Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα των εκδόσεων ΒΟΛΟΝΑΚΗ

© 2008 Εκδόσεις Βολονάκη
Μαυρομιχάλη 41 & Βαλτετσίου, Αθήνα
τηλ. 210 3608065, Fax: 210 3608197
www.volonaki.gr, e-mail: info@volonaki.gr

Δημιουργικό εξωφύλλου: Αγγελόπουλος Στέλιος
Ηλεκτρονική σελιδοποίηση: Παντελής Φαρίδης
Επιμέλεια: ΕΝ ΠΛΩ, Μιχ. Αγγέλου 35, Ιωάννινα, τηλ. 26510 20069

Απαγορεύεται η ολική ή μερική αναδημοσίευση του έργου αυτού, καθώς και η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε άλλο μέσο χωρίς τη σχετική άδεια του εκδότη.

ISBN 978-960-381-391-0

Λεβέντης Γεώργιος
Νταλταγιάννης Αναστάσιος

Μαθηματικά

Α΄ Γυμνασίου

εκδόσεις
Βολονάκη

Πρόλογος

Η σύνταξη ενός βιβλίου Μαθηματικών για τα παιδιά της Α Γυμνασίου είναι σίγουρα μια μεγάλη πρόκληση για τον κάθε εκπαιδευτικό που ασχολείται χρόνια με την δευτεροβάθμια εκπαίδευση και είναι σε θέση να γνωρίζει πολύ καλά τα προβλήματα που αντιμετωπίζει ένας μαθητής κατά την διαδικασία εκμάθησης αυτού του γνωστικού αντικειμένου. Οι δυσκολίες γίνονται ακόμη περισσότερες όταν κανείς σκεφθεί την τάξη. Η Α Γυμνασίου είναι μια μεταβατική τάξη για τον Έλληνα μαθητή και όπως και σε άλλα κύρια μαθήματα έτσι και στα Μαθηματικά καλείται να καλύψει εν είδει επανάληψης την ύλη του Δημοτικού και παράλληλα να προχωρήσει σε νέες έννοιες που θα του χρησιμεύσουν για να συνδεθεί με τις επόμενες τάξεις του Γυμνασίου.

Προς αυτήν την κατεύθυνση εργαστήκαμε και στο παρόν βιβλίο. Το ανά χείρας τεύχος καλύπτει όλη την ύλη της Α Γυμνασίου: επτά κεφάλαια Άλγεβρας και 3 κεφάλαια Γεωμετρίας. Περιλαμβάνει:

- Όσο γίνεται συνοπτικότερα τη θεωρία της κάθε ενότητας, χωρίς ωστόσο να παραλείπεται καμία έννοια και κανένας ορισμός,
- Λυμένα παραδείγματα ούτως ώστε ο μαθητής να κατανοεί ευκολότερα τη θεωρία που έχει προηγηθεί,
- Απαντήσεις μεθοδολογικά δοσμένες στις Δραστηριότητες, τις Ασκήσεις και τα Προβλήματα του Σχολικού Βιβλίου
- Πρόσθετες Ασκήσεις για τον μαθητή αλλά και τον εκπαιδευτικό, οι οποίες βέβαια συνοδεύονται από απαντήσεις (στο τέλος του βιβλίου)
- Κριτήρια Αξιολόγησης για τον εκπαιδευτικό, τα οποία φυσικά συνοδεύονται από απαντήσεις (στο τέλος του βιβλίου).

Όπως γίνεται εμφανές και απολύτως σαφές το βιβλίο ανταποκρίνεται απόλυτα στις νέες απαιτήσεις της εποχής μας, έχοντας ως πρώτο μέλημά του να βοηθήσει τους μαθητές αλλά και τους εκπαιδευτικούς, ακόμη και τους γονείς. Οι συγγραφείς αισθάνονται την ανάγκη να ευχαριστήσουν τις εκδόσεις Βολονάκη, οι οποίες τους έκαναν την τιμή να εντάξουν το βιβλίο τους στο πρόγραμμά τους, συνεχίζοντας να δίνουν στο ελληνικό μαθητικό κοινό βιβλία ποιότητας.

Ιωάννινα, 20/06/2008

Γεώργιος Λεβέντης
Αναστάσιος Νταλταγιάννης

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Μέρος Α: Άλγεβρα

Κεφάλαιο 1: Οι Φυσικοί Αριθμοί
1.1 Φυσικοί Αριθμοί – Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση..... 16
1.2 Πρόσθεση, Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός Φυσικών Αριθμών..... 28
1.3 Δυνάμεις Φυσικών Αριθμών..... 39
1.4 Ευκλείδεια Διαίρεση..... 49
1.5 Χαρακτήρες Διαιρετότητας – Μ. Κ. Δ. – Ε. Κ. Π. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων..... 57

Κεφάλαιο 2: Τα Κλάσματα
2.1 Η έννοια του κλάσματος..... 74
2.2 Ισοδύναμα Κλάσματα..... 82
2.3 Σύγκριση Κλασμάτων..... 93
2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση Κλασμάτων..... 101
2.5 Πολλαπλασιασμός Κλασμάτων..... 113
2.6 Διαίρεση Κλασμάτων..... 121

Κεφάλαιο 3: Δεκαδικοί Αριθμοί
3.1 Δεκαδικά Κλάσματα..... 136
3.2 Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς – Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό..... 147
3.3 Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης..... 156
3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών..... 157
3.5 Μονάδες Μέτρησης..... 160

Κεφάλαιο 4: Εξισώσεις και Προβλήματα
4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Οι εξισώσεις: $\alpha + x = \beta$, $x - \alpha = \beta$, $\alpha - x = \beta$, $\alpha x = \beta$, $\alpha : x = \beta$ και $x : \alpha = \beta$..... 178
4.2 Επίλυση Προβλημάτων..... 187

Κεφάλαιο 5: Ποσοστά
5.1 Ποσοστά..... 198
5.2 Προβλήματα με ποσοστά..... 208

Κεφάλαιο 6: Ανάλογα Ποσά – Αντιστρόφως ανάλογα ποσά

6.1 Παράσταση σημείων στο επίπεδο..... 224
6.2 Λόγος δύο αριθμών – Αναλογία..... 229
6.3 Ανάλογα ποσά – Ιδιότητες αναλόγων ποσών..... 233
6.4 Γραφική παράσταση σχέσης αναλογίας..... 237
6.5 Προβλήματα Αναλογιών..... 244
6.6 Αντιστρόφως ανάλογα ποσά..... 247

Κεφάλαιο 7: Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί

7.1 Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη Σημείου..... 254
7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση Ρητών..... 258
7.3 Πρόσθεση Ρητών Αριθμών..... 264
7.4 Αφαίρεση Ρητών Αριθμών..... 269
7.5 Διαίρεση Ρητών Αριθμών..... 273
7.6 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών..... 279
7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών..... 283
7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό..... 287
7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο..... 291
7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών..... 297

Μέρος Β: Γεωμετρία

Κεφάλαιο 1: Βασικές Γεωμετρικές Έννοιες

1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο Τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο..... 302
1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα..... 309
1.3 Μέτρηση, Σύγκριση και ισότητα ευθύγραμμων τμημάτων – Απόσταση Σημείων – Μέσο ευθύγραμμου τμήματος..... 316
1.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση Ευθύγραμμων Τμημάτων..... 321
1.5 Μέτρηση, Σύγκριση και Ισότητα Γωνιών – Διχοτόμος Γωνία..... 327
1.6 Είδη Γωνιών – Κάθετες Ευθείες..... 331
1.7 Εφεξής και Διαδοχικές Γωνίες – Άθροισμα Γωνιών..... 335
1.8 Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές Γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες..... 341
1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο..... 349
1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση Παραλλήλων..... 353
1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου..... 357

1.12 Επίκεντρη γωνία – Σχέση επίκεντρης γωνίας και του αντιστοίχου τόξου – Μέτρηση τόξου..... 362
1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου..... 367

Κεφάλαιο 2: Συμμετρία

2.1 Συμμετρία ως προς άξονα..... 378
2.2 Άξονας συμμετρίας..... 382
2.3 Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος..... 385
2.4 Συμμετρία ως προς σημείο..... 391
2.5 Κέντρο συμμετρίας..... 393
2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μια άλλη ευθεία..... 396

Κεφάλαιο 3: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα, Τραπέζια

3.1 Στοιχεία τριγώνου – Άθροισμα γωνιών τριγώνου..... 406
3.2 Είδη τριγώνων – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου..... 411
3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές Τραπέζιο..... 419
3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου..... 424

Απαντήσεις Ασκήσεων & Προβλημάτων για Εξάσκηση και Κριτηρίων Αξιολόγησης

..... 437

Α΄ ΜΕΡΟΣ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1, 2, 3, 4,

5, 6, 7, 8,

...99, 100

1.1

- Φυσικοί αριθμοί
- Διάταξη φυσικών αριθμών
- Στρογγυλοποίηση.

ΘΕΩΡΙΑ

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Οι αριθμοί $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ 99,\ 100,\ 101,\ 102,\ldots\ ,\ 999,\ 1000,\ldots$ ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί** και το σύνολό τους συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbf{N}$.

- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε **άρτιους** (ζυγούς) και **περιττούς** (μονούς). Οι άρτιοι αριθμοί διαιρούνται με το 2 ενώ οι περιττοί όχι. Γενικά οι άρτιοι τελειώνουν σε $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ και οι περιττοί σε $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$.

  Άρτιοι: $0,\ 2,\ 4,\ldots,\ 10,\ldots\ ,\ 102,\ldots\ ,\ 998,\ \ldots,\ 2004,\ldots$

  Περιττοί: $1,\ 3,\ 5,\ldots\ ,\ 11,\ldots\ ,\ 205,\ldots\ ,\ 999,\ldots\ ,\ 2007,\ldots$

- Κάθε φυσικός αριθμός N έχει ένα προηγούμενο τον $N-1$ και έναν επόμενο τον $N+1$. Ο αριθμός 0 έχει μόνο επόμενο (τον αριθμό 1), εφόσον είναι ο πρώτος φυσικός αριθμός.

- Αν ο N είναι άρτιος τότε ο προηγούμενος και ο επόμενος είναι περιττοί, ενώ αν είναι περιττός τότε ο προηγούμενος και ο επόμενος είναι άρτιοι: Πχ:

Αν $N=6\,(\text{άρτιος})$, ο προηγούμενος είναι ο $N-1=5\,(\text{περιττός})$ και ο

επόμενος ο $N+1=7$ (περιττός). Αν $N=55$ (περιττός), ο προηγούμενος είναι ο $N-1=54$ (άρτιος) και ο επόμενος ο $N+1=56$ (άρτιος).

- Για τη γραφή των φυσικών αριθμών χρησιμοποιούμε το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης που αποτελείται από τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Κάθε ψηφίο ενός φυσικού αριθμού έχει διαφορετική αξία (ή δεκαδική τάξη) ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται. Έτσι, το δεξιότερο ψηφίο εκφράζει τις μονάδες ,το αμέσως επόμενο τις δεκάδες, το επόμενο τις εκατοντάδες κ.ο.κ. Πχ:

254.897

7 μονάδες, 9 δεκάδες, 8 εκατοντάδες, 4 χιλιάδες, 5 δεκάδες χιλιάδες, 2 εκατοντάδες χιλιάδες.

ΔΙΑΤΑΞΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους και να τοποθετηθούν σε σειρά ανάλογα με το ποιος είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον άλλο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διάταξη.

  Τα σύμβολα που χρησιμοποιούμε για τη διάταξη των αριθμών είναι:

  $>$ μεγαλύτερος.
  $<$ μικρότερος.
  $=$ ίσος.

- Αν δύο αριθμοί δεν έχουν ίσο αριθμό ψηφίων, μεγαλύτερος είναι αυτός με τα περισσότερα. Αν έχουν ίσο αριθμό ψηφίων τότε συγκρίνουμε τα ψηφία ξεκινώντας από τα αριστερά. Πχ:

  $100>89$, $1010>1000$, $500=500$

- Τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να τους απεικονίσουμε σε μια ευθεία με πρώτο αριθμό το 0 και τους υπολοίπους σε σημεία δεξιότερα του 0.

Η ευθεία αυτή αποκαλείται **άξονας** των φυσικών αριθμών. Η απόσταση κάθε φυσικού αριθμού από τον επόμενο και τον προηγούμενο είναι σταθερή.

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ

- Ορισμένες φορές για λόγους απλότητας **στρογγυλοποιούμε** τους φυσικούς αριθμούς στην πλησιέστερη δεκάδα, εκατοντάδα, χιλιάδα κ.ο.κ, αναλόγως με την περίσταση. Οι κανόνες που ακολουθούμε κατά τη στρογγυλοποίηση είναι οι εξής:

- Αν ο αριθμός που βρίσκεται δεξιότερα του ψηφίου στο οποίο στρογγυλοποιούμε είναι 0, 1, 2, 3, 4 τότε αφήνουμε τον αριθμό ως έχει αντικαθιστώντας όλα τα δεξιότερα ψηφία του με μηδενικά. Πχ: Θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε το 13.637 στις εκατοντάδες.

Το ψηφίο που αντιστοιχεί στις εκατοντάδες είναι το 6 και στα δεξιά του βρίσκεται το 3, επομένως το 6 μένει ως έχει και ο στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 13.600.

- Αν ο αριθμός που βρίσκεται δεξιότερα του ψηφίου στο οποίο στρογγυλοποιούμε είναι 5, 6, 7, 8, 9 τότε του προσθέτουμε μία μονάδα και αντικαθιστούμε όλα τα δεξιότερα ψηφία του με μηδενικά. Πχ: Θέλουμε να στρογγυλοποιήσουμε το 13.637 στις χιλιάδες. Το ψηφίο που αντιστοιχεί στις εκατοντάδες είναι το 3 και στα δεξιά του βρίσκεται το 6, επομένως το 3 γίνεται 4 και ο στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι ο 14.000.

- Αν ο αριθμός που να αυξήσουμε κατά μια μονάδα κατά τη στρογγυλοποίηση

είναι το 9, τότε αυτό γίνεται 0 και αυξάνει ο αριστερά του αριθμός κατά 1. Πχ:

$$202.987.$$

Αν στρογγυλοποιήσουμε στις εκατοντάδες τότε το 9 αυξάνεται κατά 1 μονάδα οπότε γίνεται 0 και το 2 γίνεται 3. Ο στρογγυλοποιημένος αριθμός είναι 203.000.

- Δε στρογγυλοποιούμε αριθμούς που αντιστοιχούν σε αριθμούς τηλεφώνου, ταυτότητας, ημερομηνίες κ.ο.κ.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να χαρακτηριστούν ως άρτιοι ή περιττοί οι αριθμοί:*

Α. 455, *Β. 203,* *Γ. 860,* *Δ. 2007.*

Όταν πρέπει να χαρακτηρίσουμε έναν αριθμό σαν άρτιο ή περιττό, ερευνούμε αν διαιρείται ακριβώς με το ***2*** *ή όχι.*

Α. Ο αριθμός 455 ισούται με $227\cdot 2+1$, άρα δε διαιρείται ακριβώς με το 2 οπότε είναι **περιττός**.

Β. Ο αριθμός 203 ισούται με $101\cdot 2+1$, άρα δε διαιρείται ακριβώς με το 2 οπότε είναι **περιττός**.

Γ. Ο αριθμός 860 ισούται με $430\cdot 2$, δηλαδή διαιρείται ακριβώς με το 2 οπότε είναι **άρτιος**.

Δ. Ο αριθμός 2007 ισούται με $1003\cdot 2+1$, άρα δε διαιρείται ακριβώς με το 2 οπότε είναι **περιττός**.

2. *Α. Να γράψετε και να μετρήσετε τους αριθμούς από το 2 μέχρι και το 9.*

Β. Να γράψετε και να μετρήσετε τους αριθμούς ανάμεσα στο 2 και το 9.

Το πλήθος ν *των φυσικών αριθμών που περιλαμβάνονται από τον αριθμό* α *μέχρι* ***και*** *τον αριθμό* β *είναι:* $\nu = \beta - \alpha + 1$.

Το πλήθος ν *των φυσικών αριθμών που περιλαμβάνονται* ***ανάμεσα*** *τον αριθμό* α *και τον αριθμό* β *(δηλαδή* ***χωρίς*** *τους* α, β*) είναι:* $\nu = \beta - \alpha - 1$.

Σε καμία από τις δύο περιπτώσεις ***δεν*** *είναι:* $\nu = \beta - \alpha$.

Α. Είναι: $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Μετρώντας τους διαπιστώνουμε ότι οι αριθμοί είναι οκτώ, δηλαδή το πλήθος ν των αριθμών είναι:

$$\nu = 9 - 2 + 1 = 8.$$

Β. Είναι: $3, 4, 5, 6, 7, 8$. Μετρώντας τους διαπιστώνουμε ότι οι αριθμοί είναι έξι, δηλαδή το πλήθος ν των αριθμών είναι:

$$\nu = 9 - 2 - 1 = 6.$$

3. *Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:*

Α. 400 και 4.000, *Β. 789 και 987,* *Γ. 10.100 και 10.010.*

Όταν συγκρίνουμε δύο αριθμούς μετράμε τα ψηφία τους. Αν έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων τότε συγκρίνουμε το ψηφίο στην ίδια τάξη, από αριστερά προς τα δεξιά, μέχρι να βρούμε το πρώτο ψηφίο που διαφέρει.

Α. Ο αριθμός 400 έχει λιγότερα ψηφία από τον αριθμό 4.000, άρα:

$$400 < 4.000.$$

Β. Στην τάξη των εκατοντάδων έχουμε: $7 < 9$. Άρα:

$$789 < 987.$$

Γ. Τα ψηφία στις τάξεις των δεκάδων χιλιάδων και των χιλιάδων είναι ίσα, όμως στην τάξη των εκατοντάδων είναι $8 > 0$, άρα:

$$80.800 > 80.080 .$$

4. Α. *Να διατάξετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς 4.402, 4.204, 4.420, 4.240.*

Β. *Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς50.500, 50.005, 50.050, 55.000.*

Για να τοποθετήσουμε αριθμούς σε φθίνουσα (από το μεγαλύτερο στο μικρότερο) ή αύξουσα (από το μικρότερο στο μεγαλύτερο) σειρά, τους συγκρίνουμε όλους μεταξύ τους.

Α. Το ψηφίο της τάξης των χιλιάδων είναι ίδιος (4).

Συγκρίνοντας τις εκατοντάδες, οι αριθμοί 4.402 και 4.420 είναι ο μεγαλύτεροι από τους 4.204 και 4.240.

Συγκρίνοντας τα ψηφία των δεκάδων, έχουμε: $4.402 < 4.420$ και $4.204 < 4.240$.

Άρα όλοι οι παραπάνω αριθμοί σε φθίνουσα σειρά είναι:

$4.420 > 4.402 > 4.240 > 4.204$.

Β. Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία, η αύξουσα σειρά των αριθμών είναι:

$50.005 < 50.050 < 50.500 < 55.000$.

5. *Να τοποθετήσετε τους αριθμούς 5, 35, 65 και 95 στον άξονα που ακολουθεί:*

Θα πρέπει να θυμόμαστε πως δύο συνεχόμενοι αριθμοί στον άξονα ***ισαπέχουν*** *μεταξύ τους. Έτσι, και το τμήμα κάθε ν αριθμών είναι ίσο.*

Τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ έχουν μήκος 10 το καθένα δηλαδή κάθε μονάδα έχει μήκος 1. Αν το σημείο που βρίσκεται ο αριθμός 5 το ονομάσουμε Η, τότε το ΑΗ έχει μήκος 5 το Η βρίσκεται 5 μονάδες αριστερά του Β (10). Ομοίως, το Θ που αντιστοιχεί στο 35 βρίσκεται 5 μονάδες αριστερά του Γ (40), το Ι που αντιστοιχεί στο 65 βρίσκεται 5 μονάδες αριστερά του Ε (70) και το Κ που αντιστοιχεί στο 95 βρίσκεται 5 μονάδες αριστερά του Ζ (100).

6. *Δίνονται οι παρακάτω φυσικοί αριθμοί:*

Αρ. Ταυτότητας: 196959, *Δόση δανείου: 1.255€,*

Μήκος διαδρομής: 4.344m, *Βάρος αυτοκινήτου: 1020kg,*

Τηλέφωνο 2651095637.

Α. Σε ποιους αριθμούς επιτρέπεται η στρογγυλοποίηση και σε ποιους όχι;

Β. Να στρογγυλοποιήσετε όσους αριθμούς επιτρέπεται στην εκατοντάδα.

*Στους αριθμούς που υποδηλώνουν **συγκεκριμένα στοιχεία** όπως, διευθύνσεις, τηλέφωνα, κωδικούς, νούμερα ταυτοτήτων και διαβατηρίων κοκ, δεν εκτελούμε στρογγυλοποιήσεις.*

Α. Στον αριθμό ταυτότητας και στο τηλεφωνικό νούμερο δεν εκτελούμε στρογγυλοποίηση σε αντίθεση με τη δόση δανείου, το μήκος διαδρομής και τη μάζα αυτοκινήτου.

Β. Η στρογγυλοποιημένη στην εκατοντάδα δόση δανείου είναι 1.300€, αφού το ψηφίο στα δεξιά του 2 είναι το 5.

Το στρογγυλοποιημένο στην εκατοντάδα μήκος διαδρομής είναι 4.300m, αφού το ψηφίο στα δεξιά του 3 είναι το 4.

Το στρογγυλοποιημένο στην εκατοντάδα βάρος αυτοκινήτου είναι τα 1.000kg, αφού το ψηφίο στα δεξιά του 0 είναι το 2.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 13.

1. Α. 205 Β. 732 Γ. 20.813.

2. Α. τριάντα οκτώ χιλιάδες επτακόσια πενήντα ένα.
Β. πέντε εκατομμύρια οχτακόσια δώδεκα.
Γ. εκατόν είκοσι χιλιάδες τρία.

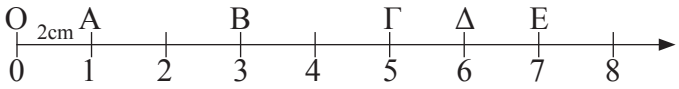
3. Οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του 289 είναι το 288, το 287 και το 286, ενώ οι δύο επόμενοι το 290 και το 291.

4. Οι αριθμοί κατ' αύξουσα σειρά, έχουν ως εξής:

$$3.508 > 3.515 > 3.620 > 4.800 > 4.801$$

5. Α. $45 = 45$ Β. $38 > 36$ Γ. $456 < 465$
Δ. $8.765 < 8.970$ Ε. $90.876 < 86.945$ ΣΤ. $345 < 5.690$

6.



Εφόσον $OA = 2cm$ και αντιστοιχεί σε 1 μονάδα, το ΟΒ που είναι 6cm αντιστοιχεί σε:

$$\frac{6cm}{2cm} = 3 \text{ μονάδες,}$$

άρα στο σημείο Β βρίσκεται το 3.

Ομοίως, στα Γ, Δ, Ε ($ΟΓ = 10cm$, $ΟΔ = 12cm$, $ΟΕ = 14cm$) βρίσκονται οι αριθμοί 5, 6, 7 αντίστοιχα.

7. Α. Σωστό (Σ). Όταν το $1^ο$ από αριστερά ψηφίο είναι 0, μπορεί να αγνοηθεί χωρίς να αλλάξει ο αριθμός.

Β. Σωστό (Σ). Το 0 βρίσκεται στη $2^ς$ και την $4^ς$ από δεξιά θέση, δηλαδή στις δεκάδες και τις χιλιάδες αντίστοιχα.

Γ. Σωστό (Σ).

Δ. Λάθος (Λ). Αν αντιστοιχήσουμε στην $1^η$ ημέρα το 1, στην $1^η$ νύχτα το 2, στη $2^η$ ημέρα το 3, στη $2^η$ νύχτα το 4 κοκ, τότε στο διάστημα από το 1 ($1^η$ ημέρα) μέχρι και το 9 ($5^η$ ημέρα), βρίσκονται οι αριθμοί 2, 4, 6, 8, δηλαδή τέσσερεις διανυκτερεύσεις.

Ε. Σωστό (Σ).

ΣΤ. Σωστό (Σ). Εφόσον η εβδομάδα έχει 7 ημέρες, το διάστημα από Πέμπτη σε Πέμπτη είναι 7 ημερών, οπότε σε $8 = 7 + 1$ ημέρες από Πέμπτη θα είναι Πέμπτη και μία ημέρα, δηλαδή Παρασκευή.

Ζ. Σωστό (Σ).

Η. Σωστό (Σ).

Θ. Λάθος (Λ). Κάθε γραμμή στον άξονα του σχήματος αντιστοιχεί σε 75 μονάδες, οπότε στο σημείο Κ αντιστοιχεί ο αριθμός 375.

Ι. Σωστό (Σ).

ΙΑ. Λάθος (Λ). Στο σημείο Μ αντιστοιχεί ο αριθμός 1.275.

ΙΒ. Λάθος (Λ). Στο σημείο Ν αντιστοιχεί ο αριθμός 2.025.

8. Ο 345 στρογγυλοποιείται στον 300, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 4.

Ο 761 στρογγυλοποιείται στον 800, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 6.

Ο 659 στρογγυλοποιείται στον 700, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των

εκατοντάδων είναι το 5.

Ο 2.567 στρογγυλοποιείται στον 2.600, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 6.

Ο 9.532 στρογγυλοποιείται στον 9.500, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 3.

Ο 123.564 στρογγυλοποιείται στον 123.600, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 6.

Ο 34.564 στρογγυλοποιείται στον 34.600, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 6.

Ο 31.549 στρογγυλοποιείται στον 31.500, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 4.

Ο 8.765 στρογγυλοποιείται στον 8.800, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 6.

9. Α. Είναι 7.568.350, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των δεκάδων είναι το 9.

Β. Είναι 7.568.300, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων είναι το 4.

Γ. Είναι 7.568.000, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των χιλιάδων είναι το 3.

Δ. Είναι 7.570.000, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των δεκάδων χιλιάδων είναι το 8.

Ε. Είναι 7.600.000, εφόσον το ψηφίο στα δεξιά των εκατοντάδων χιλιάδων είναι το 6.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

Α. Ανάμεσα στο 11 και στο 24 περιλαμβάνονται 12 φυσικοί αριθμοί.

( )

Β. Όλοι οι αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι το 3 είναι περιττοί.

( )

Γ. Ανάμεσα στους αριθμούς 23 και 26 υπάρχει ένας άρτιος και ένας περιττός φυσικός αριθμός.

( )

Δ. Ο αριθμός 26 είναι μεγαλύτερος από τον 14 γιατί $6 > 4$.

( )

Ε. Δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε άρτιους και περιττούς αριθμούς στον ίδιο άξονα.

( )

ΣΤ. Όταν το $1^{ο}$ από δεξιά ψηφίο είναι το 0, τότε μπορεί να αγνοηθεί.

( )

Η. Δεν μπορούμε να στρογγυλοποιήσουμε έναν αριθμό τηλεφώνου.

( )

2. Α. Να γράψετε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς: 22, 567, 1.453, 1.921, 49.870, 567.532, 1.234.709.

Β. Να βρείτε πόσες δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες και δεκάδες χιλιάδες έχουν οι παραπάνω αριθμοί.

3. Α. Να διαχωρίσετε σε άρτιους και περιττούς τους αριθμούς: 233, 8455, 332, 1234, 700, 12, 0, 32.459.

Β. Να βρείτε τους δύο προηγούμενους και τον ένα επόμενο φυσικό αριθμό των παραπάνω αριθμών.

4. Α. Να βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνονται ανάμεσα στο 5 και το 500.

Β. Να βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνονται από το 21 μέχρι και το 2007.

5. Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο $(>,=,<)$ στα παρακάτω ζεύγη αριθμών:

34 ….. 43

457…..0457

1.234 ….. 1.324

6.010 ….. 6.001

4.568 ….. 4.659

5.944 ….. 59.440

6. Α. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: 3.124, 1.243, 4.312, 4.213, 2.134, 2.431, 1.234.

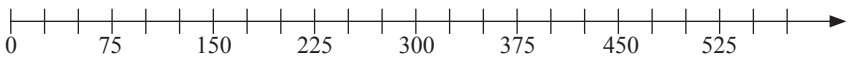
Β. Να διατάξετε σε φθίνουσα σειρά τους αριθμούς: 5.678, 6.786, 8.576, 8.765, 5.687, 6.587, 7.685.

7. Α. Να γράψετε όλους τους φυσικούς αριθμούς που προκύπτουν με το συνδυασμό των ψηφίων 5, 6, 7. Κάθε αριθμός θα πρέπει να έχει μόνο τα τρία παραπάνω ψηφία από μία φορά.

Β. Να διαχωρίσετε τους αριθμούς που προέκυψαν σε άρτιους και περιττούς.

Γ. Να διατάξετε τους αριθμούς αυτούς σε φθίνουσα σειρά.

8. Να τοποθετήσετε στον παρακάτω άξονα τους αριθμούς που αντιστοιχούν στην αξία των χαρτονομισμάτων από τα 50€ μέχρι και τα 500€.



9. Να κατασκευάσετε άξονα κατάλληλης μονάδας και να τοποθετήσετε σ' αυτόν τους αριθμούς:

$12, 18, 20, 24, 32, 38, 40$.

10. Να στρογγυλοποιήσετε τους αριθμούς 11.134, 21.254, 58.398, 97.951

Α. στην πλησιέστερη δεκάδα.

Β. στην πλησιέστερη εκατοντάδα.

Γ. στην πλησιέστερη χιλιάδα.

11. Δίνονται φυσικοί αριθμοί: Μάζα άρματος μάχης: 48.265kg, Αρ. Διαβατηρίου: Μ 98826754, Ταχ. Κώδικας: 45554, Απόσταση Γης – Σελήνης: 384.394km, Κόστος δημοσίου έργου: $4.550.644$€.

Να στρογγυλοποιήσετε όσους επιτρέπεται από τους παραπάνω αριθμούς στην πλησιέστερη εκατοντάδα, χιλιάδα και δεκάδα χιλιάδα.

12. Ποιο ψηφίο θα πρέπει να τοποθετήσετε δεξιά στον αριθμό 83 έτσι ώστε το ψηφίο αυτό να περιλαμβάνεται ανάμεσα στο 3 και το 8, ο τριψήφιος αριθμός που προκύπτει να είναι άρτιος, και αν τον στρογγυλοποιήσουμε στην πλησιέστερη δεκάδα ο αριθμός να γίνεται 830;

1.2 Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

- Πρόσθεση αποκαλείται η πράξη κατά την οποία προκύπτει το άθροισμα

α φυσικών αριθμών και συμβολίζεται με το $(+)$. Αν ν, μ δύο φυσικοί αριθμοί, τότε η πρόσθεση ισοδυναμεί με την πράξη:

$$\nu + \mu = \alpha$$

Οι φυσικού αριθμοί που προστίθενται κατά την πρόσθεση (εδώ οι ν, μ) ονομάζονται προσθετέοι.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ

- **Ουδέτερο στοιχείο:**

Αν σε ένα φυσικό αριθμό ν προτεθεί το 0 ο αριθμός παραμένει αμετάβλητος, δηλαδή:

$$\nu + 0 = \nu$$

Επομένως το **0** είναι το **ουδέτερο στοιχείο** της πρόθεσης.

- **Αντιμεταθετική ιδιότητα:**

Αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία προσθέτουμε δύο φυσικούς αριθμούς, το άθροισμά τους παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή:

$$\nu + \mu = \mu + \nu$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **αντιμεταθετική ιδιότητα**.

- **Προσεταιριστική ιδιότητα:**

Αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία προσθέτουμε τρεις φυσικούς αριθμούς, το άθροισμά τους παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή:

$$(\kappa + \nu) + \mu = \kappa + (\nu + \mu)$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **προσεταιριστική ιδιότητα**.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

- Αφαίρεση αποκαλείται η πράξη κατά την οποία προκύπτει η διαφορά Δ φυσικών αριθμών και συμβολίζεται με το $(-)$.

$$\Delta = M - A$$

Ο αριθμός M ονομάζεται μειωτέος και ο A αφαιρετέος. Ισχύει ότι:

$$M = \Delta + A$$

- Για να είναι η διαφορά Δ φυσικός αριθμός θα πρέπει να ισχύει $M > A$.

- **Ουδέτερο στοιχείο:**

Αν από ένα φυσικό αριθμό ν αφαιρεθεί το 0 ο αριθμός παραμένει αμετάβλητος, δηλαδή:

$$\nu - 0 = \nu$$

Επομένως το **0** είναι το **ουδέτερο στοιχείο** και της αφαίρεσης.

- Αν από ένα αριθμό ν αφαιρεθεί ο εαυτός του το αποτέλεσμα της πράξης είναι το μηδέν, δηλαδή:

$$\nu - \nu = 0$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

- Πολλαπλασιασμός αποκαλείται η πράξη κατά την οποία προκύπτει το γινόμενο φυσικών αριθμών και συμβολίζεται με το $(\cdot)$.

Αν ν, μ δύο φυσικοί αριθμοί, τότε ο πολλαπλασιασμός ισοδυναμεί με την πράξη:

$$\nu \cdot \mu$$

Οι φυσικού αριθμοί που προστίθενται κατά την πρόσθεση (εδώ οι ν, μ) ονομάζονται προσθετέοι.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ

- **Ουδέτερο στοιχείο:**

Αν ένας φυσικός αριθμός ν πολλαπλασιαστεί με το 1, ο αριθμός παραμένει αμετάβλητος, δηλαδή:

$$\nu \cdot 1 = \nu$$

Επομένως το **1** είναι το **ουδέτερο στοιχείο** του πολλαπλασιασμού.

Αν ένας φυσικός αριθμός ν πολλαπλασιαστεί με το 0, ο αριθμός που προκύπτει είναι πάντα το 0, δηλαδή:

$$\nu \cdot 0 = 0$$

- **Αντιμεταθετική ιδιότητα:**

Αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε δύο φυσικούς αριθμούς, το γινόμενό τους παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή:

$$\nu \cdot \mu = \mu \cdot \nu$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **αντιμεταθετική ιδιότητα**.

- **Προσεταιριστική ιδιότητα:**

Αν αλλάξουμε τη σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε τρεις φυσικούς αριθμούς, το γινόμενό τους παραμένει αμετάβλητο, δηλαδή:

$$(\kappa \cdot \nu) \cdot \mu = \kappa \cdot (\nu \cdot \mu)$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **προσεταιριστική ιδιότητα**.

- **Επιμεριστική ιδιότητα:**

Για τρεις φυσικούς αριθμούς ισχύει ότι:

$$\kappa \cdot (\nu + \mu) = \kappa \cdot \nu + \kappa \cdot \mu \quad \text{και} \quad \kappa \cdot (\nu - \mu) = \kappa \cdot \nu - \kappa \cdot \mu$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται **επιμεριστική ιδιότητα** και ισχύει και για περισσότερους αριθμούς μέσα στην παρένθεση, πχ:

$$\kappa \cdot (\nu + \mu + \lambda - \omega) = \kappa \cdot \nu + \kappa \cdot \mu + \kappa \cdot \lambda - \kappa \cdot \omega .$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

- **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται μια σειρά φυσικών αριθμών οι οποίοι συσχετίζονται μεταξύ τους μέσω των πράξεων της πρόσθεσης της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού. Η σειρά με την οποία εκτελούμε τις διάφορες πράξεις καθορίζεται από τους εξής κανόνες:

- Αν στην παράσταση δεν υπάρχουν παρενθέσεις, τότε εκτελούμε πρώτα τους πολλαπλασιασμούς με τη σειρά που αναγράφονται και στη συνέχεια τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις, από αριστερά προς τα δεξιά.

- Αν στην παράσταση υπάρχουν παρενθέσεις, τότε εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις εφαρμόζοντας την παραπάνω σειρά και στη συνέχεια τις υπόλοιπές πράξεις στην αριθμητική παράσταση που προκύπτει, πάλι σύμφωνα με τα προηγούμενα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Για τους φυσικούς αριθμούς που περιλαμβάνονται μεταξύ του 0 και του 10 :*

Α. Να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

Β. Να υπολογίσετε το γινόμενό τους.

Εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με όσα αναφέρονται παραπάνω.

Οι φυσικοί αριθμοί που αναφέρονται είναι οι $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Α. Είναι: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$.

Β. Είναι: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362.880$.

2. *Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:*

Α. $35+(12+8)$ *Β.* $123+(134-43)+202$ *Γ.* $(44-35)+4\cdot 12$

Δ. $32-(2\cdot 3+22-2\cdot 14)$

Εκτελούμε τις πράξεις κατά προτεραιότητα σύμφωνα με όσα αναφέρονται παραπάνω.

Α. Εκτελούμε πρώτα την πρόσθεση στην παρένθεση:

$$35+(12+8)=35+20=55.$$

Β. Εκτελούμε πρώτα την αφαίρεση στην παρένθεση και μετά τις προσθέσεις από αριστερά προς τα δεξιά:

$$123+(134-43)+202=123+91+202=214+202=416.$$

Γ. Εκτελούμε πρώτα την αφαίρεση στην παρένθεση, ύστερα τον πολλαπλασιασμό και τέλος την πρόσθεση:

$$(44-35)+4\cdot 12=9+4\cdot 12=9+48=57.$$

Δ. Εκτελούμε, στην παρένθεση, πρώτα τους πολλαπλασιασμούς και ύστερα την πρόσθεση και την αφαίρεση από αριστερά προς τα δεξιά, και τέλος την αφαίρεση:

$$32-(2\cdot 3+22-2\cdot 14)=32-(6+22-28)=32-(28-28)=32-0=32.$$

3. *Αν* $\alpha+\beta=25$ *και* $\gamma-\delta=5$ *να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:*

Α. $\alpha+10+\beta+5$ Β. $2+\beta+7+\alpha$ Γ. $\alpha+\gamma+\beta-\delta$

Χρησιμοποιούμε την ***αντιμεταθετική ιδιότητα*** *και στη συνέχεια εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα με τα παραπάνω.*

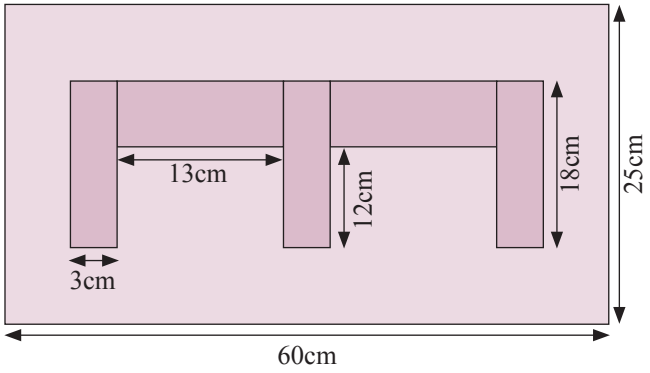
Α. Είναι: $\alpha+10+\beta+5=10+\alpha+\beta+5=10+20+5=35$.

Β. Είναι: $2+\beta+7+\alpha=2+\beta+\alpha+7=2+\alpha+\beta+7=2+20+7=29$.

Γ. Είναι: $\alpha+\gamma+\beta-\delta=\alpha+\beta+\gamma-\delta=25+5=30$.

4. *Να υπολογίσετε το γκρίζο εμβαδόν στο παρακάτω σχήμα, γνωρίζοντας πως οι αναγραφόμενες διαστάσεις είναι σε* cm *:*

Υπενθυμίζουμε ότι το εμβαδόν παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο βάση επί ύψος, οπότε το ζητούμενο εμβαδό προκύπτει αρχικά από γινόμενα και στη συνέχεια από την πρόθεση των γινομένων.



Το εμβαδόν του γκρίζου παραλληλογράμμου χωρίς το μαύρο σχήμα είναι:

$$E_1 = 60\text{cm} \cdot 25\text{cm} = 1.500\text{cm}^2 .$$

Το εμβαδόν E_2 του μαύρου σχήματος είναι το άθροισμα των εμβαδών των τριών κάθετων παραλληλογράμμων διαστάσεων 18cm και 3cm και των δύο οριζόντιων παραλληλογράμμων διαστάσεων 13cm και $(18-12)\text{cm}$:

$$E_2 = 3\cdot(18\cdot 3)+2\cdot\left[13\cdot(18-12)\right] = 3\cdot 54+2\cdot(13\cdot 6) =$$

$$= 48+2\cdot 78 = 48+156 = 318\text{cm}^2 .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν E είναι η διαφορά των E_1 και E_2:

$$E = E_1 - E_2 = 1.500\text{cm}^2 - 318\text{cm}^2 = 1.182\text{cm}^2 .$$

5. *Μια παρέα εννιά παιδιών αποφασίζει να πάει στο γήπεδο. Δύο από τα παιδιά αγοράζουν εισιτήριο των 25€, τρία των 20€ και τα υπόλοιπα των 15€. Επίσης πέντε από τα παιδιά αγοράζουν αναψυκτικό που κοστίζει 3€ και σάντουιτς που κοστίζει 4€. Πόσα € ξόδεψε συνολικά η παρέα;*

Μέσα από τα στοιχεία που περιγράφονται στα προβλήματα δημιουργούμε τις διάφορες αριθμητικές παραστάσεις και, κάνοντας τις πράξεις, προκύπτει το ζητούμενο.

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον αριθμό Ν των παιδιών που αγόρασαν εισιτήριο των 15€ . Εφόσον σε σύνολο 9 παιδιών 2 και 3 απ' αυτά αγόρασαν εισιτήριο των 25 και 20€ αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$N = 9 - 2 - 3 = 7 - 3 = 4$$

Το ποσό Π που ξόδεψε η παρέα είναι το άθροισμα του κόστους των εισιτηρίων, των αναψυκτικών και των σάντουιτς:

$$\Pi = 2 \cdot 25 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 25 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 7 =$$

$$= 50 + 60 + 60 + 35 = 205€ .$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 17.

1. Α. αντιμεταθετική.
Β. προσεταιριστική.
Γ. το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης 0 .
Δ. διαφορά.
Ε. $\Delta = M - A$
ΣΤ. αντιμεταθετική.
Ζ. προσεταιριστική.
Η. επιμεριστική.

2. Α. $52 \cdot \mathbf{100} = 5.200$ Β. $37 \cdot \mathbf{10} = 370$ Γ. $490 \cdot \mathbf{10.000} = 4.900.000$

3. Α
$$\begin{array}{r} \mathbf{3}.582 \\ +\ 7.59\mathbf{1} \\ \hline 11.173 \end{array}$$
Β.
$$\begin{array}{r} 4\mathbf{8}5 \\ +\ 52\mathbf{5} \\ \hline 1.010 \end{array}$$
Γ.
$$\begin{array}{r} \mathbf{3}.56\mathbf{5} \\ +\ 52\mathbf{8} \\ \hline 4.093 \end{array}$$

4. $1+2+3+4=$ 10

$1+2+3\cdot 4=1+2+12=15$

$1\cdot 2+3\cdot 4=2+12=$ 14

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=$ 24

5. Α. 190 Β. 225 Γ. 462 Δ. 2.726 Ε. $60-18+2$

ΣΤ. $52-(11+9)$

Ζ. 230 Η. 9.700 Θ. 879.000

6. Προσπαθούμε να εκφράσουμε έναν από τους αριθμούς συναρτήσει το 10 του 100 κοκ, γιατί έτσι γίνεται πιο εύκολος ο πολλαπλασιασμός. Άρα:

Α. $3\cdot 13=3\cdot(10+3)=3\cdot 10+3\cdot 3=30+9=39$.

Β. $7\cdot 11=7\cdot(10+1)=7\cdot 10+7\cdot 1+70+7=77$.

Γ. $45\cdot 12=45\cdot(10+2)=45\cdot 10+45\cdot 2=450+90=540$.

Δ. $12\cdot 101=12\cdot(100+1)=12\cdot 100+12\cdot 1=1.200+12=1.212$.

Ε. $5\cdot 110=5\cdot(100+10)=5\cdot 100+5\cdot 10=500+50=550$.

ΣΤ. $4\cdot 111=4\cdot(100+10+1)=4\cdot 100+4\cdot 10+4\cdot 1=400+40+4=444$.

Ζ. $34\cdot 99=34\cdot(100-1)=34\cdot 100-34\cdot 1=3.400-34=3.366$.

Η. $58\cdot 98=58\cdot(100-2)=58\cdot 100-58\cdot 2=5.800-116=5.684$.

7. Το εμβαδόν Ε του σχήματος ισούται με το άθροισμα των εμβαδών E_1, E_2 και E_3. για τα εμβαδά αυτά ισχύει:

$E_1=2\cdot 14$, $E_2=2\cdot 3$, $E_3=2\cdot 3$. Άρα:

$E=E_1+E_2+E_3=2\cdot 14+2\cdot 3+2\cdot 3=2\cdot(14+3+3)=2\cdot 20=40\text{m}^3$.

8. Α. Στρογγυλοποιούμε τα ποσά στην πλησιέστερη δεκάδα για να υπολογίσουμε πρόχειρα το άθροισμα.

$156 \to 160$, $30 \to 30$, $38 \to 40$, $369 \to 370$, $432 \to 430$.

Το κατά προσέγγιση άθροισμα είναι:

$$160 + 30 + 40 + 370 + 430 = 1.030€ > 1.000€$$

Επομένως, δεν αρκούν τα χρήματα.

Β. Το ακριβές άθροισμα είναι: $156 + 30 + 40 + 370 + 430 = 1.025€$.

9. Το κόστος των ρούχων είναι: $35 + 48 + 77 = 160€$.

Τα χρήματα του Νίκου φθάνουν οριακά για την αγορά των ρούχων.

10. Είναι: $(120 + 135 + 25 + 38) - (107 + 112 + 19 + 23) = 318 - 261 = 57$.

11. Α. Η ηλικία του Άρη είναι:

$2007 - 1983 = 24$ έτη.

Β. Το έτος γέννησης του πατέρα του Άρη είναι:

$1983 - 25 = 1958$.

12. Οι αίθουσες των 20 θρανίων χωράνε 40 μαθητές και οι αίθουσες των 12 θρανίων 24 μαθητές. Από τις 12 αίθουσες οι επτά έχουν 20 θρανία και οι πέντε 12 θρανία. Σε όλες τις αίθουσες χωράνε συνολικά:

$$7 \cdot 40 + 5 \cdot 24 = 280 + 120 = 400 \text{ μαθητές.}$$

Στο σχολείο γράφτηκαν: $80 + 58 + 61 = 199 < 400$ μαθητές,

Άρα οι μαθητές χωράνε στις αίθουσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να εκτελέσετε με τη σωστή σειρά τις παρακάτω πράξεις:

Α. $82+13-(2\cdot16+5)+11$.

Β. $45+21\cdot(87-2\cdot14)\cdot(2\cdot3\cdot4)-22$.

Γ. $(14-2\cdot7)\cdot2007+(3\cdot20-4\cdot15)\cdot2004$.

Δ. $29-8\cdot2+24\cdot3-\left[2\cdot3\cdot4-(2+3+4)\right]$.

2. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $27\cdot101$

Β. $68\cdot111$

Γ. $52\cdot99$

Δ. $12\cdot199$

Ε. $2007\cdot11$

3. Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $12\cdot147+12\cdot3-12\cdot150$

Β. $24\cdot16+24\cdot18-24\cdot32$

5. Α. Αν διαθέτετε ένα χαρτονόμισμα από κάθε κατηγορία (δηλαδή από $5€$ μέχρι και $500€$), πόσο είναι το συνολικό ποσό που διαθέτετε;

Β. Αν ξεκινώντας από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο χαρτονόμισμα ο αριθμός τους αυξάνεται κατά ένα (δηλαδή έχετε ένα χαρτονόμισμα των $500€$, δύο των $200€$ κοκ), ποιο είναι το νέο συνολικό ποσό που προκύπτει;

6. Ένας συρμός του μετρό ξεκινά από την αφετηρία άδειος για μια διαδρομή 12 στάσεων. Σε κάθε μία από τις 7 πρώτες στάσεις ανεβαίνουν στο συρμό 17 επιβάτες και κατεβαίνουν 5, ενώ σε κάθε μια από τις υπόλοιπες ανεβαίνουν στο συρμό 8 επιβάτες και κατεβαίνουν 22. Να βρείτε πόσους επιβάτες θα έχει ο συρμός στο τέρμα της διαδρομής.

7. Ένας οδηγός βάζει στο αυτοκίνητό του βενζίνη μία φορά την εβδομάδα. Την 1η εβδομάδα έβαλε 28 λίτρα βενζίνη με 97 λεπτά το λίτρο, τη 2η 36 λίτρα με 98 λεπτά το λίτρο και την 3η 19 λίτρα με 99 λεπτά το λίτρο. Πόσα ξόδεψε σε βενζίνη τις τρεις αυτές εβδομάδες ο οδηγός;

8. Αν $\alpha+\beta=9$ και $\beta-\gamma=8$ να υπολογίσετε την παράσταση $\alpha+2\beta-\gamma+4$.

9. Α. Να χρησιμοποιήσετε τις πράξεις που μάθατε για να εκφράσετε γενικά έναν άρτιο και έναν περιττό φυσικό αριθμό.

Β. Να εξετάσετε αν οι διαφορές δύο άρτιων και δύο περιττών αριθμών είναι άρτιες ή περιττές.

1.3 Δυνάμεις φυσικών αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Τα γινόμενα που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του ίδιου αριθμού ονομάζονται **δυνάμεις**. Πχ:

$7\cdot7=49$, $4\cdot4\cdot4=64$, $3\cdot3\cdot3\cdot3=81$.

Έτσι, το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού **α** που αποτελείται από **ν** παράγοντες ίσους με **α**, ονομάζεται **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με α^{ν}:

$$\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot.....\cdot\alpha}_{\text{ν παράγοντες}}$$

- Ο φυσικός αριθμός α ονομάζεται **βάση** της δύναμης και ο ν **εκθέτης**,

ενώ η δύναμη α^{ν} αποκαλείται ¨άλφα στη νιοστή¨.

- Όταν ο εκθέτης είναι ο αριθμός 2, τότε η δύναμη α^2 αποκαλείται ¨άλφα στο τετράγωνο¨. Αυτό συμβαίνει γιατί το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2$.

Όταν ο εκθέτης είναι ο αριθμός 3, τότε η δύναμη α^3 αποκαλείται ¨άλφα στον κύβο¨. Αυτό συμβαίνει γιατί ο όγκος ενός κύβου ακμής α ισούται με $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$.

Για τους υπόλοιπους εκθέτες ν η αντίστοιχη δύναμη του α αποκαλείται κανονικά ¨ α στη νιοστή¨:

$\alpha^1 \rightarrow$ ¨άλφα στην πρώτη¨, $\alpha^4 \rightarrow$ ¨άλφα στην τετάρτη¨ $\alpha^5 \rightarrow$ ¨άλφα στην πέμπτη¨ κοκ.

- Η δύναμη α^1 είναι ο αριθμός α:

$$\alpha^1 = \alpha .$$

Το γινόμενο $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots . \cdot 1$ ισούται πάντα με 1, ανεξάρτητα με το πόσες φορές επαναλαμβάνεται. Άρα:

$$1^{\nu} = 1$$

Το γινόμενο $0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots . \cdot 0$ ισούται πάντα με 0, ανεξάρτητα με το πόσες φορές επαναλαμβάνεται. Άρα:

$$0^{\nu} = 0 \text{ , } (\nu \neq 0)$$

Όταν ο εκθέτης είναι ο αριθμός 0, τότε η δύναμη α^0 ισούται με 1 ανεξάρτητα από την τιμή του α: $\alpha^0 = 1$

Δεν ορίζεται η δύναμη 0^0.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10

Οι δυνάμεις με βάση το 10 ισούνται με τον αριθμό που έχει πρώτο ψηφίο το

1 και στα δεξιά του τόσα 0 όσος είναι ο αριθμός του εκθέτη, δηλαδή:

$$10^{\nu} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \underbrace{10000\ldots.0}_{\nu \text{ μηδενικά}}$$ Πχ:

$10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$,

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$.

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΕΝΟΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10

- Οι δυνάμεις του 10 εκφράζουν τα ψηφία ενός αριθμού ανάλογα με την αξία τους, δηλαδή:

1 μονάδα $= 1 = 10^0$, 1 δεκάδα $= 10 = 10^1$, 1 εκατοντάδα $= 100 = 10^2$, 1 χιλιάδα $= 1.000 = 10^3$ κοκ.

Άρα ο κάθε φυσικός αριθμός μπορεί αν γραφεί σαν συνάρτηση των δυνάμεων του 10 αν η κάθε δύναμη πολλαπλασιαστεί με το αντίστοιχο ψηφίο του αριθμού. Πχ:

$14 = 10 + 4 \cdot 1 = 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

$785 = 7 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

$3.452 = 3 \cdot 1.000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

Η παραπάνω μορφή γραφής των αριθμών ονομάζεται **ανάπτυγμα σε δυνάμεις του 10**.

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- Εφόσον μια αριθμητική παράσταση περιέχει δυνάμεις, **πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις** και στη συνέχεια εκτελούμε τις υπόλοιπές πράξεις με τη σειρά που αναφέρεται στις προηγούμενες παραγράφους.

- Αν υπάρχουν παρενθέσεις, δίνουμε προτεραιότητα στις πράξεις μέσα σ' αυτές και στη συνέχεια ακολουθούμε την παραπάνω σειρά.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Α. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:* 3^3, 4^4, 5^5.

Β. Να εκφράσετε με μορφή δυνάμεων τα γινόμενα: $7\cdot7\cdot7\cdot7$, $8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8$, $9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9$.

Κάνουμε απλή εφαρμογή στον ορισμό της δύναμης.

Α. Είναι: $3^3=3\cdot3\cdot3=9$, $4^4=4\cdot4\cdot4\cdot4=16$, $5^5=5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=3.125$

Β. Είναι: $7\cdot7\cdot7\cdot7=7^4=2.401$, $8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8=8^5=32.768$, $9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9=9^6=531.441$

2. *Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:*

Κάνουμε απλή εφαρμογή στον ορισμό της δύναμης. Τα αρχικά νούμερα είναι ***τα έντονα.***

α	**1**	**4**	**6**	**10**
$\boldsymbol{\alpha^2}$	1	$4^2=16$	$6^2=36$	$10^2=100$
$\boldsymbol{\alpha^3}$	1	$4^3=64$	$6^3=216$	$10^3=1.000$

3. *Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις και να συγκρίνετε τα αποτελέσματα.*

Τι παρατηρείτε σε κάθε περίπτωση;

Α. 5^2+4^2 *και* $(4+5)^2$, 5^3+4^3 *και* $(5+4)^3$

Β. 5^2-4^2 *και* $(5-4)^2$, 5^3-4^3 *και* $(5-4)^3$

Γ. $4^2 \cdot 5^2$ και $(5 \cdot 4)^2$, $5^3 \cdot 4^3$ και $(5 \cdot 4)^3$

Εκτελώντας τις πράξεις βλέπουμε ότι γενικώς ισχύουν τα εξής:

$(\alpha+\beta)^\nu > \alpha^\nu + \beta^\nu$, $(\alpha-\beta)^\nu < \alpha^\nu - \beta^\nu$, $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.

Α. $5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$ $(5+4)^2 = 9^2 = 81$.

Άρα: $5^2 + 4^2 < (5+4)^2$

$5^3 + 4^3 = 125 + 64 = 189$ $(5+4)^3 = 9^3 = 729$.

Άρα: $5^3 + 4^3 < (5+4)^3$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε ότι: $(\alpha+\beta)^\nu > \alpha^\nu + \beta^\nu$.

Β. $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ $(5-4)^2 = 1^2 = 1$.

Άρα: $5^2 - 4^2 > (5-4)^2$

$5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$ $(5-4)^3 = 1^3 = 1$.

Άρα: $5^3 - 4^3 > (5-4)^3$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε ότι: $(\alpha-\beta)^\nu < \alpha^\nu - \beta^\nu$.

Γ. $5^2 \cdot 4^2 = 25 \cdot 16 = 400$ $(5 \cdot 4)^2 = 20^2 = 400$.

Άρα: $5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2$

$5^3 \cdot 4^3 = 125 \cdot 64 = 8.000$ $(5 \cdot 4)^3 = 20^3 = 8.000$.

Άρα: $5^3 \cdot 4^3 = (5 \cdot 4)^3$

Γενικεύοντας μπορούμε να γράψουμε ότι: $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.

4. *Να αναπτύξετε σε δυνάμεις του 10 τους παρακάτω αριθμούς.*

Α. 234.450 , *Β. 1.344.788 ,* *Γ. 45.700.201*

Πολλαπλασιάζουμε τα ψηφία του αριθμού ανάλογα με την αξία τους με την αντίστοιχη δύναμη, δηλαδή: μονάδες $\cdot 10^0$, δεκάδες $\cdot 10^1$, εκατοντάδες $\cdot 10^2$ κοκ.

Α. $234.450 = 2\cdot 100.000 + 3\cdot 10.000 + 4\cdot 1.000 + 4\cdot 100 + 5\cdot 10 + 0\cdot 1 =$

$= 2\cdot 10^5 + 3\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 2\cdot 10^5 + 3\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1$

Β. $1.344.788 = 1\cdot 1.000.000 + 3\cdot 100.000 + 4\cdot 10.000 + 4\cdot 1.000 + 7\cdot 100 + 8\cdot 10 + 8\cdot 1 =$

$= 1\cdot 10^6 + 3\cdot 10^5 + 4\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0$

Γ. $45.700.201 =$

$= 4\cdot 10.000.000 + 5\cdot 1.000.000 + 7\cdot 100.000 + 0\cdot 10.000 + 0\cdot 1.000 + 2\cdot 100 + 0\cdot 10 + 1\cdot 1 =$

$= 4\cdot 10^7 + 5\cdot 10^6 + 7\cdot 10^5 + 0\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 0\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 =$

$= 4\cdot 10^7 + 5\cdot 10^6 + 7\cdot 10^5 + 2\cdot 10^2 + +1\cdot 10^0$

5. *Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:*

Α. $6+(3\cdot 4+4)^2\cdot 10^2$. *Β.* $22-4^2+(7-2^2)^2$.

Εκτελούμε τις πράξεις με τη σωστή σειρά δηλαδή:
παρενθέσεις – δυνάμεις - πολλαπλασιασμοί – προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Α. $6+(3\cdot 4+4)^2\cdot 10^2 = 6+(2+4)^2\cdot 10^2 = 6+6^2\cdot 10^2 =$

$= 6+36\cdot 100 = 6+3.600 = 3.606$.

Β. $22-4^2+(7-2^2)^2 = 22-4^2+(7-4)^2 = 22-4^2+3^2 = 22-16+9 = 15$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 22.

1.

α	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25
α^2	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	625
α^3	512	729	1.000	1.331	1.728	2.197	2.744	3.375	4.096	4.913	5.832	6.859	8.000	15.625

2. Α. $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=5^6$ Β. $8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot8\cdot6\cdot6\cdot6=8^6\cdot6^3$

Γ. $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=1^6$ Δ. $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^4$ Ε. $x\cdot x\cdot x=x^3$

ΣΤ. $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=2^4\cdot\alpha^3$.

3. $2^1=2$. $2^6=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=64$.

$2^2=2\cdot2=4$. $2^7=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=128$.

$2^3=2\cdot2\cdot2=8$.

$2^8=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=256$.

$2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$.

$2^9=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=512$.

$2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$.

$2^{10}=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=1.024$.

4. $10^2=10\cdot10=100$. $20^2=20\cdot20=400$.

$30^2=30\cdot30=900$.

$40^2=40\cdot40=1.600$. $50^2=50\cdot50=2.500$.

$60^2 = 60 \cdot 60 = 3.600$.

$70^2 = 70 \cdot 70 = 4.900$. $80^2 = 80 \cdot 80 = 6.400$.

$90^2 = 90 \cdot 90 = 8.100$.

5. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$. $20^3 = 20 \cdot 20 \cdot 20 = 8.000$.

$30^3 = 30 \cdot 30 \cdot 30 = 27.000$.

$40^3 = 40 \cdot 40 \cdot 40 = 64.000$. $50^3 = 50 \cdot 50 \cdot 50 = 125.000$.

6. Α. $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$. Β. $3 \cdot 5^2 + 2 = 3 \cdot 25 + 2 = 75 + 2 = 77$.

Γ. $3 \cdot 5^2 + 2^2 = 3 \cdot 25 + 4 = 75 + 4 = 79$.

Δ. $3 \cdot 5 + 2^2 = 3 \cdot 5 + 4 = 15 + 4 = 19$.

Ε. $3 \cdot (5+2)^2 = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147$.

7. Α. $3^2 + 3^3 + 2^3 + 2^4 = 9 + 27 + 8 + 16 = 60$.

Β. $(13-2)^4 + 5 \cdot 3^2 = 14.641 + 5 \cdot 9 = 14.641 + 45 = 14.686$.

8. Α. $(6+5)^2 = 11^2 = 121$, $6^2 + 5^2 = 36 + 25 = 61$

$(6+5)^2 > 6^2 + 5^2$

Β. $(3+6)^2 = 9^2 = 81$, $3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$

$(3+6)^2 > 3^2 + 6^2$

Άρα γενικά: $(\alpha+\beta)^2 > \alpha^2 + \beta^2$.

9. Α. $\alpha + \alpha + \alpha = 4\alpha$. Β. $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^3$.

Γ. $x + x + x + x = 4x$. Δ. $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$.

10. Α. Το 34.720 αναπτύσσεται ως εξής:

$34.720 = 3\cdot 10.000 + 4\cdot 1.000 + 7\cdot 100 + 2\cdot 10 + 0\cdot 1 =$

$= 3\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 3\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1$.

Β. Το 123.654 αναπτύσσεται ως εξής:

$123.654 = 1\cdot 100.000 + 2\cdot 10.000 + 3\cdot 1.000 + 6\cdot 100 + 5\cdot 10 + 4\cdot 1 =$

$= 1\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 3\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 4\cdot 10^0$.

Γ. Το 890.650 αναπτύσσεται ως εξής:

$890.650 = 8\cdot 100.000 + 9\cdot 10.000 + 0\cdot 1.000 + 6\cdot 100 + 5\cdot 10 + 0\cdot 1 =$

$= 8\cdot 10^5 + 9\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 0\cdot 10^0 = 8\cdot 10^5 + 9\cdot 10^4 + 6\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1$.

11. $(1+2)\cdot(3+4) = 3\cdot 7 = 21$

$1\cdot(2+3\cdot 4) = 1\cdot(2+12) = 1\cdot 14 = 14$

$(1\cdot 2+3)\cdot 4 = (2+3)\cdot 4 = 5\cdot 4 = 20$

$1+(2+3)\cdot 4 = 1+5\cdot 4 = 1+20 = 21$

12. $2+2\cdot 2 = 2+4 = 6$

$3+3\cdot 3 = 3+9 = 12$

$4+4\cdot 4\cdot 4 = 4+64 = 68$

$5+5\cdot 5+5\cdot 5 = 5+25+25 = 55$

$5\cdot 5+5\cdot 5\cdot 5 = 25+125 = 150$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Α. $(1+2)\cdot 3+4=13$ Β. $1\cdot 2\cdot(3+4)=14$

Γ. $1+2+3\cdot 4=14$ Δ. $(1+2)\cdot 3\cdot 4=36$

2. Η κάθε γραμμή, η κάθε στήλη και η κάθε διαγώνιος του καθένα πίνακα έχει το ίδιο άθροισμα:

Α. Άθροισμα 51 Β. Άθροισμα 75 Δ. Άθροισμα 126

20	**13**	18
15	17	**19**
16	**21**	14

26	**21**	**28**
27	25	**23**
22	**29**	**24**

18	36	72
24	**78**	24
84	**12**	**30**

Τα στοιχεία του πίνακα Γ είναι ανεπαρκή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις: 3^4, 4^5, 5^6, 10^{11}.

2. Να εκφράστε με μορφή δυνάμεων τα παρακάτω γινόμενα:

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$, $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$, $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$,

$10\cdot10\cdot10\cdot10$.

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	2	4	6	8	12	14	18
α^2							
α^3							

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	1	2	3	4	5	6	7
β	14	13	12	11	10	9	8
$\alpha^2+\beta^2$							
$(\alpha+\beta)^2$							

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	7	6	5	4	3	2	1
β	14	13	12	11	10	9	8
$\beta^2-\alpha^2$							
$(\beta-\alpha)^2$							

6. Να αναπτύξετε σε δυνάμεις του 10 τους παρακάτω αριθμούς:

2.007, 88.106, 277.890, 2.342.909, 12.456.987, 7.007.007.007

7. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $2+4\cdot 4^3+2^2-6\cdot 1^{2007}$, Β. $4+5\cdot 2^2\cdot\left(2+2^2\right)^3-5^3+10^0-0^{2007}$

Γ. $4\cdot 4\cdot 4+4\left(4^2-2\cdot 4\right)+4^2-4^4$, Δ. $\left(3^2-5^1\right)^2-3\cdot\left(9-2^3\right)+2^3\cdot 3^2-(2\cdot 3)^2$

1.4 Διαίρεση φυσικών αριθμών – Διαιρετότητα

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- **Ευκλείδεια διαίρεση** ονομάζεται η πράξη κατά την οποία ένας αριθμός Δ διαιρείται με τον δ δίνοντας ως αποτέλεσμα το άθροισμα αριθμών $\pi+\upsilon$. Η διαίρεση συμβολίζεται με το $(:)$

$$\Delta:\delta=\pi+\upsilon$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και σαν γινόμενο:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$

Το παραπάνω γινόμενο ονομάζεται και **ταυτότητα** της ευκλείδειας διαίρεσης.

Η ταυτότητα ονομάζεται και δοκιμή ή επαλήθευση της διαίρεσης.

- Οι αριθμοί που αναφέρονται ονομάζονται ως εξής:

$\Delta =$ **διαιρετέος**.

$\delta =$ **διαιρέτης**. Ο διαιρετής είναι πάντοτε διαφορετικός του μηδέν: $\delta \neq 0$.

$\pi =$ **πηλίκο**.

$\upsilon =$ **υπόλοιπο**. Το υπόλοιπο είναι πάντοτε μικρότερο του πηλίκου: $\upsilon < \pi$.

- Όταν $\delta = 1$ τότε: $\Delta : 1 = 1$

Όταν $\Delta = 0$ τότε: $0 : \delta = 0$

Όταν $\Delta = \delta = \alpha$ τότε: $\Delta : \delta = \alpha : \alpha = 1$

ΤΕΛΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

- Ως **τέλεια** χαρακτηρίζουμε μια διαίρεση όταν το υπόλοιπο είναι μηδενικό, δηλαδή:

$\Delta : \delta = \pi$ ή $\Delta = \delta \cdot \pi$.

Η τέλεια διαίρεση είναι **η αντίστροφη πράξη** του πολλαπλασιασμού.

Στην τέλεια διαίρεση, ο Δ αποκαλείται και **πολλαπλάσιο** του δ και ο δ **διαιρετής** του Δ.

Επίσης μπορούμε να πούμε πώς ο Δ **διαιρείται** με τον δ ή ότι ο δ **διαιρεί** τον Δ.

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

- Η διαίρεση είναι ανάλογη πράξη με τον πολλαπλασιασμό. Τις διαιρέσεις λοιπόν τις εκτελούμε μαζί με τους πολλαπλασιασμούς, δηλαδή μετά τις δυνάμεις και πριν από τις προσθέσεις και αφαιρέσεις .

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να εκτελέσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις γράφοντας και την ταυτότητά τους σε κάθε περίπτωση.*

Α. 24:5, *Β. 125:9,* *Γ. 450:15.*

Η ταυτότητα της κάθε διαίρεσης είναι και η επαλήθευσή της, δηλαδή μια διαδικασία που μας δείχνει εάν εκτελέσαμε την πράξη σωστά.

Α.
$$\begin{array}{r|l} 24 & 5 \\ \hline -\,20 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Η ταυτότητα είναι: $24 = 5\cdot 4 + 1$

Β.
$$\begin{array}{r|l} 125 & 9 \\ \hline -\,117 & 13 \\ \hline 8 & \end{array}$$

Η ταυτότητα είναι: $125 = 9\cdot 13 + 8$

Γ.
$$\begin{array}{r|l} 450 & 15 \\ \hline -\,450 & 30 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Η διαίρεση είναι τέλεια γιατί $\upsilon = 0$.

Η ταυτότητα είναι: $450 = 15\cdot 30$

2. *Να εξετάσετε τις παρακάτω ισότητες και να εντοπίσετε αυτές που αποτελούν ταυτότητες ευκλείδειων διαιρέσεων.*

Α. 37=3·12+1, *Β. 223=8·28–1,* *Γ. 156=14·10+16.*

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχει τη γενική μορφή: $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$, *με* $\upsilon<\delta$ *και* $\delta\neq 0$.

Αν σε μια ισότητα κάτι από τα παραπάνω δεν ισχύει, τότε η ισότητα αυτή δεν εκφράζει ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης.

Α. Είναι ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης εφόσον $3\cdot 12+1=36+1=37$ και $\upsilon<\delta$, δηλαδή $1<3$.

Β. Δεν είναι ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης γιατί το 223 προκύπτει από το γινόμενο $8\cdot 28$ με **αφαίρεση** του 1.

Γ. Δεν είναι ταυτότητα ευκλείδειας διαίρεσης γιατί αν ο διαιρέτης είναι $\delta=14$ ή 10, το υπόλοιπό είναι $\upsilon=16$ μεγαλύτερο του διαιρέτη: $16>14$ και $16>10$. Άρα **δεν ισχύει** η συνθήκη $\upsilon<\delta$.

3. *Να βρεθεί ο αριθμός που:*

Α. όταν διαιρείται με το *5* δίνει πηλίκο *4* και υπόλοιπο *2*.

Β. διαιρεί τον αριθμό *122* δίνοντας πηλίκο *24* και υπόλοιπο *2*.

Γ. είναι το υπόλοιπό της διαίρεσης του *129* με το *6* και πηλίκο *21*.

Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες των διαιρέσεων για να βρούμε τους ζητούμενους αριθμούς.

Α. Ψάχνουμε το διαιρέτη Δ. Είναι: $\delta=5$, $\pi=4$, $\upsilon=2$ άρα:

$$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon=5\cdot 4+2=20+2=22.$$

Β. Ψάχνουμε το διαιρετέο δ. Είναι: $\Delta=122$, $\pi=24$, $\upsilon=2$ άρα:

$$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon \quad \text{ή} \quad \delta\cdot\pi=\Delta-\upsilon \quad \text{ή} \quad \delta=(\Delta-\upsilon):\pi=(122-2):24=120:24=5.$$

Γ. Ψάχνουμε το υπόλοιπο υ. Είναι: $\Delta=129$, $\delta=6$, $\pi=21$ άρα:

$$\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon \quad \text{ή} \quad \upsilon=\Delta-\delta\cdot\pi=129-6\cdot 21=129-126=3.$$

4. *Στις παρακάτω ευκλείδειες διαιρέσεις να βρείτε τα πιθανά υπόλοιπα.*

Α. Δ:3 *Β. Δ:5* *Γ. Δ:8*

Το υπόλοιπό είναι πάντοτε μικρότερο του διαιρέτη!

Τα πιθανά υπόλοιπά είναι οι φυσικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\upsilon<\delta$, δηλαδή:

Α. $\upsilon=0$, 1, 2, εφόσον $\delta=3$

Β. $\upsilon=0,1,2,3,4$, εφόσον $\delta=5$

Γ. $\upsilon=0,1,2,3,4,5,6,7$, εφόσον $\delta=8$

5. *Α. Πόσες εβδομάδες έχει ένα έτος;*

Β. Αν γνωρίζετε ότι η 1/1/2007 ήταν Δευτέρα, τι ημέρα είναι η 1/1/2008;

Μέσα από τα στοιχεία που περιγράφονται στα προβλήματα κατασκευάζουμε και εκτελούμε τις κατάλληλες διαιρέσεις που μας δίνουν τη λύση .

Α. Ένα έτος έχει 365 ημέρες και μια εβδομάδα 7 ημέρες, συνεπώς ο αριθμός των εβδομάδων ενός έτους είναι το πηλίκο της διαίρεσης $365:7$. Ο Δ είναι:

$365=364+1=7\cdot52+1$ άρα η διαίρεση $365:7$ έχει πηλίκο 52 και υπόλοιπο 1.

Επομένως, 1 έτος έχει 52 εβδομάδες και περισσεύει 1 ημέρα.

Β. 52 εβδομάδες μετά τη Δευτέρα 01/01/07, δηλαδή μετά από $52\cdot7=364$ ημέρες, η ημερομηνία είναι 31/12/07 και είναι πάλι Δευτέρα. Άρα η επόμενη ημέρα, δηλαδή η 01/01/08, είναι Τρίτη.

6. *Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:*

Α. $3:\left(5-2^2\right)^2+16:\left(29-3^3\right)^3$ *Β.* $\left(36+14:2-5^2\right):\left(3^3-3^4:3^2\right)+144:12^2$

Εκτελούμε τις πράξεις με τη σωστή σειρά δηλαδή:
Παρενθέσεις – δυνάμεις - πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις – προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Α. $3:\left(5-2^2\right)^2+16:\left(29-3^3\right)^3=3:\left(5-4\right)^2+16:\left(29-27\right)^3=$

$=3:1^2+16:2^3=3:1+16:8=3+2=5$.

B. $\left(36+14:2-5^2\right):\left(3^3-3^4:3^2\right)+144:12^2=$

$=\left(36+14:2-25\right):\left(27-81\ :3^2\right)+144:12^2=$

$\left(36+7-25\right):\left(27-81\ :9\right)+144:12^2=$

$=18:\left(27-9\right)+144:12^2=18:18+144:144=1+1=2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 26.

1. Α. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $4.002=69\cdot58$.

4.002	69
552	58
345	
0	

Β. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $1.445=17\cdot85$.

1.445	17
85	85
136	
0	

Γ. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $925=37\cdot25$.

925	37
85	25
74	
0	

Δ. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $3.231=213\cdot17$.

3.321	213
1431	17
213	
0	

Ε. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $35.280 = 2.940 \cdot 12$.

35.280	2.940
5880	12
2940	
0	

ΣΤ. Η δοκιμή (ταυτότητα) της διαίρεσης είναι: $5.082 = 77 \cdot 66$.

5.082	77
462	66
462	
0	

2. Α. Το 1 μέτρο κοστίζει $65 : 5 = 13€$.

Β. Το 1 κιλό κρέας ζυγίζει $30 : 3 = 10€$.

Γ. Θα χρειαστούν $46.592 : 52 = 896$ δοχεία των 52 λίτρων.

3. Α. $125 = 35 \cdot 3 + 20$. Είναι ευκλείδεια διαίρεση με $\Delta = 125$, $\delta = 35$, $\pi = 3$ και $\upsilon = 20$. Ο διαιρέτης δεν μπορεί να είναι το 3 γιατί θα είναι μικρότερος του υπολοίπου 20.

Β. $762 = 38 \cdot 19 + 40$. Δεν είναι ευκλείδεια διαίρεση γιατί αν ο διαιρέτης είναι $\delta = 38$ ή 19, το υπόλοιπό είναι $\upsilon = 40$ μεγαλύτερο του διαιρέτη: $40 > 38$ και $40 > 19$.

Γ. $1.500 = 42 \cdot 35 + 30$. Είναι ευκλείδεια διαίρεση με $\Delta = 1.500$, $\delta = 42$ ή 35, $\pi = 35$ ή 42 και $\upsilon = 30$.

Δ. $300 = 18 \cdot 16 + 12$. Είναι ευκλείδεια διαίρεση με $\Delta = 300$, $\delta = 18$ ή16, $\pi = 16$ ή 18 και $\upsilon = 12$.

4. Το υπόλοιπό είναι πάντοτε μικρότερο του διαιρέτη άρα, εφόσον $\delta = 8$, το υπόλοιπο θα είναι:

$$\upsilon = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$$

5. Αν είναι $\delta = 9$, $\pi = 73$, $\upsilon = 4$, τότε ο διαιρετέος Δ είναι:

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon = 9 \cdot 73 + 4 = 657 + 4 = 661.$$

6. Είναι: $247 = 7 \cdot 35 + 2$, δηλαδή οι 247 ημέρες έχουν 35 ολόκληρες εβδομάδες και 2 ημέρες επιπλέον.

Κάθε 7 ημέρες επαναλαμβάνεται η Τρίτη, άρα μετά από 247 ημέρες θα είναι Πέμπτη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις γράφοντας και την ταυτότητά τους σε κάθε περίπτωση.

Α. $23 : 3$, Β. $145 : 12$, Γ. $1550 : 25$, Δ. $2.345 : 44$.

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Δ	24	55	465				924	221	730
δ	4	6	13	99	17	19			
π				10	3	8	12	5	52
υ				0	2	4			

3. Να εντοπίσετε ποιες από τις παρακάτω ισότητες αποτελούν ταυτότητες ευκλείδειων διαιρέσεων.

Α. $58 = 4 \cdot 14 + 2$, Β. $88 = 4 \cdot 20 + 8$, Γ. $109 = 2 \cdot 55 - 1$,

Δ. $144 = 6 \cdot 24$, Ε. $94 = 10 \cdot 8 + 14$.

4. Α. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το υπόλοιπο μιας διαίρεσης με διαιρέτη το 8 και πηλίκο το 20. Για την τιμή αυτή του υπολοίπου, να υπολογίσετε και τον διαιρετέο.

Β. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης μιας διαίρεσης με πηλίκο 11 και υπόλοιπο 4. Για την τιμή αυτή του διαιρέτη, να υπολογίσετε και τον διαιρετέο.

5. Ένα σχολείο ετοιμάζεται για να πραγματοποιήσει μια διήμερη εκδρομή.

Α. Αν το σύνολο των μαθητών είναι 416 πόσα λεωφορεία των 52 θέσεων απαιτούνται;

Β. Αν για κάθε 32 παιδιά απαιτείται 1 συνοδός καθηγητής, πόσοι καθηγητές θα χρειαστεί να συνοδέψουν την εκδρομή;

Γ. Αν το ξενοδοχείο που θα καταλύσει το σχολείο έχει μόνο τρίκλινα δωμάτια, πόσα δωμάτια θα χρειαστούν τα παιδιά; Θα χωρέσουν ακριβώς στα δωμάτια;

6. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

Α. $88:11-4^2:2^2+\left(168:13-12^2\right)$

Β. $2\cdot\left(2^4+4-55:5\right)^2:\left(180:5-10-2^3\right)$

Γ. $\left(501-64:2^6\right):5^2-2.000:\left(4\cdot5^2\right)$

Δ. $32\cdot\left(3^2-144:48\right):\left(12^2:6^2\right)\cdot\left(5^2-3^2\right)$

1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας - ΜΚΔ - ΕΚΠ - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

ΘΕΩΡΙΑ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

- Γενικά ορίζουμε ως **πολλαπλάσια** ενός φυσικού αριθμού α τους αριθμούς που προκύπτουν από τον **πολλαπλασιασμό** του α με **όλους τους**

φυσικούς αριθμούς. Δηλαδή τα πολλαπλάσια του α είναι:

$$0\cdot\alpha,\ 1\cdot\alpha,\ 2\cdot\alpha,\ 3\cdot\alpha,\ldots\ldots\nu\cdot\alpha.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Με βάση τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν ορισμένες **ιδιότητες**:

Κάθε φυσικός αριθμός α διαιρεί (ακριβώς) όλα τα πολλαπλάσιά του.

Ο κάθε φυσικός αριθμός α που διαιρείται από τον φυσικό αριθμό β, είναι πολλαπλάσιο του β.

Ο κάθε φυσικός αριθμός α που διαιρεί τον φυσικό αριθμό β, διαιρεί και τα πολλαπλάσια του β.

ΚΟΙΝΑ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑ ΔΥΟ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Ορίζουμε ως **κοινά πολλαπλάσια** δυο φυσικών αριθμών α και β τους αριθμούς οι οποίοι είναι **ταυτόχρονα** πολλαπλάσια και του α και του β.

Προφανώς το 0 είναι κοινό πολλαπλάσιο όλων των αριθμών , αφού $\alpha\cdot 0=0$ για κάθε α.

- **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο** των α και β, σε συντομογραφία **ΕΚΠ (α, β)**, ονομάζεται το **μικρότερο μη μηδενικό** πολλαπλάσιο των δύο αριθμών.

ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ – ΠΡΩΤΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Τους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι **διαιρούν** (ακριβώς) ένα φυσικό αριθμό α τους ονομάζουμε **διαιρετές** του αριθμού α . Δηλαδή στην ισότητα:

$$\alpha=\delta\cdot\pi,$$

οι αριθμοί δ και π είναι διαιρέτες του α.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Με βάση τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν ορισμένες **ιδιότητες**:

Κάθε φυσικός αριθμός α έχει διαιρέτες το 1 και τον α.

Κάθε φυσικός αριθμός α που έχει ως διαιρέτες **μόνο** το 1 και τον α ονομάζεται **πρώτος** αριθμός.

Πχ, οι αριθμοί: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 39, 41, 43, 47, 51,\ldots$κοκ, διαιρούνται μόνο με το 1 και τον εαυτό τους, άρα είναι παραδείγματα πρώτων αριθμών.

Κάθε φυσικός αριθμός α που έχει ως διαιρέτες και άλλους φυσικούς αριθμούς εκτός από το 1 και τον α, ονομάζεται **σύνθετος** αριθμός.

Πχ, οι αριθμοί: $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24$ ...κοκ, διαιρούνται και με άλλους φυσικούς αριθμούς εκτός του 1 και του εαυτού τους, άρα είναι παραδείγματα σύνθετων αριθμών.

Το 1, ως ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος αριθμός.

ΚΟΙΝΟΙ ΔΙΑΙΡΕΤΕΣ ΔΥΟ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Ορίζουμε ως **κοινούς διαιρέτες** δυο φυσικών αριθμών α και β τους αριθμούς οι οποίοι είναι **ταυτόχρονα** διαιρέτες και του α και του β.

Προφανώς το 1 είναι κοινός διαιρέτης όλων των αριθμών , αφού $\alpha:1=\alpha$ για κάθε α.

- **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης** των α και β, σε συντομογραφία **ΜΚΔ (α, β)**, ονομάζεται ο **μεγαλύτερος** διαιρέτης των δύο αριθμών.

- Αν για δύο αριθμούς α και β είναι $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$, οι α και β ονομάζονται **πρώτοι μεταξύ τους**.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

- **Ανάλυση φυσικού αριθμού α σε γινόμενο πρώτων παραγόντων** ονομάζεται η γραφή του α σε μορφή γινομένου **πρώτων** αριθμών.

Πχ, τα γινόμενα: $4=2\cdot 2=2^4$, $6=2\cdot 3$, $8=2\cdot 2\cdot 2=2^8$, $9=3\cdot 3=3^2$, $10=2\cdot 5$, ….κοκ, είναι παραδείγματα ανάλυσης αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Κάθε αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με μοναδικό τρόπο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

- Για να αναλύσουμε τον αριθμό α σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, εργαζόμαστε ως εξής:

Διαιρούμε τον αριθμό α με τον μικρότερο πρώτο αριθμό (δηλαδή το 2).

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο πηλίκο που προκύπτει μέχρις ότου το πηλίκο που προκύπτει να μη διαιρείται με το 2.

Στη συνέχεια εκτελούμε διαίρεση με τον αμέσως μεγαλύτερο πρώτο αριθμό, (δηλαδή το 3). Επαναλαμβάνουμε τις διαιρέσεις μέχρι το πηλίκο να μη διαιρείται με το 3, οπότε προχωράμε στον επόμενο πρώτο αριθμό (το 5) κοκ.

Η διαδικασία **ολοκληρώνεται** όταν προκύπτει πηλίκο ίσο με **1**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Η ανάλυση του 120 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει ως εξής:

$120:2=60$ $1^{ο}$ πηλίκο.

$60:2=30$ $2^{ο}$ πηλίκο.

$30:2=15$ $3^{ο}$ πηλίκο.

Το 15 δε διαιρείται με το 2, άρα προχωρούμε σε διαίρεση με το 3:

$15:3=5$ $4^{ο}$ πηλίκο.

Το 5 δε διαιρείται με το 3, άρα προχωρούμε σε διαίρεση με το 5:

$5:5=1$ $5^{ο}$ πηλίκο.

Το πηλίκο είναι το 1 άρα η ανάλυση ολοκληρώθηκε. Τελικά είναι:

$$120=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5=2^3\cdot 3\cdot 5.$$

- Η ανάλυση του 125 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων έχει ως εξής:
  Το 125 δε διαιρείται με το 2, ούτε με το 3, άρα προχωρούμε στο 5:
  $125:5=25$ ($1^{ο}$ πηλίκο) $25:5=5$ ($2^{ο}$ πηλίκο) $5:5=1$ τέλος διαδικασίας.
  Άρα:

$$125=5\cdot 5\cdot 5=5^3$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΩΝ ΜΚΔ ΚΑΙ ΕΚΠ ΔΥΟ Ή ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

- Το ΜΚΔ δύο ή περισσότερων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι **το γινόμενο των κοινών πρώτων παραγόντων τους με το μικρότερο εκθέτη.**

Πχ, οι αριθμοί 80, 40, 120 αναλύονται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως εξής:

$80=2^4\cdot 5$, $40=2^3\cdot 5$, $120=2^3\cdot 3\cdot 5$.

Οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη είναι οι 2^3, 5. Άρα:

$$\text{ΜΚΔ}(80,40,120)=2^3\cdot 5=8\cdot 5=40.$$

- Το ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι **το γινόμενο των κοινών και μη κοινών πρώτων παραγόντων τους με το μεγαλύτερο εκθέτη.**

Πχ, το ΕΚΠ των αριθμών του προηγούμενου παραδείγματος είναι:

$$\text{ΕΚΠ}(80,40,120)=2^4\cdot 3\cdot 5=16\cdot 3\cdot 5=240.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

- Κριτήρια διαιρετότητας ονομάζουμε τους κανόνες με τους οποίους διαπιστώνουμε κατά πόσον ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 5, 9, 10 και 25.

- **Διαίρεση με το 2**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με το 2 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι άρτιο, δηλαδή αν ο α είναι άρτιος.

Πχ, οι αριθμοί $2, 4, 26, 48, 244$ διαιρούνται με το 2.

- **Διαίρεση με το 3**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με το 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 3.

Πχ, οι αριθμοί $117, 585$ διαιρούνται με το 3 αφού $1+1+7=9$, $5+8+5=18$ και οι αριθμοί 9 και 18 διαιρούνται με το 3.

- **Διαίρεση με το 9**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με το 9 αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9.

Πχ, οι αριθμοί 567, 1.998 διαιρούνται με το 9 αφού $5+6+7=18$, $1+9+9+8=27$ και οι αριθμοί 18 και 27 διαιρούνται με το 9.

- **Διαίρεση με το 5**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με το 5 αν το τελευταίο του ψηφίο είναι 0 ή 5.

Πχ, οι αριθμοί $50, 105, 255, 500$ διαιρούνται με το 5.

- **Διαίρεση με τα 10, 100, 1.000 κοκ**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με τα $10, 100, 1.000$ αν το τελευταία του ψηφία είναι αντίστοιχα $0, 00, 000$.

Πχ, οι αριθμοί $30, 400$ και 5.000 διαιρούνται με τα $10, 100$ και 1.000 αντίστοιχα.

- **Διαίρεση με το 4 ή το 25**: Ένας φυσικός αριθμός α διαιρείται με το 4 ή το 25, αν ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δυο τελευταία ψηφία του α διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.

Πχ, ο αριθμός 77.816 διαιρείται με το 4 γιατί τα δυο τελευταία του ψηφία σχηματίζουν τον αριθμό 16, ο οποίος διαιρείται με το 4, ενώ ο 4.975 διαιρείται με το 25 γιατί τα δυο τελευταία του ψηφία σχηματίζουν τον αριθμό 75, ο οποίος διαιρείται με το 25.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να χαρακτηρίσετε ως πρώτους ή σύνθετους τους αριθμούς: 19 , 20 , 21 , 22 , 23 και 24 .*

Για να εξετάσουμε αν ένας αριθμός είναι πρώτος ή σύνθετος βρίσκουμε τους διαιρετές του.
Επίσης αναφέρουμε ότι:
Όλοι οι πρώτοι αριθμοί εκτός του 2 είναι περιττοί και όλοι οι άρτιοι αριθμοί εκτός του 2 είναι σύνθετοι.

Το 19 έχει διαιρέτες τους 1 και 19 , άρα είναι πρώτος αριθμός.

Το 20 έχει διαιρέτες τους 1, 2 , 4 , 5 , 10 και 20 , άρα είναι σύνθετος αριθμός.

Το 21 έχει διαιρέτες τους 1, 3 , 7 και 21 , άρα είναι σύνθετος αριθμός.

Το 22 έχει διαιρέτες τους 1, 2 , 11, και 22 , άρα είναι σύνθετος αριθμός.

Το 23 έχει διαιρέτες τους 1 και 23 , άρα είναι πρώτος αριθμός.

Το 24 έχει διαιρέτες τους 1, 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 12 , και 24 , άρα είναι σύνθετος αριθμός.

2. *Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς:*
38 , 155 , 71 , 108 .

Η ανάλυση ενός αριθμού $\acute{\alpha}$ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων γίνεται σύμφωνα με τη θεωρία με διαδοχικές διαιρέσεις, πρώτα του $\acute{\alpha}$ και μετά των πηλίκων που προκύπτουν, με τα 2 , 3 , 5 ...κοκ.
Αν κάποιος πρώτος αριθμός δεν είναι διαιρετής του $\acute{\alpha}$ ή κάποιου πηλίκου, προχωρούμε στον επόμενο.
Η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων αφορά σύνθετους αριθμούς.

Ο αριθμός 38:

$38:2=19$ ($1^{ο}$ πηλίκο)

$19:19=1$ ($2^{ο}$ πηλίκο) Άρα: $38=2\cdot 19$.

Ο αριθμός 55: Οι αριθμοί 2 και 3 δεν είναι διαιρέτες του 55, άρα προχωρούμε στον αριθμό 5:

$55:5=11$ ($1^{ο}$ πηλίκο)

$19:19=1$ ($2^{ο}$ πηλίκο) Άρα: $38=2\cdot 19$.

Ο αριθμός 71: Ο 71 είναι πρώτος αριθμός, συνεπώς δεν αναλύεται.

Ο αριθμός 108:

$108:2=54$ ($1^{ο}$ πηλίκο)

$54:2=27$ ($2^{ο}$ πηλίκο)

$27:3=9$ ($3^{ο}$ πηλίκο)

$9:3=3$ ($4^{ο}$ πηλίκο)

$3:3=1$ ($5^{ο}$ πηλίκο) Άρα: $108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2^2\cdot 3^3$.

3. *Να βρείτε το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ των αριθμών 160, 200 και 256.*

Αναλύουμε τους αριθμούς σε πρώτους παράγοντες και επιλέγουμε τους κοινούς στη μικρότερη δύναμη (ΜΚΔ), ή τους κοινούς και μη κοινούς στη μεγαλύτερη δύναμη (ΕΚΠ).

$160=2^5\cdot 5$, $200=2^3\cdot 5^2$, $256=2^8$

Το ΕΚΠ των αριθμών αυτών είναι το γινόμενο του 2 και του 5 στη μεγαλύτερή τους δύναμη:

$$\text{ΕΚΠ}(160,200,256)=2^8\cdot 5^2=256\cdot 25=6.400.$$

Ο ΜΚΔ των αριθμών αυτών είναι ο αριθμός 2 στη μικρότερη δύναμη:

$$\text{ΜΚΔ}(160,200,256)=2^3=8.$$

4. *Να βρείτε τα ψηφία που λείπουν στους παρακάτω αριθμούς ώστε:*

Α. Ο αριθμός 2_6 *να διαιρείται με το* 9.

Β. Ο αριθμός $4_\ _$ *να διαιρείται με το* 25 *και το* 3.

Εφαρμόζουμε τα κριτήρια διαιρετότητας ή και συνδυασμούς αυτών.

Α. Για να διαιρείται ο αριθμός με το 9 πρέπει το άθροισμα των ψηφίων να διαιρείται με το 9. Το ψηφίο που λείπει μπορεί να πάρει τιμές από 1 μέχρι και 9. Απ' αυτές μόνο για το 1 προκύπτει άθροισμα ψηφίων που διαιρείται με το 9: $2+1+6=18$. Άρα ο αριθμός είναι ο 216.

Β. Για να διαιρείται ο αριθμός με το 9 πρέπει ο αριθμός που σχηματίζουν τα δύο ψηφία που λείπουν να διαιρείται με το 25, δηλαδή να είναι τα ζεύγη 2 και 5 (25), 5 και 0 (50), ή 7 και 5 (75).

Όμως ο αριθμός θα πρέπει να διαιρείται και με το 3, άρα το άθροισμα των ψηφίων του πρέπει να διαιρείται με το 3. Αυτό ισχύει μόνο για το ζεύγος 5 και 0: $4+5+0=9$.

Για τα άλλες δύο πιθανά ζεύγη $4+2+5=11$ και $4+7+5=16$. Οι 11, 16 δε διαιρούνται με το 3. Άρα ο αριθμός είναι ο 450.

5. *Ένας στρατιωτικός θάλαμος με διπλά κρεβάτια είναι πλήρως κατειλημμένος από μια διμοιρία στρατιωτών. Όταν οι στρατιώτες παρατάσσονται σε τριάδες δεν περισσεύει κανείς. Αν η διμοιρία δεν μπορεί να έχει λιγότερους από* 19 *και περισσότερους από* 29 *στρατιώτες, να βρείτε τον αριθμό τους.*

Μέσα από τα στοιχεία που περιγράφονται στα προβλήματα προσπαθούμε να χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη θεωρία.

Εφόσον δεν περισσεύει κανένα κρεβάτι ο αριθμός των στρατιωτών διαιρείται με το 2, δηλαδή είναι άρτιος. Άρα είναι ένας από τους: 20, 22, 24, 26, 28.

Οι στρατιώτες παρατάσσονται σε τριάδες χωρίς να περισσεύει κανείς, άρα ο αριθμός τους διαιρείται με το τρία. Επομένως το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το τρία. Από τους πιθανούς αριθμούς, μόνο ο 24 διαιρείται με το 3 $(2+4=6)$. Άρα η διμοιρία έχει 24 στρατιώτες.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 30.

1. Α. Ένα κοινό πολλαπλάσιο των 5 και 8 είναι το 80. $\text{ΕΚΠ}(5,8)=40$.

Β. Αν $\text{ΕΚΠ}(\alpha,\beta)=\beta$, τότε ο β είναι πολλαπλάσιο του α.

Γ. Κάθε φυσικός αριθμός α που έχει ως διαιρέτες μόνο το 1 και τον α ονομάζεται πρώτος.

Κάθε φυσικός αριθμός α που έχει ως διαιρέτες και άλλους φυσικούς αριθμούς εκτός από το 1 και τον α, ονομάζεται σύνθετος.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος.

Δ. Αν για δύο αριθμούς α και β είναι $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=1$, οι α και β ονομάζονται πρώτοι μεταξύ τους.

2. Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού πρέπει να διαιρείται με το 9:

Α. 684 $(6+8+4=18)$.

Β. 9.504 $(9+5+0+4=18)$ ή 9.594 $(9+5+9+4=27)$.

Γ. 6.012 $(6+0+1+2=9)$.

3. Α. $\text{ΕΚΠ}(3,5)=15$ Β. $\text{ΕΚΠ}(11,6)=66$

Γ. $\text{ΕΚΠ}(5,10)=10$ Δ. $\text{ΕΚΠ}(3,2,5)=30$

Ε. $\text{ΕΚΠ}(3,6,9)=18$ ΣΤ. $\text{ΕΚΠ}(8,12,15)=120$

4. Είναι $\text{ΕΚΠ}(2,3,5)=30$. Θα βγάλουν μοντέλο μετά από 30 χρόνια, δηλαδή το 2031 .

5. Είναι $\text{ΕΚΠ}(3,5,7)=105$. Τόσοι είναι οι μαθητές της Α΄ γυμνασίου.

6. Είναι: $10=2\cdot5$ και $12=2^2\cdot3$. $\text{ΕΚΠ}(10,12)=2^2\cdot3\cdot5=60$
Θα ξανασυναντηθούν μετά από 60 ημέρες, δηλαδή στις 10 Μαΐου. Ο Γιάννης θα έχει πάει $60:10-1=5$ φορές και ο Νίκος $60:12-1=5$ φορές μέχρι να ξανασυναντηθούν.

7. Α. $\text{ΜΚΔ}(5,8)=1$ Β. $\text{ΜΚΔ}(16,24)=8$

Γ. $\text{ΜΚΔ}(30,15)=15$ Δ. $\text{ΜΚΔ}(10,30,60)=10$

Ε. $\text{ΜΚΔ}(22,32,50)=2$

8. Αν για τους φυσικούς αριθμούς ισχύει ότι $\text{ΜΚΔ}(\alpha,\beta)=24$ σημαίνει ότι όλοι οι διαιρετές του 24 είναι και διαιρέτες των α και β. Οι διαιρέτες του 24 είναι οι 1, 2, 3, 4, 6, 8 και 12.

9. Οι διαιρέτες του 10 είναι οι 1, 2, 5, 10.
Οι διαιρέτες του 11 είναι οι 1, 11.
Οι διαιρέτες του 12 είναι οι 1, 2, 3, 4, 6, 12.
Οι διαιρέτες του 13 είναι οι 1, 13.
Οι διαιρέτες του 14 είναι οι 1, 2, 7, 14.

Οι διαιρέτες του 15 είναι οι 1, 2, 3, 5, 15.
Οι διαιρέτες του 16 είναι οι 1, 2, 4, 8, 16.
Οι διαιρέτες του 17 είναι οι 1, 17.
Οι διαιρέτες του 18 είναι οι 1, 2, 3, 9, 18.
Οι διαιρέτες του 19 είναι οι 1, 19.
Οι διαιρέτες του 20 είναι οι 1, 2, 4, 5, 10, 20.
Οι 11, 13, 17, 19 είναι πρώτοι αριθμοί
Οι 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 είναι σύνθετοι αριθμοί.

10. Εφόσον ο αριθμός α πολλαπλασιάζεται με το 2 μας δίνει άρτιο άρα και σύνθετο αριθμό.

11. Οι διαιρέτες του 28 είναι οι 1, 2, 4, 7, 14, 28.
Οι διαιρέτες του 82 είναι οι 1, 2, 41, 82.
Οι διαιρέτες του 95 είναι οι 1, 5, 19, 95.
Οι διαιρέτες του 105 είναι οι 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.
Οι διαιρέτες του 124 είναι οι 1, 2, 4, 31, 62, 124.
Οι διαιρέτες του 345 είναι οι 1, 3, 5, 15, 69, 115, 345.
Οι διαιρέτες του 1.232 είναι οι 1, 2, 4, 8, 14, 16, 22, 28, 44, 56, 77, 88, 112, 308, 616, 1.232.
Οι διαιρέτες του 3.999 είναι οι 1, 3, 1.333, 3.999.

12. Α. $78:2=39$
$39:3=13$
$13:13=1$. Άρα $78=2\cdot3\cdot13$.

Β. $348:2=174$
$174:2=87$
$87:3=29$

$29:29=1$. Άρα $348=2^2\cdot 3\cdot 29$.

Γ. $1.210:2=605$

$605:5=121$

$121:11=11$

$11:11=1$. Άρα $1.210=2\cdot 5\cdot 11^2$.

Δ. $2.344:2=1.172$

$1.172:2=586$

$586:2=293$

$293:293=1$. Άρα $2.344=2^3\cdot 293$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε ως πρώτους ή σύνθετους τους αριθμούς από 42 μέχρι και 47 και να βρείτε ποιοι είναι πρώτοι μεταξύ τους.

2. Να χαρακτηρίσετε ως πρώτο ή σύνθετο τον πενταπλάσιο ενός πρώτου αριθμού.

3. Να βρείτε τον ΜΚΔ και το ΕΚΠ των:

Α. 25, 45, 65 Β. 40, 50, 60 Γ. 120, 144, 180.

4. Να βρείτε τα ψηφία που λείπουν στους παρακάτω αριθμούς ώστε:

Α. Ο αριθμός 1.2_7 να διαιρείται με το 9.

Β. Ο αριθμός $1._5_$ να διαιρείται με το 5 και το 3 και να είναι μικρότερος του 1.100.

5. Θέλετε να μοιράσετε σε πιατέλες 32 παστάκια φράουλας, 48 παστάκια

σοκολάτας και 72 παστάκια βανίλιας έτσι ώστε να μην περισσέψει κανένα γλυκό και οι πιατέλες να έχουν ίδιο αριθμό γλυκών από κάθε είδος. Πόσες πιατέλες θα χρησιμοποιήσετε και πόσα γλυκά από κάθε είδος θα έχει η καθεμιά;

6. Ένας οδηγός βάζει βενζίνη κάθε 8 ημέρες, πλένει το αυτοκίνητο του κάθε 30 ημέρες και αλλάζει λάδια κάθε 160 ημέρες. Αν σήμερα έκανε και τις τρεις δουλείες μαζί, μετά από πόσες μέρες θα το ξανακάνει;

7. Αν $\text{ΕΚΠ}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=16$ και $\alpha,\beta,\gamma,\delta>1$, να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς α, β, γ και δ.

Επαναληπτικά θέματα 1ου κεφαλαίου

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις επαναληπτικές ερωτήσεις του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 32.

1. **Λάθος,** γιατί $(100-30)-10=70-10=60$ και $100-(30-10)=100-20=80$.

2. **Λάθος**. Για να πολλαπλασιάζουμε με το 11 έναν φυσικό αριθμό α, τον πολλαπλασιάζουμε με το 10 και προσθέτουμε και τον α.

3. **Σωστό.**

4. **Λάθος**, γιατί $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$.

5. **Σωστό**.

6. **Λάθος**, γιατί $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha=\alpha^6$.

7. **Σωστό**.

8. **Σωστό**.

9. **Λάθος**, γιατί $20-12:4=20-3=17$.

10. **Σωστό**.

11. **Σωστό**.

12. **Σωστό**.

13. **Λάθος**. Μεταξύ δύο διαδοχικών περιττών αριθμών υπάρχει ένας άρτιος, άρα διαφέρουν κατά 2. Συνεπώς, η διαφορά δύο οποιανδήποτε περιττών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 2, άρα άρτια.

14. **Σωστό**.

15. **Λάθος**. Το άθροισμα των ψηφίων του 38 είναι $3+8=11$ που δε διαιρείται με το 3.

16. **Σωστό**.

17. **Λάθος**. Είναι ΕΚΠ$(35,210)=35$.

18. **Λάθος**. Είναι ΕΚΠ$(2,24)=24$.

19. **Λάθος**. Το 15 είναι διαιρέτης του 420 αφού $320:15=28$.

20. **Σωστό**.

21. **Σωστό**.

22. **Λάθος**, αφού το 10 είναι σύνθετος αριθμός.

23. **Σωστό**.

Κριτήριο αξιολόγησης 1ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Ποια είναι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;

Β. Στη μαθηματική έκφραση α^{ν}, πως ονομάζονται τα α και ν;

Γ. Πότε μια διαίρεση είναι τέλεια;

Δ. Τι ονομάζουμε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και τι μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο φυσικών αριθμών α και β;

ΘΕΜΑ 2ο

Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $124:31-2^4:4^2+\left(2160:18-8^2\right)$

Β. $\left(2^3+81:3^2-88:8\right)^2:2:\left(170:34+29-3^3\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το υπόλοιπο μιας διαίρεσης με διαιρέτη το 7 και πηλίκο το 16. Για την τιμή αυτή του υπολοίπου, να υπολογίσετε και τον διαιρετέο.

Β. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει ο διαιρέτης μιας διαίρεσης με πηλίκο 24 και υπόλοιπο 7. Για την τιμή αυτή του διαιρέτη, να υπολογίσετε και τον διαιρετέο.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς: 432, 1250, και 1.890

Β. Να βρείτε το ΕΚΠ και το ΜΚΔ των παραπάνω αριθμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{8}$

$\frac{8}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{6}$

2.1 Η έννοια του κλάσματος

ΘΕΩΡΙΑ

- Έστω ότι χωρίζουμε μια ποσότητα σε ν ίσα μέρη. Το καθένα από αυτά τα μέρη αποτελεί το **ένα νιοστό** της συνολικής ποσότητας. Η παραπάνω έκφραση αποτελεί και τον ορισμό του **κλάσματος** το οποίο συμβολίζεται με:

$$\frac{1}{\nu}$$

Αν επιλέξουμε μ τμήματα της ποσότητας, δηλαδή μ νιοστά τότε προκύπτει το κλάσμα:

$$\mu \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{\mu}{\nu}$$

- Σε ένα κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ οι αριθμοί μ και ν ονομάζονται **όροι** του κλάσματος.

Ο αριθμός πάνω από την γραμμή (μ) ονομάζεται **αριθμητής.**

Ο αριθμός κάτω από την γραμμή (ν) ονομάζεται **παρονομαστής** για τον οποίο ισχύει πάντα: $\nu \neq \mathbf{0}$.

Η γραμμή αποκαλείται **γραμμή κλάσματος**.

- Όλα τα νιοστά, δηλαδή ν νιοστά, μας δίνουν την αρχική ποσότητα:

$$\frac{\nu}{\nu} = 1$$

- Ο κάθε φυσικός αριθμός α μπορεί να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή το α και παρονομαστή το 1:

$$\alpha = \frac{\alpha}{1}$$

- Αν στο κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι $\mu<\nu$, τότε το κλάσμα είναι **μικρότερο** της μονάδας:

$$\frac{\mu}{\nu} < 1.$$

Αν στο κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ είναι $\mu>\nu$, τότε το κλάσμα είναι **μεγαλύτερο** της μονάδας:

$$\frac{\mu}{\nu} > 1.$$

- Κάθε κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ εκφράζει τη **διαίρεση** του αριθμού μ από τον ν, δηλαδή:

$$\frac{\mu}{\nu} = \mu : \nu$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε με πόσα λεπτά ισούνται τα $\frac{2}{5}$ της ώρας.

Όταν δίνεται ένα μέγεθος και μας ζητείται το $\frac{\mu}{\nu}$ του μεγέθους, υπολογίζουμε πρώτα το $\frac{1}{\nu}$ διαιρώντας το μέγεθος με το ν και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με μ.

Η ώρα έχει 60 λεπτά. Για να βρούμε το $\frac{1}{5}$ της ώρας χωρίζουμε την ώρα σε 5 ίσα μέρη και το καθένα απ' αυτά είναι το $\frac{1}{5}$. Άρα:

$$\frac{1}{5}\text{ώρας} = \frac{60}{5}\text{λεπτά} = 12\text{λεπτά}.$$

Τα $\frac{2}{5}$ της ώρας είναι το $\frac{1}{5}$ πολλαπλασιασμένο με το 2, δηλαδή:

$$\frac{2}{5}\text{της ώρας} = 2 \cdot \frac{1}{5}\text{της ώρας} = 2 \cdot 12\text{λεπτά} = 24\text{λεπτά}.$$

2. Αν τα $\frac{5}{8}$ των χρημάτων που έχει στην τσέπη του ο Νίκος είναι $10€$, να βρείτε ολόκληρο το ποσό που έχει στην τσέπη του ο Νίκος.

Όταν μας δίνεται το $\frac{\mu}{\nu}$ μιας ενός μεγέθους και μας ζητείται όλο το μέγεθος, υπολογίζουμε το $\frac{1}{\nu}$ διαιρώντας το $\frac{\mu}{\nu}$ με μ και στη συνέχεια το πολλαπλασιάζουμε με ν.

Εφόσον τα $\frac{5}{8}$ των χρημάτων, δηλαδή τα 5 από τα 8 κομμάτια, είναι $10€$, το $\frac{1}{8}$, δηλαδή το 1 κομμάτι, θα είναι:

$$\frac{1}{8}\text{ των χρημάτων} = \frac{5}{8}\text{ των χρημάτων} : 5 = 10€ : 5 = 2€.$$

Το συνολικό ποσό θα είναι τα $\frac{8}{8}$ των χρημάτων, δηλαδή $8 \cdot \frac{1}{8}$ των χρημάτων:

$$\frac{8}{8}\text{ των χρημάτων} = 8 \cdot \frac{1}{8}\text{ των χρημάτων} = 8 \cdot 2€ = 16€.$$

3. Αν τα $\frac{7}{15}$ των επιβατών ενός λεωφορείου είναι 21, να βρείτε πόσους επόβατες έχει το λεωφορείο.

Εφόσον τα $\frac{7}{15}$ των επιβατών είναι 21 το $\frac{1}{15}$ θα είναι:

$$\frac{1}{15} \text{ των επιβατών } = \frac{7}{15} \text{ των επιβατών } : 7 = 21 : 7 = 3 \text{ επιβάτες.}$$

Άρα το σύνολο των επιβατών, δηλαδή τα $\frac{15}{15}$, είναι:

$$\frac{15}{15} \text{ των επιβατών } = 15 \cdot \frac{1}{15} \text{ των επιβατών } = 15 \cdot 3 = 45 \text{ επιβάτες.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 36.

1. Α. Οι κ, λ ονομάζονται όροι του κλάσματος.

Β. Είναι: $\frac{\alpha}{1} = \alpha$, $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$, $\frac{0}{\alpha} = 0$.

Γ. Αν χωρίσουμε το μέγεθος Α σε λ ίσα κομμάτια, η έκφραση ¨το μέρος $\frac{\kappa}{\lambda}$ του μεγέθους Α¨ αντιπροσωπεύει κ από τα κομμάτια αυτά.

2. Τα κλάσματα $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$ και $\frac{18}{20}$ είναι μικρότερα του 1, ενώ το κλάσμα $\frac{10}{9}$ μεγαλύτερο.

3. Οι απόντες μαθητές είναι 4 σε σύνολο 28 δηλαδή τα $\frac{4}{28}$ της τάξης.

4. Εφόσον το $\frac{1}{5}$ του κιλού είναι 15 καρύδια, το κιλό είναι τα $5\cdot\frac{1}{5}$ του κιλού δηλαδή:

$$5\cdot\frac{1}{5} \text{ του κιλού } = 5\cdot 14 \text{ καρύδια } = 70 \text{ καρύδια.}$$

5. $\frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{8}, \frac{1}{3}, \frac{25}{40}$.

6. Εφόσον $\frac{2}{7}$ της τούρτας $=4$ κομμάτια, το $\frac{1}{7}$ είναι: $\frac{2}{7}$ της τούρτας $:2=4:2=2$ κομμάτια.

Όλη η τούρτα, δηλαδή τα $\frac{7}{7}$, αποτελείται από $\left(\frac{1}{7}\text{της τουρτας}\cdot 7\right) = 2\cdot 7 = 14$ κομμάτια..

7. Α. 100 γραμμάρια $=\frac{100}{1.000}$ του κιλού. Β. 250 γραμμάρια $=\frac{250}{1.000}$ του κιλού.

Γ. 500 γραμμάρια $=\frac{500}{1.000}$ του κιλού. Α. 600 γραμμάρια $=\frac{600}{1.000}$ του κιλού.

4. Α. Ο μήνας αποτελείται από 30 ημέρες, οπότε οι 15 ημέρες είναι τα $\frac{15}{30}$ του μήνα.

Β. Το εξάμηνο αποτελείται από $6 \cdot 30 = 180$ ημέρες, οπότε οι 15 ημέρες είναι τα $\frac{15}{180}$ του εξαμήνου.

Γ. Το έτος αποτελείται από 365 ημέρες, οπότε οι 15 ημέρες είναι τα $\frac{15}{365}$ του έτους.

5. Το σύνολο της τιμής του φορέματος, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$ είναι $90€$, άρα το $\frac{1}{5}$ της τιμής είναι $\frac{90}{5} = 18€$.

Τα $\frac{2}{5}$ της τιμής είναι $2 \cdot \frac{1}{5}$ της τιμής $= 2 \cdot 18 = 36€$.

Συνεπώς θα πληρώσουμε $90 - 36 = 54€$.

6. Τα $\frac{3}{8}$ των μαθητών είναι 12 άρα το $\frac{1}{8}$ είναι $12 : 3 = 4$ μαθητές. Το σύνολο της τάξης είναι τα $\frac{8}{8}$ δηλαδή: $\frac{8}{8}$ των μαθητών $= 8 \cdot \frac{1}{8}$ των μαθητών $= 8 \cdot 4 = 32$ μαθητές.

7. Τα $\frac{11}{11}$ της πλευράς είναι 33cm, άρα το $\frac{1}{11}$ είναι $33 : 11 = 3\text{cm}$. Τα $\frac{3}{11}$ είναι $3 \cdot 3 = 9\text{cm}$. Άρα οι δύο πλευρές του παραλληλογράμμου έχουν μήκος 33cm και οι άλλες δύο 9cm, οπότε η περίμετρος Π είναι:

$$\Pi = 2 \cdot 33 + 2 \cdot 9 = 66 + 18 = 84\text{cm}.$$

8. Α. Τα $\frac{10}{10}$ είναι 5cm, άρα το $\frac{1}{10}$ είναι $\frac{1}{10}\cdot 5=\frac{5}{10}\text{cm}$ και τα $\frac{8}{10}$ είναι:

$$8\cdot\frac{1}{10}=8\cdot\frac{5}{10}\text{cm}=4\text{cm}.$$

Β. Τα $\frac{5}{5}$ είναι 5cm, άρα το $\frac{1}{5}$ είναι $\frac{1}{5}\cdot 5=1\text{cm}$ και τα $\frac{6}{5}$ είναι:

$$6\cdot\frac{1}{5}=6\cdot 1\text{cm}=6\text{cm}.$$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Α. $\frac{2}{6}$, Β. $\frac{1}{4}$, Γ. $\frac{10}{16}$, Δ. $\frac{3}{5}$.

2.

$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Από τους 11 ποδοσφαιριστές μιας ελληνικής ομάδας οι 4 είναι αλλοδαποί και οι υπόλοιποι Έλληνες.

Α. Να υπολογίσετε το μέρος της ομάδας που αποτελείται από αλλοδαπούς ποδοσφαιριστές.

Β. Να υπολογίσετε το μέρος της ομάδας που αποτελείται από Έλληνες ποδοσφαιριστές.

2. Αν τα $\frac{2}{7}$ των αυτοκινήτων ενός γεμάτου πάρκινγκ 140 θέσεων είναι λευκού και τα $\frac{3}{28}$ κόκκινου χρώματος, να υπολογίσετε τον αριθμό των λευκών και των κόκκινων αυτοκινήτων του πάρκινγκ.

3. Οι μαθήτριες ενός γυμνασίου είναι τα $\frac{5}{9}$ του συνόλου των παιδιών. Αν ο αριθμός των μαθητριών είναι 85, να υπολογίσετε τον αριθμό όλων των παιδιών του γυμνασίου.

4. Ο Κώστας, ο Γιώργος και η Ελένη μαζεύουν κογχύλια στην παραλία. Τα τρία παιδιά μάζεψαν συνολικά 240 κογχύλια. Ο Κώστας έχει μαζέψει τα $\frac{5}{12}$ του συνολικού αριθμού των κογχυλιών, ο Γιώργος 22 κογχύλια λιγότερα από τον Κώστα και η Ελένη 16 κογχύλια λιγότερα από τον Γιώργο.

Α. Πόσα κογχύλια μάζεψε ο Κώστας;

Β. Τι μέρος των κογχυλιών είναι αυτά που μάζεψε ο Γιώργος;

Γ. Τι μέρος των κογχυλιών είναι αυτά που μάζεψε η Ελένη;

5. Αν τα $\frac{8}{9}$ της μάζας του ανθρώπινου σώματος αποτελείται από νερό, να βρείτε τη μάζα του νερού στο σώμα ενός ανθρώπου μάζας 72 κιλών.

6. Να βρείτε το μέρος των $500€$ που αποτελούν όλα τα υπόλοιπα χαρτονομίσματα.

7. Για την αγορά ενός αυτοκινήτου νέας τεχνολογίας, φιλικής προς το περιβάλλον, μας γίνεται έκπτωση ίση με το $\frac{1}{8}$ της τιμής του.
Αν η έκπτωση αντιστοιχεί σε 2.500€ :

Α. Πόση ήταν η αρχική τιμή του αυτοκινήτου;

Β. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε τελικά;

Γ. Πόσα χρήματα θα πληρώναμε αν η έκπτωση ήταν ίση με το $\frac{1}{10}$ της αρχικής τιμής του αυτοκινήτου;

8. Ένας υπάλληλος προσλαμβάνεται με αρχικό μισθό 1.000€ και παίρνει κάθε δύο χρόνια αύξηση ίση με τα $\frac{1}{10}$ του τρέχοντος μισθού του. Πόσος θα είναι ο μισθός του υπαλλήλου μετά από τρία χρόνια;

2.2 Ισοδύναμα κλάσματα

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Δύο κλάσματα, τα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$, ονομάζονται **ισοδύναμα**, ή απλά **ίσα**, όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους, οπότε ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

- Στα παραπάνω ισοδύναμα κλάσματα ισχύει ότι:

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma ,$$

δηλαδή τα γινόμενα που προκύπτουν από τον **χιαστί πολλαπλασιασμό** των όρων τους (αριθμητής του ενός επί τον παρονομαστή του άλλου) είναι ίσα. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται **χιαστί ιδιότητα**.

- Πολλαπλασιάζοντας και τους δύο όρους ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ με τον ίδιο αριθμό μ, προκύπτει κλάσμα που είναι ισοδύναμο του αρχικού:

$$\frac{\mu \cdot \alpha}{\mu \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Πχ: $\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{12}$.

- Διαιρώντας και τους δύο όρους ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ με τον ίδιο κοινό διαιρέτη δ, προκύπτει κλάσμα που είναι ισοδύναμο του αρχικού:

$$\frac{\alpha : \delta}{\beta : \delta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Πχ: $\frac{4}{8} = \frac{4:2}{8:2} = \frac{2}{4}$.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- **Απλοποίηση** κλάσματος ονομάζουμε τη διαδικασία κατά την οποία διαιρούμε τους όρους του κλάσματος ώστε να προκύψει ένα **απλούστερο** ισοδύναμο κλάσμα.

- Το κλάσμα που δεν απλοποιείται περεταίρω ονομάζεται **ανάγωγο**

κλάσμα. Ο ΜΚΔ των όρων αυτού του κλάσματος είναι το 1.

- Για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα ώστε να προκύψει το ισοδύναμο ανάγωγό του, διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με τον ΜΚΔ τους.

Πχ, οι όροι του $\frac{24}{36}$ έχουν ΜΚΔ το 12 άρα: $\frac{24}{36}=\frac{24:12}{36:12}=\frac{2}{3}$ (ανάγωγο κλάσμα).

ΟΜΩΝΥΜΑ ΚΑΙ ΕΤΕΡΩΝΥΜΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- Δύο ή περισσότερα κλάσμα τα που έχουν παρονομαστή τον ίδιο αριθμό, ονομάζονται **ομώνυμα**:

Πχ: Τα $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{17}{5}$ είναι ομώνυμα κλάσματα.

- Δύο ή περισσότερα κλάσμα τα που έχουν παρονομαστή διαφορετικό αριθμό, ονομάζονται **ετερώνυμα**:

Πχ: Τα $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{15}{8}$ είναι ετερώνυμα κλάσματα.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΤΩΝ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΣΕ ΟΜΩΝΥΜΑ

- Για να **μετατρέψουμε** δύο ή περισσότερα ετερώνυμα κλάσματα σε ομώνυμα ακολουθούμε συγκεκριμένη διαδικασία:

- Βρίσκουμε το **ΕΚΠ** των παρονομαστών των κλασμάτων.

- **Διαιρούμε** το ΕΚΠ με κάθε **παρονομαστή** και πολλαπλασιάζουμε τα **πηλίκα** που προκύπτουν με τους όρους του **αντίστοιχου** κλάσματος.

- Έτσι προκύπτουν **ομώνυμα κλάσματα** τα οποία είναι **ισοδύναμα** με τα αρχικά.

- Πχ, τα $\frac{5}{6}$ και $\frac{7}{8}$ είναι ετερώνυμα. $\text{ΕΚΠ}(6,8)=24$.

Είναι, $24:6=4$ και $24:8=3$.

Άρα πολλαπλασιάζουμε τους όρους του $\frac{5}{6}$ με το 4 και τους όρους του $\frac{7}{8}$ με το 3. Είναι: $\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}$ και $\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}$

Τα κλάσματα $\frac{20}{24}$ και $\frac{21}{24}$ είναι ομώνυμα και ισοδύναμα με τα κλάσματα $\frac{5}{6}$ και $\frac{7}{8}$ αντίστοιχα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{3}{5}$ σε ένα ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 100.*

Διαιρούμε το ζητούμενο παρονομαστή με αυτόν του κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε με το πηλίκο που προκύπτει τους όρους του.

Διαιρώντας το 100 με το 5 έχουμε: $100:5=20$

Άρα πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ με το 20:

$$\frac{3\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{60}{100}$$

Το κλάσμα $\frac{60}{100}$ έχει παρονομαστή 100 και είναι ισοδύναμο με το κλάσμα $\frac{3}{5}$.

2. *Να απλοποιήσετε το κλάσμα* $\frac{18}{48}$ *σε ισοδύναμο ανάγωγο κλάσμα.*

Βρίσκουμε τον ΜΚΔ των όρων του κλάσματος και διαιρούμε ***και τους δύο*** *μ' αυτόν.*

Είναι: $\text{ΜΚΔ}(18,48)=6$. Το κλάσμα $\frac{18}{48}$ γίνεται:

$$\frac{18}{48}=\frac{18:6}{48:6}=\frac{3}{8}.$$

Το απλοποιημένο κλάσμα $\frac{3}{8}$ είναι ανάγωγο και ισοδύναμο του αρχικού $\frac{18}{48}$.

3. *Δίνονται τα κλάσματα* $\frac{12}{48}$, $\frac{14}{52}$ *και* $\frac{3}{12}$. *Να εξεταστεί αν κάποια από τα κλάσματα είναι ίσα.*

Ελέγχουμε την πιθανή ισότητα των κλασμάτων εξετάζοντάς τα ανά δύο. Τα κλάσματα που είναι ίσα (ή ισοδύναμα) δίνουν ίσα χιαστί γινόμενα.

Για το ζεύγος κλασμάτων $\frac{12}{48}$ και $\frac{14}{52}$ τα χιαστί γινόμενα είναι:

$$12\cdot 52=624 \text{ και } 14\cdot 48=672\neq 624$$

Άρα, τα κλάσματα $\frac{12}{48}$ και $\frac{14}{52}$ δεν είναι ίσα.

Για το ζεύγος κλασμάτων $\frac{12}{48}$ και $\frac{3}{12}$ τα χιαστί γινόμενα είναι:

$$12\cdot 12=144 \text{ και } 3\cdot 48=144$$

Άρα, τα κλάσματα $\frac{12}{48}$ και $\frac{3}{12}$ είναι ίσα.

Για το ζεύγος κλασμάτων $\frac{14}{52}$ και $\frac{3}{12}$ τα χιαστί γινόμενα είναι:

$$14\cdot 12=168 \text{ και } 3\cdot 52=156\neq 168$$

Άρα, τα κλάσματα $\frac{12}{48}$ και $\frac{3}{12}$ δεν είναι ίσα.

4. *Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα κλάσματα* $\frac{5}{6}$ *και* $\frac{11}{9}$.

Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών, το διαιρούμε με τον παρονομαστή του κάθε κλάσματος και πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους των κλασμάτων με το αντίστοιχο πηλίκο.

Είναι $\text{ΕΚΠ}(6,9)=18$, οπότε $18:6=3$ και $18:9=2$. Άρα πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος $\frac{5}{6}$ με το 3 και τους όρους του κλάσματος $\frac{11}{9}$ με το 2. Έχουμε:

$$\frac{5\cdot 3}{6\cdot 3}=\frac{15}{18} \text{ και } \frac{11\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{22}{18}$$

Τα κλάσματα $\frac{15}{18}$, $\frac{22}{18}$ είναι ομώνυμα και ισοδύναμα των $\frac{5}{6}$ και $\frac{11}{9}$ αντίστοιχα.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 40 .

1. Α. Δύο κλάσματα ονομάζονται ισοδύναμα, όταν εκφράζουν το ίδιο μέρος ενός μεγέθους.

Β. Αν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $\alpha\cdot\delta=\gamma\cdot\beta$

Γ. Ανάγωγο ονομάζεται το κλάσμα που δεν απλοποιείται περεταίρω.

Δ. Ομώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή τον ίδιο αριθμό.

Ε. Ετερώνυμα ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή διαφορετικό αριθμό.

ΣΤ. Διαιρώντας τους όρους ενός κλάσματος με τον ΜΚΔ τους, το κλάσμα γίνεται ανάγωγο.

2. Α. Τα χιαστί γινόμενα είναι: $2\cdot 27=54$, $3\cdot 18=54$, άρα τα $\frac{2}{3}$, $\frac{18}{28}$ είναι ισοδύναμα.

Β. Τα χιαστί γινόμενα είναι: $3\cdot 2=6$, $4\cdot 1=4\neq 6$, άρα τα $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ δεν είναι ισοδύναμα.

Γ. Τα χιαστί γινόμενα είναι: $7\cdot 40=280$, $8\cdot 30=240\neq 280$, άρα τα $\frac{7}{8}$, $\frac{30}{40}$ δεν είναι ισοδύναμα.

Δ. Τα χιαστί γινόμενα είναι: $13\cdot 28=364$, $14\cdot 26 = 264$, άρα τα $\frac{13}{14}$, $\frac{26}{28}$ είναι ισοδύναμα.

3. Α. Είναι: $100:4=25$, άρα: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}$.

Β. Είναι: $100:5=20$, άρα: $\frac{8}{5}=\frac{8\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{160}{100}$.

Γ. Είναι: $100:20=5$, άρα: $\frac{4}{20}=\frac{4\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{20}{100}$.

Δ. Είναι: $100:2=50$, άρα: $\frac{5}{2}=\frac{5\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{250}{100}$.

Ε. Επειδή το 75 δεν διαιρεί το 100 απλοποιούμε το $\frac{60}{75}$ διαιρώντας με τον $\text{ΜΚΔ}(60,75)=15$ έχουμε: $\frac{60}{75}=\frac{60:15}{75:15}=\frac{4}{5}$. Συνεχίζουμε με το ισοδύναμη κλάσμα $\frac{4}{5}$.

Είναι: $100:5=20$, άρα: $\frac{4}{5}=\frac{60}{75}=\frac{4\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{80}{100}$.

4. Α. Είναι $\text{ΜΚΔ}(6,10)=2$, άρα: $\frac{10}{6}=\frac{10:2}{6:2}=\frac{5}{3}$.

Β. Είναι $\text{ΜΚΔ}(30,50)=10$, άρα: $\frac{50}{30}=\frac{50:10}{30:10}=\frac{5}{3}$.

Γ. Είναι $\text{ΜΚΔ}(18,27)=9$, άρα: $\frac{18}{27}=\frac{18:9}{27:9}=\frac{2}{3}$.

5. Α. Είναι: $6:3=2$, άρα: $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{4}{6}$.

Β. Είναι: $15:3=5$, άρα $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{10}{15}$.

6. Α. Το κενό είναι ο αριθμός $33\left(3\cdot 11\right)$.

Β. Το κενό είναι ο αριθμός $3\left(9:3\right)$.

Γ. Το κενό είναι ο αριθμός $70\left(14\cdot 5\right)$.

Δ. Απλοποιώντας το $\frac{48}{36}$ έχουμε το ισοδύναμο $\frac{3}{2}$, οπότε το κενό είναι $32\left(3\cdot 8\right)$.

7. Α. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(25,30\right)=5$, άρα: $\frac{25}{30}=\frac{25:5}{30:5}=\frac{3}{5}$.

Β. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(9,12\right)=3$, άρα: $\frac{12}{9}=\frac{12:3}{9:3}=\frac{4}{3}$.

Γ. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(35,56\right)=8$, άρα: $\frac{35}{26}=\frac{35:8}{26:8}=\frac{4}{7}$.

8. Α. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(30,32\right)=2\neq 1$, επομένως το $\frac{32}{30}$ δεν είναι ανάγωγο.

Β. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(14,15\right)=1$, επομένως το $\frac{14}{15}$ είναι ανάγωγο.

Γ. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(16,51\right)=1$, επομένως το $\frac{16}{51}$ είναι ανάγωγο.

Δ. Είναι $\text{ΜΚΔ}\left(26,50\right)=2\neq 1$, επομένως το $\frac{26}{50}$ δεν είναι ανάγωγο.

9. Α. Είναι $\text{ΕΚΠ}\left(5,9\right)=45$, άρα $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 9}=\frac{27}{45}$ και $\frac{7}{9}=\frac{7\cdot 5}{9\cdot 5}=\frac{35}{45}$.

Β. Είναι $\text{ΕΚΠ}\left(8,10\right)=45$, άρα $\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 5}{8\cdot 5}=\frac{35}{40}$ και $\frac{3}{10}=\frac{3\cdot 4}{10\cdot 4}=\frac{12}{40}$.

Γ. Είναι $\text{ΕΚΠ}\left(3,12\right)=12$, άρα $\frac{11}{3}=\frac{11\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{44}{12}$ και $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 1}{12\cdot 1}=\frac{7}{12}$.

10. Α. Σ.

Β. Σ.

Γ. Λ. Ο αριθμητής θα είναι τριπλάσιος του x.

Δ. Λ. Ισούται με το αρχικό.

Ε. Σ.

ΣΤ. Λ. Αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1.

Ζ. Σ.

Η. Λ. Απλοποιούμε διαιρώντας και όχι αφαιρώντας τον ίδιο αριθμό από τους όρους.

Θ. Σ.

Ι. Σ.

ΙΑ. Σ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{6}{15}$ σε ένα ισοδύναμο με παρονομαστή τους αριθμούς:

Α. 30 Β. 75 Γ. 105 Δ. 135.

2. Να μετατρέψετε τα κλάσματα $\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, \frac{5}{8}$ και $\frac{7}{12}$ σε ισοδύναμα κλάσματα με παρονομαστή τον αριθμό 24.

3. Να απλοποιήσετε σε ισοδύναμα ανάγωγα τα παρακάτω κλάσματα:

Α. $\frac{14}{42}$, Β. $\frac{144}{96}$, Γ. $\frac{39}{40}$, Δ. $\frac{225}{315}$.

4. Να ελέγξετε αν τα παρακάτω ζεύγη κλασμάτων είναι ισοδύναμα.

Α. $\frac{13}{12}$ και $\frac{169}{144}$, Β. $\frac{14}{9}$ και $\frac{58}{36}$, Γ. $\frac{84}{97}$ και $\frac{1176}{1358}$.

5. Ποια πρέπει να είναι η τιμή των α και β ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες κλασμάτων: $\frac{12}{\alpha}=\frac{4}{5}$ και $\frac{125}{55}=\frac{\beta}{11}$

6. Δύο όμοια αεροπλάνα με ίδιο αριθμό θέσεων φτάνουν στο αεροδρόμιο Ελ. Βενιζέλος. Το πρώτο είναι πλήρες κατά τα $\frac{28}{32}$ και το δεύτερο κατά τα $\frac{98}{112}$ των θέσεων. Να εξετάσετε αν τα δύο αεροπλάνα μεταφέρουν τον ίδιο αριθμό επιβατών.

7. Να μετατρέψετε σε ομώνυμα τα παρακάτω κλάσματα:

Α. $\frac{2}{3}$ και $\frac{7}{4}$, Β. $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$ και $\frac{11}{24}$ Γ. $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{21}{15}$, και $\frac{17}{30}$.

8. Δίνεται το κλάσμα $\frac{4}{5}$. Να το μετατρέψετε αν είναι δυνατόν σε ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 55 και το 62 και να σχολάσετε τα αποτελέσματα.

2.3 Σύγκριση κλασμάτων

ΘΕΩΡΙΑ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΟΜΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- Συγκρίνοντας ομώνυμα κλάσματα, **μεγαλύτερο** είναι εκείνο που έχει τον **μεγαλύτερο αριθμητή**:

$$\text{Αν } \alpha > \beta \quad \text{τότε} \quad \frac{\alpha}{\nu} > \frac{\beta}{\nu}.$$

Πχ, $\frac{4}{15} < \frac{7}{15}$ γιατί $4 < 7$, $\frac{8}{5} > \frac{6}{5}$ γιατί $8 > 6$.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΙΣΟ ΑΡΙΘΜΗΤΗ

- Συγκρίνοντας κλάσματα με ίσο αριθμητή, **μεγαλύτερο** είναι εκείνο που έχει τον **μικρότερο παρονομαστή:**

$$\text{Αν } \mu > \nu \quad \text{τότε} \quad \frac{\alpha}{\mu} < \frac{\alpha}{\nu}.$$

Πχ, $\frac{4}{11} > \frac{4}{15}$ γιατί $11 < 15$, $\frac{8}{5} > \frac{8}{7}$ γιατί $5 < 7$.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΤΕΡΩΝΥΜΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- Συγκρίνοντας ετερώνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε **ομώνυμα**

και στη συνέχεια, μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει τον μεγαλύτερο αριθμητή:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa}{\nu}$ και $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\lambda}{\nu}$ οπότε, αν $\kappa>\lambda$ τότε $\frac{\kappa}{\nu}>\frac{\lambda}{\nu}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\gamma}{\delta}$.

Πχ, τα $\frac{4}{5}$ και $\frac{5}{6}$ γίνονται ομώνυμα ως $\frac{24}{30}$ και $\frac{25}{30}$ οπότε $\frac{24}{30}<\frac{25}{30}$

δηλαδή $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΟΝΑΔΑ

- Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα ισούται με τη μονάδα:

Πχ $\frac{3}{3}=1$.

- Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας και ονομάζεται **γνήσιο** κλάσμα:

Πχ, $\frac{2}{3}<1$ γιατί $2<3$ (γνήσιο κλάσμα).

- Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας και ονομάζεται **καταχρηστικό** κλάσμα:

Πχ, $\frac{5}{4}>1$ γιατί $5>4$ (καταχρηστικό κλάσμα).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να συγκρίνετε τα κλάσματα:*

Α. $\frac{5}{9}$ *και* $\frac{7}{9}$ *Β.* $\frac{8}{11}$ *και* $\frac{8}{13}$.

Εφόσον τα κλάσματα έχουν ίσους παρονομαστές συγκρίνουμε τους αριθμητές.
Εφόσον τα κλάσματα έχουν ίσους αριθμητές συγκρίνουμε τους παρονομαστές.

Α. Τα κλάσματα έχουν ίσους παρονομαστές άρα:

$$5<7 \quad \text{οπότε} \quad \frac{5}{9}<\frac{7}{9}.$$

Β. Τα κλάσματα έχουν ίσους αριθμητές άρα:

$$11<13 \quad \text{οπότε} \quad \frac{8}{11}>\frac{8}{13}.$$

2. *Να συγκρίνετε τα κλάσματα* $\frac{9}{20}$ *και* $\frac{21}{25}$.

Όταν συγκρίνουμε ετερώνυμα κλάσματα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και συγκρίνουμε τους αριθμητές.

Τα κλάσματα μετατρέπονται σε ομώνυμα: $\text{ΕΚΠ}(20,\ 25)=100$

οπότε: $\frac{9}{20}=\frac{9\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{45}{100}$ και $\frac{21}{25}=\frac{21\cdot 4}{25\cdot 4}=\frac{84}{100}$

Είναι $45 < 84$ άρα: $\frac{45}{100} < \frac{84}{100}$ δηλαδή $\frac{9}{20} < \frac{21}{25}$.

3. *Να χαρακτηρίσετε ως γνήσια ή καταχρηστικά τα κλάσματα* $\frac{45}{54}$ *και* $\frac{35}{34}$.

Συγκρίνουμε τους όρους του κάθε κλάσματος αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή το κλάσμα είναι γνήσιο, διαφορετικά είναι καταχρηστικό.

Είναι $45 < 54$ άρα $\frac{45}{54} < 1$ επομένως το κλάσμα αυτό είναι γνήσιο.

Είναι $35 > 34$ άρα $\frac{35}{34} > 1$ επομένως το κλάσμα αυτό είναι καταχρηστικό.

4. *Να βρείτε τον φυσικό αριθμό* α, *ώστε το κλάσμα* $\frac{144}{(11+\alpha)^2}$ *να είναι ίσο με τη μονάδα.*

Για να είναι ένα κλάσμα ίσο με τη μονάδα εξισώνουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή.

Ο αριθμητής είναι $144 = 12 \cdot 12 = 12^2$.

Πρέπει $144 = (11+\alpha)^2$ ή $12^2 = (11+\alpha)^2$ δηλαδή $12 = 11+\alpha$, άρα:

$\alpha = 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 43.

1. Α. Για να συγκρίνουμε δύο κλάσματα πρέπει να έχουν έναν όρο ίσο.

Β. Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, τότε το κλάσμα ισούται με 1.

Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μικρότερος του παρονομαστή, τότε το κλάσμα >1.

Αν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, τότε το κλάσμα <1.

Γ. Αν $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$ τότε $\alpha>\beta$.

2. Α. Τα κλάσματα είναι ομώνυμα συνεπώς $\frac{3}{7}<\frac{5}{7}$.

Β. Τα κλάσματα έχουν ίσο αριθμητή άρα εφόσον $5<9$ τότε $\frac{3}{5}>\frac{3}{9}$.

Γ. Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα άρα $\text{ΕΚΠ}(5,\ 12)=60$, άρα:

$$\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 12}{5\cdot 12}=\frac{48}{60} \quad \text{και} \quad \frac{8}{12}=\frac{8\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{40}{60}$$

$48>60$, άρα: $\frac{48}{60}>\frac{40}{60}$ δηλαδή $\frac{4}{5}>\frac{8}{12}$.

3. Τα κλάσματα έχουν ίδιο αριθμητή άρα αφού $10<11<12<13<14$

τότε: $\frac{31}{10}>\frac{31}{11}>\frac{31}{12}>\frac{31}{13}>\frac{31}{14}$.

4. Α. $5<8$ άρα $\frac{5}{8}<1$. Β. $9<10$ άρα $\frac{9}{10}<1$. Γ. $12>11$

άρα $\frac{12}{11}>1$

Δ. $16=16$ άρα $\frac{16}{16}=1$ Ε. $109<120$ άρα $\frac{109}{120}<1$.

5. ΕΚΠ$(5,10,15)=30$ άρα:

$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{18}{30}$, $\frac{8}{15}=\frac{8\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{16}{30}$, $\frac{5}{10}=\frac{5\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{15}{30}$,

$\frac{20}{15}=\frac{20\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{40}{30}$, $\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{42}{30}$.

Είναι: $\frac{15}{30}<\frac{16}{30}<\frac{18}{30}<\frac{40}{30}<\frac{42}{30}$ δηλαδή $\frac{5}{10}<\frac{8}{15}<\frac{3}{5}<\frac{20}{15}<\frac{7}{5}$.

6. Α. Είναι: $\frac{3}{3}<\frac{5}{3}<\frac{6}{3}$ ή, με απλοποίηση, $1<\frac{5}{3}<2$.

Β. Είναι: $\frac{6}{2}<\frac{7}{2}<\frac{8}{2}$ ή, με απλοποίηση, $3<\frac{7}{2}<4$.

Γ. Είναι: $\frac{60}{5}<\frac{63}{5}<\frac{65}{5}$ ή, με απλοποίηση, $12<\frac{63}{5}<13$.

Δ. Είναι: $\frac{120}{10}<\frac{125}{10}<\frac{130}{10}$ ή, με απλοποίηση, $12<\frac{125}{10}<13$.

7. Τα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, και $\frac{9}{10}$ είναι <1 γιατί ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή.

ΕΚΠ$(2,4,5,10)=20$ άρα $\frac{1}{2}=\frac{10}{20}$, $\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$, $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$, $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$ και $\frac{9}{10}=\frac{18}{20}$

οπότε: $\frac{5}{20}<\frac{10}{20}<\frac{15}{20}<\frac{16}{20}<\frac{18}{20}$ ή $0<\frac{1}{4}<\frac{1}{2}<\frac{3}{4}<\frac{4}{5}<\frac{9}{10}<1$.

8. Α. Οι αποστάσεις $0-1$, $1-2$ …κοκ είναι χωρισμένες σε 5 ίσα τμήματα η καθεμία, άρα:

Α: $\frac{1}{5}$, Β: $\frac{4}{5}$, Γ. $\frac{6}{5}$, Δ: $\frac{9}{5}$, Ε: $\frac{11}{5}$

Β. Οι αποστάσεις $0-1$, $1-2$ …κοκ είναι χωρισμένες σε 3 ίσα τμήματα η καθεμία, άρα:

Α: $\frac{1}{3}$, Β: $\frac{2}{3}$, Γ. $\frac{4}{3}$, Δ: $\frac{7}{3}$.

9. ΕΚΠ $(2,3,4,9,15,16)=720$ συνεπώς:

$\Alpha=\frac{540}{720}$, $\Beta=\frac{528}{720}$, $\Gamma=\frac{540}{720}$, $\Delta=\frac{495}{720}$, $\Epsilon=\frac{360}{720}$, $\Sigma\Tau=\frac{560}{720}$, $Z=\frac{480}{720}$, $H=\frac{360}{720}$.

Άρα: $\Sigma\Tau>\Alpha=\Gamma>\Beta>\Delta>Z>\Epsilon=H$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά τα κλάσματα:

Α. $\frac{7}{15}, \frac{9}{15}, \frac{3}{15}, \frac{13}{15}$ Β. $\frac{7}{5}, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{9}$ Γ. $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{17}{18}, \frac{8}{9}$.

2. Να τοποθετήσετε σε φθίνουσα σειρά τα κλάσματα:

Α. $\frac{3}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}$. Β. $\frac{11}{2}, \frac{11}{4}, \frac{11}{11}, \frac{11}{12}$. Γ. $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}$.

3. Να συγκρίνετε μεταξύ τους και με τη μονάδα τα κλάσματα:

Α. $\frac{188}{189}$ και $\frac{189}{188}$ Β. $\frac{265}{256}$ και $\frac{256}{265}$ Γ. $\frac{450}{150}$ και $\frac{6}{2}$.

4. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των αριθμών τα κλάσματα:

Α. $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$ Β. $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$.

5. Να βρείτε το φυσικό αριθμό μεταξύ των κλασμάτων:

Α. $\frac{12}{13}$ και $\frac{14}{13}$ Β. $\frac{14}{3}$ και $\frac{10}{3}$ Γ. $\frac{21}{5}$ και $\frac{29}{5}$.

6. Δίνεται το κλάσμα $8 \cdot \frac{3^3}{2^3 \alpha}$. Να βρείτε:

Α. την τιμή του φυσικού αριθμού α για την οποία το κλάσμα είναι ίσο με 1.
Β. την ελάχιστη τιμή του φυσικού αριθμού α για την οποία το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.

7. Δύο κάμερες της τροχαίας εθνικών οδών καταγράφουν τους παραβάτες στους δρόμους Α και Β. Στη διάρκεια ενός 24ώρου η κάμερα του δρόμου Α κατέγραψε 140 παραβάτες σε σύνολο 5.000 διερχόμενων αυτοκινήτων και η κάμερα του δρόμου Β 220 παραβάτες σε σύνολο 7.500 διερχόμενων

αυτοκινήτων. Σε ποιόν από τους δύο δρόμους κινήθηκαν οι πιο νομοταγείς οδηγοί;

8. Δίνεται το κλάσμα $\frac{4}{5}$. Να το συγκρίνετε με τα κλάσματα που προκύπτουν αν:

Α. προσθέσετε στους όρους του κλάσματος το 1.

Β. αφαιρέσετε από τους όρους του κλάσματος το 1.

Γ. προσθέσετε το 1 στον αριθμητή και το αφαιρέσετε από τον παρονομαστή.

Δ. προσθέσετε το 1 στον παρονομαστή και το αφαιρέσετε από τον αριθμητή.

2.4 Πρόσθεση – αφαίρεση κλασμάτων

ΘΕΩΡΙΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα θα πρέπει να είναι **ομώνυμα**.

- Το άθροισμα ομώνυμων κλασμάτων ισούται με ένα κλάσμα που έχει για αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών των κλασμάτων και για παρονομαστή τον κοινό παρονομαστή των ομώνυμων κλασμάτων.

$$\frac{\alpha}{\nu}+\frac{\beta}{\nu}=\frac{\alpha+\beta}{\nu}.$$

- Για να προσθέσουμε **ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε **ομώνυμα** και στη συνέχεια ακολουθούμε τα παραπάνω.

- Αν για δύο κλάσματα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}<\frac{\gamma}{\delta}$.

ΜΙΚΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Το άθροισμα ενός κλάσματος και ενός φυσικού αριθμού $\nu+\frac{\alpha}{\beta}$ γράφεται σε συντομία και ως $\nu\frac{\alpha}{\beta}$ και ονομάζεται **μικτός αριθμός**.

- Ο μικτός αριθμός έχει ένα ακέραιο μέρος (ν) και ένα κλασματικό μέρος $(\frac{\alpha}{\beta})$.

- Για να μετατρέψουμε ένα μικτό αριθμό σε κλάσμα πολλαπλασιάζουμε το ακέραιο μέρος του με τον παρονομαστή και τον προσθέτουμε στον αριθμητή:

$$\nu\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\nu\cdot\beta+\alpha}{\beta}$$

- Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα σε μικτό αριθμό διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή και γράφουμε το πηλίκο ως ακέραιο μέρος και το υπόλοιπο ως αριθμητή:

$$\frac{\Delta}{\delta}=\pi\frac{\upsilon}{\delta},\quad \Delta=\delta*\pi+\upsilon$$

Το κλάσμα $\frac{\Delta}{\delta}$ πρέπει να είναι μεγαλύτερο της μονάδας, δηλαδή $\Delta > \delta$.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

- Για να αφαιρέσουμε δύο ή περισσότερα κλάσματα θα πρέπει να είναι **ομώνυμα**.

- Η διαφορά ομώνυμων κλασμάτων ισούται με ένα κλάσμα που έχει για αριθμητή τη διαφορά των αριθμητών των κλασμάτων και για παρονομαστή τον κοινό παρονομαστή των ομώνυμων κλασμάτων.

$$\frac{\alpha}{\nu} - \frac{\beta}{\nu} = \frac{\alpha - \beta}{\nu}.$$

- Για να αφαιρέσουμε **ετερώνυμα** κλάσματα, τα μετατρέπουμε σε **ομώνυμα** και στη συνέχεια ακολουθούμε τα παραπάνω.

- Η πρόσθεση και η αφαίρεση κλασμάτων είναι στην ουσία πράξεις των αριθμητών δηλαδή φυσικών αριθμών, συνεπώς ισχύουν όλες οι **ιδιότητες** και τηρείται η **προτεραιότητα** κατά τα γνωστά.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:* $A. \frac{15}{8} + \frac{29}{8} + \frac{31}{8}$, $B. \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{3}{2}$.

Ελέγχουμε αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα. Αν είναι τότε προσθέτουμε τους αριθμητές, διαφορετικά τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμητές.

Α. Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, άρα προσθέτουμε τους εκθέτες:

$$\frac{15}{8}+\frac{29}{8}+\frac{31}{8}=\frac{15+29+31}{8}=\frac{75}{8}.$$

Β. Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, άρα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα:

ΕΚΠ$(2,4,6)=12$, άρα: $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$, $\frac{3}{2}=\frac{18}{12}$.

Το άθροισμα είναι: $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{3}{2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}+\frac{18}{12}=\frac{9+10+18}{12}=\frac{37}{12}$.

2. *Να υπολογίσετε τις διαφορές:* *Α.* $\frac{41}{7}-\frac{29}{7}-\frac{11}{7}$, *Β.* $\frac{5}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}$.

Ελέγχουμε αν τα κλάσματα είναι ομώνυμα. Αν είναι τότε αφαιρούμε τους αριθμητές, διαφορετικά τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα και στη συνέχεια αφαιρούμε τους αριθμητές.

Α. Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, άρα αφαιρούμε τους εκθέτες:

$$\frac{41}{7}-\frac{29}{7}-\frac{11}{7}=\frac{41-29-11}{7}=\frac{1}{7}.$$

Β. Τα κλάσματα είναι ετερώνυμα, άρα τα μετατρέπουμε σε ομώνυμα:

ΕΚΠ$(3,6,9)=18$, άρα: $\frac{5}{3}=\frac{30}{18}$, $\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$, $\frac{2}{9}=\frac{4}{18}$.

Η διαφορά είναι: $\frac{5}{3}-\frac{1}{6}-\frac{2}{9}=\frac{30}{18}-\frac{3}{18}-\frac{4}{18}=\frac{30-3-4}{12}=\frac{23}{12}$.

3. *Να μετατρέψετε σε κλάσμα το μικτό αριθμό* $7\frac{3}{10}$.

Πολλαπλασιάζουμε το ακέραιο μέρος με τον παρονομαστή και προσθέτουμε το γινόμενο στον αριθμητή.

Είναι: $7\frac{3}{10}=\frac{7\cdot 10+3}{10}=\frac{70+3}{10}=\frac{73}{10}$.

4. *Να μετατρέψετε σε μικτό αριθμό το κλάσμα* $\frac{22}{7}$

Διαιρούμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή και γράφουμε το πηλίκο ως ακέραιο μέρος και το υπόλοιπο ως αριθμητή.

Είναι: $22=3\cdot 7+1$, άρα: $\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}$

5. *Να υπολογίσετε την παράσταση* $\frac{3}{8}+4\frac{1}{8}+2$.

Όταν σε μαθηματικές παραστάσεις υπάρχουν μικτοί αριθμοί, πρώτα τους μετατρέπουμε σε κλάσματα.

46

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 46.

1. Α. $\frac{5}{3}+\frac{2}{3}=\frac{5+2}{3}=\frac{7}{3}$.

Β. $\frac{11}{13}+\frac{2}{13}=\frac{11+2}{13}=\frac{13}{13}=1$.

Γ. $\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=\frac{4}{9}+\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{4}{9}+\frac{6}{9}=\frac{4+6}{9}=\frac{10}{9}$.

Δ. $\frac{8}{12}+\frac{2}{3}=\frac{8}{12}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}+\frac{8}{12}=\frac{8+8}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$.

Ε. $\frac{17}{20}+\frac{3}{15}=\frac{17\cdot 3}{20\cdot 3}+\frac{3\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{51}{60}+\frac{12}{60}=\frac{51+12}{60}=\frac{63}{60}=\frac{21}{20}$.

ΣΤ. $\frac{15}{12}+\frac{5}{4}=\frac{15}{12}+\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}+\frac{15}{12}=\frac{15+15}{12}=\frac{30}{12}=\frac{5}{2}$.

2. Α. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$.

Β. $\frac{8}{9}-\frac{3}{9}=\frac{8-3}{9}=\frac{5}{9}$.

Γ. $\frac{10}{8}-\frac{3}{4}=\frac{10}{8}-\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{10}{8}-\frac{6}{8}=\frac{10-6}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Δ. $\frac{4}{9}-\frac{2}{27}=\frac{4\cdot 3}{9\cdot 3}-\frac{2}{27}=\frac{12}{27}-\frac{2}{27}=\frac{12-2}{27}=\frac{10}{27}$.

Ε. $\frac{7}{3}-\frac{5}{8}=\frac{7\cdot 8}{3\cdot 8}-\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{56}{24}-\frac{15}{24}=\frac{56-15}{24}=\frac{41}{24}$.

ΣΤ. $3\frac{3}{7}-\frac{3}{11}=\frac{3\cdot 11}{7\cdot 11}-\frac{3\cdot 7}{11\cdot 7}=\frac{33}{77}-\frac{21}{77}=\frac{33-21}{77}=\frac{12}{77}$.

3. Α. $3\frac{5}{8}=3+\frac{5}{8}=\frac{3}{1}+\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 8}{1\cdot 8}+\frac{5}{8}=\frac{24}{8}+\frac{5}{8}=\frac{24+5}{8}=\frac{29}{8}$.

Β. $4\frac{1}{10}=4+\frac{1}{10}=\frac{4}{1}+\frac{1}{10}=\frac{4\cdot 10}{1\cdot 10}+\frac{1}{10}=\frac{40}{10}+\frac{1}{10}=\frac{40+1}{10}=\frac{41}{10}$.

Γ. $2\frac{1}{9}=2+\frac{1}{9}=\frac{2}{1}+\frac{1}{9}=\frac{2\cdot 9}{1\cdot 9}+\frac{1}{9}=\frac{18}{9}+\frac{1}{9}=\frac{18+1}{9}=\frac{19}{9}$.

4. Α. $15=4\cdot 3+3=12+3$, άρα: 15/4 $\frac{15}{4}=\frac{12+3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{3}{4}=3+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}$.

Β. $5=2\cdot 2+1=4+1$, άρα: $\frac{5}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$.

Γ. $38=3\cdot 12+2=36+2$. άρα: $\frac{38}{12}=\frac{36+2}{12}=\frac{36}{12}+\frac{2}{12}=3+\frac{2}{12}=3\frac{2}{12}$.

5. Α. $\frac{3}{8}+2=\frac{3}{8}+\frac{2}{1}=\frac{3}{8}+\frac{2\cdot 8}{1\cdot 8}=\frac{3}{8}+\frac{16}{8}=\frac{3+16}{8}=\frac{19}{8}$.

Β. $\frac{12}{15}+1=\frac{12}{15}+\frac{1}{1}=\frac{12}{15}+\frac{15\cdot 1}{15\cdot 1}=\frac{12}{15}+\frac{15}{15}=\frac{12+15}{15}=\frac{27}{15}=\frac{9}{5}$.

Γ. $\frac{16}{20}+\frac{3}{10}+5=\frac{16}{20}+\frac{3\cdot 2}{10\cdot 2}+\frac{5\cdot 20}{1\cdot 20}=\frac{16}{20}+\frac{6}{20}+\frac{100}{20}=\frac{16+6+100}{20}=\frac{122}{100}=\frac{61}{10}$.

6. Α. $3-2\frac{1}{5}=3-\left(2+\frac{1}{5}\right)=3-\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{5}\right)=3-\left(\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{1}{5}\right)$

$=3-\left(\frac{10+1}{5}\right)=3-\frac{11}{5}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 5}-\frac{11}{5}=\frac{15}{5}-\frac{11}{5}=$

$=\frac{15-11}{5}=\frac{4}{5}$.

Β. $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=\left(4+\frac{1}{3}\right)-\left(2+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{4\cdot3}{1\cdot3}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{2\cdot2}{1\cdot2}+\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\frac{12}{3}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{3}-\frac{5}{2}=$

$=\frac{13\cdot2}{3\cdot2}-\frac{5\cdot3}{2\cdot3}=\frac{26}{6}-\frac{15}{6}=\frac{26-15}{6}=\frac{11}{6}=\frac{6+5}{6}=\frac{6}{6}+\frac{5}{6}=1+\frac{5}{6}=1\frac{5}{6}.$

Γ. $1\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\left(1+\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{5}=\left(\frac{1\cdot3}{1\cdot3}+\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{5}=\left(\frac{3}{3}+\frac{2}{3}\right)-\frac{4}{5}$

$=\frac{3+2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5\cdot5}{3\cdot5}-\frac{4\cdot3}{5\cdot3}=\frac{25}{15}-\frac{12}{15}=$

$=\frac{25-12}{15}=\frac{13}{15}.$

7. Ο 2ος πήρε $\frac{1}{8}$ των 2/5 λιγότερα σε σχέση με τον1ο. Ο 1ος πήρε τα $\frac{2}{5}$ των $20.000€$. Τα 20.000 είναι το σύνολο των χρημάτων, δηλαδή τα $\frac{5}{5}$. Συνεπώς τα $\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{5}$ του ποσού είναι:

$\frac{1}{5}$ των χρημάτων $=20.000€:5=4.000€$.

$\frac{2}{5}$ των χρημάτων $=2\cdot4.000€=8.000€=$ τα χρήματα του 1ου.

Ο $2^{\text{ος}}$ πήρε κατά $\frac{1}{8}$ λιγότερα χρήματα από τον πρώτο δηλαδή τα $\frac{8}{8}-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ των χρημάτων του $1^{\text{ου}}$. Εφόσον ο $1^{\text{ος}}$ πήρε $8.000€$, τα $\frac{1}{8}$ και $\frac{7}{8}$ του ποσού είναι:

$\frac{1}{8}$ των χρημάτων του $1^{\text{ου}} = 8.000€ : 8 = 1.000€$.

$\frac{7}{8}$ των χρημάτων του $1^{\text{ου}} = 7 \cdot 1.000€ = 7.000€ =$ τα χρήματα του $2^{\text{ου}}$.

Τα χρήματα του $2^{\text{ου}}$ αποτελούν τα: $\frac{7.000}{20.000}=\frac{7}{20}$ του συνόλου των χρημάτων.

Τα χρήματα που πήρε ο τρίτος είναι: $20.000€ - 8.000€ - 7.000€ = 5.000€$.

Τα χρήματα του $3^{\text{ου}}$ αποτελούν τα: $\frac{5.000}{20.000}=\frac{1}{4}$ του συνόλου των χρημάτων.

8. Είναι: $\frac{5}{9}-\frac{3}{8}=\frac{5\cdot 8}{9\cdot 8}-\frac{3\cdot 9}{8\cdot 9}=\frac{40}{72}-\frac{27}{72}=\frac{40-27}{72}=\frac{13}{72}$.

9. Για να βρούμε το μέρος της παραγωγής που πουλήθηκε, προσθέτουμε τα κλάσματα. Είναι:

$$\text{ΕΚΠ}(3,5,10,15)=30,$$

$$\frac{2}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=\frac{2\cdot 6}{5\cdot 6}+\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}+\frac{1\cdot 10}{3\cdot 10}+\frac{1\cdot 3}{10\cdot 3}=$$

$$=\frac{12}{30}+\frac{4}{30}+\frac{10}{30}+\frac{3}{30}=\frac{12+4+10+3}{30}=\frac{29}{30}.$$

Συνεπώς το υπόλοιπο μέρος της παραγωγής έμεινε απούλητο, δηλαδή τα:

$\frac{30}{30}-\frac{29}{30}=\frac{30-29}{30}=\frac{1}{30}$ της παραγωγής.

10. Α. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{3+4}{5}=\frac{7}{5}=\frac{5+2}{5}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=1+\frac{2}{5}=1\frac{2}{5}$

Σ.

Β. $\frac{1}{3}+\frac{4}{3}=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}=\frac{5\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{20}{12}$

Σ.

Γ. $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1\cdot 6}{5\cdot 6}+\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{6+5}{30}=\frac{11}{30}$

Λ.

Δ. $1+\frac{3}{5}=\frac{1}{1}+\frac{3}{5}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5+3}{5}=\frac{8}{5}$

Σ.

Ε. $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{3}{15}+\frac{10}{15}=\frac{3+10}{15}=\frac{13}{15}$

Λ.

ΣΤ. $3\frac{3+5}{5}=\frac{3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{3}{5}+\ 1$

Σ.

Ζ. $\frac{8-3}{8}=\frac{8}{8}-\frac{3}{8}=1-\frac{3}{8}$

Σ.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. $\frac{8}{10}+\frac{4}{10}=\frac{4+8}{10}=\frac{12}{10}=\frac{12:2}{10:2}=\frac{6}{5}$.

$\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5+4}{9}=\frac{9}{9}=1=\frac{5}{5}$.

$\frac{45}{90}+\frac{19}{90}=\frac{45+19}{90}=\frac{64}{90}=\frac{32}{45}$.

$\frac{16}{12}+\frac{8}{12}=\frac{16+8}{12}=\frac{24}{12}=2$.

2.

+	**5/7**	**3/2**	**1**	**3/5**
5/7	5/7 + 5/7 = 10/7	5/7 + 3/2 = 31/14	5/7 + 1 = 12/7	5/7 + 3/5 = 46/35
3/2	3/2 + 5/7 = 31/4	3/2 + 3/2 = 3	3/2 + 1 = 5/2	3/2 + 3/5 = 21/10
1	1+5/7 = 12/7	1 + 3/2 = 5/2	1 + 1 = 2	1 + 3/5 = 8/5
3/5	3/5 + 5/7 = 46/35	3/5 + 3/2 = 21/10	3/5 + 1 = 8/5	3/5 + 3/5 = 6/5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα απλοποιώντας, οπού είναι δυνατό, το τελικό κλάσμα:

Α. $\frac{14}{42}+\frac{7}{42}$ Β. $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{6}{12}$ Γ. $\frac{25}{44}+\frac{3}{11}$ Δ. $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{9}{14}$.

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω διαφορές απλοποιώντας, οπού είναι δυνατό, το τελικό κλάσμα:

Α. $\frac{17}{8}-\frac{9}{8}$ Β. $\frac{32}{15}-\frac{23}{15}-\frac{4}{15}$ Γ. $\frac{8}{5}-\frac{2}{6}$ Δ. $\frac{5}{4}-\frac{1}{8}-\frac{4}{6}$.

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:

Α. $\left(4-\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{3^2}{5}-\frac{9}{15}\right)$ Β. $\left(2^3-\frac{3^2}{2^3}\right)+\left(\frac{2\cdot 4^2}{16}-9/24\right)$.

4. Αν η διαφορά δύο κλασμάτων ισούται με $\frac{13}{15}$ και το ένα από τα δύο κλάσματα είναι το $\frac{1}{5}$, να υπολογίσετε το άλλο.

5. Να βρείτε δύο ομώνυμα κλάσματα που το ένα να είναι διπλάσιο του άλλου και το άθροισμά τους να ισούται με $\frac{9}{7}$.

6. Να μετατρέψετε τους παρακάτω μικτούς σε κλάσματα $(\Α-\Γ)$ και αντιστρόφως $(\Delta-\Σ\Τ)$:

Α. $4\frac{4}{5}$ Β. $7\frac{1}{12}$ Γ. $14\frac{1}{3}$ Δ. $\frac{7}{2}$ Ε. $\frac{25}{12}$

ΣΤ. $\frac{153}{12}$

7. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω αριθμητικών παραστάσεων:

Α. $3\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\right)+2^2\frac{3}{5}$ Β. $4\frac{1}{5}-3\frac{1}{3}+3^3\frac{3}{10}$.

8. Οι υποχρεώσεις ενός καταστήματος σε σχέση με τις ακαθάριστες μηνιαίες εισπράξεις του (τζίρος), έχουν ως εξής: Το $\frac{19}{100}$ του τζίρου είναι ο ΦΠΑ, το $\frac{1}{50}$ ο δημοτικός φόρος, τα $\frac{2}{5}$ το ενοίκιο και το $\frac{1}{5}$ τα υπόλοιπα λειτουργικά έξοδα. Τι μέρος του τζίρου μένει στον καταστηματάρχη;

2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Το γινόμενο δύο κλασμάτων ισούται με ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο ων παρονομαστών:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}.$$

- Το γινόμενο ενός κλάσματος με ένα φυσικό αριθμό ισούται με ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο του αριθμητή του κλάσματος και του φυσικού αριθμού και παρονομαστή τον παρονομαστή του κλάσματος:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\gamma=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta}.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- Δύο αριθμοί ονομάζονται **αντίστροφοι** όταν το **γινόμενό** τους ισούται με **1**.

- Ο αντίστροφος ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι το κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ γιατί:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha.\beta}{\beta\cdot\alpha}=1.$$

- Ο αντίστροφος ενός φυσικού αριθμού α είναι το κλάσμα $\frac{1}{\alpha}$.

- Ο αντίστροφος του 1 είναι ο εαυτός του, ενώ δεν υπάρχει ο αντίστροφος του 0.

ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ ΩΣ ΠΗΛΙΚΟ

- Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ισοδυναμεί με τη διαίρεση $\alpha:\beta$:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\alpha:\beta.$$

- Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ αποκαλείται «άλφα **προς** βήτα» ή **λόγος** των α και β.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω αριθμών:*

Α. 3, *Β.* $\frac{1}{5}$, *Γ.* $\frac{2}{7}$, *Δ.* $5\frac{1}{3}$, *Ε.* $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$.

*Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο ενός **μικτού** αριθμού τον μετατρέπουμε **πρώτα σε κλάσμα**.*
*Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μιας **αριθμητικής παράστασης** εκτελούμε **πρώτα τις πράξεις** και υπολογίζουμε τον αντίστροφο του αποτελέσματος.*

Α. Ο αντίστροφος του 3 είναι το $\frac{1}{3}$.

Β. Ο αντίστροφος του $\frac{1}{5}$ είναι το 5.

Γ. Ο αντίστροφος του $\frac{2}{7}$ είναι το $\frac{7}{2}$.

Δ. Είναι: $5\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}=\frac{15}{3}+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$.

Ο αντίστροφος του μικτού αριθμού $5\frac{1}{3}$ είναι το $\frac{3}{16}$.

Ε. Είναι: $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=\frac{3}{18}+\frac{4}{18}=\frac{7}{18}$. Ο αντίστροφός του αθροίσματος $\frac{1}{6}+\frac{2}{9}$ είναι το $\frac{18}{7}$.

2. *Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παρακάτω παραστάσεις:*

Α. $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)$ *Β.* $2^2\cdot\left(\frac{3}{4}+2\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\cdot 4\frac{1}{2}$

Εκτελούμε τις πράξεις με τη γνωστή προτεραιότητα, δηλαδή παρενθέσεις, δυνάμεις, μικτοί σε κλάσματα, πολλαπλασιασμοί, προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Α. $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)+2\cdot\left(\frac{1\cdot 2}{6\cdot 3}\right)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}+2\cdot\frac{2}{18}=\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+2\cdot\frac{2}{18}=\frac{3}{18}+\frac{4}{18}=\frac{7}{18}$.

Β. $2^2\cdot\left(\frac{3}{4}+2\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\cdot 4\frac{1}{2}=4\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{2\cdot 8+1}{8}\right)-\frac{1}{8}\cdot\frac{4\cdot 2+1}{2}$

$=4\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{17}{8}\right)-\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{2}=4\cdot\left(\frac{6}{8}+\frac{17}{8}\right)-\frac{1\cdot 9}{8\cdot 2}=$

$=4\cdot\frac{25}{8}-\frac{9}{16}=\frac{100}{8}-\frac{9}{16}=\frac{200}{16}-\frac{9}{16}=\frac{191}{16}$.

3. *Ο Κώστας έχει ύψος 180 εκ. και η Ελένη 160 εκ. Τα* $\frac{2}{9}$ *του ύψους του Κώστα σε τι μέρος του ύψους της Ελένης αντιστοιχούν;*

Όταν ζητούμε το μέρος του αριθμού α *που αποτελεί ο αριθμός* β, *απλά ζητούμε το κλάσμα* $\frac{\beta}{\alpha}$.

Τα $\frac{2}{9}$ του ύψους του Κώστα ισούνται με:

$$\frac{2}{9}\cdot 180\text{εκ.} = \frac{2\cdot 180}{9}\text{εκ.} = \frac{360}{90}\text{εκ.} = 40\text{εκ.}$$

Το μέρος του ύψους της Ελένης που αντιστοιχεί στα 40 εκ. είναι:

$$\frac{40}{160} = \frac{1}{4} \text{ του ύψους της Ελένης.}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 49 .

1. Α. Το γινόμενο δύο κλασμάτων ισούται με ένα κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο ων παρονομαστών.
Β. Δύο αριθμοί ονομάζονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους ισούται με 1.

Γ. Οι αντίστροφοι των κ , $\frac{1}{\kappa}$, $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι αντίστοιχα οι: $\frac{1}{\kappa}$, κ , $\frac{\lambda}{\kappa}$.
Δ. Μόνο το 1 ισούται τον αντίστροφό του.

2. Α. $3\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 3}{4} = \frac{9}{4}$ Β. $7\cdot\frac{10}{14} = \frac{7\cdot 10}{14} = \frac{70}{14} = 5$

Γ. $\frac{4}{2}\cdot 2 = \frac{4\cdot 2}{2} = \frac{8}{2} = 2$ Δ. $\frac{5}{100}\cdot 10 = \frac{5\cdot 10}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

3. Α. $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{8} = \frac{2\cdot 7}{5\cdot 8} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$ Β. $\frac{8}{10}\cdot\frac{100}{5} = \frac{8\cdot 100}{10\cdot 5} = \frac{800}{50} = 16$

Γ. $\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{4\cdot5}{9\cdot9}=\frac{20}{81}$ Δ. $\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{15}=\frac{3\cdot2}{2\cdot15}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

4.

*	**5/7**	**3/2**	**1**	**3/4**
7/5	7/5 * 5/7 = 1	7/5 * 3/2 = 31/14	7/5 * 1 = 7/5	7/5 * 3/4 = 21/20
2/3	2/3 * 5/7 = 10/21	2/3 * 3/2 = 1	2/3 * 1 = 2/3	2/3 * 3/4 = 1/2
1	1 * 5/7 = 5/7	1 * 3/2 = 5/2	1 * 1 = 1	1 * 3/4 = 3/4
4/3	4/3 * 5/7 = 20/21	4/3 * 3/2 = 2	4/3 * 1 = 4/3	4/3 * 3/4 = 1

5. Α. $2\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{21}=\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{21}=\frac{2\cdot3+1}{3}\cdot\frac{3}{21}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3}{21}=\frac{7\cdot3}{3\cdot21}=\frac{21}{63}=\frac{1}{3}.$

Β. $4\frac{1}{5}\cdot2\frac{1}{2}=\left(4+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot5+1}{5}\cdot\frac{2\cdot2+1}{2}=\frac{21}{5}\cdot\frac{5}{2}$

$=\frac{21\cdot5}{5\cdot2}=\frac{105}{10}=\frac{100+5}{10}=\frac{100}{10}+\frac{5}{10}=10+\frac{1}{2}==10\frac{1}{2}.$

Γ. $3\frac{1}{8}\cdot10=\left(3+\frac{1}{8}\right)\cdot10=\frac{3\cdot8+1}{8}\cdot10=\frac{25}{8}\cdot10=\frac{250}{8}$

$=\frac{125}{4}=\frac{124+1}{4}=\frac{124}{4}+\frac{1}{4}=31+\frac{1}{4}=31\frac{1}{4}.$

Δ. $1\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\left(1+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}=\frac{1\cdot3+2}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot3}{3\cdot2}=$

$=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$

6. Α. $\frac{7}{4}$ Β. $\frac{1}{72}$ Γ. $\frac{8}{5}$ Δ. 3 Ε. $\frac{8}{739}$ ΣΤ. 1

7. Ο όγκος του αναψυκτικού είναι $1\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2+1}{2}=\frac{3}{2}$ του λίτρου.

Ήπιε τα $\frac{2}{3}$ του όγκου, δηλαδή: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$ λίτρο.

8. Α. $\frac{6}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{6}{5}+\frac{3}{20}=\frac{24}{20}+\frac{3}{20}=\frac{27}{20}$

Β. $\left(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{20}$

Γ. $\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{20}$

9. Α. $\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{3}{8}=\left(\frac{35}{15}+\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{3}{8}=\frac{37}{15}\cdot\frac{3}{8}=\frac{111}{120}=\frac{37}{40}$

Β. $\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{3}{8}=\left(\frac{35}{15}-\frac{2}{15}\right)\cdot\frac{3}{8}=\frac{33}{15}\cdot\frac{3}{8}=\frac{99}{120}=\frac{33}{40}$

Γ. $\frac{7}{3}-\frac{2}{15}*\frac{3}{8}=\frac{7}{3}-\frac{6}{120}=\frac{280}{120}-\frac{6}{120}=\frac{274}{120}=\frac{137}{60}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω αριθμών:

Α. $\frac{21}{12}$, Β. $\frac{1}{2007}$, Γ. 2^4, Δ. $3\frac{1}{4}$, Ε. $3^2\frac{2}{3}$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις και να βρείτε τον αντίστροφό τους:

Α. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+2\frac{3}{12}$ Β. $\left(\frac{7}{15}+\frac{7}{30}\right)\cdot 10-5\frac{1}{5}$ Γ. $\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}\cdot 2\right)+\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$

3. Αν 1 κιλό ισούται με 1.000 γραμμάρια, να υπολογίσετε πόσα γραμμάρια είναι τα:

Α. $\frac{3}{4}$ του 1 κιλού. Β. $\frac{4}{5}$ του 1 κιλού. Γ. $\frac{5}{8}$ των 2 κιλών.

Δ. $\frac{9}{10}$ των 5 κιλών.

4. Να υπολογίσετε τι μέρος ενός κουτιού αναψυκτικού 330ml είναι τα:

Α. 22ml. Β 44ml. Γ. 110ml. Δ. 121ml. Ε. 440ml.

5. Το ντεπόζιτο ενός αυτοκινήτου έχει χωρητικότητα 45 λίτρα και είναι εντελώς άδειο. Αν η βενζίνη κοστίζει $1\frac{4}{100}$ € το λίτρο, πόσο θα πληρώσουμε για να γεμίσουμε:

Α. το $\frac{1}{3}$ του ντεπόζιτου; Β. τα $\frac{2}{5}$ του ντεπόζιτου;

Γ. τα $\frac{7}{9}$ του ντεπόζιτου;

6. Από τους 150 υπαλλήλους μιας εταιρίας, το $\frac{1}{3}$ πηγαίνει στη δουλεία του με λεωφορείο, τα $\frac{3}{5}$ με μετρό και οι υπόλοιποι με ΙΧ αυτοκίνητο. Να υπολογίσετε:

Α. τον αριθμό των υπαλλήλων που χρησιμοποίει το κάθε μέσο.

Β. το μέρος του συνόλου των υπαλλήλων που χρησιμοποιεί ΙΧ.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

*	4/5	6/11	1	8/7
5/4				
11/6				
1				
7/8				

2.6 Διαίρεση κλασμάτων

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Το **πηλίκο** της διαίρεσης δύο κλασμάτων ισούται με το **γινόμενο** του διαιρετέου με τον **αντίστροφο** του διαιρέτη:

$$\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$$

ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

- Εφόσον το κλάσμα εκφράζει το λόγο, δηλαδή τη διαίρεση δύο αριθμών,

το πηλίκο δύο κλασμάτων μπορεί να γραφεί σε μορφή **κλάσματος** ως :

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$$

Το κλάσμα που έχει ένα τουλάχιστον όρο σε μορφή κλάσματος, ονομάζεται **σύνθετο κλάσμα**.

- Στο σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, οι α και δ ονομάζονται άκροι όροι και οι β , γ μέσοι όροι.

- Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό με αριθμητή το γινόμενο των άκρων και παρονομαστή το γινόμενο των μέσων όρων:

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

- Στο παραπάνω αποτέλεσμα θα οδηγηθούμε αν γράψουμε το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ ως διαίρεση των $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ και πολλαπλασιάσουμε το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με τον αντίστροφο του κλάσματος $\frac{\gamma}{\delta}$:

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω πηλίκα:

Α. $\frac{3}{2}:\frac{1}{3}$ *Β.* $4:\frac{1}{6}$, *Γ.* $\frac{8}{7}:2$, *Δ.* $5\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$, *Ε.* $3\frac{4}{3}:2\frac{2}{9}$.

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο που περιέχει ***μικτούς*** *αριθμούς, τους μετατρέπουμε* ***πρώτα*** *σε κλάσματα.*

Α. $\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{2}$.

Β. $4:\frac{1}{6}=4\cdot 6=24$.

Γ. $\frac{8}{7}:2=\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8}{14}$.

Δ. $5\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{5\cdot 2+1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{11}{2}:\frac{1}{3}=\frac{11}{2}\cdot 3=\frac{33}{2}$.

Ε. $3\frac{4}{3}:2\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 3+4}{3}:\frac{2\cdot 9+2}{9}=\frac{13}{3}:\frac{20}{9}=\frac{13}{3}\cdot\frac{9}{20}=\frac{13\cdot 9}{3\cdot 20}=\frac{117}{60}$.

2. Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

Α. $\dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}}$ *Β.* $\dfrac{4}{\frac{3}{5}}$ *Γ.* $\dfrac{\frac{11}{8}}{3}$.

Τα σύνθετα κλάσματα γίνονται απλά είτε υπολογίζοντας το λόγο γινομένου ***άκρων*** *προς το γινόμενο* ***μέσων****, είτε θεωρώντας το σύνθετο κλάσμα ως διαίρεση κλασμάτων.*

Όταν ένας από τους δύο όρους ενός σύνθετου κλάσματος είναι ***φυσικός αριθμός*** ν *τότε τον γράφουμε ως* $\frac{\nu}{1}$*, ώστε να εφαρμόσουμε με ευκολία τα παραπάνω.*

Α. (1ος τρόπος). Πολλαπλασιάζουμε άκρους – μέσους:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 2}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$$

(2ος τρόπος). Θεωρούμε το σύνθετο κλάσμα ως διαίρεση κλασμάτων:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{7}}=\frac{4}{3}:\frac{2}{7}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{2}=\frac{4\cdot 7}{3\cdot 2}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$$

Β. (1ος τρόπος). Πολλαπλασιάζουμε άκρους – μέσους:

$$\frac{\frac{4}{3}}{5}=\frac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{5}}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 3}=\frac{20}{3}$$

(2ος τρόπος). Θεωρούμε το σύνθετο κλάσμα ως διαίρεση κλασμάτων:

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{5}}=\frac{4}{1}:\frac{3}{5}=\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4\cdot5}{1\cdot3}=\frac{20}{3}$$

Γ. ($1^{ος}$ τρόπος). Πολλαπλασιάζουμε άκρους – μέσους:

$$\frac{\frac{11}{8}}{3}=\frac{11}{\frac{8}{3}}=\frac{11\cdot1}{8\cdot3}=\frac{11}{24}$$

($2^{ος}$ τρόπος). Θεωρούμε το σύνθετο κλάσμα ως διαίρεση κλασμάτων:

$$\frac{\frac{11}{8}}{3}=\frac{11}{\frac{8}{3}}=\frac{11}{8}:\frac{3}{1}=\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11\cdot1}{8\cdot3}=\frac{11}{24}$$

3. *Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:*

A. $\frac{4}{3}+\frac{2}{1\frac{2}{7}}$ *B.* $4^2+\frac{2\frac{1}{2}}{3}$

Όταν οι ***όροι*** *ενός σύνθετου κλάσματος είναι* ***μικτοί*** *αριθμοί και* ***αριθμητικές παραστάσεις****, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις σε αριθμητή και παρονομαστή μέχρι να προκύψει κλάσμα της μορφής* $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ *και στη συνέχεια πράττουμε κατά τα γνωστά.*

Α. Ο αριθμητής είναι: $\frac{4}{3}+2=\frac{4}{3}+\frac{3\cdot 3}{3}=\frac{4}{3}+\frac{6}{3}=\frac{10}{3}$.

Ο παρονομαστής είναι: $1\frac{2}{7}=1+\frac{2}{7}=\frac{1\cdot 7+2}{7}=\frac{9}{7}$.

Άρα το σύνθετο κλάσμα είναι: $\frac{\frac{4}{3}+2}{1\frac{2}{7}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{9}{7}}=\frac{10\cdot 7}{3\cdot 9}=\frac{70}{27}$.

Β. Ο αριθμητής είναι:

$$4^2+2\frac{1}{2}=16+2+\frac{1}{2}=18+\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 18}{2}+\frac{1}{2}=\frac{36+1}{2}=\frac{37}{2}$$

Ο παρονομαστής είναι: $3=\frac{3}{1}$

Άρα το σύνθετο κλάσμα είναι: $4^2+\frac{2\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{37}{2}}{\frac{3}{1}}=\frac{37\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{37}{6}$.

4. Θέλουμε να μεταφέρουμε το λάδι ενός δοχείου *12* λίτρων σε μπουκάλια των $\frac{7}{10}$ του λίτρου.

Πόσα μπουκάλια θα χρειαστούμε; Θα είναι όλα τα μπουκάλια εντελώς γεμάτα;

Από τα δεδομένα του προβλήματος δημιουργούμε τη διαίρεση κλασμάτων ή το σύνθετο κλάσμα.

Θα διαιρέσουμε την ποσότητα του λαδιού με τον όγκο κάθε μπουκαλιού για να βρούμε πόσα μπουκάλια ισοδυναμούν με το λάδι του δοχείου:

$$12:\frac{7}{10}=12\cdot\frac{10}{7}=\frac{120}{7}=\frac{119+1}{7}=\frac{17*7+1}{7}=7+\frac{1}{7}=7\frac{1}{7}.$$

Άρα, θα χρειαστούμε 8 μπουκάλια από τα οποία τα 7 θα είναι εντελώς γεμάτα με λάδι και το 1 θα είναι γεμάτο κατά το $\frac{1}{7}$ του όγκου του.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 51.

1. Α. Το πηλίκο της διαίρεσης δύο κλασμάτων ισούται με το γινόμενο του διαιρετέου με τον αντίστροφο του διαιρέτη.
Β. Το κλάσμα που έχει ένα τουλάχιστον όρο σε μορφή κλάσματος, ονομάζεται σύνθετο κλάσμα.

2. Α. $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\cdot 2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Β. $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{3}{3}=1$

Γ. $\frac{10}{100}:\frac{1}{5}=\frac{1}{10}:\frac{1}{5}=\frac{1}{10}\cdot 5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

Δ. $\frac{7}{3}:\frac{21}{27}=\frac{7}{3}:\frac{7}{9}=\frac{7}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{63}{21}=3$

3. Α. $2:\frac{1}{3}=2\cdot 3=6$

Β. $\frac{5}{8}:1=\frac{5}{8}\cdot 1=\frac{5}{8}$

Γ. $2\frac{1}{2}:4=\frac{2\cdot 2+1}{2}:4=\frac{5}{2}:4=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5\cdot 1}{2\cdot 4}=\frac{5}{8}$

Δ. $4\frac{1}{10}:3\frac{1}{3}=\frac{4\cdot 10+1}{10}:\frac{3\cdot 3+1}{3}=\frac{41}{10}:\frac{10}{3}=\frac{41}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{123}{100}$

4. Α. $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$ Β. $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}$

Είναι $A\cdot B=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$, άρα οι Α και Β είναι αντίστροφοι.

Γ. $\frac{20}{6}:10=\frac{20}{6}\cdot\frac{1}{10}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ Δ. $10:\frac{20}{6}=10\cdot\frac{6}{20}=\frac{60}{20}=3$

Είναι $\Gamma\cdot\Delta=\frac{1}{3}\cdot 3=1$, άρα οι Γ και Δ είναι αντίστροφοι.

5. Α. $\frac{1}{8}:\left(\frac{1}{3}:\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}:\left(\frac{1}{3}\cdot 2\right)=\frac{1}{8}:\frac{2}{3}=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{16}.$

Β. $\left(\frac{1}{8}:\frac{1}{3}\right):\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{8}\cdot 3\right):\frac{1}{2}=\frac{3}{8}:\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\cdot 2=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$

Είναι $A\neq B$ άρα δεν ισχύει στη διαίρεση η προσεταιριστική ιδιότητα.

6.

:	**5/7**	**1/2**	**1**	**4/3**
5/7	5/7 : 5/7 = 1	5/7 : 1/2 = 10/7	5/7 : 1 = 5/7	5/7 : 4/3 = 15/28
1/2	1/2 : 5/7 = 7/10	1/2 : 1/2 = 1	1/2 : 1 = 1/2	1/2 : 4/3 = 3/8
1	1 : 5/7 = 7/5	1 : 1/2 = 2	1 : 1 = 1	1 : 4/3 = 3/4
4/3	4/3 : 5/7 = 28/15	4/3 : 1/2 = 8/3	4/3 : 1= 4/3	4/3 : 4/3 = 1

7. Α. $\frac{3}{10}:\frac{4}{10}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{4}=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$

Β. $\frac{5}{9}:\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$

Γ. $\frac{45}{90}:\frac{15}{9}=\frac{1}{2}:\frac{15}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{15}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$

Δ. $\frac{16}{3}:\frac{8}{9}=\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{8}=\frac{144}{24}=6$

8. Α. $\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}=\frac{3\cdot5}{8\cdot4}=\frac{15}{32}$ Β. $\frac{\frac{15}{3}}{4}=\frac{\frac{15}{3}}{\frac{4}{1}}=\frac{15\cdot1}{3\cdot4}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

Γ. $\frac{20}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{20}{1}}{\frac{5}{4}}=\frac{20\cdot4}{1\cdot5}=\frac{80}{5}=16$

9. Α. $\frac{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{4\cdot3}{5\cdot4}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

Β. $\frac{\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{11}}=\frac{\frac{8}{56}}{\frac{6}{55}}=\frac{8\cdot55}{56\cdot6}=\frac{440}{336}=\frac{55}{42}$

Γ. $\frac{\frac{2}{3}:\frac{4}{3}}{\frac{1}{8}:2}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{6}{12}}{\frac{1}{16}}=\frac{6\cdot16}{12\cdot1}=\frac{96}{12}=8$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

1. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν την ισότητα $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ οπότε για ν περιττό:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\nu}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\nu}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\nu}$$

Τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{5}$ είναι: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=\frac{3}{30}+\frac{1}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

Τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{9}$ είναι: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{27}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}=\frac{3}{54}+\frac{1}{54}=\frac{4}{54}=\frac{2}{27}$$

Τα $\frac{2}{3}$ του $\frac{1}{13}$ είναι: $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{13}=\frac{2}{39}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$2\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{13}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}=\frac{3}{78}+\frac{1}{78}=\frac{4}{78}=\frac{2}{39}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω πηλίκα:

Α. $\frac{5}{3}:\frac{1}{4}$ Β. $12:\frac{4}{7}$, Γ. $\frac{28}{7}:8$, Δ. $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$, Ε. $3^3\frac{1}{9}:4^2\frac{5}{12}$.

2. Να μετατρέψετε σε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

Α. $\dfrac{\dfrac{12}{5}}{\dfrac{21}{8}}$ Β. $\dfrac{7}{\dfrac{3}{4}}$ Γ. $\dfrac{\dfrac{41}{19}}{4}$.

3. Να μετατρέψετε σε απλά τα σύνθετα κλάσματα:

Α. $\dfrac{\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}}{3\dfrac{3}{8}}$ Β. $\dfrac{4^2+3\dfrac{1}{4}}{3^3+\dfrac{2}{7}}$ Γ. $\dfrac{\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{9}}{4^2\cdot\dfrac{1}{5}}$

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

Α. $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}\right):\dfrac{1}{2}\cdot\left(4-2\dfrac{2}{3}\right)$ Β. $\dfrac{1}{2}:\left(2^2\,\dfrac{1}{7}:\dfrac{1}{3}\right)\cdot 4:\dfrac{2^2}{3^3}$

Γ. $\dfrac{7}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{4^2}\right):\left(\dfrac{1}{3}\cdot 1\dfrac{7}{9}\right)$ Δ. $\left(2:\dfrac{2}{3}\right):\left(\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{2}\right)$

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

:	**3/5**	**3/4**	**1**	**8/9**
3/5				
3/4				
1				
8/9				

6. Για να γεμίσουμε το εντελώς άδειο ρεζερβουάρ βενζίνης του αυτοκινήτου μας πληρώσαμε $47\frac{1}{4}€$. Αν η βενζίνη κοστίζει $1\frac{1}{20}€$ το λίτρο, να βρείτε τη χωρητικότητα του ρεζερβουάρ.

7. Να βρείτε το κλάσμα με το οποίο πρέπει να διαιρέσουμε τα $\frac{2}{3}$ ώστε το πηλίκο να ισούται με:

Α. $\frac{4}{9}$ Β. $4\frac{2}{3}$.

8. Τρία αδέλφια με τις οικονομίες τους αγόρασαν ηλεκτρονικό υπολογιστή αξίας $1.400€$. Ο $1^{ος}$ αδελφός προσέφερε τα διπλάσια χρήματα από τον $2^{ο}$ και τα τετραπλάσια από τον $3^{ο}$. Αν ο πρώτος αδελφός καλύπτει τα $\frac{4}{7}$ του ποσού, να βρείτε:

Α. το κλάσμα του ποσού που καλύπτουν οι άλλοι δύο αδελφοί.

Β. το ακριβές ποσό που πληρώνει ο κάθε αδελφός.

Επαναληπτικά θέματα 2ου κεφαλαίου

Κριτήριο αξιολόγησης 2ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι πρέπει να ισχύει μεταξύ των α, β, γ, δ, ώστε να ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Β. Τι ονομάζεται γνήσιο και τι καταχρηστικό κλάσμα;

Γ. Πως προσθέτουμε δύο ετερώνυμα κλάσματα;

Δ. Τι ονομάζεται σύνθετο κλάσμα;

ΘΕΜΑ 2ο

Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις:

Α. $\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{5} : \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} \right)$

Β. $\left(\frac{1}{\frac{2}{9}} + 2 \right) \cdot \left(2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{3} \right)$

ΘΕΜΑ 3ο

Αν για τα α, β, γ ισχύει ότι: $\alpha + \beta = \frac{2}{3}$ και $2\beta - \gamma = \frac{1}{4}$, τότε:

Α. να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις: $X_1 = \alpha + 3\beta - \gamma$

$X_2 = 2\alpha + 8\beta - 3\gamma$,

Β. να συγκρίνετε τους αριθμούς X_1 και X_2.

ΘΕΜΑ 4ο

Ο Γιάννης αγόρασε 12 βάζα μέλι χωρητικότητας $\frac{3}{5}$ του λίτρου το καθένα.

Α. Πόσα λίτρα μέλι αγόρασε συνολικά ο Γιάννης;

Β. Πόσα βάζα μέλι χωρητικότητας $\frac{9}{25}$ λίτρων θα πρέπει να αγοράσει ο Γιάννης, ώστε τελικά να έχει την ίδια ποσότητα μελιού με πριν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1

- Δεκαδικά κλάσματα
- Δεκαδικοί αριθμοί
- Διάταξη δεκαδικών
- Στρογγυλοποίηση

ΘΕΩΡΙΑ

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ - ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Δεκαδικά κλάσματα** ονομάζονται τα κλάσματα που έχουν παρονομαστή δύναμης του 10, π.χ. $10=10^1, 100=10^2$ κ.ο.κ.

  Δεκαδικό κλάσμα: $\dfrac{\alpha}{10^{\nu}}$

- **Δεκαδικοί** ονομάζονται οι αριθμοί οι οποίοι αποτελούνται από ένα **ακέραιο** μέρος και ένα **δεκαδικό** μέρος, τα οποία διαχωρίζονται με ένα κόμμα που αποκαλείται **υποδιαστολή**.

- Το μέρος του αριθμού **αριστερά** της υποδιαστολής ονομάζεται **ακέραιο** μέρος.

- Το μέρος του αριθμού **δεξιά** της υποδιαστολής ονομάζεται **δεκαδικό** μέρος.

Π.χ. ο αριθμός $73,324$ είναι δεκαδικός και έχει:

ακέραιο μέρος το 73

δεκαδικό μέρος το 324

- Τα ψηφία του δεκαδικού μέρους ονομάζονται δεκαδικά ψηφία και η αξία τους μειώνεται καθώς βρίσκονται δεξιότερα της υποδιαστολής.

  Έτσι:

  Το πρώτο ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής αντιπροσωπεύει τα δέκατα.

  Το 2ο ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής αντιπροσωπεύει τα εκατοστά.

  Το 3ο ψηφίο δεξιά της υποδιαστολής αντιπροσωπεύει τα χιλιοστά.

  Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα, ο αριθμός $73,324$ αποτελείται από:

  $$\left.\begin{array}{l} 7 \text{ δεκάδες} \\ 3 \text{ μονάδες} \end{array}\right\} \text{(ακέραιο μέρος)}$$
  $$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
  $$\left.\begin{array}{l} 3 \text{ δέκατα} \\ 2 \text{ εκατοστά} \\ 4 \text{ χιλιοστά} \end{array}\right\} \text{(δεκαδικό μέρος)}$$

- Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται σε μορφή δεκαδικού με ψηφία δεκαδικού μέρους μηδενικά, π.χ. $3 = 3,00$

- Ο δεκαδικός αριθμός **δεν** μεταβάλλεται αν παραλείψουμε μηδενικά δεκαδικά ψηφία από το δεξί άκρο του, π.χ. $102,2100 = 102,21$

- Κάθε δεκαδικό κλάσμα μπορεί να γραφεί σε μορφή δεκαδικού αριθμού μετατρέποντας τα ψηφία του αριθμητή σε δεκαδικά από δεξιά προς τα αριστερά και δημιουργώντας τόσα δεκαδικά ψηφία όσα μηδενικά έχει ο παρονομαστής, δηλαδή όσος είναι ο εκθέτης της δεκαδικής δύναμης του παρονομαστή. Π.χ.:

  Το κλάσμα $\frac{215}{100}$ είναι δεκαδικό με παρονομαστή $100 = 10^2$. Άρα ο

δεκαδικός που ισούται με το κλάσμα είναι ο αριθμητής με τα δύο δεξιά ψηφία του δεκαδικό μέρος. Άρα:

$$\frac{215}{1\underbrace{00}_{\text{2 μηδενικά}}} = 2,\overbrace{15}^{\text{2 ψηφία}}$$

- Κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σε **μορφή δεκαδικού κλάσματος** με αριθμητή το δεκαδικό αριθμό χωρίς υποδιαστολή και παρονομαστή το 10 υψωμένο στη δύναμη τέτοιου εκθέτη, όσα είναι τα ψηφία του δεκαδικού. Π.χ.

  Ο δεκαδικός $75,825$ γράφεται σαν κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό χωρίς υποδιαστολή και παρονομαστή το 10 υψωμένο στον κύβο (3 δεκαδικά ψηφία):

$$75,\underbrace{825}_{\text{3 ψηφία}} = \frac{75.820}{10^3} = \frac{75.820}{1\underbrace{000}_{\text{3 μηδενικά}}}$$

- Ο δεκαδικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ως το πηλίκο της διαίρεσης του φυσικού που ισούται με τον αριθμό χωρίς υποδιαστολή δια το 10 στη δύναμη του αριθμού των δεκαδικών ψηφίων.

- Εφόσον το κλάσμα α/β ισοδυναμεί με τη διαίρεση $\alpha:\beta$, μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό αριθμό ο οποίος ισούται με το αποτέλεσμα της διαίρεσης $\alpha:\beta$ όπου:

- Το ακέραιο μέρος ισούται με το πηλίκο.
- Τα δεκαδικά ψηφία προκύπτουν συνεχίζοντας τη διαίρεση προσθέτοντας 0 στο υπόλοιπο και τοποθετώντας στο πηλίκο υποδιαστολή: Π.χ.

$$\frac{32}{5} = 32 : 5 = 6,4$$

- Όταν το πηλίκο της διαίρεσης δεν είναι ακριβές, γράφουμε το αποτέλεσμα κατά <u>προσέγγιση</u> δηλαδή στρογγυλοποιούμε τον αριθμό σε κάποιο δεκαδικό. Π.χ.

Άρα $10 : 3 = \frac{10}{3} \simeq 3,33$

Άρα $20 : 3 = \frac{20}{3} \simeq 6,67$

} Προσέγγιση εκατοστού (δύο ψηφία)

Το σύμβολο $\simeq$ αντιστοιχεί στην έννοια "περίπου ίσο".

ΔΙΑΤΑΞΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Όταν το ακέραιο μέρος δύο δεκαδικών αριθμών είναι διαφορετικό, μεγαλύτερος είναι ο αριθμός που έχει το μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Π.χ.:

$14,35 > 9,48$, γιατί το ακέραιο μέρος του $14,35$ (14) είναι μεγαλύτερο από αυτό του $9,48$ (9).

- Όταν το ακέραιο μέρος δύο δεκαδικών αριθμών είναι ίσο τότε συγκρίνουμε ένα προς ένα τα δεκαδικά ψηφία, από τα αριστερά προς τα δεξιά. Π.χ.: $32,12 < 32,21$, γιατί το 1ο δεκαδικό ψηφίο του $32,12$ (1) είναι μικρότερο από αυτό του $32,21$ (2).

ΣΤΡΟΓΓΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Κατά τη στρογγυλοποίηση των δεκαδικών αριθμών ακολουθούμε τους ίδιους κανόνες που ισχύουν και για τη στρογγυλοποίηση των φυσικών αριθμών. Έτσι εξετάζουμε αν το ψηφίο δεξιά του ψηφίου είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο του 5. Π.χ.:

$11,255$ Για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό στα δέκατα εξετάζουμε το ψηφίο των εκατοστών. Άρα $11,255 = 11,300 = 11,3$

Ομοίως : $22,826 = 22,800 = 22,8$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να γραφούν σε μορφή δεκαδικών τα κλάσματα:

Α: $\frac{25}{10}$ Β: $\frac{42}{100}$ Γ: $\frac{18}{1000}$

Όταν ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή, τότε ο δεκαδικός που προκύπτει έχει ακέραιο μέρος 0 και ενδεχομένως και τα πρώτα δεκαδικά.

Α: Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το $10 = 10^1$ άρα ο δεκαδικός αριθμός είναι ο αριθμητής με 1 δεκαδικό ψηφίο: $\frac{25}{10} = 2,5$

Β: Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το 100, άρα ο δεκαδικός αριθμός είναι ο αριθμητής με 2 δεκαδικά ψηφία:

$$\frac{42}{100} = 0,42$$

Γ: Ο παρονομαστής του κλάσματος είναι το 1000, άρα ο δεκαδικός αριθμός είναι ο αριθμητής με 3 δεκαδικά ψηφία:

$$\frac{18}{1000} = 0,018$$

2. Να γραφούν οι παρακάτω διαιρέσεις ως κλάσματα και ως δεκαδικοί αριθμοί:

Α: $3:8$ Β: $32:44$

Η διαίρεση $\alpha:\beta$ *ισούται με το κλάσμα* $\frac{\alpha}{\beta}$ *και με το δεκαδικό αριθμό που προκύπτει από την διαίρεση του* α *με τον* β.

Όταν η διαίρεση είναι ατελής στρογγυλοποιούμε σε κάποιο δεκαδικό.

Α: Είναι $3:8=\frac{3}{8}$. Ο δεκαδικός αριθμός που ισούται με το κλάσμα $\frac{3}{8}$ είναι:

Άρα ισούται με τον αριθμό $0,375$.

Β: Είναι $32:44=\frac{32}{44}$ και ο δεκαδικός που ισούται με το κλάσμα $\frac{32}{44}$ είναι:

$0,72727..... \simeq 0,73$ (προσέγγιση στο εκατοστό) ή

$\simeq 0,727$ (προσέγγιση στο χιλιοστό)

3. Να γραφούν σε μορφή δεκαδικού κλάσματος οι δεκαδικοί:

Α: $6,78$ Β: $18,5$ Γ: $0,007$

Ο παρονομαστής του κλάσματος θα έχει τόσα μηδενικά, όσα τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού.

Α: Ο δεκαδικός $6,78$ ισούται με κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό 678 και παρονομαστή το 100:

$$6,78=\frac{678}{100}$$

Β: Ο δεκαδικός $18,5$ ισούται με κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό 185 και παρονομαστή το 10:

$$18,5=\frac{185}{10}$$

Γ: Ο δεκαδικός $0,007$ ισούται με κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό 7 και παρονομαστή το 1000:

$$0,007=\frac{7}{1000}$$

4. Να στρογγυλοποιήσετε τον αριθμό $2,015$

Α: στην πλησιέστερη μονάδα. Β: στο πλησιέστερο εκατοστό.

Εξετάζουμε το αμέσως δεξιότερα του ψηφίου στο οποίο κάνουμε τη στρογγυλοποίηση.

Α: Το ψηφίο δεξιά της μονάδος είναι το 1ο δεκαδικό δηλαδή στον $2,015$ το 0 άρα: $2,015=2,000=2$

Β: Το ψηφίο δεξιά του εκατοστού είναι το 3ο δεκαδικό δηλαδή στον $2,015$ το 5 άρα: $2,015=2,020=2,02$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ. 59)

1.Α) Είναι: $4:5=\frac{4}{5}$

Β) Είναι: $9:16=\frac{9}{16}$

Γ) Είναι: $25:79=\frac{25}{79}$

2. Το κλάσμα $\frac{2}{21}$ ισούται με $2:21$.

Το κλάσμα $\frac{16}{3}$ ισούται με $19:3$.

Το κλάσμα $\frac{77}{105}$ ισούται με $77:105$.

3.Α) Εκτελώντας τη διαίρεση $7:16$ είναι:

70	16
64	
60	0,4375
48	
120	
112	
80	
80	
0	

Άρα $7:16=\frac{7}{16}=0,4375$

ή

$\frac{7}{16}\simeq 0,43$: προσέγγιση εκατοστού.

$\frac{7}{16}\simeq 0,437$: προσέγγιση χιλιοστού.

Β) Εκτελώντας τη διαίρεση $21:17$ είναι:

$$\begin{array}{r|l} 21 & 17 \\ 40 & \hline \\ 60 & 1,2352... \\ 90 & \\ 16 & \\ \ldots & \end{array}$$

Άρα $21:17=\frac{21}{17}=1,2352.....$

ή

$\frac{21}{17}\simeq 1,24$: προσέγγιση εκατοστού.

$\frac{21}{17}\simeq 1,235$: προσέγγιση χιλιοστού.

Γ) Εκτελώντας τη διαίρεση $20:95$ είναι:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 95 \\ 140 & \hline \\ 500 & 0,2105 \\ 25 & \\ \ldots & \end{array}$$

Άρα $20:95=\frac{20}{95}=0,2105.....$

ή

$\frac{20}{95}\simeq 0,21$: προσέγγιση εκατοστού.

$\frac{20}{95}\simeq 0,211$: προσέγγιση χιλιοστού

4. Α: $\frac{58}{10}=5,8$ Β: $\frac{3}{100}=0,03$ Γ: $\frac{5.025}{100}=50,25$ Δ: $\frac{1.024}{1.000}=1,024$

5. Α: $3,5=\frac{35}{10}$ Β: $45,25=\frac{4.525}{100}$ Γ: $3,004=\frac{3.004}{1000}$

6. Α) $5,8909$: ψηφίο χιλιοστών: 0 , ψηφίο δεκάκις χιλιοστών: 9 .

Β) $98,0005$: ψηφίο χιλιοστών: 0 , ψηφίο δεκάκις χιλιοστών: 5 .

Γ) $456,8756$: ψηφίο χιλιοστών: 5 , ψηφίο δεκάκις χιλιοστών: 6 .

7.Α) $45,345 < 54,413$ ψηφία δέκατου: $3 < 4$.

Β) $980,19 < 899,01$ ακέραιο μέρος $980 < 899$.

Γ) $7,534 = 7,5340$ όλα τα ψηφία ίσα, το τελευταίο 0 αγνοείται.

8.Στρογγυλοποίηση στο δέκατο:

Α: $9.876,008 = 9.876,0 = 9.876$ Β: $67,8956 = 67,9000 = 67,9$

Γ: $0,001 = 0$ Δ: $8,239 = 8,200 = 8,2$ Ε: $23,7048 = 23,7000 = 23,7$

Στρογγυλοποίηση στο εκατοστό:

Α: $9.876,008 = 9.876,010 = 9.876,01$ Β: $67,8956 = 67,9000 = 67,9$

Γ: $0,001 = 0$ Δ: $8,239 = 8,240 = 8,24$ Ε: $23,7048 = 23,7000 = 23,7$

Στρογγυλοποίηση στο χιλιοστό:

Α: $9.876,008 = 9.876,008$ Β: $67,8956 = 67,8960 = 67,896$

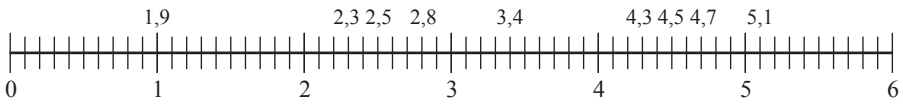
Γ: $0,001 = 0,001$ Δ: $8,239 = 8,239$ Ε: $23,7048 = 23,7050 = 23,705$

9. Α: $3 < 3,4 < 4$ άρα χωρίζουμε το τμήμα μεταξύ κάθε φυσικού αριθμού σε δέκα ίσα μέρη (δέκατα).

Β) $4 < 4,5 < 5$ Γ) $2 < 2,3 < 3$ Δ) $2 < 2,8 < 3$ Ε) $4 < 4,7 < 5$

ΣΤ) $4 < 4,3 < 5$ Ζ) $2 < 2,5 < 3$ Η) $1 < 1,9 < 2$ Θ) $5 < 5,1 < 6$

είναι $1,9 < 2,3 < 2,5 < 2,8 < 3,4 < 4,3 < 4,5 < 4,7 < 5,1$ Άρα:



10. Συμπληρώνοντας τον $34,_\ _\ _$ με όλους τους συνδυασμούς των 9, 5, 2 έχουμε :

$34,952 < 34,925 < 34,592 < 34,529 < 34,295 < 34,259$

11. Οταν στρογγυλοποιηθεί στο δέκατο ο αριθμός $25,_7$ το ψηφίο του δέκατου θα ανέβει μια μονάδα γιατί το ψηφίο του εκατοστού είναι το $7 > 5$. Άρα το αρχικό ψηφίο του δέκατου είναι το $5-1=4$ και ο αριθμός είναι ο $25,47$.

12. $0,345 = \frac{345}{1000}$, $3,45 = \frac{345}{100}$, $0,0345 = \frac{345}{10.000}$, $34,5 = \frac{345}{10}$

13. $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$, $\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$, $\frac{45}{50} = \frac{9}{10} = 0,9$, $\frac{15}{5} = \frac{30}{10} = 3,0$

$\frac{10}{4} = \frac{50}{20} = \frac{25}{10} = 2,5$, $\frac{19}{1} = \frac{190}{10} = 19,0$

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γραφούν σε μορφή δεκαδικών αριθμών τα κλάσματα:

Α. $\frac{24}{10}$ Β. $\frac{142}{1.000}$ Γ. $\frac{2}{100}$ Δ. $\frac{2007}{10^4}$ Ε. $\frac{10^3}{10^5}$

2. Να γραφούν σε μορφή κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών οι διαιρέσεις:

Α. $14:70$ Β. $26:4$ Γ. $121:200$ Δ. $72:90$ Ε. $36:200$

3. Να γραφούν σε μορφή κλασμάτων οι δεκαδικοί αριθμοί:

Α. $102,4$ Β. $77,28$ Γ. $102,391$ Δ. $1,120$ Ε. $0,027$

4. Α. Να βρεθεί ο αριθμός που έχει 4 μονάδες, 7 εκατοστά και στρογγυλοποιημένος στη δεκάδα δίνει αριθμό με 3 δέκατα.
Β. Να βρεθεί το κλάσμα που προκύπτει από τον παραπάνω δεκαδικό αριθμό.

5. Α. Να τοποθετήσετε τους δεκαδικούς αριθμούς: $1,01$, $1,1$, $11,01$, $11,1$, $1,001$, $11,001$ σε αύξουσα σειρά.

Β. Να τοποθετήσετε τους δεκαδικούς αριθμούς : $9,99$, $9,09$, $9,90$, $99,009$ σε φθίνουσα σειρά.

6. Να στρογγυλοποιήσετε στο δέκατο, το εκατοστό και το χιλιοστό τους δεκαδικούς αριθμούς:

Α. $13,5555$ Β. $2,4242$ Γ. $3,1717$ Δ. $6,2549$

Να συγκρίνετε τους παραπάνω στρογγυλοποιημένους αριθμούς για κάθε περίπτωση.

7. Να τοποθετήσετε στην ευθεία αριθμών τους παρακάτω αριθμούς.

$1,2$, $2,10$, $2,3$, $1,40$, $3,2$, $3,40$, $0,9$

3.2

- Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς
- Δυνάμεις με βάση δεκαδικό αριθμό

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Κατά την πρόσθεση ή την αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, τοποθετούμε τους αριθμούς έτσι ώστε η υποδιαστολή να βρίσκεται στην ίδια στήλη και κάθε ψηφίο να βρίσκεται στην ίδια στήλη ανάλογα με την αξία του.

Π.χ.:

$$3,42$$
$$1,04$$

- Όταν προσθέτουμε ή αφαιρούμε δεκαδικούς αριθμούς με διαφορετικό αριθμό δεκαδικών ψηφίων, προσθέτουμε μηδενικά στο τέλος του ενός ώστε να εξισώνεται ο αριθμός τους.

Π.χ.:

$$1,1 \qquad 1,10$$
$$2,24 \longrightarrow 2,24$$

- Κατά τα λοιπά ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την πρόσθεση και την αφαίρεση φυσικών αριθμών.

Π.χ.:

$$\begin{array}{r} 3,45 \\ +\ 1,1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 3,45 \\ +\ 1,10 \\ \hline 4,55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,02 \\ -\ 1,99 \\ \hline 0,03 \end{array}$$

- Επίσης ισχύουν όλες οι ιδιότητες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δηλαδή:

αντιμεταθετική - προσεταιριστική - ουδέτερο στοιχείο πράξης το "0".

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Κατά τον πολλαπλασιασμό δεκαδικών αριθμών εκτελούμε την πράξη όπως τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών, τοποθετώντας στο γινόμενο

την υποδιαστολή έτσι ώστε να προκύπτουν τόσα δεκαδικά ψηφία όσο το σύνολο των ψηφίων των δεκαδικών που πολλαπλασιάζονται:

Π.χ.:

$$\begin{array}{r} 1,1 \\ \times\ 2,2 \\ \hline 22 \\ +\ 22 \\ \hline \end{array}$$

} 1+1=2 δεκαδικά ψηφία

$2,\underbrace{42}_{\text{2 δεκαδικά ψηφία}}$

- Κατά τον πολλαπλασιασμό ενός δεκαδικού με δυνάμεις του 10 (10^{ν}) μεταφέρεται η υποδιαστολή προς τα δεξιά τόσες θέσεις όσες είναι ο εκθέτης της δύναμης (ν) δηλαδή όσα είναι τα μηδενικά του πολλαπλασίου του 10:

$2,5516 \cdot 10 = 25,516$ μετάθεση κατά μία θέση δεξιά.

$2,5516 \cdot 100 = 2,5516 \cdot 10^2 = 255,16$ μετάθεση κατά δύο θέσεις δεξιά.

- Κατά τον πολλαπλασιασμό δεκαδικού με τους $0,1$, $0,01$, $0,001$ κ.α. μεταφέρεται η υποδιαστολή προς τα αριστερά τόσες θέσεις όσα τα δεκαδικά ψηφία των $0,1$, $0,01$, ….

Π.χ.: $22,455 \cdot 0,\underbrace{1}_{\text{1 δεκαδικό}} = 2,\underbrace{2}_{\text{1 θέση αριστερά}}455$ $\qquad$ $22,455 \cdot 0,\underbrace{01}_{\text{2 δεκαδικά}} = 0,\underbrace{22}_{\text{2 θέσεις αριστερά}}455$

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- Κατά τη διαίρεση δεκαδικών αριθμών πολλαπλασιάζουμε διαιρετέο και διαιρέτη με την δύναμη του 10 που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων των αριθμών και εκτελούμε διαίρεση φυσικών αριθμών. Π.χ.:

  $1,25:0,5$ Το $1,25$ έχει δύο δεκαδικά ψηφία, ενώ το $0,5$ ένα. Άρα πολλαπλασιάζουμε τους $1,25$ και $0,5$ με το $10^2=100$: $1,25\cdot 100=125$ και $0,5\cdot 100=50$

  Άρα $1,25:0,5=125:50=\dfrac{125}{50}=2,5$.

- Κατά τη διαίρεση ενός δεκαδικού με τις δυνάμεις του 10 (10^{ν}) μετατοπίζεται η υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά όσος είναι ο εκθέτης της δύναμης (ν), δηλαδή όσα μηδενικά έχει το πολλαπλάσιο του 10:

$$0,5:10=0,50:10^1=0,05$$

$\nu=1$ 1 θέση

- Κατά τη διαίρεση ενός δεκαδικού με τα $0,1$, $0,01$, $0,001$,..... μετατοπίζεται η υποδιαστολή τόσες θέσεις δεξιά όσα τα δεκαδικά ψηφία των $0,1$ ή $0,01$,....

$$11,221:0,\overset{\text{2 δεκαδικά}}{\overbrace{01}}=11\overset{\text{2 θέσεις δεξιά}}{\overbrace{22}},1$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

- Κατά τον υπολογισμό δυνάμεων με βάση δεκαδικό αριθμό ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων φυσικών αριθμών.

  Ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων που προκύπτει από την νιοστή δύναμη δεκαδικού αριθμού ισούται με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων του δεκαδικού επί "ν":

  $(0,4)^2 = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$

  1 δεκαδικό $\cdot 2 = 2$ δεκαδικά

- Οι πράξεις σε αριθμητικές παραστάσεις εκτελούνται με τη γνωστή προτεραιότητα.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

Α. $2,42 \cdot 10$ Β. $33,4 \cdot 100$ Γ. $1,254 \cdot 0,1$ Δ. $0,0524 \cdot 0,01$

Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή δεξιά ή αριστερά ανάλογα με το αν πολλαπλασιάζουμε με πολλαπλάσιο ή υποπολλαπλάσιο του 10.

Α. Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή δεξιά μία θέση: $2,42 \cdot 10 = 24,2$.

Β. Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή δεξιά δύο θέσεις: $33,4 \cdot 100 = 3340$.

Γ. Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή αριστερά μία θέση: $1,254 \cdot 0,1 = 0,1254$.

Δ. Μετατοπίζουμε την υποδιαστολή αριστερά δύο θέσεις:

$0,0524 \cdot 0,01 = 0,000524$.

2. Α. Να πολλαπλασιάσετε με το 10 και να διαιρέσετε με το 0,1 τον αριθμό 2,54.

Β. Να πολλαπλασιάσετε με το $0,01$ και να διαιρέσετε με το 100 τον αριθμό $12,76$.

Ο πολλαπλασιασμός με τον 10^{ν} *ισοδυναμεί με διαίρεση με τον* $0,00\ldots..1$ (ν *μηδενικά*) *και αντιστρόφως η διαίρεση με τον αριθμό* $0,00\ldots..1$ (ν *μηδενικά*) *ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με τον* 10^{ν}.

Α : Είναι: $2,54 \cdot 10 = 25,4$ και $2,54 : 0,1 = 25,4$.

Β : Είναι: $12,76 \cdot 0,01 = 0,1276$ και $12,76 : 100 = 0,1276$.

3. Να εκτελέσετε τις πράξεις στις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

Α. $4,2^2 - 2,1 : 0,5 + 0,5^3$ Β. $(0,8 : 0,2 + 1,5^2)^2 + 2 : 0,1$

Εκτελούμε τις πράξεις με τη σωστή προτεραιότητα.

Α. $4,2^2 - 2,1 : 0,5 + 0,5^3 = 17,64 - 2,1 : 0,5 + 0,125 =$

$= 17,64 - 4,2 + 0,125 = 13,565$

Β.

$(0,8 : 0,2 + 1,5^2)^2 + 2 : 0,1 = (0,8 : 0,2 + 2,25)^2 + 2 : 0,1 = (4 + 2,25)^2 + 2 : 0,1 =$

$= 6,25^2 + 2 : 0,1 = 39,0625 + 2 : 0,1 = 39,0625 + 20 = 50,0625$

4. Πόσα ποτήρια νερού $0,3\ \ell$ γεμίζουμε με ένα μπουκάλι νερό $1,5\ \ell$;

Χρησιμοποιούμε τα δεδομένα των προβλημάτων ώστε να καταλήξουμε στις κατάλληλες αριθμητικές παραστάσεις.

Θα διαιρέσουμε το νερό του μπουκαλιού με τη χωρητικότητα του ποτηριού:

$1,5\ell : 0,3\ell = 5$ ποτήρια νερό για κάθε μπουκάλι.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

(σελ 61)

1. Στοιχίζουμε σωστά τους αριθμούς:

A:	B:
48,180	3,590
3,256	7,130
+ 7,129	+ 8,195
58,565	18,915

2. Η περίμετρος του οικοπέδου Α είναι:

$\Pi_A = 2(80,19 + 26,14) = 2 \cdot 106,33 = 212,66m$.

Η περίμετρος του οικοπέδου Β είναι :

$\Pi_B = 29,15 + 38,13 + 23,24 + 57,89 + 26,14 = 174,53m$.

Η περίμετρος του οικοπέδου Γ είναι:

$\Pi_\Gamma = 39,93 + 47,19 + 48,9 + 44,75 + 47,73 + 57,89 + 80,19 = 366,58m$.

3.

A.	B.	Γ.
15,833	13,9020	20,0005
- 4,791	- 12,5025	- 12,5010
11,042	1,3995	7,4995

4.

Α.

579	48
300	12,0625
120	
240	

Β.

314	25
140	12,56
150	
0	

Γ. $520 : 5,14 = 520 \cdot 100 : 5,14 \cdot 100 = 52.000 : 514$

52.000	514
860	101,167
3460	
3760	

Δ. $49,35 : 7 = 4.935 : 700$

4935	7
3500	7,05
0	

5. Α. $520 \cdot 0,1 + 0,32 \cdot 100 = 52 + 32 = 84$

Β. $4,91 : 0,01 + 0,819 \cdot 10 = 0,0491 + 8,19 = 8,2391$

6. Α. $4,7 : 0,1 - 45 : 10 = 47 - 4,5 = 52,5$

Β. $0,98:0,0001-6,785:1000=9.800-6,785=9.793,215$

7. Η περίμετρος τετραγώνου πλευράς α είναι $\Pi=4\alpha$ δηλαδή : $20,2=4\cdot\alpha$ άρα $\alpha=20,2:4=5,05$.

8. Είναι $\Pi=2\alpha+10,7$ δηλαδή $48,52=2\alpha+10,7$ άρα : $48,52-10,7=37,82$ και $37,82:2=\underline{18,91}$.

9. Α. $24\cdot5-2+3\cdot5=120-2+15=133$.

Β. $3\cdot11-2+54,1:2=33-2+27,85=58,5$.

10. Α. $3,1^2=3,1\cdot3,1=9,61$ Β. $7,01^2=7,01\cdot7,01=49,1401$

Γ. $4,5^2=4,5\cdot4,5=20,25$ Δ. $0,5^2=0,5\cdot0,5=0,25$

Ε. $0,2^2=0,2\cdot0,2=0,04$ ΣΤ. $0,3^3=0,3\cdot0,3\cdot0,3=0,027$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα:

Α. $22,45\cdot0,2$ Β. $12,26\cdot20$ Γ. $9,55\cdot10^2$ Δ. $11,05\cdot0,01$

2. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις με προσέγγιση χιλιοστού.

Α. $122,48:10$ Β. $33,4:0,1$ Γ. $12,25:7,5$ Δ. $9,6:0,3$

3. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

Α. $3,1^2$ Β. $0,4^3$ Γ. $1,25^4$ Δ. $0,1^5$

4. Να εκτέλεσετε τις πράξεις στις παρακάτω αριθμητικές παραστάσεις:

Α. $12,52\cdot 0,1+4,02\cdot 10-1,01:0,1+0,9^2$

Β. $(14,4:0,5+7,12\cdot 10)^2:(10,56:2,2+5,25:1,25)^2$

Γ. $(\frac{3}{8}+1,7):(2\frac{1}{2}\cdot 2,5)^2+(\frac{4}{5}\cdot 0,8+1,5\cdot 1,8)^3$

5. Να υψώσετε τους παρακάτω αριθμούς στο τετράγωνο, τον κύβο και την τετάρτη δύναμη και να τους τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά:

Α. $1,1$ Β. $2,2$ Γ. $0,9$ Δ. $0,1$

6. Αν γεμίσουμε 9 μπουκάλια χωρητικότητας $1,5\ \ell$ με βενζίνη πόσο θα πληρώσουμε, αν η βενζίνη κοστίζει $0,97$ € το λίτρο;

7. Ένα παραλληλόγραμμο έχει πλευρές α και β για τις οποίες ισχύει : $\alpha=2\beta$.
Αν η περίμετρος είναι $9m$, να υπολογίσετε:
Α. Τις πλευρές α, β.
Β. Το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

3.3 Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης

- Στους υπολογιστές τσέπης υπάρχουν πλήκτρα με τα σύμβολα των πράξεων

+	−	×	÷

για την εκτέλεση των πράξεων.

- Το πλήκτρο [=] δίνει το αποτέλεσμα των πράξεων.
- Το πλήκτρο [.] τοποθετεί την υποδιαστολή.

- Ενδέχεται να υπάρχουν πλήκτρα για περισσότερες λειτουργίες (π.χ. $\boxed{M+}$ $\boxed{M-}$ $\boxed{MR}$ $\boxed{MC}$ λειτουργία μνήμης, $\boxed{x^2}$ ύψωση στο τετράγωνο).

- Συνήθως η οθόνη διαθέτει από 8 έως 12 ψηφία, οπότε αν ένας αριθμός έχει περισσότερα ψηφία εμφανίζεται σε προσσέγγιση.

- Εάν εκτελεστεί αντικανονική πράξη (π.χ. διαίρεση με 0) εμφανίζεται η ένδειξη E
  (error = λάθος).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ σελ 62

1. $7,28\boxed{\div}5,2\boxed{-}0,4\boxed{=}1\boxed{\times}5,8\boxed{+}4,2\boxed{=}10\boxed{M+}$

$2,4\boxed{+}7,1\boxed{=}9,5\boxed{\div}5\boxed{=}1,9\boxed{+}0,1\boxed{=}2\boxed{M+}$

$2,03\boxed{+}0,47\boxed{=}2,5\boxed{\times}3,2\boxed{=}8\boxed{M-}\boxed{MR}4\boxed{MC}0$

3.4 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων αριθμών

- Όταν ένας σχετικά μεγάλος αριθμός A γράφεται σε μορφή γινομένου ενός αριθμού a επί μια δύναμη του 10, η γραφή αυτή ονομάζεται τυποποιημένη:
  $A = a \cdot 10^{\nu}$

- Ο αριθμός a είναι $A < a < 10$ και μπορεί να είναι δεκαδικός ή φυσικός.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς:

Α. 200.000 Β. 4.500.000 Γ. 12.250.000

Εφόσον ο α είναι μικρότερος του 10 σημαίνει πως προκύπτει τοποθετώντας την υποδιαστολή στο δεύτερο από αριστερά ψηφίο.

Η δύναμη (ν) του 10^{ν} *προκύπτει από τον αριθμό των ψηφίων μετά την υποδιαστολή δηλαδή μετά το πρώτο από αριστερά ψηφίο.*

Α. Ο αριθμός που προκύπτει αν τοποθετήσουμε την υποδιαστολή στο 2ο ψηφίο είναι: $2,00000=2$ και τα ψηφία μετά είναι 5 άρα $a=2$, $\nu=5$ συνεπώς:

$$200.000=2\cdot10^5.$$

Β. Ο αριθμός που προκύπτει αν τοποθετήσουμε την υποδιαστολή στο 2ο ψηφίο είναι: $4,500000=4,5$ και τα ψηφία μετα είναι 6 άρα $a=4,5$, $\nu=6$ συνεπώς:

$$4.500.000=4,5\cdot10^6.$$

Γ. Ο αριθμός που προκύπτει αν τοποθετήσουμε την υποδιαστολή στο 2ο ψηφίο είναι: $1,2250000=1,225$ και τα ψηφία μετά είναι 7 άρα: $a=1,225$, $\nu=7$ συνεπώς:

$$12.250.000=1,225\cdot10^7.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ σελ 63

1. Α. $583.000=5,83\cdot10^5$ Β. $4.300.000=4,3\cdot10^6$ Γ. $7.960.000=7.96\cdot10^6$

Δ. $3.420.000.000=3,42\cdot10^9$ Ε. $4.800=4,8\cdot10^3$ ΣΤ. $7.310=7,31\cdot10^3$

Ζ. $281.900=2,819\cdot10^5$ Η. $518.000.000=5,18\cdot10^8$ Θ. $131.000=1,31\cdot10^5$

I. $675.000 = 6,75 \cdot 10^5$

2. Α. $3\,3,1 \cdot 10^6 = 3.100.000$ Β. $4,820 \cdot 10^5 = 482.000$ Γ. $3,25 \cdot 10^4 = 32.500$
Δ. $7,4 \cdot 10^3 = 7.400$ Ε. $9,2 \cdot 10^2 = 920$

3. Α. $1.000.000.000 \cdot 1.000.000.000 = 10^9 \cdot 10^9 = 10^{9+9} = 10^{18}$
Β. $987.654.321 \cdot 123.456.789 = 1,21932631112635269 \cdot 10^{17} \simeq 1,22 \cdot 10^{17}$
Γ. $1.000.000^3 = (10^6)^3 = 10^{6 \cdot 3} = 10^{18}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς:
Α. 4.000 Β. 452.000 Γ. 6.250.000

Δ. 1.234.567 Ε. 150

2. Να γράψετε σε δεκαδική μορφή τους παρακάτω αριθμούς:
Α. $8,025 \cdot 10^6$ Β. $4,2 \cdot 10^4$ Γ. $6,632 \cdot 10^5$ Δ. $5,55 \cdot 10^2$

3. Να επιλέξετε από τους παρακάτω αριθμούς αυτούς που δεν είναι τυποποιημένες μορφές και να τους μετατρέψετε καταλλήλως ώστε να γίνουν:
Α. $1,2 \cdot 10^4$ Β. $9,25 \cdot 10^6$ Γ. $12,4 \cdot 10^5$ Δ. $1,1 \cdot 10^9$ Ε. $0,5 \cdot 10^4$

4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:
$0,3 \cdot 10^7$, $3 \cdot 10^6$, $30 \cdot 10^5$

Ποιος από τους παραπάνω αριθμούς αποτελεί τυποποιημένη έκφραση και γιατί;

3.5 Μονάδες μέτρησης

ΘΕΩΡΙΑ

Α. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΗΚΟΥΣ

- Βασική μονάδα μέτρησης του μήκους είναι το μέτρο, το οποίο συμβολίζεται με m.
- Πολλαπλάσιο του μέτρου είναι το χιλιόμετρο (km).

$$1km = 1.000m = 10^3\, m$$

Χρησιμοποιείται και το ναυτικό μίλι: 1ν. μίλι $= 1,852m$.

- Υποδιαιρέσεις του μέτρου είναι:

Το δεκατόμετρο dm (ή παλάμη) : $1dm = 0,1m = \frac{1}{10^1}\, m = \frac{1}{10}\, m$.

Το εκατοστόμετρο cm (ή εκατοστό) : $1cm = 0,01m = \frac{1}{10^2}\, m = \frac{1}{100}\, m$.

Το χιλιοστόμετρο mm (ή χιλιοστό): $1mm = 0,001m = \frac{1}{10^3}\, m = \frac{1}{1000}\, m$.

Ισοδύναμα:

$1m = 0,001km = \frac{1}{10^3}\, km$
$1m = 10dm$ $1m = 100cm = 10^2\, cm$ $1m = 1.000mm = 10^3\, mm$

Από τα παραπάνω προκύπτει πως για να μετατρέψουμε μια μέτρηση μήκους από μία υποδιαίρεση σε άλλη πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 10. Ειδικότερα για να μετατρέψουμε τα km σε m ή αντίστροφα πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 1.000 $(=10^3)$.

Β. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΜΒΑΔΟΥ

Το εμβαδό σαν μέγεθος προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό μήκος × μήκος άρα η βασική του μονάδα είναι το τετραγωνικό μέτρο $m \cdot m = m^2$.

- Πολλαπλάσιο του τετραγωνικού μέτρου είναι το τετραγωνικό χιλιόμετρο km^2

$$1km^2 = 1km \cdot 1km = 1.000m \cdot 1.000m = 1.000.000m^2 = 10^6 m^2$$

Χρησιμοποιείται και το στρέμμα: 1 στρέμμα με

$$1.000m^2 = 10^3 m^2 = 0,001km^2 = \frac{1}{10^8} km^2.$$

- Υποδιαίρεση του τετραγωνικού μέτρου είναι:

Το τετραγωνικό δεκατόμετρο:

$$dm^2 = dm \cdot dm = 0,1m \cdot 0,1m = 0,01m^2 = \frac{1}{10^2} m^2.$$

Το τετραγωνικό εκατοστόμετρο (ή εκατοστό):

$$cm^2 = cm \cdot cm = 0,01m \cdot 0,01m = 0,0001m^2 = \frac{1}{10^4} m^2.$$

Το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (ή χιλιοστό):

$$mm^2 = mm \cdot mm = 0,001m \cdot 0,001m = 0,000001m^2 = \frac{1}{10^6} m^2.$$

Ισοδύναμα:

$$1m^2 = 0,000001km^2 = \frac{1}{10^6}\,km^2$$

$$1\text{m}^2 = 0,001 \text{ στρέμματα} = \frac{1}{10^3} \text{στρέμματα}$$

$$1m^2 = 100dm^2 = 10^2\,dm^2$$

$$1m^2 = 10.000cm^2 = 10^4\,cm^2$$

$$1m^2 = 1.000.000mm^2 = 10^6\,mm^2$$

Για να μετατρέψουμε μια μέτρηση μήκους από μια υποδιαίρεση σε άλλη πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 100 .

Ειδικότερα για να μετατρέψουμε τα m^2 σε km^2 και στρέμματα ή αντίστροφα πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 10^6 ή το 10^3 αντίστοιχα.

Γ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΟΓΚΟΥ

Το μέγεθος του όγκου προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό μήκος × μήκος × μήκος ή μήκος × εμβαδόν, άρα έχει μονάδα μέτρησης το κυβικό μέτρο $m^3 = m \cdot m \cdot m$.

- Οι υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου είναι:

  Το κυβικό δεκατόμετρο:

$$1dm^3 = 1dm \cdot 1dm \cdot 1dm = 0,1m \cdot 0,1m \cdot 0,1m = 0,001m^3 = \frac{1}{10^3}\,m^3$$

  Το κυβικό εκατοστόμετρο ή εκατοστό:

$1cm^3 = 1cm \cdot 1cm \cdot 1cm = 0,01m \cdot 0,01m \cdot 0,01m = 0,000001m^3 = \frac{1}{10^6}\, m^3$

Το κυβικό χιλιοστόμετρο ή χιλιοστό:

$1mm^3 = 1mm \cdot 1mm \cdot 1mm = 0,001m \cdot 0,001m \cdot 0,001m =$

$= 0,000000001m^3 = \frac{1}{10^9}\, m^3$

Επίσης χρησιμοποιείται και το <u>λίτρο</u> ℓ :

$1\ell = 1.000cm^3 = 0,001m^3 = \frac{1}{10^3}\, m^3$

Το cm^3 είναι το $\frac{1}{1000}$ του λίτρου και ονομάζεται και <u>χιλιοστόλιτρο</u> $m\ell$: $1m\ell = 1cm^3 = \frac{1}{10^3}\,\ell = \frac{1}{10^6}\, m^3$.

<u>Ισοδύναμα</u>:

$$1m^3 = 1.000dm^3 = 10^3\, dm^3$$
$$1m^3 = 1.000.000cm^3 = 10^6\, cm^3$$
$$1m^3 = 1.000.000.000mm^3 = 10^9\, mm^3$$

$$1m^3 = 1.000\ell = 10^3\,\ell$$
$$1m^3 = 1.000.000m\ell = 10^6\, m\ell$$

Για να μετατρέψουμε μια μέτρηση όγκου από μια υποδιαίρεση σε άλλη πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε με το 1.000.

Ειδικότερα $1\ell = 1.000cm^3 = 0,001m^3$.

Δ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΧΡΟΝΟΥ

Βασική μονάδα μέτρησης του χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (ή δεύτερο) s.

Οι μονάδες μέτρησης του χρόνου ακολουθούν εξαδικό σύστημα. Έτσι:

- Πολλαπλάσια του δευτερολέπτου είναι:

  Το λεπτό min: $1\,\text{min} = 60s$.

  Η ώρα h : $1h = 60\,\text{min} = 60 \cdot 60s = 3.600s$.

  Η ημέρα : $1\ \text{ημέρα} = 24h = 24 \cdot 3.600s = 86.400s$.

Ισοδύναμα:

$$1s = \frac{1}{60}\,\text{min}$$

$$1s = \frac{1}{3.600}\,h$$

$$1s = \frac{1}{86.400}\,\text{ημέρες}$$

Ε. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΜΑΖΑΣ

Βασική μονάδα μέτρησης της μάζας είναι το χιλιόγραμμο (ή κιλό) kg.

- Πολλαπλάσιο του κιλού είναι ο τόνος Τ. $1T = 1.000kg = 10^3\,kg$.

- Υποδιαιρέσεις του κιλού είναι:

Το γραμμάριο g : $1g = 0,001kg = \frac{1}{10^3}\,kg$.

Το χιλιοστόγραμμο mg : $1mg = 0,000001kg = \frac{1}{10^6}\,kg$.

Ισοδύναμα:

$$1kg = 1.000g = 10^3\,g$$

$$1kg = 1.000.000mg = 10^6\,mg$$

$$1kg = 0,001T = \frac{1}{10^3}\,T$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οι παραπάνω βασικές μονάδες των μεγεθών που αναφέρονται μαζί με άλλες των υπόλοιπων μεγεθών δημιουργούν ένα σύστημα μονάδων που ονομάζεται διεθνές σύστημα (S.I.).

- Για να εκτελέσουμε πράξεις, συγκρίσεις κ.τ.λ.ποσοτήτων ενός μεγέθους θα πρέπει αυτές να είναι στην ίδια μονάδα μέτρησης.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να μετατρέψετε την ποσότητα μήκους 50 cm σε: m, dm, mm.

Κάθε μονάδα μήκους προκύπτει από την αμέσως μικρότερη αν πολλαπλασιάσουμε με το 10 *και από την αμέσως μεγαλύτερη αν διαιρέσουμε με το* 10.

Τα 50 cm είναι $50 \cdot 10^{-1} dm = {}^{50}\!/_{10}\, dm = 5dm$.

Τα 50 cm είναι $50 \cdot 10^{-2} m = 50 \cdot 0,01m = 0,5m$.

Τα 50 cm είναι $50 \cdot 10mm = 50 \cdot 10mm = 500mm$.

2. Να μετατρέψετε την ποσότητα εμβαδού $0,4m^2$ σε: dm^2, cm^2, mm^2, στρέμματα.

Κάθε μονάδα εμβαδού προκύπτει από την αμέσως μικρότερη αν πολλαπλασιάσουμε με το 100 *(*10^2*) και από την αμέσως μεγαλύτερη αν διαιρέσουμε με το* 100 *(*10^2*).*
Το στρέμμα ισούται με $1.000m^2$.

Τα $0,4m^2$ είναι: $0,4 \cdot 10^2 dm^2 = 40dm^2$.

>> >> >> : $0,4 \cdot 10^4 cm^2 = 4.000cm^2$.

>> >> >> : $0,4 \cdot 10^6 mm^2 = 400.000mm^2$.

>> >> >> : $0,4 : 10^3$στρ Ύμματα $= 4 : 10^4$στρ Ύμματα $= 0,0004$ στρέμματα.

3. Να μετατρέψετε την ποσότητα όγκου 50ℓ σε $m\ell$, m^3, dm^3, cm^3, mm^3.

Κάθε μονάδα όγκου προκύπτει από την αμέσως μικρότερη αν πολλαπλασιάσουμε με 1.000 *(*10^3*) και από την αμέσως μεγαλύτερη αν διαιρέσουμε με* 1.000 *(*10^3*).*

Το ℓ *ισούται με* $10^{-3} m^3 = 1dm^3$ *και* ${}^{1}\!/_{1000}\, \ell = m\ell = 1cm^3$.

Τα 50ℓ είναι: $50 \cdot 1.000m\ell = 50.000m\ell = 5 \cdot 10^4 m\ell$.

>> >> >> : $50 \cdot 10^{-3} m^2 = 0,05m^2 = 5 \cdot 10^{-2} m^2$.

>> >> >> : $50dm^3$.

>> >> >> : $50 \cdot 1.000cm^3 = 50.000cm^3 = 5 \cdot 10^4 cm^3 (= 5 \cdot 10^4 m\ell)$.

>> >> >> : $50 \cdot 1.000.000mm^3 = 50.000.000mm^3 = 5 \cdot 10^7 mm^3$.

4. Να μετατρέψετε σε δευτερόλεπτα και ημέρες τη διάρκεια ενός ποδοσφαιρικού αγώνα.

Προσοχή στο εξαδικό σύστημα των υποδιαιρέσεων του χρόνου.

Ο αγώνας διαρκεί 90 λεπτά. Δηλαδή:

Τα 90 min είναι: $90 \cdot 60s = 5.400s$.

>> >> >>: $90 : 60h = 1,5h$.

>> >> >>: $90 : (60 \cdot 24)$ημ Ύρες $= 0,0625$ημ Ύρες .

5. Να συγκρίνετε τις ποσότητες Α: $0,2m$ και $30cm$. Β: $4cm^2$ και $0,004mm^3$.

Για να συγκρίνουμε ποσότητες φυσικού μεγέθους θα πρέπει οι ποσότητες να είναι στην ίδια μονάδα. Επίσης δεν μπορούμε να συγκρίνουμε ανόμοια μεγέθη.

Α. Είναι $0,2m$ και $30cm$. Αν μετατρέψουμε τα cm σε m είναι $30cm = 30 \cdot 10^{-2} m = 0,3m$. Άρα $0,3m > 0,2m$ δηλαδή $30cm > 0,2m$.

Β. Είναι $4cm^2$ και $0,004mm^3$. Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τις ποσότητες αυτές γιατί τα $4cm^2$ είναι εμβαδόν και τα $0,004mm^3$ όγκος!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ.67)

1. Α. $23dm = 23 \cdot 10 = 230cm$.

Β. $3,1m = 3,1 \cdot 10^{-3} km = 0,0031km$.

Γ. $45,83cm = 45,83 \cdot 10^{-2} m = 0,4583m$.

Δ. $67,2km = 67,2 \cdot 10^{6} m = 67.200.000m$.

Ε. $95,5mm = 95,5 \cdot 10^{-1} cm = 9,55cm$.

2. $a = 3,1m = 3,1 \cdot 1000mm = 3.100mm = 3,1 \cdot 10^3 mm$.

$\beta = 4,2m = 4,2 \cdot 1000mm = 4.200mm = 4,2 \cdot 10^3 mm$.

$\gamma = 2,3m = 2,3 \cdot 1000mm = 2.300mm = 2,3 \cdot 10^3 mm$.

3. $0,023km = 0,023 \cdot 1.000m = 23m$

$456cm = 456 : 100m = 4,56m$

$678dm = 678 : 10m = 67,8m$

Άρα: $4,56m < 23m < 67,8m < 986m$ ή $456cm < 0,023km < 678dm < 986m$.

4. Το εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου με πλευρές $a = 23cm$, $\beta = 45cm$

είναι: $E = \alpha \cdot \beta = 23cm \cdot 45cm = 1.035cm^2$.

$1.035cm^2 = 1.035 \cdot 100mm^2 = 103.500mm^2$.

5. Α) $56km^2 = 56.000.000m^2 = 5,6 \cdot 10^7 m^2$.

Β) $0,987\text{στρ Ύμματα} = 0,987 \cdot 1.000m^2 = 987m^2$.

Γ) $350\text{στρ Ύμματα} = 350 \cdot 1.000m^2 = 350.000m^2$.

6. Το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι:

$E = a^2$, άρα $E = 210^2 m^2 = 44.100m^2$

$E = 44.100m^2 = 44.100 : 1.000\text{στρ μματα} = 44,1\text{στρ μματα}$.

7. Το εμβαδόν της αυλής είναι: $E = 5m \cdot 7,2m = 36m^2$.

>> >> κάθε πλάκας είναι: $E' = (40cm)^2 = (0,4m)^2 = 0,16m^2$.

