ΑΣΚΗΣΗ 1

Α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$\mathrm{A} = 2x+6$

$\mathrm{B} = x^2-4x+4$

$\Gamma = 4x^2-1$

$\Delta = x^3+3x^2-x-3$

Β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: $\left(\dfrac{\mathrm{A}\cdot(x-3)}{B}\cdot\dfrac{(x-2)}{\Delta}\right):\dfrac{x^2+x}{x^3+2x^2+x}$,

όπου Α, Β και Δ οι παραστάσεις του ερωτήματος (1), μετά τις απλοποιήσεις παίρνει την μορφή: $\dfrac{2\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x-1)}$.

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\mathrm{E} = \dfrac{2\cdot(x-3)}{(x-2)\cdot(x-1)}$.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση: $B+2\cdot\left(x^2+2x\right)-\Gamma = -2\cdot x\cdot(2x+9)-10$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το σύστημα (Σ): $\left\{\begin{array}{l} -(x+y)^2+y(y-2)=(2-x)(2+x)-2\left(xy+\dfrac{3}{2}x\right) \\ 4(1-x)+(1-x)(1+x)=x(1-x)-3y+6 \end{array}\right\}$,

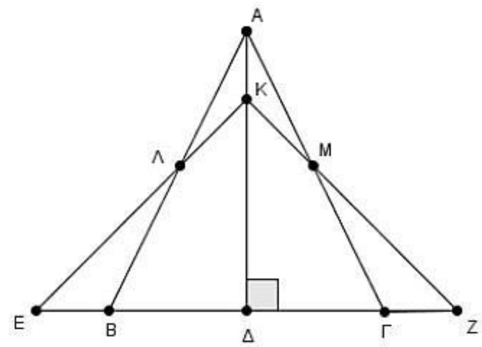
Α) Να δείξετε ότι μετά από πράξεις, το σύστημα (Σ) γράφεται στη μορφή $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y=4 \\ 5x-3y=-1 \end{array}\right\}$.

Β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$. Δίνεται ότι:

- ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.
- Το σημείο Κ είναι τυχαίο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ.
- Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά τμήματα ΒΕ και ΓΖ τέτοια ώστε $ΒΕ = ΓΖ$.



Να αποδείξετε ότι:

Α) τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΔΕ και ΚΔΖ είναι ίσα,

Β) $ΛΒ = ΜΓ$,

Γ) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$\mathrm{A}(x) = 3(x-2)^2 - 2(1-2x)(1+2x) - 8x^2 - 5(3-2x) + 4$$

$$\mathrm{B}(x) = (x-2)^3 + x^2(5-x) + 9 - 12x$$

Α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}(x) = 3x^2 - 2x - 1$ και $\mathrm{B}(x) = 1 - x^2$

Β) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $\mathrm{A}(x)$ και $\mathrm{B}(x)$

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\dfrac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα σχολείο διαθέτει δύο ειδών σχολικά λεωφορεία. Αν χρησιμοποιήσει 7 μικρά λεωφορεία και 5 μεγάλα μπορεί να μεταφέρει 331 μαθητές. Αν όμως χρησιμοποιήσει 4 μικρά λεωφορεία και 9 μεγάλα μπορεί να μεταφέρει 398 μαθητές.

Να βρείτε πόσους μαθητές χωράει κάθε είδος λεωφορείου.

ΑΣΚΗΣΗ 6

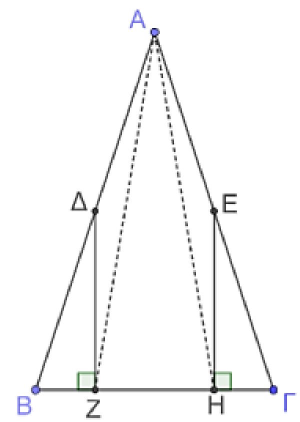
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ = ΑΓ$.

Από τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, φέρνουμε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ προς την πλευρά ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

Α) τα τρίγωνα ΔΒΖ και ΕΗΓ είναι ίσα,

Β) το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές.



ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται οι παραστάσεις

$$Α(x) = \frac{x^3 - 16x}{2 - x} \cdot \frac{x^3 - 4x - 4x^2 + 16}{x + 4} \quad \text{και} \quad Β(x) = \left(\frac{x}{4x - 16} - \frac{x + 1}{-x^2 + 8x - 16} \right) \cdot \frac{4}{x^2 + 4}.$$

Α) Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις $Α(x)$ και $Β(x)$.

Β) Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις $Α(x)$ και $Β(x)$, μετά από απλοποιήσεις, παίρνουν την μορφή:

$$Α(x) = -x \cdot (x - 4)^2 \cdot (x + 2) \quad \text{και} \quad Β(x) = \frac{1}{(x - 4)^2}.$$

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $Α(x) \cdot Β(x) = x^2 - 7x + 3$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x^3 - 5x^2 + x - 5$.

Β) Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις

$$Α(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 5x^2 + x - 5} \quad \text{και} \quad Β(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1},$$

μετά από απλοποιήσεις, παίρνουν την μορφή:

$$Α(x) = \frac{1}{x - 5} \quad \text{και} \quad Β(x) = \frac{x}{x - 1}.$$

Γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma(x)=\left[x\cdot \mathrm{A}(x)-\mathrm{B}(x)\right]:\dfrac{4x}{x^3-3x^2+3x-1}$

παίρνει την απλοποιημένη μορφή $\Gamma(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-5}$.

Δ) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-4x=2\cdot\Gamma(9)+\Gamma(3)$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=11 \\ 3x+4y=63 \end{cases}$.

Β) Αν $\mathrm{M}(5,\ 12)$ είναι η λύση του συστήματος στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega=x\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M}$, όπου $\mathrm{O}x$ ο θετικός ημιάξονας.

Γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

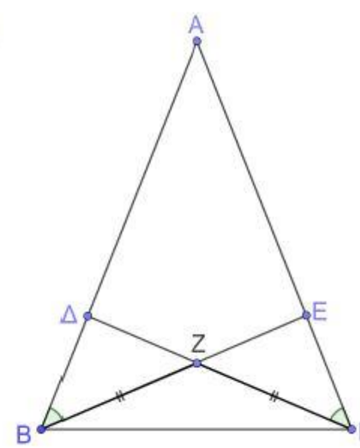
$$\Gamma=\frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu^2 120^\circ}-\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu 180^\circ}+\sigma\upsilon\nu 160^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 20^\circ-\eta\mu 160^\circ\cdot\eta\mu 20^\circ,$$

όπου ημω, συνω οι τιμές του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10</u>

Στο διπλανό σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Ζ.

Δίνεται ότι $\mathrm{ZB}=\mathrm{Z\Gamma}$, $\mathrm{E}\hat{\Gamma}\mathrm{Z}=\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$.



Να αποδείξετε ότι:

Α) $\mathrm{Z\Delta}=\mathrm{ZE}$,

Β) τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΕΒ είναι ίσα,

Γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές,

Δ) η ΑΖ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ.