3} \leq x \quad \text{και} \quad x \leq \frac{2-x}{2} \end{array}$$

Εργασία 3η

Τα τρίγωνα του παρακάτω σχήματος έχουν ίσα: ύψη $AD=A_1D_1$, $BG=B_1G_1$ και $AB=A_1B_1$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A_1B_1\Delta_1$ είναι ίσα,
 β) οι γωνίες B , B_1 είναι ίσες,
 γ) τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ίσα.
 Δ) Αν επιπλέον ισχύει ότι οι γωνίες $BA\Delta$, $A\Gamma\Delta$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια.



**Εργασία 4η****A. 1.** Να αποδείξετε ότι:

$$(1-x)^2 - x(x+2) + (x-3) \cdot (x+3) + 11 = x^2 - 4x + 3$$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $(1-x)^2 - x(x+2) + (x-3) \cdot (x+3) + 11 = 0$ **B.** Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις: $A = \frac{4x+2}{2x+6}$ και $B = \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ **1.** Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζονται οι αλγεβρικές παραστάσεις A και B .**2.** Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις A και B .**3.** Να γίνουν οι πράξεις: $A - B - \frac{15}{x^2+3x}$ **Εργασία 5η**

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{6x-4}{5} + y = -\frac{17}{5} \\ 3(-2x+5) + 7 = -2x - (3y-37) \end{cases}$$

1. Κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις να δείξετε ότι το σύστημα γράφεται στην απλούστερη μορφή:

$$\begin{cases} 6x+5y = -13 \\ -4x+3y = 15 \end{cases}$$

2. Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα.**3.** Αν $(x, y) = (-3, 1)$ είναι η λύση που βρήκατε στο ερώτημα **(2)**, ναυπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = |x-y| - (\sqrt{-x})^2 - \left(\frac{1}{2022}\right)^x (2022)^{-3y}$ **Εργασία 6η****i)** Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{(x^4 - y^4)y^5}{4x^4(x+y)} \div \frac{y^6(x-y)}{2x^3}$ **ii)** Αν ισχύουν οι σχέσεις $x+y=3$ και $xy=-2$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης A .**καλή ενασχόληση !!!**



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ 3

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

A) Να αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

1) $2x^2 - 16x$, **2)** $2yx^3 - 8yx$, **3)** $x^2 - 7x + 12$, **4)** $kx - 3y - ky + 3x$

B) Να υπολογίσετε την τιμή του: $(x - y)^2 - (x + y)^2$, αν $xy = -7$.

Γ) Να κάνετε τις πράξεις:

1) $\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} \right) : \frac{2a}{a^2-1}$

2) $\frac{\frac{\psi}{1+\psi} - \frac{\psi}{1-\psi}}{\frac{1}{1-\psi^2}}$

Δ) Να λύσετε τις εξισώσεις: **α)** $x^2 - x - 12 = 0$, **β)** $x^3 = 4x$

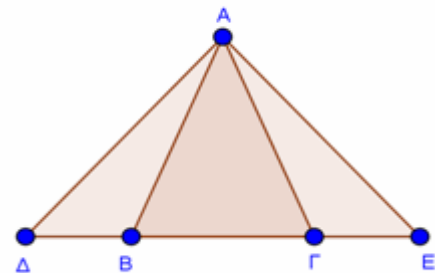
Εργασία 2η

1) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ παίρνουμε δυο σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΒΔ=ΒΕ. Αν Ζ τυχόν σημείο της διχοτόμου ΒΗ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.

2) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ . Στην προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Β παίρνουμε τμήμα ΒΔ και προς το μέρος του Γ τμήμα ΓΕ=ΒΔ. Να δείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Οι αποστάσεις των Β και Γ από τις ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, είναι ίσες.



**Εργασία 3 η****A)** Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{4} + \frac{2y+1}{5} = 2 \\ \frac{3x+4}{7} - \frac{5y}{2} = -4 \end{cases}$$

α) Να μετατρέψετε, μετά από κατάλληλες πράξεις, το παραπάνω σύστημα στη μορφή:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ 6x - 35y = -64 \end{cases}$$

β) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα

$$\begin{cases} 5x + 8y = 21 \\ 6x - 35y = -64 \end{cases}$$

**B)** Όμοια και το σύστημα :

$$\begin{cases} 2(2\chi + 3\psi) = 3(2\chi - 3\psi) + 13 \\ \frac{2\chi + \psi}{4} - \frac{\chi + 4\psi}{6} = \frac{4\psi - 5}{12} \end{cases}$$

Εργασία 4 ηΑν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\sin \omega = -\frac{4}{5}$, τότε:**α)** Να υπολογιστούν τα $\eta\omega$ και $\epsilon\phi\omega$.**β)** Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$$A = \sin(180^\circ - \omega) - \eta\mu(180^\circ - \omega) + 2 \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \omega)$$