Επομένως ο αριθμός των πλακών που θα χρειαστούμε είναι:

$$N = E / E' = 56m^2 / 0,16m^2 = 350 \text{ πλάκες.}$$

8. $15dm^3 = 15 \cdot 100cm^3 = 15.000cm^3$ άρα ο όγκος του στερεού είναι: $15dm^3 + 29cm^3 = 15.000cm^3 + 29cm^3 = 15.029cm^3$

ή $15.029 : 10^6 m^3 = 0,015029m^3$

ή $15.029 \cdot 10^3 mm^3 = 15.029.000mm^3$.

9. Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου δεξαμενής πλευρών $a = 3m$, $\beta = 2m$, $\gamma = 5m$ είναι: $V = a \cdot \beta \cdot \gamma = 3m \cdot 2m \cdot 5m = 30m^3$.

Το κρασί και στις τρεις δεξαμενές είναι:
$3 \cdot 30m^3 = 90m^3 = 90 \cdot 10^3 dm^3 = 90.000dm^3 = 90.000\ell$.

Εφόσον 1ℓ κοστίζει 4 € το συνολικό ποσό είναι: $4 \cdot 90.000 = 360.000$ €.

10. $5:20$ το απόγευμα είναι: $17h + 20\min$. Άρα
$17h + 20\min - 8h + 10\min = 9h + 10\min$.

11. Α. $4h = 4 \cdot 60\min = 240\min$ άρα:
$4h + 52\min = 240 + 52\min = 292\min = 292 \cdot 60s = 17.520s$.

Β. $3h = 3 \cdot 60\min = 180\min$ άρα:
$3h + 12\min = 180\min + 12\min = 192\min = 192 \cdot 60s = 11.520s$.

Γ. $5h = 5 \cdot 60\min = 300\min$ και $30s = 30 : 60\min = 0,5\min$ άρα:
$5h + 20\min + 30s = 300\min + 20\min + 0,5\min$
$= 320,5\min = 320,5 \cdot 60s = 19.230s$

Δ. $45s = 45 : 60\min = 0,75\min$ άρα:
$56\min + 45s = 56\min + 0,75\min = 56,75\min = 56,75 \cdot 60s = 3.405s$.

12. Α. $\frac{1}{10}h = \frac{1}{10} \cdot 60\min = \frac{60}{10}\min = 6\min$

Β. $\frac{1}{5}h = \frac{1}{5}\cdot 60\,\text{min} = \frac{60}{5}\,\text{min} = 12\,\text{min}$

Γ. $\frac{1}{6}h = \frac{1}{6}\cdot 60\,\text{min} = \frac{60}{6}\,\text{min} = 10\,\text{min}$

13. Α. $3kg = 3.000g$ άρα: $3kg + 600g = 3.600g = 3.600 : 1.000kg = 3,6kg$. Άρα στη ζυγαριά θα βάλουμε από τη μία πλάστιγγα το βάρος των $3,6kg$ και από την άλλη πλάστιγγα 3 σταθμά του $1kg$, 1 σταθμό των $500g$ και 2 σταθμά των $50g$.

Β. $2kg = 2\cdot 1000g = 2.000g$ άρα: $2kg + 450g = 2.450g = 2,45kg$. Άρα στη ζυγαριά θα βάλουμε από τη μία πλάστιγγα το βάρος των $2,45kg$ και από την άλλη 2 σταθμά του $1kg$ και 9 σταθμά των $50g$.

14. Α. Στη μια πλάστιγγα τοποθετούμε το σώμα των $5kg$, ένα των $3kg$ και ένα των $1kg$ και στην άλλη το σώμα των $9kg$.

Β. Στην πλάστιγγα τοποθετούμε το σώμα των $5kg$, ένα των $3kg$ και δύο των $1kg$ και στην άλλη το σώμα των $10kg$.

15. Α. Για 5ℓ χρειάζονται 2 δοχεία των 2ℓ και 1 δοχείο του $0,5\ell$.
Β. Για $2,8\ell$ >> 1 δοχείο των 2ℓ, 1 δοχείο του $0,5\ell$ και 3 δοχεία των $0,1\ell$.

Γ. Για $2,4\ell$ >> 1 δοχείο των 2ℓ και 4 δοχεία των $0,1\ell$.

16. $1T$ πετρέλαιο έχει όγκο 1.200ℓ άρα $3T$ πετρέλαιο έχουν όγκο

$3 \cdot 1.200 = 3.600\ell = 3,6m^3$. Άρα ο όγκος της δεξαμενής είναι

$Y = 3,6m^3 = 2,5m \cdot 1m \cdot$ ύψος ή $3,6m^3 = 2,5m^2 \cdot$ ύψος.

Άρα το ύψος είναι: $3,6m^3 \,/\, 2,5m^2 = 1,44m = 144cm$.

Στο $1cm$ ύψους αντιστοιχούν $3.600\ell : 144cm = 25\,\ell/cm$.

17. $80cm = 0,8m$, άρα ο όγκος της δεξαμενής είναι:

$1,2m \cdot 0,8m \cdot 0,8m = 0,768m^3 = 768\ell$.

Το ύψος είναι $1,2m = 120cm$, άρα στο $1cm$ αντιστοιχούν $768/120 = 6,4\ell$.

Α. Στην άνοδο των $10cm$ αντιστοιχούν $10 \cdot 6,4\ell = 64\ell$. Εφόσον στο $1\min$ αντλούνται 8ℓ , τα 64ℓ χρειάζονται $64 : 8 = 8\min$ για να αντληθούν.

Β. Τα 768ℓ χρειάζονται $768 : 8 = 96\min$ για να αντληθούν.

Γ. $\frac{1}{2}h = 30\min$ άρα σε $30\min$ έχουν αντληθεί $30 \cdot 8 = 240\ell$ τα οποία αντιστοιχούν σε $240 : 6,4 = 37,5cm$. Άρα η στάθμη θα κατέβει $37,5cm$.

18. 1ος ποδηλάτης: $1h + 15\min = 60\min + 15\min = 75\min$.
2ος >> : $1h + 45\min = 60\min + 45\min = 105\min$.

Α. $75 : 105 = 75/105 = 5/7$ Β. $105 : 75 = 105/75 = 7/5$

αντίστροφοι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

km	m	dm	cm	mm
$1,44$				
	$52,2$			
		250		
			125	
				36

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	ℓ	$m\ell$
$0,02$					
	$4,5$				
		$62,2$			
			44		
				250	
					650

3. Να βρείτε το εμβαδό τετραγώνου και τον όγκο κύβου πλευράς $a=0,08m$

Α. σε dm^2 και dm^3. Β. σε cm^2 και cm^3. Γ. σε mm^2 και mm^3.

4. Να συγκρίνετε την περίμετρο και το εμβαδό δύο οικοπέδων, ενός τεραγώνου πλευράς $a=0,5km$ και ενός παραλληλογράμμου πλευρών $\beta=400m$ και $\gamma=6000$dm.

5. Α. Να βρείτε πόσα χρήματα θα πρέπει να πληρώσουμε για να γεμίσουμε τη δεξαμενή του καλοριφέρ με πετρέλαιο αν αυτή έχει διαστάσεις $a=1,2m$, $\beta=200cm$, $\gamma=8dm$ και το πετρέλαιο κοστίζει $0,62$ € το λίτρο.

6. Α) Αν ένα ορθογώνιο οικόπεδο στοιχίζει 120.000 € σε μια περιοχή όπου το $1m^2$ κοστολογείται προς 160 € να βρείτε πόσα στρέμματα είναι το εμβαδόν του.

Β) Αν η μια πλευρά του είναι $25m$, να βρείτε πόσα μέτρα σύρματος χρειαζόμαστε για να περιφράξουμε το οικόπεδο.

7. Ένας υπάλληλος εργάζεται από Δευτέρα ως Παρασκευή από $08:00$ πμ έως $15:00$.
Να βρείτε πόσες ώρες, λεπτά και δευτερόλεπτα εργάζεται στη διάρκεια ενός μηνός.
Να υποθέσετε πως ο μήνας έχει 30 μέρες και η 1η του μηνός είναι Δευτέρα.

8. Ένας ανελκυστήρας έχει ως μέγιστη τιμή μεταφερόμενης μάζας τους $0,45T$.
Να βρείτε πόσους ανθρώπους μάζας $80kg$ και $65kg$ μπορεί να μεταφέρει ώστε το σύνολο των ανθρώπων να είναι έξι.

Επαναληπτικά θέματα 3ου κεφαλαίου

1. Λ Το κλάσμα που προκύπτει είναι ισοδύναμο με το αρχικό.

2. Σ

3. Λ: $1:\frac{\alpha}{\beta}=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$

4. Σ

5. Σ

6. Λ $3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{21}{9}$

7. Λ $\frac{1\frac{5}{8}}{3} = \frac{\frac{13}{8}}{3} = \frac{13}{24}$

8. Σ

9. Ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος του αριθμητή, άρα το κλάσμα είναι μικρότερο του 1.

10. Σ

11. Σ

12. Σ

13. Λ Ο παρονομαστής δεν είναι δύναμη του 10.

14. Σ

15. Λ $1.050 : 3.100 \simeq 0,34$ ενώ $2.593 : 4.650 = 0,56$. Άρα $\frac{1.050}{3.100} < \frac{2.593}{4.650}$

16. Λ $\frac{3,4}{7,3} = 34 : 73 = 0,4658$

17. Σ

18. Λ $34,5 : 5,7 = 6,05$

19. Σ

20. Σ

21. Λ $\frac{23}{3} = 7,66666.....$

Κριτήριο αξιολόγησης 3ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να γράψετε τα επόμενα κλάσματα ως δεκαδικούς με προσέγγιση εκατοστού και να τους τοποθετήσετε σε αύξουσα σειρά:

$$\frac{465}{1.000}\,,\quad \frac{252}{500}\,,\quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{15}{18}}\,,\quad 3\frac{21}{30}$$

Β. Να γράψετε ως δεκαδικά κλάσματα τους παρακάτω δεκαδικούς και να απλοποιήσετε τα κλάσματα όπου είναι δυνατό:

$0,76$ $1,1$ $24,45$ $0,033$

ΘΕΜΑ 2ο

Να εκτελέσετε τις παρακάτω πράξεις στρογγυλοποιώντας το αποτέλεσμα στο πλησιέστερο εκατοστό:

Α. $1,4^4+1,6^3\cdot 2,1^2$ Β. $(1,4+2,7)^2:(1,3-0,7)^3$

Γ. $0,01\cdot 2.007\cdot 10^2-4.012\cdot 0,5$ Δ. $(2,8\cdot 2,4:1,4\cdot 1,2)^3:(1,25:0,5)^2$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους παρακάτω αριθμούς:

450.000 1.250.000 12.600.000.000

Β. Να βρείτε σε g τη μάζα ενός φορτηγού $4,25T$ και να γράψετε το αποτέλεσμα σε τυποποιημένη μορφή.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δοχείο όγκου $0,75m^3$ είναι γεμάτο με νερό.
Τι κλάσμα του νερού θα πρέπει να αφαιρέσουμε ώστε στο δοχείο να μείνουν 300ℓ;

Β. Αν το ύψος του δοχείου είναι $1,5m$ πόσα cm^2 είναι η βάση του;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

$$\alpha+x=\beta$$

$$x-\alpha=\beta$$

$$\alpha-x=\beta$$

$$\alpha\cdot x=\beta$$

$$x:\alpha=\beta$$

$$\alpha:x=\beta$$

4.1

- Η έννοια της εξίσωσης
- Οι εξισώσεις α+x=β, x–α=β, α–x=β, α·x=β, x:α=β και α:x=β

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Εξίσωση **ενός αγνώστου** ονομάζεται μια ισότητα η οποία περιέχει αριθμούς και ένα γράμμα, συνήθως το x, με το οποίο συμβολίζεται ο άγνωστος.

- Ο αριθμός τον οποίο αν τον τοποθετήσουμε στη θέση του αγνώστου επαληθεύει την ισότητα ονομάζεται **λύση** ή **ρίζα** της εξίσωσης.

- Η διαδικασία ανεύρεσης της λύσης της εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση της εξίσωσης.**

- Όταν μια εξίσωση επαληθεύεται για οποιαδήποτε τιμή του αγνώστου ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**. Π.χ.: η $0 \cdot x = 0$ ισχύει για κάθε τιμή του x.

- Όταν μια εξίσωση δεν επαληθεύεται για καμία τιμή του αγνώστου τότε ονομάζεται **αδύνατη**. Π.χ.: η $0 \cdot x = 14$ δεν ισχύει για καμία τιμή του x.

- Όταν τοποθετούμε μια λύση της εξίσωσης στη θέση του αγνώστου για

να διαπιστώσουμε αν ισχύει η ισότητα εκτελούμε την **επαλήθευση** της λύσης.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Η εξίσωση της μορφής $\alpha + x = \beta$ (με x άγνωστο και α, β αριθμούς) έχει λύση την $x = \beta - \alpha$.
  Π.χ.: $2 + x = 6 \Rightarrow x = 6 - 2 = 4$

- Η εξίσωση της μορφής $x - \alpha = \beta$ έχει λύση την $x = \beta + \alpha$.
  Π.χ.: $x - 4 = 1 \Rightarrow x = 1 + 4 = 5$

- Η εξίσωση της μορφής $\alpha - x = \beta$ έχει λύση την $x = \alpha - \beta$.
  Π.χ.: $12 - x = 8 \Rightarrow x = 12 - 8 = 4$

- Η εξίσωση της μορφής $\alpha \cdot x = \beta$ έχει λύση την $x = \beta : \alpha$.
  Π.χ.: $3 \cdot x = 18 \Rightarrow x = 18 : 3 = 6$

- Η εξίσωση της μορφής $x : \alpha = \beta$ έχει λύση την $x = \beta \cdot \alpha$.
  Π.χ.: $x : 5 = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 5 = 100$

- Η εξίσωση της μορφής $\alpha : x = \beta$ έχει λύση την $x = \alpha : \beta$.
  Π.χ.: $14 : x = 7 \Rightarrow x = 14 : 7 = 2$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

- Διάφορες προτάσεις που περιγράφουν την επεξεργασία ενός αριθμού μπορούν να μετατραπούν σε εξισώσεις χρησιμοποιώντας έναν άγνωστο και γνωστούς αριθμούς.

Π.χ.: Στην έκφραση: "Το διπλάσιο ενός αριθμού να ισούται με 4" συμβολίζουμε με x τον άγνωστο αριθμό τον οποίο πολλαπλασιάζουμε με το 2 και τον εξισώνουμε με το 4, άρα προκύπτει η εξίσωση: $2\cdot x=4$.

Στην έκφραση: "Η ελάττωση ενός αριθμού κατά 3 ισούται με 8" συμβολίζουμε με x τον άγνωστο αριθμό από τον οποίο αφαιρούμε το 3 και τον εξισώνουμε με το 8, άρα η εξίσωση που ισοδυναμεί με την παραπάνω έκφραση είναι η εξής: $x-3=8$.

- Αντίστροφα, κάθε εξίσωση μπορεί να περιγραφεί από αντίστοιχη έκφραση.

  Π.χ.: η εξίσωση $4x=16$ ισοδυναμεί με την έκφραση "Το τετραπλάσιο ενός αριθμού ισούται με 16".

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x+5x=16$ β) $2\cdot x+4=12$ γ) $x:3-7=2$ δ) $2x+6=3+3x-x+3$

ε) $x-5=2x-x+6$

Όταν οι εξισώσεις έχουν πιο σύνθετη μορφή τότε τις απλοποιούμε είτε κάνοντας πράξεις στα 2 μέλη της εξίσωσης και εφαρμόζοντας ιδιότητες όπως επιμεριστική, προσεταιριστική κ.τ.λ., είτε θεωρώντας ως νέο άγνωστο ένα συνδυασμό του αγνώστου της εξίσωσης με κάποιους αριθμούς. Έτσι μετατρέπουμε τη σύνθετη εξίσωση σε μια από τις γνωστές απλές μορφές.

α) $3x+5x=16$. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έχουμε:

$(3+5)x=16$ ή $8x=16$ η εξίσωση τώρα είναι της μορφής $\alpha x=\beta$ άρα $x=16:8=2$.

β) $2\cdot x+4=12$. Θεωρώ σαν άγνωστο y το $2\cdot x$ και η εξίσωση γίνεται: $y+4=12$. Είναι της μορφής $x+\alpha=\beta$.
΄Αρα $y=12-4=8$ δηλαδή $2\cdot x=8$
(μορφή $\alpha x=\beta$). Επομένως: $x=8:2=4$.

γ) $x:3-7=2$. Θεωρώ σαν άγνωστο y τον $x:3$ οπότε: $y-7=2$ (μορφή $x-\alpha=\beta$) άρα: $y=2+7=9$ δηλαδή $x:3=9$ (μορφή $x:\alpha=\beta$) άρα $x=9\cdot 3=27$.

δ) $2x+6=3+3x-x+3$ ή $2x+6=3+(3-1)x+3$ ή $2x+6=3+2x+3$ ή $2x+6=2x+6$. Η ισότητα αυτή ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του x άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα.

ε) $x-5=2x-x+6$ ή $x-5=(2-1)x+6\Rightarrow x-5=x+6$. Η εξίσωση δεν ισχύει για κανένα x άρα είναι αδύνατη.

2. Να επαληθεύσετε τη λύση που δίνεται στις παρακάτω εξισώσεις:
α) $5\cdot x+11=21$ λύση ο αριθμός 2 β) $x:4+x=2x-3$ λύση ο αριθμός 8

Για να επαληθεύσουμε μια λύση την τοποθετούμε στη θέση του αγνώστου και ελέγχουμε την εξίσωση.

α) $5\cdot x+11=21$ αν τοποθετήσουμε στη θέση του x το 2 είναι:
$5\cdot 2+11=21$ ή $10+11=21$ ή $21=21$. Άρα ο αριθμός 2 είναι λύση.
β) $x:4+x=2x-3$ τοποθετούμε στη θέση του x το 8:
$8:4+8=2\cdot 8-3$ ή $2+8=16-3$ ή $10=13$ άτοπο. Άρα ο αριθμός 8 δεν είναι λύση.

3. Να μετατρέψετε την παρακάτω έκφραση σε εξίσωση:
"Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 ισούται με το εξαπλάσιο του ίδιου αριθμού".

Θεωρούμε άγνωστο τον αριθμό και εκτελούμε τις πράξεις που περιγράφονται στην έκφραση.

Αν x ο άγνωστος αριθμός θα πρέπει να τον πολλαπλασιάσουμε με το 5, να προσθέσουμε το 2 και να τον εξισώσουμε με τον εαυτό του πολλαπλασιασμένο με το 6, δηλαδή: $5x+2=6x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ 74)

1. $3\cdot x$

α $10\cdot x$

β $x+12$

γ $x-5$

δ $x-y>20$

ε $x\cdot y=32$

2. α) το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 25.

β) το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 7 ισούται με 2.

γ) ένας αριθμός μειωμένος κατά το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού.

δ) το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το επταπλάσιο του ίδιου αριθμού ισούται με 88.

3. Περίμετρος: $\Pi=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha$ ή $\Pi=(1+1+1+1)\alpha$ ή $\Pi=4\cdot\alpha$.
Εμβαδόν: $E=\alpha\cdot\alpha=\alpha^2$.

4. α) $x+x=2x$

β) $\alpha+\alpha+\alpha=(1+1+1)\alpha=3\alpha$

γ) $3\cdot\alpha+52\cdot\alpha=(3+52)\alpha=55\cdot\alpha$

δ) $2\cdot\beta+\beta+3\cdot\alpha+2\cdot\alpha=(2+1)\beta+(3+2)\alpha=3\beta+5\alpha$

ε) $4\cdot x+8\cdot x-3\cdot x=(4+8)x-3\cdot x=12x-3x=9\cdot x$

στ) $7\cdot\omega+4\omega-10\omega=(7+4)\omega-10\omega=11\omega-10\omega=\omega$

5. $x(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ Προσεταιριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού.

$$\frac{2}{9}\cdot z=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$$

6. αν $x=0$ τότε $2+\alpha=0$ το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0 για κανένα φυσικό αριθμό α.
αν $x=3$ τότε $2+\alpha=3$ και $\alpha=1$ άρα το x μπορεί να πάρει την τιμή 3.
αν $x=1$ τότε $2+\alpha=1$ το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 1 για κανένα φυσικό αριθμό α.

7. Αν αντικαταστήσουμε το x με το 12 έχουμε: $x+13=25$ δηλαδή $12+13=25$ ή $25=25$ άρα το 12 είναι λύση της εξίσωσης $x+13=25$.

8. $x-2=4$ λύση το 6
$1+y=4$ λύση το 3
$18-\omega=10$ λύση το 8
$9-\alpha=1$ λύση το 8
$93-\beta=86$ λύση το 7

9. α) $x+4,9=15,83$ ή $x=15,83-4,9$ ή $x=10,93$

β) $40,4+x=93,19$ ή $x=93,19-40,4$ ή $x=52,79$

γ) $53,404-x=4,19$ ή $x=53,404-4,19$ ή $x=49,214$

δ) $38-x=7,1$ ή $x=38-7,1$ ή $x=30,9$

10. α) $\frac{3}{x}=\frac{12}{20}$ ή $3:x=\frac{12}{20}$ ή $x=3:\frac{12}{20}$ ή $x=3\cdot\frac{20}{12}$ ή $x=5$

β) $\frac{5}{7}=\frac{15}{x}$ ή $\frac{5}{7}=15:x$ ή $x=15:\frac{5}{7}$ ή $x=15\cdot\frac{7}{5}$ ή $x=21$

γ) $\frac{35}{40}=\frac{x}{8}$ ή $\frac{35}{40}=x:8$ ή $x=\frac{35}{40}\cdot 8$ ή $x=7$

δ) $\frac{49}{5}=x+\frac{4}{5}$ ή $x=\frac{49}{5}-\frac{4}{5}$ ή $x=\frac{45}{5}$ ή $x=9$

11. α) $\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$ ή $\frac{x+3}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}$ ή $\frac{x+3}{4}=\frac{5}{4}$ ή $x+3=5$ ή $x=5-3$ ή $x=2$

β) $\frac{5}{8}+\frac{x}{16}=\frac{3}{4}$ ή $\frac{10+x}{16}=\frac{12}{16}$ ή $10+x=12$ ή $x=12-10$ ή $x=2$

γ) $\frac{3}{5}+\frac{x+2}{10}+1$ ή $\frac{6+x+2}{10}=1$ ή $\frac{8+x}{10}=\frac{10}{10}$ ή $8+x=10$ ή $x=10-8$ ή $x=2$

12. α) $v+3=4$ ή $v=4-3$ ή $v=1$

β) $x-2=8$ ή $x=8+2$ ή $x=10$

γ) $t+4+1=3+19$ ή $t+5=22$ ή $t=22-5$ ή $t=17$

δ) $6-x=5$ ή $x=6-5$ ή $x=1$

13. Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός τότε από το πρόβλημα έχουμε:

$$x+4=\frac{21}{5} \text{ ή } x=\frac{21}{5}-4 \text{ ή } x=\frac{21-20}{5} \text{ ή } x=\frac{1}{5}$$

Κάνουμε επαλήθευση αντικαθιστώντας στην εξίσωση το x με το $\frac{1}{5}$:

$$\frac{1}{5}+4=\frac{21}{5} \text{ ή } \frac{1}{5}+\frac{20}{5}=\frac{21}{5} \text{ ή } \frac{21}{5}=\frac{21}{5} \text{ ή } \frac{1}{5}.$$

14. Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός τότε:
$x+5=313$ ή $x=313-5$ ή $x=308$
Κάνουμε επαλήθευση αντικαθιστώντας στην εξίσωση το x με το 308:
$308+5=313$ ή $313=313$ άρα ο αριθμός είναι το 308.

15. α) Το 1ο σχήμα έχει περίμετρο $4cm$, το 2ο σχήμα έχει περίμετρο $8cm$, το 3ο σχήμα έχει περίμετρο $12cm$, το 4ο σχήμα έχει περίμετρο $16cm$.
Η περίμετρος των σχημάτων είναι πολλαπλάσια του 4 άρα η περίμετρος του 5ου σχήματος είναι $20cm$.

β) Αν τα τετράγωνα της βάσης του σχήματος είναι x τότε η περίμετρος είναι $4\cdot x$.

γ) Είναι $4\cdot x=128$ ή $x=128:4$ ή $x=32$ δηλαδή το 32ο σχήμα έχει περίμετρο 128.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να εξετάσετε αν κάποιοι από τους αριθμούς $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3 είναι λύσεις των εξισώσεων:

α) $4x+5=19$ β) $2+x+2x=10-4x-x$ γ) $4x+2=8x$ δ) $5x+6=6x$

2. Να μετατρέψετε τις παρακάτω εκφράσεις σε εξισώσεις:

α) Ένας αριθμός μειωμένος κατά 1 ισούται με το μισό του ίδιου αριθμού.

β) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 ισούται με το εξαπλάσιο του ίδιου αριθμού μειωμένο κατά 2.

γ) Το μισό του μισού ενός αριθμού ισούται με 12

3. Να μετατρέψετε τις παρακάτω εξισώσεις σε εκφράσεις:

α) $5x+4=18$ β) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x-1$ γ) $2(x+4)=4x-2$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x+5=23$ β) $15-5x=6x+4x$ γ) $20+x=10+x-10$

δ) $\frac{3x+2}{3}+5=x+\frac{17}{3}$ ε) $\frac{4}{2+x}+8=3^2$ στ) $\frac{\frac{4}{x}}{\frac{5}{2}}=0,8$

5. Να βρείτε τις φυσικές τιμές του x ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να ισχύουν αν γνωρίζετε ότι το α είναι φυσικός αριθμός.

α) $20:5x=\alpha$ β) $\alpha+x=4$

6. Έχετε ένα κομμάτι ξύλου και μετράτε μ' αυτό τις πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η μια πλευρά είναι μεγαλύτερη από το ξύλο κατά 1 και η άλλη μικρότερη κατά 2.

α) Να εκφράσετε τις πλευρές του ορθογωνίου σε σχέση με το μήκος του ξύλου.

β) Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου σε σχέση με το μήκος του ξύλου.

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο για μήκος ξύλου ίσο με 10.

δ) Πόσο πρέπει να είναι το μήκος του ξύλου ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου να ισούται με 30;

4.2 Επίλυση προβλημάτων

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Κάθε πρόβλημα περιέχει ορισμένες λέξεις-κλειδιά οι οποίες μας οδηγούν στη λύση του.

- Ορισμένες φορές για να λυθεί ένα πρόβλημα αρκεί να ακουλουθηθούν οι πράξεις με τη σειρά που περιγράφονται σ' αυτό.

- Επίσης ένα πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί κατασκευάζοντας εξίσωση σύμφωνα με τα δεδομένα. Δηλαδή:

Θεωρούμε σαν άγνωστο της εξίσωσης το ζητούμενο και το συμβολίζουμε με ένα γράμμα.

Εκφράζουμε τα δεδομένα του προβλήματος καθώς και τα άλλα ζητούμενα σε σχέση με τον άγνωστο.

Έτσι προκύπτει η εξίσωση που ισοδυναμεί με το πρόβλημα.

Προχωρούμε στη λύση της εξίσωσης προσδιορίζοντας την τιμή του αγνώστου.

Εκτελούμε επαλήθευση της λύσης που προέκυψε.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Το διπλάσιο του αθροίσματος δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών μειωμένο κατά 4 ισούται με 29. Να βρεθούν οι αριθμοί.

Εντοπίζουμε τον ένα άγνωστο και εκφράζουμε τα δεδομένα και τα υπόλοιπα ζητούμενα σε σχέση με αυτόν.

Οι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί διαφέρουν κατά 1. Έτσι αν ν είναι ο ένας αριθμός, ο επόμενος θα είναι ο $\nu+1$.

Το άθροισμά τους είναι: $\nu+\nu+1=2\nu+1$.

Το διπλάσιο του αθροίσματός τους είναι: $2(2\nu+1)=4\nu+2$.

>> >> >> >> μειωμένο κατά 4 είναι $4\nu+2-4=4\nu+1$.

Η εξίσωση λοιπόν είναι: $4\nu+1=29$ ή $4\nu=29-1$ ή $4\nu=28$ ή $\nu=28:4$ ή $\nu=7$.

Άρα οι αριθμοί είναι ο $\nu=7$ και ο $\nu+1=7+1=8$.

Επαληθεύοντας τις λύσεις έχουμε: $2\cdot(7+8)-1=29$ ή $2\cdot15-1=29$ ή $30-1=29$ ή $29=29$.

2. Ένα λεωφορείο 52 θέσεων έχει σειρές των 4 καθισμάτων. Πόσες σειρές έχει το λεωφορείο;

Αν x ο αριθμός των σειρών τότε ο αριθμός των καθισμάτων είναι $4\cdot x$ και ισούται με 52. Άρα η εξίσωση είναι: $4\cdot x=52$ ή $x=52:4$ ή $x=13$.
Άρα το λεωφορείο έχει 13 σειρές καθισμάτων.

Επαληθεύοντας: $4\cdot 13=52$ ή $\underline{\underline{52=52}}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (σελ 78)

1. Έστω ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $\nu\nu\nu\nu$, με τον ν να είναι φυσικός μονοψήφιος αριθμός ($\nu<10$).
Ο αριθμός $\nu\nu\nu\nu$ διαιρείται με το 9 άρα τα ψηφία του πρέπει να έχουν άθροισμα πολλαπλάσιο του 9:
Άρα $\nu+\nu+\nu+\nu=9\cdot\alpha$ με α φυσικό αριθμό ή $4\nu=9\alpha$ ή $\nu=(9\alpha):4$.

για $\alpha=1$, $\nu=9:4=2,25$ απορρίπτεται γιατί $\nu=$ φυσικός.

για $\alpha=2$, $\nu=2\cdot 9:4=18:4=4,5$ >> >> >> .

για $\alpha=3$, $\nu=3\cdot 9:4=27:4=6,75$ >> >> >> .

για $\alpha=4$, $\nu=4\cdot 9:4=9$ δεκτό.

για $\alpha=5$, $\nu=5\cdot 9:4=11,25>10$ απορρίπτεται.

Άρα το ν παίρνει την τιμή 9 και ο αριθμός είναι ο 9999 και επαληθεύοντας $9+9+9+9=4\cdot 9=36$ πολλαπλάσιο του 9.

2. Αν οι μαθητές του σχολείου είναι x τότε προκύπτει η εξίσωση: $\frac{2}{8}\cdot x=60$ ή $\frac{1}{4}x=60$ ή $x=60:\frac{1}{4}$ ή $x=60\cdot 4$ ή $x=240$. Άρα το σχολείο έχει 240 μαθητές.

Επαληθεύοντας: $\frac{2}{8}\cdot 240=60$ ή $\frac{1}{4}\cdot 240=60$ ή $\frac{240}{4}=60$ ή $\underline{\underline{60=60}}$.

3. Αν ν ο μικρότερος φυσικός αριθμός, ο επόμενος είναι ο $\nu+1$ και ο

μεθεπόμενος ο $v+2$, άρα: $v+v+1+v+2=1.533$ ή $3v+3=1533$ ή $3v=1533-3$ ή $3v=1530$ ή $v=1530:3$ ή $v=510$.
Άρα οι αριθμοί είναι οι 510, 511, 512.

Επαληθεύοντας: $510+511+512=1533$ ή $\underline{\underline{1533=1533}}$.

4. Αν το ψηφίο που λείπει είναι το v, με τον v να είναι φυσικός μονοψήφιος αριθμός, ο αριθμός είναι ο $75v3$.
Διαιρείται με το 9 άρα το άθροισμα των ψηφίων του ισούται με πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή:
$7+5+v+3=\alpha\cdot 9$ ή $15+v=\alpha\cdot 9$ ή $v=\alpha\cdot 9-15$.
για $\alpha=1$, $v=9-15$ αδύνατο.
για $\alpha=2$, $v=2\cdot 9-15=18-15=3$ δεκτό.
για $\alpha=3$, $v=3\cdot 9-15=27-15=12>10$ απορρίπτεται.
Άρα $v=3$ και ο αριθμός είναι ο 7533.
Επαληθεύοντας: 7533, $7+5+3+3=18=2\cdot 9$, πολλαπλάσιο του 9.

5. Αν x είναι οι σωστές απαντήσεις, οι λανθασμένες θα είναι $100-x$.
Για τις σωστές απαντήσεις πήρε: $3\cdot x$ μονάδες.
Για τις λανθασμένες απαντήσεις πήρε: $1\cdot(100-x)=100-x$ μονάδες.
Άρα η εξίσωση είναι: $3\cdot x+100-x=220$ ή $2x+100=220$ ή $2x=220-100$ ή $2x=120$ ή $x=120:2$ ή $x=60$.
Άρα έδωσε 60 σωστές και $100-60=40$ λάθος απαντήσεις.

Επαληθεύοντας: $3\cdot 60+1\cdot 40=220$ ή $180+40=220$ ή $\underline{\underline{220=220}}$.

6. Αν η ηλικία της μητέρας είναι x τότε: $x-18=25$ ή $x=25+18$ ή $x=43$.
Άρα η μητέρα είναι 43 ετών.

Επαληθεύοντας: $43-18=25$ ή $\underline{\underline{25=25}}$.

7. Αν η αξία του χωραφιού είναι x € τότε ο 1ος παίρνει $(x+600)$ €.

Αν η αξία του διαμερίσματος είναι y € τότε ο 2ος παίρνει $(y-15.600)$ €.
Ο 3ος παίρνει 15.000 € που ισοδυναμούν με την αξία αυτών του 1ου και του 2ου άρα: $x+600=15.000$ και $y-15.600=15.000$ οπότε:
$x+600=15.000$ ή $x=15.000-600$ ή $x=14.400$ και $y-15.600=15.000$ ή $y=15.000+15.600$ ή $y=30.600$.
Άρα η αξία του χωραφιού είναι 14.400 € και του διαμερίσματος 30.600 €.
Επαληθεύοντας: $14.400+600=15.000$ ή $\underline{\underline{15.000=15.000}}$
και $30.600-15.600=15.000$ ή $\underline{\underline{15.000=15.000}}$.

8. α) $AB+47=73$ ή $AB=73-44$ ή $AB=26$ άρα $A=2$ και $B=6$.

β) $\Gamma\Delta-8=\Delta5$ ή

$$\begin{array}{r} \Gamma\Delta \\ 8 \\ \hline \Delta5 \end{array}$$

άρα $\Delta=3$ οπότε $\Gamma3-8=35$ ή $\Gamma3=35+8$ ή $\Gamma3=43$ άρα $\Gamma=4$.

9. Αν η αρχική ποσότητα του κρασιού είναι $x\ell$ και τα δοχεία των 7ℓ είναι y τότε χώρεσε στα δοχεία ποσότητα $(x-18)\ell$ η οποία ισούται με $7\cdot y$ δηλαδή: $x-18=7\cdot y$. Εφόσον $90<x<100$ προκύπτει ότι για $x=95$: $95-18=7\cdot y$ ή $77=7y$ ή $y=77:7$ ή $y=11$. Άρα αρχικά είχαμε 95ℓ κρασί και χρησιμοποιήσαμε 11 δοχεία. Επαληθεύοντας: $95-18=7\cdot11$ ή $\underline{\underline{77=77}}$.

10. Αν x τα μπουκάλια με x φυσικό είναι: $0,75\cdot x=100$ ή $x=100:0,75$ ή $x=133,3333...$
α) Εφόσον $x=$φυσικός $x=133$ και το ξύδι που συσκευάστηκε ισούται με $133\cdot0,75=99,75\ell$.

β) Περίσσεψαν $100-99,75=0,25\ell$.

11. Η παραλία έχει μήκος $18\frac{3}{4}km=\frac{75}{4}km=18,75km$.

Το 1ο συνεργείο καθαρίζει $3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}=3,5$ *km/ημέρα*

Το 2ο >> >> $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}=2,75$ *km/ημέρα.*

Αν ολοκληρώνουν το καθάρισμα της παραλίας σε x ημέρες τότε:

$3,5\cdot x+2,75\cdot x=18,75$ ή $6,25\cdot x=18,75$ ή $x=18,75:6,25$ ή $x=3$.

Άρα η παραλία καθαρίζεται σε 3 ημέρες.

Επαληθεύοντας: $3,5\cdot 3+2,75\cdot 3=18,75$ ή $10,5+8,25=18,75$

ή $\underline{\underline{18,75=18,75}}$.

12. Αν ο αρχικός μισθός είναι x τότε αποταμιεύει το $\frac{1}{15}\cdot x=\frac{x}{15}$ του μισθού του.

Ο νέος μισθός ισούται με $x+\frac{1}{5}x=x+\frac{x}{5}=\frac{6x}{5}$ του αρχικού μισθού. Αν το ποσό της αποταμίευσης είναι το y μέρος του νέου μισθού είναι: $\frac{x}{15}=y\cdot\frac{6x}{5}$

άρα $y=\frac{x}{15}:\frac{6x}{5}$ ή $y=\frac{x}{15}\cdot\frac{5}{6x}$ ή $y=\frac{50x}{90x}$ ή $y=\frac{5}{90}$ ή $y=\frac{1}{18}$ άρα αποταμιεύει το $\frac{1}{18}$ του νέου μισθού.

13. Αν η ηλικία του ανθρώπου φέτος είναι x , το x είναι πολλαπλάσιο του 7 δηλ. 7 , 14 , 21 , 28 ….

Του χρόνου η ηλικία του ανθρώπου θα είναι $x+1$ και θα είναι πολλαπλάσιο του 9 , 18 , 27 ….

Για $x=35$ έχουμε $35=7\cdot 5$ και $x+1=36=9\cdot 4$.
Άρα φέτος ο άνθρωπος είναι 35 ετών και του χρόνου 36.
Επίσης για $x=98$ είναι $98=7\cdot 14$ και $x+1=99=9\cdot 11$.
2η λύση είναι η ηλικία των 98 ετών (του χρόνου 99).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Ο Γιάννης θα πάρει σύνταξη στα 65 του χρόνια και ύστερα από 32 χρόνια υπηρεσίας. Πόσων ετών ήταν όταν προσελήφθη στη δουλειά;

2. Το τριπλάσιο άθροισμα τριών διαδοχικών φυσικών αριθμών ισούται με το εξαπλάσιο άθροισμα του 1ου και του 2ου. Ποιοί είναι οι αριθμοί;

3. Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά το $\frac{1}{3}$ του αριθμού ισούται με τον αριθμό μειωμένο κατά 2. Να βρεθεί ο αριθμός.

4. Ένα τούβλο ζυγίζει $1kg$ και μισό τούβλο. Πόσο ζυγίζει το τούβλο;

5. Η Μαρία αγόρασε συνολικά 20 φρούτα, πορτοκάλια και μήλα. Αν τα μήλα κοστίζουν $0,2\,€$ το ένα και τα πορτοκάλια $0,15\,€$ το ένα και η Μαρία πλήρωσε συνολικά $3,6\,€$ να βρείτε πόσα μήλα και πόσα πορτοκάλια αγόρασε.

6. Αν τριπλασιάσουμε το εμβαδόν ενός σπιτιού και του αφαιρέσουμε 120 τ.μ. προκύπτει το εμβαδόν του σπιτιού αυξημένο κατά το μισό του. Πόσο εμβαδόν έχει το σπίτι;

7. Το πενταπλάσιο ενός φυσικού αριθμού ισούται με το τετραπλάσιο του επόμενου φυσικού αριθμού μειωμένο κατά 3. Να βρείτε τον αριθμό.

8. Ένας άνδρας παντρεύτηκε μια γυναίκα που η ηλικία της ισούται με το μισό της δικής του αυξημένο κατά 17 . Αν το άθροισμα των ηλικιών του ζευγαριού είναι 77 χρόνια να βρείτε τις 2 ηλικίες.

Επαναληπτικά θέματα 4ου κεφαλαίου

Κριτήριο αξιολόγησης 4ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x-3=(x+5)\frac{1}{2}$

β) $\frac{2}{x}+\frac{3}{2x}=1+\frac{4}{3x}$

γ) $26:x-8=\frac{10}{x}$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης:
$(x+1)^2=x^2+3x+1-x$.

β) Να μετατρέψετε σε έκφραση την εξίσωση: $\frac{1}{2}x-5=2x-23$.

ΘΕΜΑ 3ο

Να βρεθούν δυο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που το άθροισμά τους να ισούται με το τριπλάσιο της διαφοράς τους.

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τμήμα της 1ης Γυμνασίου αποτελείται από 35 μαθητές. Αν τα κορίτσια είναι 3 περισσότερα από τα αγόρια να βρείτε τον αριθμό των αγοριών και κοριτσιών του τμήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΟΣΟΣΤΑ

5.1 Ποσοστά

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΕΝΙΚΑ

- Το σύμβολο $\alpha\%$ ονομάζεται "**ποσοστό επί τοις εκατό**" ή απλά **ποσοστό** και ισούται με το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$.
- Το σύμβολο $\alpha‰$ ονομάζεται "ποσοστό επί τοις χιλίοις" και ισούται με $\frac{\alpha}{1.000}$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΣΕ ΚΛΑΣΜΑ

- Ένα ποσοστό $\alpha\%$, σύμφωνα με τα παραπάνω, ισούται με $\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$.

  Στη συνέχεια το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$ απλοποιείται όταν αυτό είναι δυνατό.
- Αν το ποσοστό είναι $\alpha‰$, τότε ισοδύναμα $\alpha‰ = \frac{\alpha}{1.000}$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΣΕ ΔΕΚΑΔΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

- Για να γραφεί ένα ποσοστό $\alpha\%$ σε μορφή δεκαδικού αριθμού:

Γράφεται το ποσοστό $\alpha\%$ σε μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{100}$.
Το κλάσμα ισούται με το δεκαδικό που προκύπτει από τη διαίρεση $\alpha:100$.

- Ισοδύναμα ένα ποσοστό $\alpha‰$ ισούται με το δεκαδικό που προκύπτει από τη διαίρεση $\alpha:1.000$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΠΟΣΟΣΤΟ

- Για να γραφεί ένας δεκαδικός αριθμός σε μορφή ποσοστού:

  Γράφεται σε μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 100 (δηλαδή $\alpha/100$).

  Το $\alpha/100$ ισοδυναμεί με $\alpha\%$.

- Αντίστοιχα αν ο δεκαδικός γραφεί σε μορφή κλάσματος με παρονομαστή

  το 1.000 ($\alpha/1.000$) το $\alpha/1.000$ ισοδυναμεί με $\alpha‰$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΟΣΟΣΤΟ

- Ένα κλάσμα μπορεί να γραφεί σε μορφή ποσοστού ακολουθώντας 2 διαδικασίες:

  Το κλάσμα $\frac{\nu}{\mu}$ μετατρέπεται στο ισοδύναμο $\frac{\alpha}{100}$ οπότε $\frac{\nu}{\mu}=\frac{\alpha}{100}=\alpha\%$

  (ή $\frac{\alpha}{1.000}$ οπότε $\frac{\nu}{\mu}=\alpha‰$). Ή

  Το κλάσμα $\frac{\nu}{\mu}$ ισούται με το δεκαδικό που προκύπτει από τη διαίρεση

$\nu : \mu$. Ο δεκαδικός γράφεται σε μορφή κλάσματος $\frac{\alpha}{100}$ δηλαδή $\alpha\%$ (ή $\frac{\alpha}{1.000}$ δηλ. $\alpha‰$).

ΕΥΡΕΣΗ ΠΟΣΟΣΤΟΥ ΜΙΑΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ

- Το ποσοστό $\alpha\%$ μιας ποσότητας A ισούται με το γινόμενο:

$$\alpha\%A = \frac{\alpha}{100} \cdot A$$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να γραφούν ως ποσοστά τα κλάσματα Α. $\frac{9}{25}$ Β. $\frac{7}{13}$

Όταν ένα κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ δε γράφεται σε μορφή κλάσματος με παρονομαστή 100, εκτελούμε τη διαίρεση $\mu : \nu$ και ο δεκαδικός που προκύπτει (με κατάλληλη προσέγγιση) μετατρέπεται σε ποσοστό.

Α. Είναι $\frac{9}{25} = \frac{9 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{36}{100}$ άρα $\frac{9}{25} = 36\%$

Β. Το 13 δεν είναι διαιρέτης του 100 άρα το $\frac{7}{13}$ δε μετατρέπεται σε κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{100}$. Άρα θα το μετατρέψουμε σε δεκαδικό:

$\frac{7}{13} = 7:13 = 0,53846 \simeq 0,538$

Ο δεκαδικός $0,538$ γράφεται σε μορφή κλάσματος με παρονομαστή το 100 ως: $0,538 = \frac{53,8}{100} = 53,8\%$ Άρα $\frac{7}{13} = 53,8\%$.

2. Να γραφούν ως κλάσματα τα ποσοστά: Α. 32% Β. $75‰$ Γ. $2,5\%$

Όπου είναι δυνατό εκτελούμε απλοποιήσεις ή πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος που προκύπτει με τέτοιον φυσικό αριθμό, ώστε ο αριθμητής να είναι φυσικός.

Α. Το 32% ισούται με $\frac{32}{100} = \frac{8}{25}$

Β. Το $75‰$ ισούται με $\frac{75}{1.000} = \frac{3}{40}$

Γ. Το $2,5\%$ ισούται με $\frac{2,5}{100} = \frac{2,5 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \frac{25}{1.000} = \frac{1}{40}$

3. Να βρεθεί ο αριθμός που το 25% ισούται με 40.

Χαρακτηρίζουμε τον ζητούμενο αριθμό ως x *και κατασκευάζουμε την εξίσωση* $x \cdot \alpha\% = \beta$ *με* α, β *γνωστές ποσότητες.*

Έστω x ο ζητούμενος αριθμός. Το 25% του x ισούται με 40 δηλαδή:

$25\% \cdot x = 40$ ή $\frac{25}{100} \cdot x = 40$ ή $\frac{25 \cdot x}{100} = 40$ ή $x = \frac{40 \cdot 100}{25} = 160$

Επαληθεύοντας: το 25% του 160 είναι $160 \cdot \frac{25}{100} = \frac{160 \cdot 25}{100} = \frac{4.000}{100} = 40$

4. Να βρεθεί ο αριθμός που προκύπτει όταν το 120
Α) Αυξηθεί κατά 25% Β) Μειωθεί κατά 30%.

Υπολογίζουμε τον αριθμό που αντιστοιχεί στα ποσοστά και προσθέτουμε ή αφαιρούμε στην αρχική ποσότητα.

Α. Το 25% του 120 είναι: $25\%\cdot 120=\frac{25}{100}\cdot 120=\frac{1}{4}\cdot 120=\frac{120}{4}=30$

Άρα το 120 αυξημένο κατά 25% ισούται με $120+30=150$.

Ισοδύναμα το πρόβλημα λύνεται ως εξής: Αν x *το ζητούμενο τότε*

$$x=120+25\%120=120+0,25\cdot 120=120\left(1+0,25\right)=120\cdot 1,25$$

ή $120\cdot\frac{125}{100}$ *δηλαδή* $x=125\%\cdot 120$

Β. Το 30% του 120 είναι: $30\%\cdot 120=\frac{30}{100}\cdot 120=36$

Άρα το 120 μειωμένο κατά 30% ισούται με $120-36=84$.

Ισοδύναμα: $x=120-30\%120=120-\frac{30}{100}\cdot 120$

$$=120-0,3\cdot 120=\left(1-0,3\right)120=0,7\cdot 120=\frac{70}{100}\cdot 120$$

Άρα $x=70\%\cdot 120$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (ΣΕΛ 81)

1. Τα κλάσματα μετατρέπονται σε ισοδύναμα με παρονομαστή 100:

α. $\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{20}{100}=20\%$ β. $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 50}{2\cdot 50}=\frac{150}{100}=150\%$

γ. $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{25}{100}=25\%$ δ. $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 25}{4\cdot 25}=\frac{75}{100}=75\%$

ε. $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 20}{5\cdot 20}=\frac{60}{100}=60\%$

2. Οι δεκαδικοί μετατρέπονται σε κλάσματα με παρονομαστή το 100.