Εργασία 5 η

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$\varphi(x) = 2x(3x-1) - (x-1)(x+1) - 3x^2 - 1 \quad \text{και}$$

$$\rho(x) = (x-1)^2 - (x-1)(x-3).$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\varphi(x) = 2x^2 - 2x$ και $\rho(x) = 2x - 2$ **β) i)** Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση: $\sigma(x) = \frac{\varphi(x)}{\rho(x)}$ **ii)** Να αποδείξετε ότι $2\sigma(-1) - \sigma(-2) = 0$ **καλή ενασχόληση !!!**



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 4

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

Η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ με $a \neq 0$ είναι βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=.....$

Αν $\Delta.....$ τότε η παραπάνω εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις

$x_1=.....$ και $x_2=.....$

Αν $\Delta.....$ τότε η παραπάνω εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x=.....$

Αν $\Delta.....$ τότε η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη

Εργασία 2η

A) Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα ; Να διατυπώσετε το 1ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π)

B) Να διατυπώσετε τα δυο κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Γ) Να συμπληρώσετε τα κενά που λείπουν στις παρακάτω προτάσεις (μία λέξη)

i) οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς λέγονται γωνίες της πλευράς αυτής.

ii) η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται γωνία των πλευρών αυτών.

iii) σε ίσα τρίγωνα από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές(Σ) ή λάθος(Λ) :

1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

2. Σε δύο ίσα τρίγωνα, απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές .

3. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

Εργασία 3η

Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \frac{x+1}{x^2-1}$ και $B = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$

α) Για ποιες τιμές των x ορίζεται η κάθε παράσταση;

β) Να δείξετε ότι: $A = \frac{1}{x-1}$ και $B = \frac{1}{x+1}$

γ) Να δείξετε ότι: $(A+B) : \frac{x}{x^2-1} = 2$

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

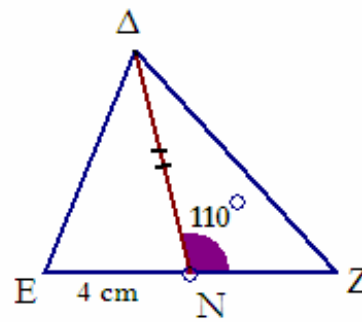
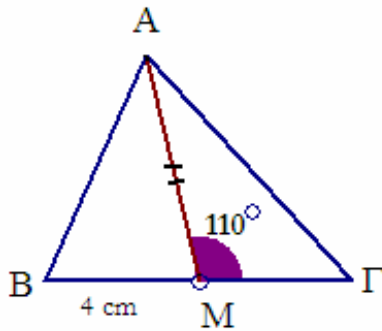


Εργασία 4 η

ΔΕΔΟΜΕΝΑ

 $AM = AN$ (διάμεσοι) $BM = EN = 4 \text{ cm}$ $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{ANZ} = 110^\circ$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

α) $AB = AE$ β) $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AEZ}$ 

Εργασία 5 η

A) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των πιο κάτω ανισώσεων και να τις παραστήσετε γραφικά.

$$2(4 + x) - (x + 6) < 12 - x$$

και

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$$

B) Να λύσετε το σύστημα :

$$2(\chi + \psi) - 3(2\chi + 3\psi) = 17 - 4\psi$$

$$\frac{5\chi - \psi}{4} - \frac{\chi + 2}{3} = \frac{\psi - 4}{4}$$

καλή ενασχόληση !!!



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ 5

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

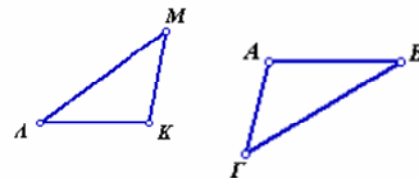
Α. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και την πρόταση που προκύπτει από το θεώρημα αυτό για ένα τρίγωνο.

Β. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

Γ. Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι : $ΒΓ = ΜΛ$, $Α = Κ$, $Β = Λ$

Τα τρίγωνα είναι ίσα;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας



Εργασία 2η

Α. Να συμπληρώσετε τις ισότητες

- $(α + β) \cdot (β - α) =$
- $α^2 + β^2 - 2αβ =$
- $(β - α)^3 =$

Β. Τι ονομάζεται μονώνυμο και τι πολυώνυμο ;

Γ. Αν το άθροισμα τριών μονώνυμων είναι μονώνυμο. Τι συμπεραίνετε για τα τρία μονώνυμα;

Εργασία 3η

Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{\chi + 1}{2} - \frac{\psi + 2(\chi + 1)}{4} - \frac{2 - \chi}{5} = 0 \\ \frac{\chi - 1}{3} = \frac{3\chi + 2\psi}{5} - \frac{11 + \chi}{15} \end{cases}$$

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

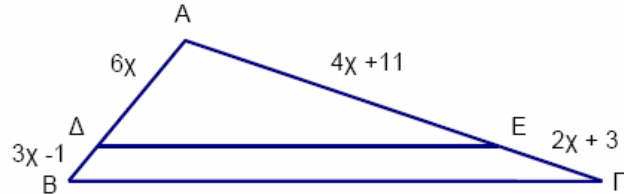
6^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΧΑΛΚΙΔΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Εργασία 4η

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$.
Αν είναι $AE = 4\chi + 11$, $A\Delta = 6\chi$,
 $\Delta B = 3\chi - 1$ και $E\Gamma = 2\chi + 3$, να υπολο-
γίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$
και $E\Gamma$.



Εργασία 5 η

Έστω η ευθεία $5x + 6y = -4$ σε ένα σύστημα αξόνων Oxy . Αν το σημείο $M(\kappa, \lambda - 1)$ ανήκει στην ευθεία αυτή και επίσης $\widehat{xOM} = -\frac{3}{4}$, τότε:

- να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M .
- να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{xOM}$.

καλή ενασχόληση !!!



ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ 6

ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ»

Εργασία 1η

A. 1) Να δείξετε ότι: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

2) Αν $x + y = 6$ και $xy = -2$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x^2 + y^2$

β) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

γ) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

B. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

β) $\frac{5 - x}{x + 5} \cdot \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 25}$

γ) $\frac{y - 2}{y^2 + 2y} - \frac{y + 4}{y^2 + 5y + 6} + \frac{8}{y^2 + 3y}$

Γ. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $x^5 - x^3 + 8x^2 - 8$

β) $4\alpha^2 - 25\beta^2 - 4\alpha + 1$

γ) $x^2 + 4x - 12 + 3(x^2 - 36)$

δ) $4\alpha^3 - \alpha(\beta - \gamma)^2$

Δ. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha(\alpha - 2\beta)^3 - \beta(\beta - 2\alpha)^3 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^2$

Εργασία 2η

A) Δίνετε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=AG). Πάνω στις πλευρές AB και AG παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και Ε, ώστε ΑΔ=ΑΕ. Αν Ο είναι τυχαίο σημείο της διαμέσου ΑΚ και ΔΟ και ΕΟ τέμνουν τη ΒΓ στα Ζ και Η αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΒΖ=ΓΗ.

B) Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

α) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία γωνία του ενός τριγώνου αντίστοιχα ίσες με δύο πλευρές και μια γωνία του άλλου τριγώνου, τότε είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές του ενός τριγώνου αντίστοιχα ίσες με δύο πλευρές του άλλου τριγώνου, τότε είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Δύο τρίγωνα που έχουν και τις τρεις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

**Εργασία 3 η****A.** Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{3\chi+2\psi}{3} - \frac{2\chi-\psi}{4} = \frac{2\chi+2}{6}$$

$$(\chi+2)^2 - (\psi-1)^2 = (\chi-\psi)(\chi+\psi)+1$$

B. Να βρείτε και να παραστήσετε γραφικά τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$2(6-x)+5x \leq 28+x \quad \text{και} \quad \frac{3x+1}{4} - \frac{x-3}{2} < \frac{4x-1}{6}$$

Εργασία 4 η**A.** Να γίνει απλό το σύνθετο κλάσμα: $\frac{\frac{x}{9} - \frac{4}{9x}}{x+1 - \frac{6}{x}}$ **B.** Να κάνετε τις πράξεις: $A = \left(\frac{1}{\alpha^2 - 4\alpha} + \frac{1}{4\alpha + 16} - \frac{2}{\alpha^2 - 16} \right) : \frac{\alpha - 4}{\alpha^4 + 4\alpha^3}$

$$B = \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{x^2 + 3x + 2}{2 - x} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

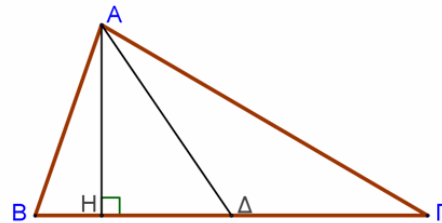
Εργασία 5 η

Στο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ), να προεκτείνετε τη διάμεσο ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ και το ύψος ΑΗ κατά τμήμα ΗΖ=ΑΗ.

Να αποδείξετε ότι :

α) ΑΓ=ΖΓ

β) $\hat{B}\hat{\Delta}E = \hat{A}\hat{\Delta}G$



καλή ενασχόληση !!!