α. $0,52=\frac{52}{100}=52\%$ β. $3,41=\frac{341}{100}=341\%$ γ. $0,19=\frac{19}{100}=19\%$

δ. $0,03=\frac{3}{100}=3\%$ ε. $0,07=\frac{7}{100}=7\%$

3. α. $15\%=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$ β. $7\%=\frac{7}{100}$ γ. $48\%=\frac{48}{100}=\frac{12}{25}$

δ. $50\%=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

4. α. Είναι $10\%\cdot 3.000€=\frac{10}{100}\cdot 3.000€=\frac{30.000}{100}€=300€$.

β. $1\text{h}=60\,\text{min}$, άρα το 45% της 1h είναι:

$$45\%1\text{h}=45\%60\,\text{min}=\frac{45}{100}\cdot 60\,\text{min}=\frac{2.700}{100}\,\text{min}=27\,\text{min}.$$

γ. $1\ell=1.000\text{m}\ell=1.000\text{cm}^3$ άρα το 20% του 1ℓ είναι:

$$20\%1\ell=20\%1.000\text{cm}^3=\frac{20}{100}\cdot 1.000\text{cm}^3=\frac{10.000}{100}\text{cm}^3=100\text{cm}^3.$$

δ. Το 50% των 500g είναι: $50\%500\text{g} = \frac{50}{100}\cdot 500\text{g} = \frac{25.000}{100}\text{g} = 250\text{g}$.

ε. $1\text{kg} = 1.000\text{g} \Rightarrow 25\%$ του 1kg είναι:

$$25\%\cdot 1\text{kg} = 25\%\cdot 1.000\text{g} = \frac{25}{100}\cdot 1.000\text{g} = \frac{25.000}{100}\text{g} = 250\text{g}.$$

5. Αν $\alpha\%$ είναι το ζητούμενο ποσοστό τότε:

α) $\frac{\alpha}{100} = \frac{50}{1000} = \frac{5}{100}$ άρα $\alpha = 5$ και τα 50€ είναι το 5% των 1.000€.

β) Εφόσον 1 έτος $= 365$ ημέρες : $\frac{\alpha}{100} = \frac{30}{365} = 0,0822 = \frac{8,22}{100}$ άρα $\alpha = 8,22$ και οι 30 ημέρες $= 8,22\%$ του έτους.

γ) $\frac{\alpha}{100} = \frac{50}{2.500} = \frac{2}{100}$ άρα $\alpha = 2$ και τα 50 στρέμματα είναι το 2% των 2.500 στρεμμάτων.

δ) 1 παλάμη $= 1\text{dm}$ και $1\text{m} = 10\text{dm}$ οπότε $10\text{m} = 10\cdot 10 = 100\text{dm}$.

$\frac{\alpha}{100} = \frac{3}{100} \Rightarrow \alpha = 3$ άρα τα 3dm είναι το 3% των 100dm.

6. Εξατμίστηκε το 22% των $0,61\ell$,

δηλαδή $22\%0,61 = \frac{22}{100}\cdot 0,61 = \frac{22\cdot 0,61}{100} = 0,1342\ell$

7. α) Η ακτίνα της Γης είναι: $\text{R} = 50\text{km} + 2.900\text{km} + 3.450\text{km} = 6.400\text{km}$.

β) Το ποσοστό της ακτίνας R που αντιστοιχεί στο φλοιό είναι:

$$\frac{50}{6.400} \simeq 0,0078 = \frac{0,78}{100} = 0,78\%\cdot \text{R}.$$

>> >> >> >> >> >> >> στο μανδύα είναι:

$$\frac{2.900}{6.400} \simeq 0,4531 = \frac{45,31}{100} = 45,31\% \cdot \mathrm{R}\,.$$

γ) >> >> >> >> >> >> >> στον πυρήνα είναι:

$$\frac{3.450}{6.400} \simeq 0,5391 = \frac{53,91}{100} = 53,91\% \cdot \mathrm{R}\,.$$

8. Το ποσό x που αποταμιεύεται είναι:

$$\mathrm{x} = 10\% \cdot 1.200€ = \frac{10}{100} \cdot 1.200€ = \frac{12.000}{100}€ = 120€\,.$$

Το υπόλοιπο ποσό y είναι: $\mathrm{y} = (1.200 - \mathrm{x})€ = (1.200 - 120)€ = 1.080€\,.$

Α) Ενοίκιο: 30% των 1.080€,

άρα $30\% \cdot 1.080€ = \frac{30}{100} \cdot 1.080€ = \frac{32.400}{100}€ = 324€$

Διατροφή: 32% των 1.080€,

άρα $32\% \cdot 1.080€ = \frac{32}{100} \cdot 1.080€ = \frac{34.560}{100}€ = 345,6€$

Σπουδές: 18% των 1.080€,

άρα $18\% \cdot 1.080€ = \frac{18}{100} \cdot 1.080€ = \frac{19.440}{100}€ = 194,4€$

Αυτ/το: 3% των 1.080€, άρα $3\% \cdot 1.080€ = \frac{3}{100} \cdot 1.080€ = \frac{3.240}{100}€ = 32,4€$

Βιβλία: 7% των 1.080€, άρα $7\% \cdot 1.080€ = \frac{7}{100} \cdot 1.080€ = \frac{7.560}{100}€ = 75,6€$

Διασκέδαση: 10% των 1.080€,

άρα $10\% \cdot 1.080€ = \frac{10}{100} \cdot 1.080€ = \frac{10.800}{100}€ = 108€$

Β) Ενοίκιο: Τα $324€$ αποτελούν τα $\frac{324}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{324}{1.200} = 0,27 = \frac{27}{100} = 27\%$

Διατροφή: Τα $345,6€$ αποτελούν τα $\frac{345,6}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{345,6}{1.200} = 0,288 = \frac{28,8}{100} = 28,8\%$

Σπουδές: Τα $194,4€$ αποτελούν τα $\frac{194,4}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{194,4}{1.200} = 0,162 = \frac{16,2}{100} = 16,2\%$

Αυτ/το: Τα $32,4€$ αποτελούν τα $\frac{32,4}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{32,4}{1.200} = 0,027 = \frac{2,7}{100} = 2,7\%$

Βιβλία: Τα $75,6€$ αποτελούν τα $\frac{75,6}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{75,6}{1.200} = 0,063 = \frac{6,3}{100} = 6,3\%$

Διασκέδαση: Τα $108€$ αποτελούν τα $\frac{108}{1.200}€$ αυτών που εισπράττονται,

άρα $\frac{108}{1.200} = 0,09 = \frac{9}{100} = 9\%$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γραφούν ως ποσοστά τα παρακάτω κλάσματα:

Α. $\frac{45}{100}$ Β. $\frac{32}{50}$ Γ. $\frac{24}{25}$ Δ. $\frac{9}{36}$ Ε. $\frac{45}{20}$ ΣΤ. $\frac{21}{7}$

2. Να γραφούν ως κλάσματα τα ποσοστά:

Α. 33% Β. 76% Γ. 127% Δ. 525‰ Ε. 2,7% ΣΤ. 13,25% Ζ. 1,55‰

3. Α. Να γραφούν ως δεκαδικοί τα ποσοστά: 5% 12,5% 255‰ 0,4%

Β. Να γραφούν ως ποσοστά οι δεκαδικοί: 22,7 , 0,4 , 0,0002 , 1,01

4. Να βρεθούν τα παρακάτω ποσοστά:

Α. το 45% του 32 Β. το 11,5‰ του 20 Γ. το 101% του 63

Δ. το 1,1% του 55 Ε. το 0,9% του 18 ΣΤ. το 504‰ του 2008

Ζ. το 10% του 3,14 Η. το 22% του 0,25 Θ. το 40% του 0,022

5. Να βρεθούν σε cm :

Α. το 22% των 2m Β. το 45‰ των 4m Γ. το 52% των 10cm

Δ. το 0,45% των 200dm Ε. το 11‰ των 0,5km ΣΤ. το 164% των 40cm

6. Να βρείτε το αρχικό ποσό σε € για το οποίο:

Α. Το 45% του ποσού ισούται με 9€

Β. Το 75% του ποσού ισούται με 26,25€

Γ. Το 101% του ποσού ισούται με 50,5€

Δ. Το 225‰ του ποσού ισούται με 27€

7. Να βρείτε τι ποσοστό % είναι:

Α. Το 12 στο 200 Β. Το 8 στο 20 Γ. Το 20 στο 18 Δ. Το 0,1 στο 40

8. Δύο υπάλληλοι μιας εταιρείας αμείβονται με 1.200€ μηνιαίως. Ο πρώτος είναι πολύ καλός στη δουλειά του και παίρνει αύξηση 8% στο μισθό του, ενώ ο δεύτερος λόγω κακής συμπεριφοράς και μειωμένης αποδοτικότητας υφίσταται μείωση ίση με το 5,5% του νέου μισθού του 1ου υπαλλήλου. Να βρεθούν τα ποσά των μισθών των υπαλλήλων.

5.2 Προβλήματα με ποσοστά

ΘΕΩΡΙΑ

ΕΚΠΤΩΣΗ

- Όταν στο ποσό Α αξίας ενός αγαθού γίνεται έκπτωση κατά ένα ποσοστό $\alpha\%$, τότε:

  Το ποσό Ε της έκπτωσης είναι Ε: $\alpha\%\text{A} = \frac{\alpha}{100}\text{A}$.

  Η τελική τιμή Τ του αγαθού θα είναι: $\text{T} = \text{A} - \text{E} = \text{A} - \frac{\alpha}{100} \cdot \text{A}$.

Φ.Π.Α.

- Ο Φ.Π.Α. (φόρος προστιθέμενης αξίας) είναι ένας γενικός φόρος ο οποίος

επιβάλλεται από το κράτος σε όλα τα προϊόντα, παρεχόμενες υπηρεσίες και συναλλαγές. Το ποσοστό του Φ.Π.Α. αποκαλείται και συντελεστής.

- Αν σε ένα αγαθό αρχικής αξίας A επιβληθεί Φ.Π.Α. $\alpha\%$ τότε αντιστοιχεί

σε : $\alpha\%A = \frac{\alpha}{100} \cdot A$

οπότε η τελική τιμή T του αγαθού (με Φ.Π.Α.) είναι

$$T = A + \alpha\%A = A + \frac{\alpha}{100} \cdot A .$$

ΤΟΚΟΣ

Τόκος είναι ένα ποσοστό που προστίθεται σε ένα αρχικό κεφάλαιο K κάθε χρόνο. Το ποσοστό του τόκου ονομάζεται επιτόκιο $\varepsilon\%$.
Ο τόκος T που αντιστοιχεί σε αρχικό κεφάλαιο K με επιτόκιο $\varepsilon\%$ είναι:

$T = \varepsilon\% \cdot K = \frac{\varepsilon \cdot K}{100}$ και το νέο κεφάλαιο K στο τέλος του 1ου χρόνου:

$$K = K + \frac{\varepsilon \cdot K}{100}$$

- Κάθε χρόνο ο τόκος κεφαλαιοποιείται και τοκίζεται με το επιτόκιο ολόκληρο το ποσό του νέου κεφαλαίου.

- Ο τόκος που αντιστοιχεί σε κεφάλαιο K με ετήσιο επιτόκιο $\varepsilon\%$ για χρονικό διάστημα x μηνών, με $x < 12$, είναι: $T = \frac{x}{12} \cdot \frac{\varepsilon \cdot K}{100}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Στη βιτρίνα ενός καταστήματος ένα παντελόνι αξίας $120€$ πωλείται με έκπτωση 25%.

Α. Ποια η τιμή του παντελονιού;
Β. Αν πληρώσουμε για το παντελόνι $80€$, πόση έκπτωση μας έκανε ο καταστηματάρχης;
Γ. Αν η τιμή των $120€$ είναι η τελική μετά την έκπτωση 25% πόση ήταν η αρχική τιμή του παντελονιού;

Για να βρούμε την τελική τιμή ενός ποσού στο οποίο γίνεται έκπτωση $\alpha\%$ *βρίσκουμε αρχικά το ποσό της έκπτωσης και το αφαιρούμε από το αρχικό ποσό.*

Για να βρούμε το ποσοστό της έκπτωσης $\alpha\%$ *ενός ποσού* Α *που αντιστοιχεί σε ποσό* Β*, θεωρούμε ότι* $\text{Β} = \frac{\alpha}{100} \cdot \text{Α}$ *και μετατρέπουμε το αποτέλεσμα σε ποσοστό.*

Για να βρούμε την αρχική τιμή ενός ποσού Α *στο οποίο έχει γίνει έκπτωση* $\alpha\%$ *και το αποτέλεσμα είναι* Β *τότε ισχύει ότι:* $\text{Α} - \text{Α} \cdot \frac{\alpha}{100} = \text{Β}$

Α. Το ποσοστό της έκπτωσης είναι 25%, άρα υπολογίζουμε πρώτα το ποσό έκπτωσης.

$$\text{Έκπτωση} = 25\% \cdot 120€ = \frac{25}{100} \cdot 120€ = \frac{3.000}{100} = 30€.$$

Άρα για το παντελόνι θα πληρώσουμε: $120€ - 30€ = 90€$

Β. Έστω ότι μας έγινε έκπτωση $\alpha\%$ τότε εφόσον πληρώσαμε $80€$ το ποσό της έκπτωσης είναι:

Έκπτωση $=120€-80€=40€$.

Άρα $40€=\alpha\%120€$ ή $40=\frac{\alpha}{100}\cdot 120$ ή $40=\alpha\cdot\frac{120}{100}$ ή $\alpha\cdot 1,2=40$ ή

$=\alpha=\frac{40}{1,2}=\frac{400}{12}=33,33$.

Άρα η έκπτωση ισούται με $33,33\%$.

Γ. Έστω Α η αρχική τιμή του παντελονιού. Τα $120€$ που πληρώσαμε είναι ίσα με τη διαφορά της αρχικής τιμής Α και της έκπτωσης 25% που έγινε στην αρχική τιμή Α δηλαδή:

$$120=A-25\%A=A-\frac{25}{100}A=A\left(1-\frac{25}{100}\right)=A\left(1-0,25\right)=A\cdot 0,75 \quad \text{άρα}$$

$120=A\cdot 0,75$ οπότε $A=120:0,75=12.000:75=160$.

Άρα η αρχική τιμή του παντελονιού ήταν $160€$.

2. Ένα αγαθό με συντελεστή Φ.Π.Α. 19% κοστίζει $1.500€$.

Α. Να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε τελικά για το προϊόν.
Β. Αν στα $1.500€$ συμπεριλαμβάνεται ο Φ.Π.Α. να βρείτε την τιμή του αγαθού χωρίς Φ.Π.Α..

Το ποσό Β *με Φ.Π.Α.* $\alpha\%$ *σε ποσό* Α *προκύπτει από τη σχέση*
$B=A+\alpha\%A$.
Το ποσό Β *χωρίς Φ.Π.Α.* $\alpha\%$ *από ποσό* Α *προκύπτει από τη σχέση*
$B=A-\alpha\%B$ *ή* $B+\alpha\%B=A$.

Α. Το αγαθό έχει συντελεστή 19% άρα ο Φ.Π.Α. είναι:
$\Phi.\Pi.Α.=19\%\cdot 1.500€=285€$, άρα το ποσό με Φ.Π.Α. είναι:
$1.500€+285€=1.785€$.

Β. Αν η αρχική τιμή του αγαθού ήταν Α, ο αντίστοιχος Φ.Π.Α. θα ήταν

$19\%\text{A} = \frac{19}{100}\cdot \text{A} = 0{,}19\cdot \text{A}$ και το τελικό ποσό των 1.500 θα ισούται με $\text{A} + \Phi.\Pi.\text{A.}$ άρα: $1.500 = \text{A} + 0{,}19\text{A} = \text{A}\left(1 + 0{,}19\right) = \text{A}\cdot 1{,}19$

άρα $= \text{A} = 1500 : 1{,}19 \simeq 1260{,}5€$.

3. Καταθέτουμε σε μια τράπεζα κεφάλαιο $50.000€$ με σταθερό επιτόκιο $2{,}5\%$. Να βρείτε τους τόκους:

Α. στον 1ο χρόνο Β. στο 2ο χρόνο Γ. στους 5 μήνες

Αν T_1 *οι τόκοι του* $1^{ου}$ *χρόνου του κεφαλαίου* A *, το ποσό που τοκίζεται το 2ο χρόνο είναι το* $\text{A} + \text{T}_1$ *οπότε προκύπτει τόκος* $\text{T}_2 \neq \text{T}_1$.
Για χρονικό διάστημα μικρότερο του χρόνου (εφόσον τα επιτόκια είναι ετήσια) υπολογίζουμε τον τόκο για ένα χρόνο και τον διαιρούμε με το κλάσμα του έτους που αποτελεί το χρονικό διάστημά μας.

Α. Εφόσον το επιτόκιο είναι $2{,}5\%$ ο τόκος σε κεφάλαιο $50.000€$ είναι:

$$\text{Τόκος } 1 = 50.000\cdot 2{,}5\% = 50.000\cdot \frac{2{,}5}{100} = \frac{125.000}{100} = 1250€$$

Β. Κατά τη διάρκεια του 2ου χρόνου το κεφάλαιο που τοκίζεται είναι τα $50.000€$ συν τους τόκους του 1ου χρόνου, δηλαδή το νέο κεφάλαιο ισούται με $51.250€$, άρα:

$$\text{Τόκος } 2 = 51.250\cdot 2{,}5\% = 51.250\cdot \frac{2{,}5}{100} = \frac{128.125}{100} = 1281{,}25€$$

Γ. Ο τόκος που αντιστοιχεί σε διάστημα 5 μηνών θα είναι τα $\frac{5}{12}$ του ετήσιου τόκου. Άρα:

$$\text{Τόκος } 3 = \frac{5}{12}\cdot 2{,}5\%\cdot 50.000 = \frac{5}{12}\cdot 1250 \simeq 520{,}83€$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ (ΣΕΛ 85)

1. α) Στο τέλος του 1ου μήνα η μετοχή έπεσε κατά 8% άρα κάθε μετοχή κόστιζε λιγότερο κατά: $8\% \cdot 50€ = \frac{8}{100} \cdot 50 = 4€$ δηλαδή η μετοχή κόστιζε: $50€ - 4€ = 46€$.

Στο τέλος του 2ου μήνα η μετοχή ανέβηκε 5% άρα κάθε μετοχή κόστιζε περισσότερο κατά: $5\% \cdot 46€ = \frac{5}{100} \cdot 46 = 2,3€$ δηλαδή η μετοχή κόστιζε:

$46€ + 2,3€ = 48,3€$.

Στο τέλος του 3ου μήνα η μετοχή ανέβηκε κατά 5% άρα κάθε μετοχή κοστίζει περισσότερο κατά: $48,3 \cdot 5\% = 48,3 \cdot \frac{5}{100} = 2,415€$ δηλαδή η μετοχή κόστιζε:

$48,3€ + 2,415€ = 50,715€$.

β) Ο επιχειρηματίας πλήρωσε αρχικά $400 \cdot 50€ = 20.000€$.

Στο τέλος του 3ου μήνα οι 400 μετοχές κόστιζαν $400 \cdot 50,715€ = 20.286€$.

Άρα το κέρδος του επιχειρηματία είναι: $20.286€ - 20.000€ = 286€$.

γ) Τα $286€$ είναι το $\frac{286€}{20.000€} = 0,0143$ του αρχικού ποσού ή το $1,43\%$ του αρχικού ποσού.

2. α) Στο τέλος του 1ου χρόνου ο τόκος είναι:

$$T_1 = 4,5\% \cdot 80.000 = \frac{4,5}{100} \cdot 80.000 = 3.600€.$$

β) Στο τέλος του 2ου χρόνου το κεφάλαιο που τοκίζεται είναι το $80.000€ + 3.600€ = 83.600€$ άρα ο νέος τόκος T_2 είναι:

$$T_2 = 4,5\% \cdot 83.600 = \frac{4,5}{100} \cdot 83.600 = 3.762€ .$$

3. Το 30% των 20.000€ είναι:

$$30\% \cdot 20.000 = \frac{30}{100} \cdot 20.000 = \frac{600.000}{100} = 6.000€ .$$

α) Άρα το αυτοκίνητο κόστισε: $20.000€ - 6.000€ = 14.000€$.

β) Είναι: $\frac{14.000}{25.000} = 0,56 = 56\%$.

γ) Το ποσό της έκπτωσης είναι: $40\% \cdot 25.000 = \frac{40}{100} \cdot 25.000 = 10.000€$

άρα το αυτοκίνητο κοστίζει $25.000€ - 10.000€ = 15.000€$.
Συμφέρει να αγοράσει από τον πρώτο.

4. α) Όχι.

β) Το 50% των $300cm^3$ είναι: $50\% \cdot 300cm^3 = \frac{50}{100} \cdot 300cm^3 = 150cm^3$.

Έπρεπε να προσφέρονται $150cm^3$ δωρεάν στα $300cm^3$.

5. Αν Κ το κεφάλαιο τότε τα 1.000€ αποτελούν το Κ και το 2% του Κ δηλαδή:

$$K + 2\%K = 1.000€ \text{ ή } K + \frac{2}{100}K = 1.000€ \text{ ή } K + 0,02K = 1.000€ \text{ ή}$$

$$K(1 + 0,02) = 1.000€ \text{ ή } 1,02K = 1.000€ \text{ ή } K = \frac{1.000}{1,02}€ = 980,39€ .$$

6. Η κάθε μονάδα κοστίζει $0,07€$ άρα οι 1.500 μονάδες κοστίζουν

$1.500 \cdot 0,07 = 105€$.
Το σύνολο του λογαριασμού είναι: $105€ + 22€ = 127€$.

Ο Φ.Π.Α. στα $127€$ είναι: $127€ \cdot 19\% = 127 \cdot \frac{19}{100} = 24,13€$.

Το τελικό πληρωτέο ποσό είναι: $127€ + 24,13€ = 151,13€$.

7. Μετρητοίς πλήρωσε το $40\% \cdot 30.000 = \frac{40}{100} \cdot 30.000 = 12.000€$.

α) Σε δόσεις θα πληρώσει $30.000€ - 12.000€ = 18.000€$ και κάθε δόση είναι

$\frac{18.000}{4} = 4.500€$.

Ο τόκος κάθε μήνα ήταν το 1% του αντίστοιχου υπολοίπου. Άρα :

Τόκος 1ης δόσης $= 1\% \cdot 18.000 = \frac{1}{100} \cdot 18.000 = 180€$.

Το νέο υπόλοιπο είναι $18.000 - 4.500€ = 13.500€$.

Τόκος 2ης δόσης $= 1\% \cdot 13.500 = \frac{1}{100} \cdot 13.500 = 135€$.

Το νέο υπόλοιπο είναι $13.500 - 4.500€ = 9.600€$.

Τόκος 3ης δόσης $= 1\% \cdot 9.000 = \frac{1}{100} \cdot 9.000 = 90€$.

Το νέο υπόλοιπο είναι $9.500 - 4.500€ = 4.500€$.

Τόκος 4ης δόσης $= 1\% \cdot 4.500 = \frac{1}{100} \cdot 4.500 = 45€$.

Το νέο υπόλοιπο είναι $4.500 - 4.500€ = 0$.
Οι τόκοι συνολικά είναι $180 + 135 + 90 + 45 = 450€$.

β) Το ποσοστό της επιβάρυνσης λόγω των τόκων είναι $\frac{450}{30.000} = 0,015 = 1,5\%$.

8. Αν A καθαρά έσοδα στην εφορία αποδίδει τον Φ.Π.Α. δηλαδή $19\%A$. Επομένως τα $8.330€$ που είναι τα συνολικά έσοδα είναι:

$$8.330€ = A + 19\%A = A + \frac{19}{100}A = A + 0,19A = (1+0,19)A = 1,19A \text{ άρα}$$

$$A = \frac{8.330}{1,19} = 7.000€.$$

Ο Φ.Π.Α. είναι: $7.000 \cdot \frac{19}{100} = 1.330€$ (ή $8.330 - 7.000 = 1.330€$)

9. Ο Φ.Π.Α. είναι: $19\% \cdot 1.200 = \frac{19}{100} \cdot 1.200 = \frac{19 \cdot 1.200}{100} = 228€$

α) Το 50% των $1.200€$ είναι: $50\% \cdot 1.200 = \frac{50}{100} \cdot 1.200 = \frac{50 \cdot 1.200}{100} = 600€$.

Η προκαταβολή είναι $50\% \cdot 1.200 + ΦΠΑ = 600€ + 228€ = 828€$.

β) Το ποσό που πλήρωσε σε 6 μηνιαίες δόσεις είναι: $1.200€ - 600€ = 600€$ άρα η δόση είναι $600 : 6 = 100€$. Στη δόση προστίθεται ο τόκος (3% επί του εκάστοτε υπολοίπου) άρα

1η δόση: τόκος $3\% \cdot 600€ = \frac{3}{100} \cdot 600€ = 18€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 18 = 118€$

2η δόση: τόκος $3\% \cdot 500€ = \frac{3}{100} \cdot 500€ = 15€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 15 = 115€$

3η δόση: τόκος $3\% \cdot 400€ = \frac{3}{100} \cdot 400€ = 12€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 12 = 112€$

4η δόση: τόκος $3\% \cdot 300€ = \frac{3}{100} \cdot 300€ = 9€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 9 = 109€$

5η δόση: τόκος $3\% \cdot 200€ = \frac{3}{100} \cdot 200€ = 6€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 6 = 106€$

6η δόση: τόκος $3\% \cdot 100€ = \frac{3}{100} \cdot 100€ = 3€$, $\Delta\text{όση} = 100 + 3 = 103€$

Το σύνολο των δόσεων είναι $118 + 115 + 112 + 109 + 106 + 103 = 663€$.
Το ψυγείο κόστισε συνολικά $828 + 663 = 1.491€$.

10. α) Φ.Π.Α. $= 19\%$ άρα: $19\% \cdot 350 = \frac{19}{100} \cdot 350 = 66,5€$

β) Το ραδιοκασετόφωνο σε 16 δόσεις των 30€ κοστίζει: $30 \cdot 16 = 480€$.
Συνολικά το κόστος είναι $480€ + Φ.Π.Α. = 480 + 66,5 = 546,5€$.

γ) Μετρητοίς κοστίζει $350€ + 66,5 = 416,5€$.
Τα $416,5€$ με ετήσιο επιτόκιο 10% σε ένα χρόνο θα είναι:

$$\overbrace{416,5}^{\text{κεφαλαιο}} + \overbrace{416,5 \cdot 10\%}^{\text{τοκος}} = 416,5 + 416,5 \cdot \frac{10}{100} = 416,5 + 41,65 = 458,15€.$$

Το ποσό που κερδίζουμε πληρώνοντας μετρητοίς είναι $546,5 - 416,5 = 130€$.
Το ποσό είναι μεγαλύτερο από τον τόκο της τράπεζας σε ένα χρόνο, άρα συμφέρει να πληρώσουμε τοις μετρητοίς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Σε ένα εκλογικό τμήμα κατά την καταμέτρηση, σε σύνολο 1.200 ψηφοφόρων το πρώτο κόμμα έλαβε το 45% των ψήφων. Στις εκλογές συμμετείχαν 3 κόμματα.

α) Να βρείτε τον αριθμό των ψηφοφόρων του 1ου κόμματος στο εκλογικό τμήμα.
β) Αν το 2ο κόμμα έλαβε 444 ψήφους τι ποσοστό επί τοις εκατό των ψήφων πήρε στο εκλογικό τμήμα.
γ) Να βρείτε το ποσοστό και τους ψήφους του 3ου κόμματος στο εκλογικό τμήμα.

2. Το ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων μιας τράπεζας είναι 3%. Να βρείτε:
α) Πόσο τόκο θα πάρουμε για αρχικό κεφάλαιο $15.000€$ σε 2 χρόνια.
β) Τι κεφάλαιο αποδίδει στον πρώτο χρόνο τόκο $630€$.

γ) Πόσο τόκο θα πάρουμε για αρχικό κεφάλαιο 20.000€ σε 18 μήνες.

3. Ο Κώστας αγόρασε μια τηλεόραση πληρώνοντας το 40% προκαταβολή και το υπόλοιπο σε 5 άτοκες μηνιαίες δόσεις. Αν ο Κώστας έδωσε για προκαταβολή 600€ να βρείτε:

α) Πόσο κοστίζει η τηλεόραση.
β) Το ποσό της κάθε δόσης.
γ) Αν το ποσό των 600€ περιλαμβάνει το 41% της αξίας της τηλεόρασης και το συνολικό Φ.Π.Α. 19% , πόσο κοστίζει η τηλεόραση;

4. Η Μαρία καταθέτει τα $\frac{2}{3}$ ενός κεφαλαίου 18.000€ σε μια τράπεζα Α και τα υπόλοιπα σε μια τράπεζα Β. Αν το επιτόκιο της Α είναι 3% πόσο θα πρέπει να είναι το επιτόκιο της Β ώστε σε ένα χρόνο η Μαρία να πάρει το ίδιο ποσό από τους τόκους;

5. Ένα κουτάκι αναψυκτικού 330g περιέχει 20% φυσικό χυμό φρούτου και 11g ζάχαρη, ενώ το υπόλοιπο είναι νερό. Να βρείτε:

α) Πόσα g φυσικό χυμό φρούτου περιέχονται στο κουτάκι.
β) Το ποσοστό % της ζάχαρης στο αναψυκτικό.
γ) Τα g και το ποσοστό του νερού στο αναψυκτικό.

6. Ο Γιώργος αγόρασε οικιακό εξοπλισμό αξίας 14.000€. Από αυτά, το 55% + Φ.Π.Α. τα πλήρωσε τοις μετρητοίς και τα υπόλοιπα σε 6 μηνιαίες δόσεις με μηνιαίο επιτόκιο 2%.

α) Τι ποσό πλήρωσε αρχικά ο Γιώργος;
β) Τι ποσό πλήρωσε τελικά ο Γιώργος;

7. Ένας ιδιοκτήτης εστιατορίου στην Ελλάδα πληρώνει 19%Φ.Π.Α. και 2% δημοτικό φόρο, ενώ ένας συνάδελφός του σε άλλη χώρα πληρώνει 14%Φ.Π.Α. και 7% δημοτικό φόρο. Ποιός από τους 2 καταστηματάρχες φορολογείται λιγότερο;

8. Το όριο αφορολόγητου εισοδήματος είναι τα 12.000€. Από αυτό το ποσό και μέχρι 15.000€ ο φόρος είναι 15%, ενώ από τις 15.000€ και μέχρι τις 23.000€ ο φόρος γίνεται 30%. Να υπολογίσετε το φόρο των εισοδημάτων:
α) 14.000€
β) 17.000€
γ) Αν για εισοδήματα μεγαλύτερα των 23.000€ ο φόρος γίνεται 40% να υπολογίσετε το φόρο του εισοδήματος 40.000€.

9. α) Να βρείτε το ποσό του τόκου που αποδίδει σε 2 χρόνια μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων 4% σε κεφάλαιο 25.000€.

β) Αν το επιτόκιο αυξηθεί κατά 10% το δεύτερο χρόνο, να βρείτε το νέο ποσό του τόκου σε 2 χρόνια.

Επαναληπτικά θέματα 5ου κεφαλαίου

Σχολ. Βιβ. (ΣΕΛ 84)

Α. <u>Ερωτήσεις Σωστό, Λάθος</u>

1. Σ: $30\%\text{του } x = \frac{30}{100}\cdot x = \frac{3}{10}x$, $90\%\text{του } \frac{x}{3} = \frac{90}{100}\cdot\frac{x}{3} = \frac{90x}{300} = \frac{3x}{10}$

2. Σ: Αν A η τιμή του βιβλίου η αύξηση είναι $5\%A = \frac{5A}{100} = 0,05A$ και το βιβλίο κοστίζει $A + A0,05 = (1+0,05)A = 1,05A$.

Νέα αύξηση: $10\%(1,05)\text{A} = 0,105\text{A}$ και νέα τιμή $1,05\text{A} + 0,105\text{A} = 1,155\text{A}$.

Συνολική αύξηση: $1,155\text{A} - \text{A} = 0,155\text{A}$ ποσοστό: $\frac{0,155\text{A}}{\text{A}} = 0,155 = 15,5\%$.

3. Σ

4. Σ

5. Σ

6. Λ: Το αρχικό κόστος είναι $100€ + 200€ = 300€$ και η έκπτωση:

$$\frac{200}{300} \simeq 0,667 = 66,7\%$$

7. Σ

8. Λ: Έμεινε το $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = 0,167 = 16,7\%$

9. Λ: Απουσίαζαν τα $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$ των μαθητών δηλαδή $0,143$ ή $14,3\%$

10. Λ: Το 30% της ώρας είναι $30\% \cdot 60\,\text{min} = \frac{30}{100} \cdot 60\,\text{min} = 18\,\text{min}$

11. Σ

12. Λ: Αύξηση $\frac{100}{400} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Β. <u>Αντιστοίχηση</u>

<u>ΠΑΝΤΕΛΟΝΙ</u>: $120€ - 84€ = 36€$ έκπτωση: $\frac{36}{120} = 0,3 = 30\%$

<u>ΦΟΥΣΤΕΣ</u>: $80€ - 48€ = 32€$ έκπτωση: $\frac{32}{80} = 0,4 = 40\%$

ΦΟΡΕΜΑΤΑ: $180€ - 153€ = 27€$ έκπτωση: $\frac{27}{180} = 0,15 = 15\%$

ΜΠΛΟΥΖΕΣ: $40€ - 32€ = 8€$ έκπτωση: $\frac{8}{40} = 0,2 = 20\%$

ΦΟΡΜΕΣ: $50€ - 45€ = 5€$ έκπτωση: $\frac{5}{50} = 0,1 = 10\%$

Κριτήριο αξιολόγησης 5ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1Ο

Να γραφούν με μορφή κλασμάτων και δεκαδικών τα ποσοστά:
α) 33% β) 45% γ) 72% δ) 112%

ΘΕΜΑ 2Ο

α) Να βρείτε τον Φ.Π.Α. που αντιστοιχεί σε προϊόν αξίας $425€$.

β) Να βρείτε την αξία ενός προϊόντος που μαζί με τον Φ.Π.Α. κοστίζει $714€$.

ΘΕΜΑ 3Ο

Ένα κατάστημα ρουχων κάνει σε όλα τα είδη του έκπτωση 45%. Να βρείτε:

α) Πόσο θα πληρώσουμε για ένα παντελόνι αρχικής τιμής $120€$;

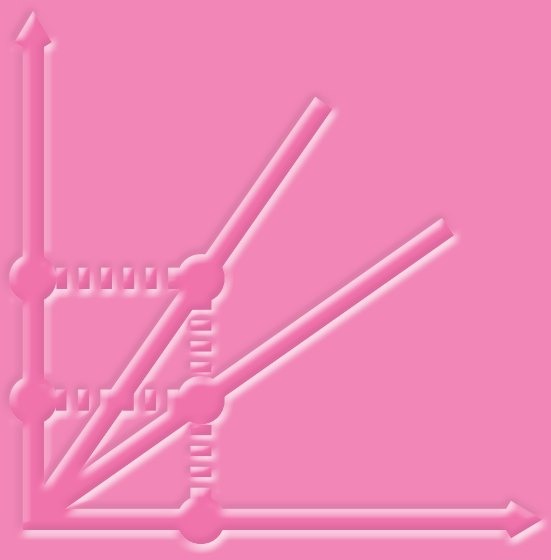
β) Ποια ήταν η αρχική τιμή μιας μπλούζας που την πληρώνουμε με την έκπτωση 38,5€ .

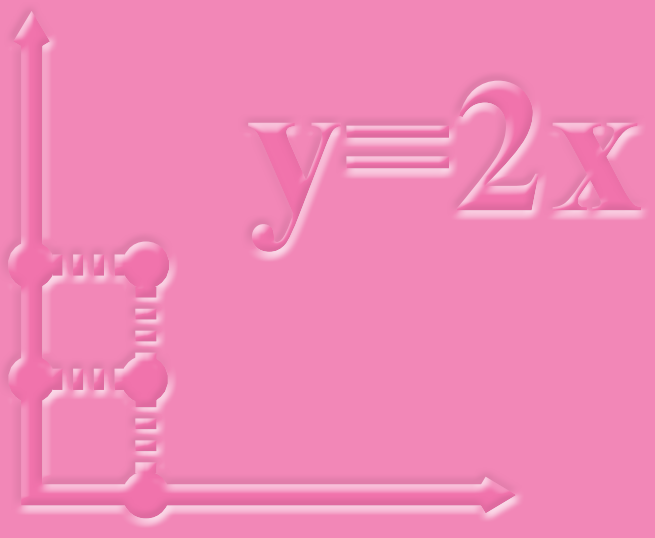
ΘΕΜΑ 4ο

Ο Κώστας αγόρασε αυτοκίνητο αξίας 15.000€ και πλήρωσε το 60% της αξίας του ως προκαταβολή, ενώ το υπόλοιπο θα το εξοφλήσει σε 3 μηνιαίες δόσεις με μηνιαίο επιτόκιο 2%. Ποιό το ποσό που θα πληρώσει τελικά ο Κώστας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ



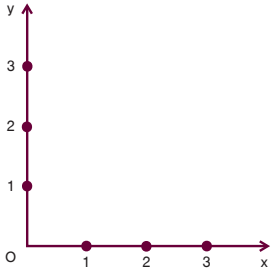


6.1 • Παράσταση σημείων στο επίπεδο

ΘΕΩΡΙΑ

Ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων λέμε:

- δύο κάθετους ημιάξονες Ox, Oy
- με κοινή αρχή το σημείο O
- που έχει οριστεί πάνω τους η ίδια μονάδα μέτρησης.

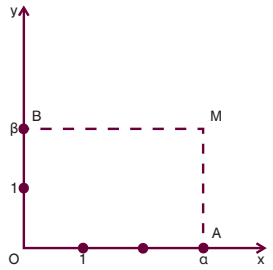


Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων και ένα σημείο Μ του επιπέδου.

Από το σημείο Μ φέρνουμε κάθετες στους ημιάξονες Ox, Oy που τους τέμνουν στα σημεία Α, Β, αντίστοιχα.

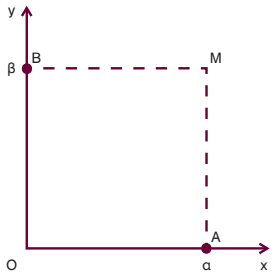
Αν τα σημεία Α, Β αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς α, β, τότε:

- Ο αριθμός α λέγεται τετμημένη του Μ.
- Ο αριθμός β λέγεται τεταγμένη του Μ.
- Οι αριθμοί του διατεταγμένου ζεύγους (α, β) λέγονται συντεταγμένες του σημείου Μ και γράφουμε Μ(α, β).
- Ο ημιάξονας Ox λέγεται ημιάξονας των τετμημένων.
- Ο ημιάξονας Oy λέγεται ημιάξονας των τεταγμένων.



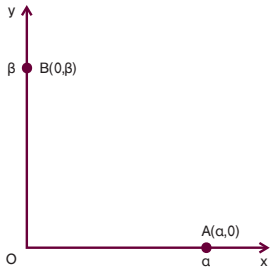
Αντίστροφα

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων και τα σημεία Α, Β, που αντιπροσωπεύουν τους αριθμούς α, β, αντίστοιχα.
Οι κάθετες από τα σημεία Α, Β στους ημιάξονες Ox, Oy, αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Μ, που έχει συντεταγμένες (α, β).
Οπότε, κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) αντιστοιχεί σ' ένα σημείο Μ του επιπέδου.

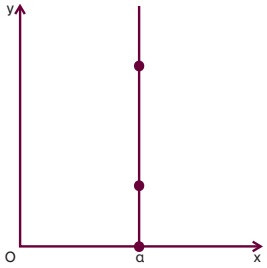


Παρατηρήσεις

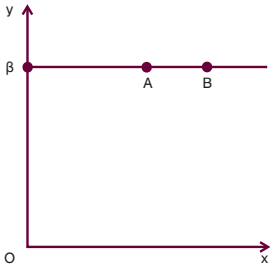
Αν από το σημείο Α, που βρίσκεται στον ημιάξονα Ox, φέρουμε κάθετη στον ημιάξονα Oy, τον τέμνει στο σημείο Ο, που αντιπροσωπεύει τον αριθμό 0 στον Oy. Άρα, η τεταγμένη του Α είναι 0.
Ομοίως, η τετμημένη του Β, που βρίσκεται στον ημιάξονα Oy είναι 0.



Αν τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τετμημένη α, τότε βρίσκονται σε ημιευθεία παράλληλη στον ημιάξονα Oy.

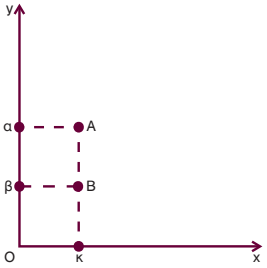


Αν τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τεταγμένη β, τότε βρίσκονται σε ημιευθεία παράλληλη στον ημιάξονα Ox.

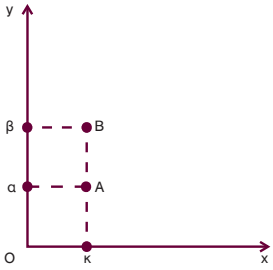


Αν έχουμε δύο σημεία Α, Β με την ίδια τετμημένη, τότε:

- το Α είναι πάνω από το Β, όταν η τεταγμένη του Α είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του Β.



- το Α είναι κάτω από το Β, όταν η τεταγμένη του Α είναι μικρότερη από την τεταγμένη του Β



Δηλαδή:

- το Α(κ, α) είναι πάνω από το Β(κ, β), όταν $\alpha > \beta$
- το Α(κ, α) είναι κάτω από το Β(κ, β), όταν $\alpha < \beta$

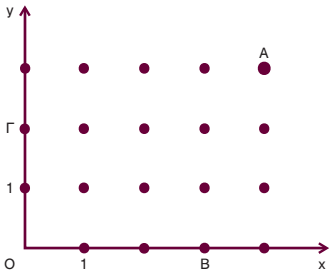
ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

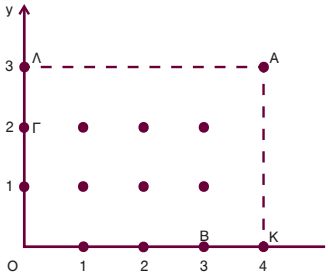
1. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ

Λύση

Αρχικά αριθμούμε τους ημιάξονες Ox και Oy.

- Από το σημείο Α φέρνουμε κάθετες ευθείες στους ημιάξονες Ox και Oy, που τους τέμνουν αντίστοιχα στα σημεία Κ και Λ, τα οποία αντιπροσωπεύουν στους ημιάξονες τους αριθμούς 4 και 3. Άρα, οι συντεταγμένες του σημείου Α είναι το ζεύγος (4, 3), δηλαδή Α(4, 3).
- Επειδή το σημείο Β βρίσκεται στον ημιάξονα Ox, έχει τεταγμένη 0. Άρα, Β(3, 0).
- Επειδή το σημείο Γ βρίσκεται στον ημιάξονα Oy, έχει τετμημένη 0. Άρα, Γ(0, 2).

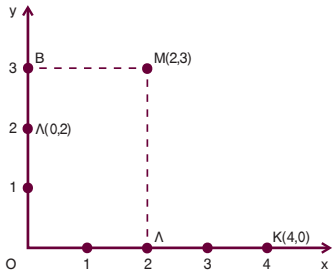




2. Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων και να τοποθετήσετε τα σημεία Μ(2, 3), Κ(4, 0), Λ(0, 2).

Λύση

- Αρχικά αριθμούμε τους ημιάξονες Ox και Oy μέχρι και τη μεγαλύτερη τετμημένη και τεταγμένη των σημείων Μ, Κ, Λ, αντίστοιχα.
- Για να βρούμε τη θέση του σημείου Μ(2, 3), βρίσκουμε πρώτα το σημείο Α στον ημιάξονα Ox, που αντιστοιχεί στον αριθμό 2 και το σημείο Β στον ημιάξονα Oy, που αντιστοιχεί στον αριθμό 3.
  Στη συνέχεια φέρνουμε από τα σημεία Α, Β κάθετες ευθείες στους ημιάξονες Ox, Oy αντίστοιχα, που τέμνονται σ' ένα σημείο. Το σημείο αυτό είναι το Μ. Επειδή το σημείο Κ(4, 0) έχει τεταγμένη 0, βρίσκεται στον ημιάξονα Ox, στο σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 4. Αφού το σημείο Λ(0, 2) έχει τετμημένη 0, βρίσκεται στον ημιάξονα Oy, στο σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 2.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα 2η

Ο πίνακας μας δείχνει τη θερμοκρασία ενός ασθενούς σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Π.χ. στις 7:30 ο ασθενής είχε 37.2, στις 9:00 είχε 37.7, στις 12:30 είχε 39.2 κ.λπ.

Έτσι διακρίνουμε στον πίνακα 12 ζεύγη τιμών, δηλαδή 12 ζεύγη χρονικών στιγμών – θερμοκρασιών. Τα ζεύγη αυτά μπορούμε να τα θεωρήσουμε ως σημεία και να τα τοποθετήσουμε σε κατάλληλο διάγραμμα.

Τοποθετούμε τα σημεία που προκύπτουν από τον πίνακα σε διάγραμμα και στη συνέχεια τα ενώνουμε για να έχουμε μια εκτίμηση της θερμοκρασίας του ασθενούς τις ώρες που δεν τη μετράμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Τοποθετούμε τα σημεία και παρατηρούμε ότι:

- Το σημείο Ι βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα Οx.
- Το σημείο Κ βρίσκεται πάνω στον ημιάξονα Οy.

Γενικά, θα ισχύει ότι:

- Τα σημεία που η τεταγμένη τους είναι 0, βρίσκονται πάνω στον ημιάξονα Οx.
- Τα σημεία που η τετμημένη τους είναι 0, βρίσκονται πάνω στον ημιάξονα Οy.

2. Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ΑΓ έχουν τετμημένη το 2 και όλα τα σημεία που βρίσκονται πάνω στο ΒΔ έχουν τεταγμένη το 2. Το σημείο Κ βρίσκεται στην τομή των δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Επομένως, το Κ έχει τετμημένη 2 και τεταγμένη 2, δηλαδή οι συντεταγμένες του είναι (2, 2).

3. Ενδεικτικά επιλέγουμε τα διατεταγμένα ζεύγη: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5). Αν τα τοποθετήσουμε πάνω σε ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων και τα ενώσουμε, παρατηρούμε ότι βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία, η οποία ξεκινά από την αρχή Ο. Η ημιευθεία αυτή είναι η διχοτόμος της γωνίας των ημιαξόνων Οx και Οy.

4. α) Ε5

β) Ο αριθμός αντιπροσωπεύει τις δικαιολογημένες απουσίες του μαθητή Αντωνίου για το 2ο τρίμηνο.

γ) D12 → Πρέπει να συμπληρωθεί το σύνολο των δικαιολογημένων απουσιών του μαθητή. Συμπληρώνουμε το 6.

Ε13 → Πρέπει να συμπληρωθεί το σύνολο των αδικαιολόγητων απουσιών του

μαθητή. Συμπληρώνουμε το 27.

Δραστηριότητα για το σπίτι

α) Μικρότερο φυσιολογικό βάρος: 7,5 Kg.
Μεγαλύτερο φυσιολογικό βάρος: 12,5 Kg.
β) Υπέρβαρο αν ζυγίζει περισσότερο από (περίπου) 13,25 Kg. Λιποβαρές αν ζυγίζει λιγότερο από 8,25 Kg.
γ) Ναι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
α. Έστω το σημείο Μ(α, β)
i. ο αριθμός β λέγεται _____ του Μ.
ii. Ο αριθμός α λέγεται _____ του Μ.
iii. Το ζεύγος (α, β) λέγεται _____ του Μ.
β. Ο ημιάξονας Οx λέγεται ημιάξονας των _____.
γ. Ο ημιάξονας Οy λέγεται ημιάξονας των _____.
δ. Αν ένα σημείο βρίσκεται στον ημιάξονα Οy, έχει _____ 0.
ε. Το σημείο Μ(α, 0) βρίσκεται στον ημιάξονα _____.
στ. Η αρχή των αξόνων Ο έχει συντεταγμένες το ζεύγος (__,__).

2. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε του διπλανού σχήματος.

3. Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα ημιαξόνων με μονάδα μέτρησης 0,5 cm και να τοποθετήσετε τα σημεία: Α(3, 2), Β(2, 3), Γ(4, 0), Δ(0,4).

6.2

- Λόγος Δύο Αριθμών
- Αναλογία

ΘΕΩΡΙΑ

Λόγος δύο ομοειδών μεγεθών, που εκφράζονται με την ίδια μονάδα μέτρησης είναι το πηλίκο των μέτρων τους.

Ο λόγος δύο αριθμών α, β είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\kappa$.

Αναλογία ονομάζεται η ισότητα δύο λόγων.

Δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$

Οι αριθμοί α, β είναι ανάλογοι των γ, δ, όταν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

Ιδιότητες Αναλογιών

- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε αδ = βγ
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Ισχύουν

- Αν αδ = βγ, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ή $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$
- Αν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$, τότε α = β
- Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\gamma}$ και $\alpha\neq 0$, τότε β = γ

Δύο σχήματα λέγονται **όμοια,** όταν το ένα αποτελεί **σμίκρυνση** ή **μεγέθυνση** του άλλου ή είναι ίσα.

Αν οι λόγοι των αντιστοίχων πλευρών δύο παραλληλογράμμων είναι ίσοι, τότε αυτοί θα είναι ίσοι και με το λόγο των παραμέτρων τους.

Κλίμακα ονομάζεται ο **λόγος της απόστασης** δύο σημείων μιας εικόνας ενός αντικειμένου προς την **πραγματική απόσταση** των δύο αντίστοιχων σημείων του αντικειμένου.

Αν α η απόσταση δύο σημείων Α, Β στο σχέδιο ή στο χάρτη και β η πραγματική τους απόσταση, τότε: κλίμακα = $\frac{\alpha}{\beta}$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σε μια φωτογραφία το ύψος μιας γυναίκας είναι 8 cm, ενώ το πραγματικό της ύψος είναι 1,92 m. Πόσο έχουν σμικρυνθεί όλα τα αντικείμενα της φωτογραφίας;

Λύση
Είναι 1, 92 m = 192 cm

Έχουμε $\frac{8}{192}=\frac{1}{24}$

Οπότε, η κλίμακα είναι 1:24.
Άρα, όλα τα αντικείμενα έχουν σμικρυνθεί 24 φορές.

2. Σε χάρτη κλίμακας 1:500.000 η απόσταση δύο πόλεων Α και Β είναι 24 cm. Ποια είναι η πραγματική τους απόσταση;

Λύση
Είναι 24 cm = 0,24 m.
Έστω x η πραγματική τους απόσταση.

Έχουμε $\frac{1}{500.000}=\frac{0,24}{x}$ ή x = 0, 24 · 500.000

x = 120.000 m ή x = 120 Km
Άρα, η πραγματική τους απόσταση είναι 120 Km.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα 1η

Πλευρά τετραγώνου	1,5 cm	4 cm	4,5 cm
Περίμετρος τετραγώνου	6 cm	16 cm	18 cm

Για να υπολογίσουμε την περίμετρο του κάθε τετραγώνου προσθέτουμε το μήκος των πλευρών του.

1ο τετράγωνο → $\frac{1,5}{6}=\frac{1,5\cdot 10}{6\cdot 10}=\frac{15}{60}=\frac{15:15}{60:15}=\frac{1}{4}$

2ο τετράγωνο → $\frac{4}{16}=\frac{4:4}{16:4}=\frac{1}{4}$

3ο τετράγωνο → $\frac{4,5}{18}=\frac{4,5\cdot 10}{18\cdot 10}=\frac{45}{180}=\frac{45:45}{180:45}=\frac{1}{4}$

Παρατηρούμε ότι για τα τρία τετράγωνα, το κλάσμα πλευρά προς περίμετρο είναι το ίδιο. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι τα τετράγωνα είναι όμοια μεταξύ τους.

Δραστηριότητα 2η

Θα βρούμε το λόγο του ύψους του παιδιού στη φωτογραφία προς το ύψος του παιδιού στην πραγματικότητα.

Είναι $\frac{2}{165}=\frac{2:2}{165:2}=\frac{1}{82,5}$, δηλ. το ύψος του παιδιού έχει σμικρυνθεί στη φωτογραφία 82,5 φορές.

Δραστηριότητα 3η

Έστω x, y και 12 cm οι διαστάσεις του τριγώνου που θα σχεδιάσουμε. Η πλευρά των 8 cm αντιστοιχεί στα 12 cm, η πλευρά των 6 cm αντιστοιχεί στα x cm και η πλευρά των 10 cm αντιστοιχεί στα y cm.

Για κάθε πλευρά του τριγώνου υπολογίζουμε το κλάσμα:

πλευρά μεγεθυσμένου τριγώνου / πλευρά αρχικού τριγώνου **(κλάσμα: να γίνει σε μορφή κλάσματος)**

Είναι $\frac{12}{8}=\frac{12:4}{8:4}=\frac{3}{2},\frac{x}{6},\frac{y}{10}$.

Τα κλάσματα αυτά πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους, αφού το αρχικό τρίγωνο και το τρίγωνο με μεγέθυνση είναι όμοια.

Άρα πρέπει $\frac{3}{2}=\frac{x}{6}$ και $\frac{3}{2}=\frac{y}{10}$.

Για να βρούμε τον x:

Είναι $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{9}{6}$. Επομένως η $\frac{3}{2}=\frac{x}{6}$ γίνεται $\frac{9}{6}=\frac{x}{6}$.

Τα κλάσματα $\frac{9}{6}=\frac{x}{6}$ έχουν τους ίδιους παρονομαστές, άρα πρέπει να έχουν και τους ίδιους αριθμητές. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι x = 9 cm.

Για να βρούμε τον y:

Είναι $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{15}{10}$.

Επομένως, η $\frac{3}{2}=\frac{y}{10}$ γίνεται $\frac{15}{10}=\frac{y}{10}$.

Τα κλάσματα $\frac{15}{10},\frac{y}{10}$ έχουν τους ίδιους παρονομαστές, άρα πρέπει να έχουν και τους ίδιους αριθμητές. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι y = 15 cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Κλίμακα	1:2	1:50	
Μήκος σε σχέδιο	5 cm		8 cm
Πραγματικό μήκος		40 m	20 m

2. Σε χάρτη κλίμακας 1:700.000 η απόσταση δύο πόλεων είναι 20 cm. Ποια είναι η πραγματική τους απόσταση;

3. Οι διαστάσεις ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου σε ένα σχέδιο με κλίμακα 1:200 είναι 15 cm και 12 cm. Ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις του οικοπέδου;

6.3

- Ανάλογα Ποσά
- Ιδιότητες Ανάλογων Ποσών

ΘΕΩΡΙΑ

Ανάλογα Ποσά

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα, αν μεταβάλλονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όταν οι τιμές

του ενός πολλαπλασιάζονται με έναν αριθμό, τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου να πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό.

Ιδιότητες Αναλόγων Ποσών

Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα, όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο $\frac{y}{x}=\alpha$.

Το πηλίκο α λέγεται συντελεστής αναλογίας.
Τα ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση y = α · x, όπου α ο συντελεστής αναλογίας.

Όταν το ποσό y είναι ποσοστό του ποσού x, τα δύο ποσά συνδέονται με τη σχέση $y=\frac{\alpha}{100}\cdot x$ και είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας το $\frac{\alpha}{100}$ ή α%.

Δηλαδή, δύο ποσά που συνδέονται με ποσοστιαία σχέση είναι ποσά ανάλογα.

Η σχέση y = α · x εκφράζει μια αλληλεπίδραση των ποσών x και y.
Συγκεκριμένα, ο διπλασιασμός, ο τριπλασιασμός, κ.ο.κ. του ενός ποσού επιφέρει διπλασιασμό, τριπλασιασμό, κ.ο.κ. του άλλου ποσού.

Τα ποσά α, β είναι ανάλογα των γ, δ, όταν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Στο διπλανό πίνακα τα ποσά x και y είναι ανάλογα. Να υπολογίσετε το συντελεστή αναλογίας και να συμπληρώσετε τον πίνακα.

x	**3**		**5**
y		**10**	**8**

Λύση
Επειδή τα ποσά x και y είναι ανάλογα, συνδέονται με τη σχέση y = α · x, όπου α ο συντελεστής αναλογίας.

Είναι $\alpha=\frac{8}{5}$, οπότε $y=\frac{8}{5}x$

Για x = 3, είναι $y=\frac{8}{5}\cdot 3=\frac{24}{5}$

Για y = 10, είναι $10=\frac{8}{5}\cdot x$ ή $x=10:\frac{8}{5}$ ή $x=10\cdot\frac{5}{8}$ ή $x=\frac{50}{8}$ ή $x=\frac{25}{4}$

Οπότε, ο πίνακας γίνεται:

x	3	$x=\frac{25}{4}$	5
y	$x=\frac{24}{5}$	10	8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα 1η

Αν εξετάσουμε τους λόγους $\frac{58}{1,60},\frac{71}{1,65},\frac{56}{1,62},\frac{68}{1,72}$ παρατηρούμε ότι δεν είναι ίσοι μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι το βάρος του ανθρώπου δεν είναι ανάλογο του ύψους του. Επίσης από τον πίνακα παρατηρούμε ότι το άτομο που ζυγίζει 71 κιλά είναι πιο ψηλό από το άτομο που ζυγίζει 58 κιλά, ενώ είναι πιο κοντό από το άτομο που ζυγίζει 68 κιλά. Άρα, το βάρος και το ύψος δεν μεταβάλλονται ανάλογα.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Λ, στ) Λ, ζ) Λ, η) Λ

2. α) ανάλογα, β) τετραπλασιάζεται, γ) y = αx

3. α) Υπολογίζουμε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών x, y που προκύπτουν από τον πίνακα. Είναι: $\frac{3}{8},\frac{5}{10},\frac{7}{12}$. Παρατηρούμε ότι για τους λόγους $\frac{3}{8},\frac{5}{10}$ είναι $3\cdot 10=30$ και $8\cdot 5=40$. Δηλ. οι λόγοι $\frac{3}{8},\frac{5}{10}$ δεν είναι ίσοι. Άρα, τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

β) Υπολογίζουμε τους λόγους των αντίστοιχων τιμών x, y που προκύπτουν από τον πίνακα:

$$\frac{3}{0,9}=\frac{3\cdot 10}{0,9\cdot 10}=\frac{30}{9}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{4}{1,2}=\frac{4\cdot 10}{1,2\cdot 10}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{6}{1,8}=\frac{6\cdot 10}{1,8\cdot 10}=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{11}{3,3}=\frac{11\cdot 10}{3,3\cdot 10}=\frac{110}{33}=\frac{10}{3}$$

Άρα οι λόγοι είναι ίσοι μεταξύ τους και τα ποσά είναι ανάλογα.

4. Ο συντελεστής αναλογίας είναι $y=\frac{201}{100}x$.
Για x = 0 → y = 0
Για x = 1 → y = 2,01
Για y = 2 → x = 0,995 (περίπου)
Για y = 0,125 → x = 0,062 (περίπου)
Για x = 3,7 → y = 7,437
Για x = 0,61 → y = 1,2261
Για y = 0,55 → x = 0,274 (περίπου)

5. Ο συντελεστής αναλογίας είναι $\frac{7}{4}$. Πολλαπλασιάζουμε τον συντελεστή αναλογίας με την ποσότητα κάθε υλικού που δίνεται από τη συνταγή. Έτσι βρίσκουμε πως θα γίνει η συνταγή αν θέλουμε να φτιάξουμε μεγαλύτερη δόση:

$\frac{7}{4}\cdot 4=7$ αυγά

$\frac{7}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ πακέτα φαρίνα του μισού κιλού

$\frac{7}{4}\cdot 250=437,5$ γρ. βούτυρο

$\frac{7}{4}\cdot 2=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$ φλιτζάνια ζάχαρη

$\frac{7}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ βανίλια

$\frac{7}{4}\cdot 1=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$ φλιτζάνια γάλα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Τα ανάλογα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση _____ όπου ____ ο συντελεστής αναλογίας.

β. Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα όταν οι αντίστοιχες τιμές τους δίνουν πάντα _____.

γ. Αν τριπλασιάσουμε την τιμή ενός από δύο ανάλογα ποσά, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού _____.

2. Να εξετάσετε αν τα ποσά που δίνονται στον παρακάτω πίνακα είναι ανάλογα:

x	3	5	21	6	18	45
y	6	10	42	2	6	18

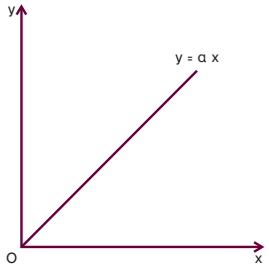
3. Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα, αν γνωρίζετε ότι τα ποσά x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας $\alpha = \frac{3}{2}$.

x	0	2	$\frac{2}{5}$		
y				6	$\frac{9}{5}$

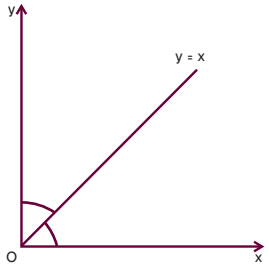
6.4 • Γραφική Παράσταση Σχέσης Αναλογίας

ΘΕΩΡΙΑ

Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη τιμών (x, y) δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία με αρχή την αρχή Ο(0, 0) των ημιαξόνων.

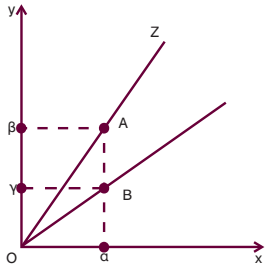


Αν α = 1, η σχέση αναλογίας γίνεται y = 1 · x ή y = x και η ημιευθεία που την αναπαριστά έχει αρχή την αρχή των αξόνων και είναι διχοτόμος της γωνίας $\measuredangle xOy$ των ημιαξόνων.

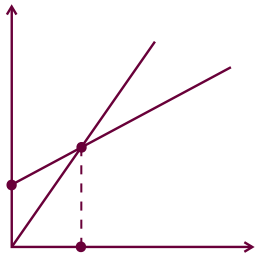


Παρατήρηση

Στο κάτω σχήμα παίρνουμε δύο οποιαδήποτε σημεία των ημιευθειών Oz, Ot εκτός του O με ίση τετμημένη, π.χ. τα A(α, β), B(α, γ).
Παρατηρούμε ότι το A είναι πάνω από το B και ότι η ημιευθεία Oz είναι πάνω από την Ot, εκτός του σημείου τους O ή η ημιευθεία Ot είναι κάτω από την Oz, εκτός του O.



Στο διπλανό σχήμα:
- Το τμήμα AM είναι πάνω από το OM εκτός του σημείου M.
- Η ημιευθεία Mt είναι κάτω από την ημιευθεία Mz, εκτός του M.



Οπότε, αν τα σημεία Κ(x, β), Λ(x, γ) βρίσκονται στις ημιευθείες Oz, At, αντίστοιχα, έχουμε:

- Αν $x < \alpha$, τότε $\beta < \gamma$
- Αν $x > \alpha$, τότε $\beta > \gamma$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δύο ποσά x και y είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας α = 2. Να παραστήσετε γραφικά τη σχέση αναλογίας.

Λύση

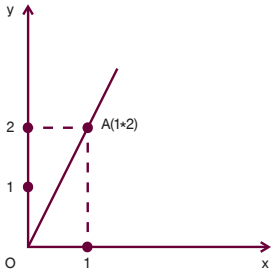
Τα ποσά x και y συνδέονται με τη σχέση $y = 2x$.

Γραφικά τη σχέση αναλογίας $y = 2x$ την αναπαριστά μια ημιευθεία που διέρχεται από την αρχή των ημιαξόνων. Οπότε, για να κατασκευάσουμε, αρκεί να γνωρίζουμε άλλο ένα σημείο της.

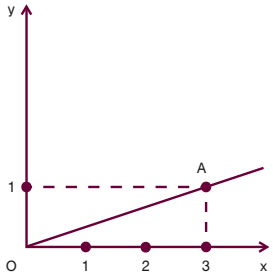
Για $x = 1$, έχουμε $y = 2 \cdot 1 = 2$.

Οπότε, το ζεύγος τιμών (1, 2) ορίζει τις συντεταγμένες του σημείου από το οποίο διέρχεται η ημιευθεία.

Η ημιευθεία ΟΑ του διπλανού σχήματος παριστάνει γραφικά τη σχέση αναλογίας $y = 2x$.



2. Από το κάτω σχήμα, να βρείτε τη σχέση αναλογίας των ποσών x και y, που παριστάνει η ημιευθεία ΟΑ.



Λύση

Παρατηρούμε ότι η ημιευθεία διέρχεται από το σημείο Α(3, 1). Οπότε το ζεύγος (3, 1) είναι ζεύγος τιμών των αναλόγων ποσών x και y.

Ο συντελεστής αναλογίας είναι $\alpha = \frac{1}{3}$. Άρα, η σχέση αναλογίας είναι $y = \frac{1}{3}x$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) Η σχέση μεταξύ δύο ανάλογων ποσών x και y με α = 1,5 δίνεται από τον τύπο y = 1,5x

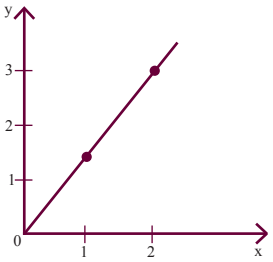
Για x = 1 → y = 1,5

Για x = 2 → y = 3

x	1	2
y	1,5	3

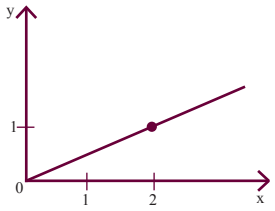
β) Έχουμε τα σημεία (1, 1,5), (2, 3)

γ)

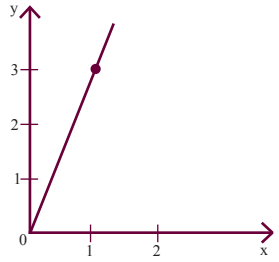


2. Για να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας σχέσης αναλογίας χρειαζόμαστε δύο σημεία. Επειδή η γραφική παράσταση θα περνάει από το (0, 0) αρκεί να βρούμε άλλο ένα σημείο.

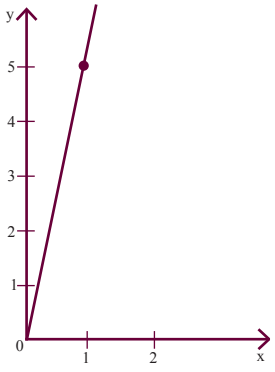
α) Για την $y = \frac{1}{2}x$, για x = 2 → y = 1. Προκύπτει έτσι το σημείο (2, 1).



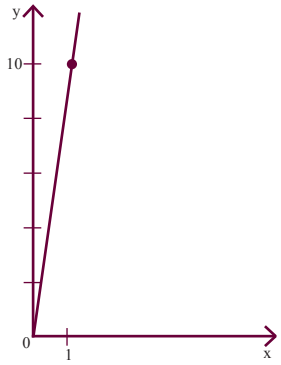
β) Για την y = 3x, για x = 1 → y = 3, δηλ. προκύπτει το σημείο (1, 3).



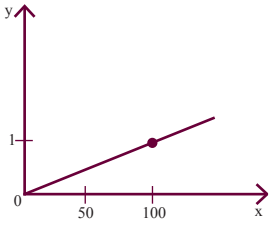
γ) Για την y = 5,5x, για x =1 → y = 5,5, δηλ. προκύπτει το σημείο (1, 5,5).



δ) Για την y = 10x, για x = 1 → y = 10, δηλ. προκύπτει το σημείο (1, 10)



ε) Για την y = 0,01x, για x = 100 → y = 1, δηλ. προκύπτει το σημείο (100, 1).



3. Ο πίνακας Α αντιστοιχεί στην y = 2,5x (4), διότι:
Για x = 4 → y = 10
Για x = 7 → y = 17,5
Για x = 12 → y = 30
Ομοίως:

- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 2x + 1
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 2x + 3
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 12 : x
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 0,5x
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 2x + 2
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 3x
- Ο πίνακας Β αντιστοιχεί στην y = 4x – 1

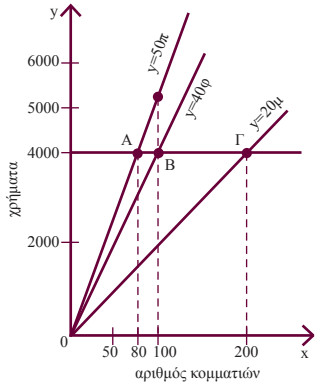
4. α) Αν ο καταστηματάρχης αγοράσει:

- φ φόρμες, θα πληρώσει συνολικά y = 40φ
- μ μαγιό, θα πληρώσει συνολικά y = 20μ
- π παπούτσια, θα πληρώσει συνολικά y = 50π

Για να σχεδιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις αυτών των σχέσεων χρειαζόμαστε 2 σημεία. Επειδή το ένα σημείο είναι το (0, 0) αρκεί να βρούμε άλλο ένα τυχαίο σημείο για κάθε σχέση. Π.χ.

Για την y = 40φ, για φ = 100 → y = 4.000, δηλ. προκύπτει το σημείο (100, 4.000)
Για την y = 20μ, για μ = 100 → y = 2.000, δηλ. προκύπτει το σημείο (100, 2.000)
Για την y = 50π, για π = 100 → y = 5.000, δηλ. προκύπτει το σημείο (100, 5.000)

Σχεδιάζουμε τις 3 σχέσεις στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων.



β) Για κάθε είδος θα πληρώσει 12.000 : 3 = 4.000 €
Στον άξονα των χρημάτων βρίσκουμε το 4.000 € και από το σημείο αυτό φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα που εκφράζει τον αριθμό των κομματιών. Η γραμμή αυτή τέμνει τις γραφικές παραστάσεις στα Α, Β, Γ.
Η τετμημένη του Α είναι π = 4.000 : 50 = 80, δηλ. θα αγοράσει 80 παπούτσια.
Η τετμημένη του Β είναι φ = 4.000 : 40 = 100, δηλ. θα αγοράσει 100 φόρμες.
Η τετμημένη του Γ είναι μ = 4.000 : 20 = 200, δηλ. θα αγοράσει 200 μαγιό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
α. Τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη (x, y) δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται πάνω _____ με _____.
β. Η ημιευθεία που αναπαριστά τη σχέση αναλογίας y = x είναι _____.
2. Να αντιστοιχίσετε καθέναν από τους παρακάτω πίνακες στις συναρτήσεις που ακολουθούν:

α.

x	0	2	4
y	0	3	6

β.

x	0	1	5
y	1	3	11

γ.

x	0	1	2
y	1	4	7

1. $y = 3x + 1$
2. $y = 1,5\ x$
3. $y = 2x + 1$

3. Να εξετάσετε αν τα ζεύγη $(1, \frac{2}{3})$, $(\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, (3, 2) αναπαριστούν σημεία της γραφικής παράστασης μιας αναλογίας.

6.5 • Προβλήματα Ανάλογων Ποσών

ΘΕΩΡΙΑ

Για να διαπιστώσουμε αν δύο ποσά είναι ανάλογα, χρησιμοποιούμε τα παρακάτω:
1. Τον ορισμό των αναλόγων ποσών
2. Τη σχέση $y = \alpha \cdot x$
3. Τη σχέση $\frac{y}{x} = \alpha$

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Για να φτιάξουμε 10 kg ψωμί χρειαζόμαστε 7,5 kg αλεύρι. Πόσα κιλά ψωμί θα φτιάξουμε με 8 kg αλεύρι;

Λύση
Τα ποσά αλεύρι και ψωμί είναι ανάλογα.
Έστω y η ζητούμενη ποσότητα ψωμιού.
Από τον παρακάτω πίνακα αναλογίας έχουμε

Αλεύρι	7, 5	8
Ψωμί	10	y

$\frac{7,5}{10}=\frac{8}{y}$ ή 7, 5y = 80 ή $y=\frac{80}{7,5}$ ή y = 10, 667

Άρα, θα φτιάξουμε 10,667 kg ψωμί.

2. Ένα κατάστημα αγόρασε 20 ζεύγη υποδημάτων με 40 € το καθένα και τα διέθεσε με 50% κέρδος. Τα τελευταία πέντε ζευγάρια τα πούλησε την περίοδο των εκπτώσεων με έκπτωση 30%. Να βρείτε το τελικό ποσοστό κέρδους.

Λύση
Η τιμή αγοράς των 20 ζευγαριών υποδημάτων είναι 20 · 40 = 800 €
Αν η τιμή κόστους κάθε ζεύγους είναι 100 €, για να έχει κέρδος 50%, πρέπει να το πουλήσει 150 €.
Οπότε έχουμε τον ακόλουθο πίνακα αναλογίας:

Τιμή αγοράς	100	40
Τιμή πώλησης	150	y

Δηλαδή $\frac{100}{150}=\frac{40}{y}$ ή 100y = 6.000 ή y = 60

Άρα, θα τα πουλούσε 60 €.

Η είσπραξη από την πώληση των 15 ζευγαριών υποδημάτων είναι 15 · 60 = 900 €.
Επειδή μετά έκανε έκπτωση 30% στην τιμή πώλησης, δηλαδή με τιμή πώλησης 100 € μετά την έκπτωση θα το πουλούσε 70 €, έχουμε το διπλανό πίνακα αναλογίας.

Δηλ. $\frac{100}{70}=\frac{60}{y}$ ή 100y = 4.200 ή $y=\frac{4200}{100}$ ή y = 42

Η είσπραξη από την πώληση των 5 ζευγαριών είναι 5 · 42 = 210 €.
Η συνολική είσπραξη είναι 900 + 210 = 1.110 €.
Για να υπολογίσουμε το ποσοστό κέρδους επί της τιμής αγοράς, πρέπει να αναγάγουμε το κέρδος στα 100 €.

Το κέρδος στο κατάστημα είναι 1.110 - 800 = 310 €.

Οπότε, έχουμε τον ακόλουθο πίνακα αναλογίας

Τιμή αγοράς	800	100
Κέρδος	310	y

Άρα,

$\frac{800}{310}=\frac{100}{y}$ ή 800y = 31.000 ή $y=\frac{31000}{800}$ ή y = 38, 75

Επομένως, το ποσοστό κέρδους του εμπόρου είναι 38,75%.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Τα ποσά ύψος – σκιά είναι ανάλογα. Συμβολίζουμε με x τον άγνωστο, δηλ. το ύψος του δέντρου και κατασκευάζουμε τον πίνακα αναλογίας:

	Πάσσαλος	Δέντρο
Ύψος	1,2	x
Σκιά	3	14

Είναι $\frac{1,2}{3}=\frac{x}{14}$ ή x = 5,6 m.

2. Τα ποσά βάρος στη γη – βάρος στο φεγγάρι είναι ανάλογα. Συμβολίζουμε με x το βάρος του παιδιού στο φεγγάρι και κατασκευάζουμε τον πίνακα αναλογίας:

	Αστροναύτης	Παιδί
Βάρος στη γη	78	52
Βάρος στο φεγγάρι	13	x

Είναι $\frac{78}{13}=\frac{52}{x}$ ή x = 8, 67

3. Τα ποσά είναι ανάλογα. Συμβολίζουμε με x τα Kg σταφύλια που πρέπει να πατήσει για να βγάλει 6 · 350 = 2.100 Kg μούστο.

Σταφύλια	100	x
Μούστος	80	2.100

Είναι $\frac{100}{80} = \frac{x}{2.100}$ ή x = 2.625 Kg.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Ένα φυτό ύψους 80 cm ρίχνει σκιά 50 cm. Την ίδια στιγμή ένα δέντρο ρίχνει σκιά 8 m. Αν γνωρίζουμε ότι τα ποσά ύψος - σκιά είναι ανάλογα, να βρείτε το ύψος του δέντρου.

2. Τα 40 kg ελιές βγάζουν 5 kg λάδι. Πόσα κιλά ελιές πρέπει να έχουμε για να βγάλουμε 120 kg λάδι;

3. Ένα αυτοκίνητο πουλήθηκε με έκπτωση 10%. Ποια η αρχική τιμή του αυτοκινήτου, αν το ποσό που πληρώθηκε είναι 27.000 €;

6.6 • Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

ΘΕΩΡΙΑ

Δύο μεγέθη είναι **αντιστρόφως ανάλογα** στην περίπτωση που η μεταβολή τους είναι τέτοια, ώστε όταν το ένα μέγεθος **πολλαπλασιάζεται** επί έναν αριθμό, το άλλο **διαιρείται με τον ίδιο αριθμό**.

Όταν δύο ποσά **x** και **y** είναι **αντιστρόφως ανάλογα**, το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους παραμένει σταθερό: **y = α · x**, α ≠ 0.

Αν α = 1, τα x και y είναι **αντίστροφοι** αριθμοί.

Τα **σημεία** που παριστάνουν τα ζεύγη (x, y) βρίσκονται σε μια **καμπύλη γραμμή**, που ονομάζεται **υπερβολή**.
Η **υπερβολή** δεν τέμνει τους ημιάξονες **Ox** και **Oy**, διότι οι συντεταγμένες των σημείων της **δεν παίρνουν** την τιμή **0**.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ένα έργο το τελειώνουν 6 εργάτες σε 4 ημέρες. Σε πόσες ημέρες θα τελείωναν το έργο 8 εργάτες;

Λύση
Έστω ότι το έργο θα το τελειώσουν σε y ημέρες.
Τα ποσά εργάτες - χρόνος είναι αντιστρόφως ανάλογα.
Οπότε, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Εργάτες	6	8
Χρόνος	4	y

Άρα, $8y = 6 \cdot 4$ ή $8y = 24$

$y = \frac{24}{8}$ ή $y = 3$

Οπότε, το έργο θα τελειώσει σε 3 ημέρες.

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα των αντιστρόφως αναλόγων ποσών x και y.

x	1	2	3		
y	6			1,5	1

- **Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης των αντιστρόφως αναλόγων ποσών.**

Λύση
Επειδή τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, το γινόμενο των τιμών τους είναι σταθερό και ίσο με $1 \cdot 6 = 6$.

Άρα η σχέση είναι $x \cdot y = 6$ ή $y = \frac{6}{x}$.

Για x = 2 έχουμε $y = \frac{6}{2}$ ή y = 3.

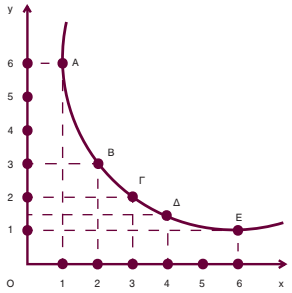
Για x = 3 έχουμε $y = \frac{6}{3}$ ή y = 2.

Για y = 1,5 έχουμε $1,5 = \frac{6}{x}$ ή 1,5x = 6 ή $x = \frac{6}{1,5}$ ή x = 4.

Για y = 1 έχουμε $1 = \frac{6}{x}$ ή x = 6.

Συνεπώς, έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη: (1, 6), (2, 3), (3, 2), (4, 1,5), (6, 1).

Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς βρίσκουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε με συντεταγμένες τα παραπάνω ζεύγη τιμών. Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η υπερβολή που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ, στ) Λ.

2. α) υποδιπλασιάζεται, β) καμπύλη, υπερβολή

3. Για να είναι ένας πίνακας, πίνακας αντιστρόφως αναλόγων ποσών πρέπει το γινόμενο για όλα τα ζεύγη (x, y) που δίνονται να είναι σταθερό.

α) Είναι $1 \cdot 2 = 2,2 \cdot 1 = 2,3 \cdot \frac{2}{3} = 2,4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Το γινόμενο είναι σταθερό, άρα είναι πίνακας αντιστρόφως αναλόγων ποσών.

β) Αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

γ) Το γινόμενο δεν είναι σταθερό, άρα δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

δ) Το γινόμενο δεν είναι σταθερό, άρα δεν είναι αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

4. α) Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, άρα το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό και ίσο με $1 \cdot 3,5 = 3,5$. Επομένως, $x \cdot y = 3,5$ και έχουμε:

$x = \frac{3,5}{y}$ ή $y = \frac{3,5}{x}$

Τα κενά του πίνακα συμπληρώνονται ως εξής:
Γραμμή 1: 1,4, 2, 4
Γραμμή 2: 17,5, 7, 5, 1,522, 1,167, 0,35, 0,292

β) Από τον πίνακα προκύπτουν τα ζεύγη: (0,2, 17,5), (0,5, 7), (0,7, 5), (1, 3,5), (1,4, 2,5), (2, 1,75), (2,3, 1,522), (3, 1,667), (4, 0,875), (10, 0,35), (12, 0,292).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, και με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Αν $y = \frac{3}{x}$, τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα.
β. Αν xy = 10, τα ποσά x και y είναι ανάλογα.
γ. Η υπερβολή δεν τέμνει τους ημιάξονες Ox και Oy.
δ. Αν τα ποσά x, y παίρνουν τιμές αντιστρόφων αριθμών, είναι αντιστρόφως ανάλογα.

2. Να εξετάσετε αν τα ποσά των παρακάτω πινάκων είναι αντιστρόφως ανάλογα:

α.

x	3	2	4,5
y	6	9	4

β.

x	6	2	3
y	4	12	7

3. Αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

x	2	3		15
y			8	

Κριτήριο αξιολόγησης 6ου κεφαλαίου

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Τι ονομάζεται κλίμακα;
Β. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
i. Η ισότητα δύο λόγων ονομάζεται _____.
ii. Η γραφική παράσταση δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι _____ γραμμή και ονομάζεται _____.
iii. Δύο μεγέθη των οποίων οι αντίστοιχες τιμές δίνουν πάντα το ίδιο πηλίκο λέγονται _____.

ΘΕΜΑ 2ο

Τα ποσά x και y του διπλανού πίνακα είναι ανάλογα.
α. Να βρείτε το συντελεστή αναλογίας και τη σχέση που συνδέει τα ποσά x και y.
β. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
γ. Να βρείτε τα σημεία που παριστάνουν τα ζεύγη (x, y) και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της σχέσης αναλογίας.

x	1	2	
y		4	6

ΘΕΜΑ 3ο

Στο κάτω σχήμα έχουμε μια υπερβολή που αναπαριστά τα ζεύγη (x, y), όπου x η

παροχή μιας βρύσης σε m^3/h και y ο χρόνος σε h που χρειάζεται για να γεμίσει μια δεξαμενή.

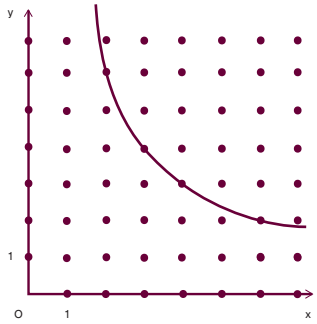
α. Να βρείτε γραφικά:

i. Τη χωρητικότητα της δεξαμενής.

ii. Το χρόνο που χρειάζεται για να γεμίσει η δεξαμενή, όταν η παροχή είναι $3m^3/h$.

iii. Την παροχή της βρύσης όταν η δεξαμενή γεμίζει σε 6 h.

β. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα μεγέθη x και y.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

-1

$-3,444$

-95

7.1

- Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί)
- Η Ευθεία των Ρητών Αριθμών
- Τετμημένη Σημείου

ΘΕΩΡΙΑ

- **Πρόσημα** λέγονται τα σύμβολα «+» και «–» και τα γράφουμε πριν από τους αριθμούς εκτός του μηδενός.
- **Θετικός** λέγεται ο αριθμός που έχει πρόσημο «+», π.χ. + 5
- **Αρνητικός** λέγεται ο αριθμός που έχει πρόσημο «–», π.χ. – 3
- Το **0** δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.
- Σε έναν θετικό αριθμό μπορούμε να παραλείψουμε το πρόσημο «+», π.χ. αντί + 5 γράφουμε 5, ή όταν γράφουμε 5 εννοούμε τον θετικό αριθμό + 5.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο. Δηλ. όλοι οι θετικοί ή όλοι οι αρνητικοί. Π.χ.

- Οι αριθμοί $-5, -\frac{1}{3}, -3,1$ είναι ομόσημοι
- Οι αριθμοί $+3, +5,6, +\frac{7}{3}$ είναι ομόσημοι.

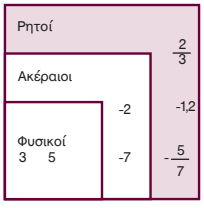
Ετερόσημοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο. Δηλ. ο ένας είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός.

Π.χ. οι αριθμοί: $+\frac{2}{3}, -3$ είναι ετερόσημοι.

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς. Δηλ. οι αριθμοί: …, – 2, – 1, 0, 1, 2, …

Ρητοί αριθμοί είναι οι φυσικοί αριθμοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς.

Οι φυσικοί αριθμοί περιέχονται στους ακεραίους και οι ακέραιοι στους ρητούς

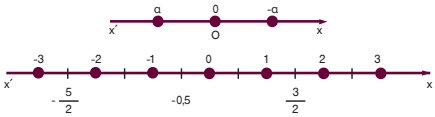


Παράσταση των ρητών αριθμών με σημεία του άξονα

Έστω ο ημιάξονας Ox και ο αντικείμενός του Ox΄, οπότε λέμε ότι έχουμε τον **άξονα x΄x**

Αν ο θετικός αριθμός α αντιστοιχίζεται στο σημείο Α, ο αριθμός – α αντιστοιχίζεται στο συμμετρικό σημείο Α΄ του Α ως προς το Ο.

Οπότε έχουμε τον άξονα x΄x των ρητών



Δεξιά του 0 είναι οι θετικοί αριθμοί και αριστερά του οι αρνητικοί.
Ο ημιάξονας **Ox** λέγεται **θετικός ημιάξονας**.
Ο ημιάξονας **Ox΄** λέγεται **αρνητικός ημιάξονας**.

Παρατηρήσεις

1. Υπάρχουν σημεία του άξονα x΄x που δεν αντιστοιχίζονται σε ρητούς αριθμούς.

2. Αν ένα σημείο Α του άξονα x΄x αντιστοιχίζεται σ' έναν αριθμό α, τότε ο αριθμός α λέγεται **τετμημένη** του σημείου Α

π.χ. το σημείο Α έχει τετμημένη – 2

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Από τους παρακάτω αριθμούς, να βρείτε ποιοι είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί:

$-5, +3, -\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, -3,4$

Λύση

Θετικοί είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο «+» ή δεν έχουν πρόσημο.

Οπότε είναι οι αριθμοί: $+3, \frac{1}{2}$.

Αρνητικοί είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο «–». Οπότε, είναι οι αριθμοί: – 5, $-\frac{2}{3}$, $-3,4$.

Το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός.

2. Να εκφράσετε με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω εκφράσεις:
α) Ελάττωση θερμοκρασίας κατά 3^0 C
β) Έσοδα 580 €
γ) 50 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας

Λύση
Έχουμε: α) -3^0 C, β) + 580 €, γ) – 50 m

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα 1η

Αθήνα → $+7^0$ C, Θεσ/νίκη → -3^0 C, Ιωάννινα → -5^0 C, Πάτρα → $+2^0$ C, Αλεξανδρούπολη → -8^0 C, Φλώρινα → -10^0 C, Τρίπολη → -6^0 C, Χανιά → $+11^0$ C

Δραστηριότητα 2η

3 → τρεις όροφοι πάνω από το ισόγειο
2 → δύο όροφοι πάνω από το ισόγειο
1 → έναν όροφο πάνω από το ισόγειο
0 → ισόγειο
–1 → έναν όροφο κάτω από το ισόγειο
–2 → δύο ορόφους κάτω από το ισόγειο

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) θετικοί, αρνητικοί.
β) ομόσημοι, ετερόσημοι.
γ) θετικοί, αρνητικοί.

2. Θετικοί: +5, +8, 7, 18
Αρνητικοί: –3,1, –20, –3.

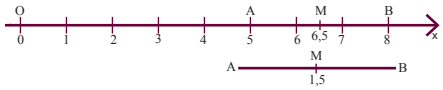
3. α) Σ, β. Λ (ο αριθμός 7 είναι θετικός), γ. Σ, δ. Σ, ε. Λ (το σημείο Κ έχει τετμημένη +2, ενώ το σημείο Μ έχει τετμημένη –2).

4. Ομόσημοι: (α), (γ), (δ), (ζ), (ι)
Ετερόσημοι: (ε), (στ), (η)
Το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός. Επομένως οι αριθμοί στα ερωτήματα (β) και (θ) δε μπορούν να χαρακτηριστούν ούτε ως ομόσημοι ούτε ως ετερόσημοι.

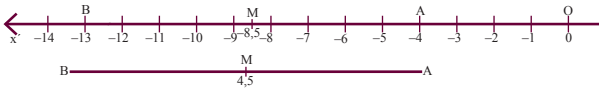
5. α) +50.000 €, β) –78.000 €, γ) +500 €, δ) –1 μονάδα, ε) –30 m.

6. Βρίσκουμε το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε τετμημένη: –6 → Μ, 10 → Υ, 9 → Σ, –9 → Τ, 5 → Ι, –5 → Κ, 0 → Ο. Παρατηρούμε ότι σχηματίζεται η λέξη ΜΥΣΤΙΚΟ.

7. α) Για να βρούμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, αφαιρούμε από το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΒ (δηλ. από την τετμημένη του Β) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ (δηλ. την τετμημένη του Α). Επομένως, το ΑΒ έχει μήκος 8 – 5 = 3. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος μήκους 3 είναι το 3 : 2 = 1,5. Αυτό σημαίνει ότι το μέσο απέχει 1,5 από το Α, δηλ. στον ημιάξονα Ox είναι το σημείο που έχει τετμημένη 5 + 1,5 = 6,5.



β) Για να βρούμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΒΑ, αφαιρούμε από το μήκος του ΟΒ το μήκος του ΟΑ. Το μήκος του ΟΒ, δηλ. η απόσταση του Β από το Ο, είναι 13. Όμοια το μήκος ΟΑ είναι 4 (παρατηρούμε ότι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι ένας θετικός αριθμός). Επομένως, το ΒΑ έχει μήκος 13 – 4 = 9, ενώ το μέσο του είναι το 9 : 2 = 4,5. Δηλ. το μέσο απέχει 4,5 από το Α ή 4,5 + 4 = 8,5 από το Ο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το Μ έχει τετμημένη –8,5.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
α. Οι ρητοί αριθμοί που έχουν πρόσημο «–» λέγονται ……
β. Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται ……
γ. Στον άξονα x΄x αριστερά του 0 βρίσκονται οι …… ρητοί.

2. Να κατατάξετε τους παρακάτω αριθμούς σε τρεις ομάδες, τους θετικούς, τους αρνητικούς και σε αυτούς που δεν είναι ούτε θετικοί ούτε αρνητικοί:

$-5, +3, 4, 0, -1,8, -\frac{3}{2}$.

3. Να εκφράσετε με ρητούς αριθμούς τις παρακάτω εκφράσεις:
α) ελάττωση της θερμοκρασίας κατά 50 C
β) ζημιά 50 €
γ) αύξηση πληθυσμού κατά 150 ανθρώπους
δ) 18 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

7.2

- Απόλυτη Τιμή Ρητού
- Αντίθετοι Ρητοί
- Σύγκριση Ρητών

ΘΕΩΡΙΑ

Απόσταση Σημείων

Γνωρίζουμε ότι **απόσταση** 2 σημείων Α και Β είναι το μήκος του τμήματος ΑΒ και συμβολίζεται με (ΑΒ) ή ΑΒ (Βλ. σχήμα 8).

- Αν τα σημεία Α και Β είναι διαφορετικά, τότε (ΑΒ) > 0 (Βλ. σχήμα 9).
- Αν τα σημεία Α και Β ταυτίζονται, τότε (ΑΒ) = 0 (Βλ. σχήμα 10)
- Γενικά είναι $(AB) \geq 0$ ή $AB \geq 0$ (το = ισχύει όταν $A \equiv B$).

Απόλυτη Τιμή Ρητού

Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α εκφράζει την απόσταση του σημείου με τετμημένη α από την αρχή Ο του άξονα και συμβολίζεται με **|α|.**

Από τα διπλανά σχήματα έχουμε **|α| = (ΟΑ)** [Βλ. σχήματα 11 και 12)
- Αν α ≠ 0 είναι ΟΑ > 0, οπότε |α| > 0
- Αν α = 0, τότε (ΟΑ) = 0, οπότε |α| = 0 (βλ. σχήμα 13)
- Γενικά ισχύει $|\alpha| \geq 0$

Από το διπλανό σχήμα έχουμε:
|+ 2| = (ΟΑ) = 2
|– 2| = (ΟΑ΄) = 2 (Βλ. σχήμα 14)

Αντίθετοι Αριθμοί

Αντίθετοι αριθμοί ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν ίδια απόλυτη τιμή.
Ο **αντίθετος** του ***0*** είναι το ***0***.
Π.χ.

- Οι αριθμοί + 2 και – 2 είναι αντίθετοι, διότι είναι ετερόσημοι και |+2| = |– 2|
- Ο αριθμός – 2 είναι ο αντίθετος του + 2
- Ο αριθμός του + 2 είναι ο αντίθετος του – 2

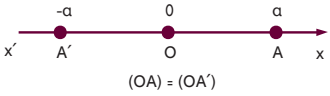
Για να σημειώσουμε τον αντίθετο ενός αριθμού συμφωνούμε να θέτουμε μπροστά από τον αριθμό το πρόσημο «–». Οπότε

- Ο αντίθετος του + 2 είναι ο – (+ 2) = – 2
- Ο αντίθετος του 3 είναι ο – 3
- Ο αντίθετος του – 2 είναι ο – (– 2) = + 2
- Η παράσταση - (+3) διαβάζεται ο αντίθετος του αριθμού +3 και είναι ίση με -3.

***Γενικά*:**
Ο αντίθετος του x είναι ο – x και ισχύει |- x| = |x|

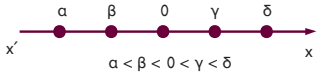
- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός: π.χ. |+ 5| = + 5

- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του: π.χ. |- 3| = |+ 3|
- Η απόλυτη τιμή του 0 είναι το μηδέν, δηλ. |0| = 0
- Δύο σημεία που βρίσκονται σε ίση απόσταση, δεξιά και αριστερά από την αρχή του άξονα, έχουν τετμημένες, αντίθετους αριθμούς.



Σύγκριση Ρητών

Μεγαλύτερος από δύο ρητούς αριθμούς είναι εκείνος που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο στον άξονα.



Οπότε:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό

- Ένας θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το 0

- Ένας αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το 0

- Μεγαλύτερος από δύο θετικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, π.χ. $+3 < +5$ διότι $|+3| = 3 < 5 = |+5|$. Δηλ. αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα

- Μεγαλύτερος από δυο αρνητικούς ρητούς είναι εκείνος που έχει τη μικρότερη απόλυτη τιμή, π.χ. $-5 < -2$ διότι $|-5| = 5 > 2 = |-2|$. Δηλ. αυτός που βρίσκεται δεξιότερα από τον άλλο πάνω στον άξονα.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή των ρητών αριθμών:

α) -3, **β)** $+\frac{3}{2}$, **γ)** $-1,2$

Λύση

α.

1ος τρόπος

Η απόσταση του σημείου Α με τετμημένη -3 από την αρχή Ο του άξονα είναι 3 μονάδες. Άρα $|-3| = 3$

2ος τρόπος

Επειδή ο αριθμός -3 είναι αρνητικός, η απόλυτη τιμή του είναι ο αντίθετός του, δηλ. $|-3| = -(-3) = +3 = 3$

β. Αφού ο αριθμός $+\frac{3}{2}$ είναι θετικός, η απόλυτη τιμή του είναι ο ίδιος αριθμός, δηλ. $|+\frac{3}{2}| = +\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

γ. Επειδή $-1,2 < 0$, έχουμε $|-1,2| = 1,2$

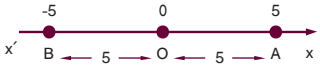
2. α) Να βρείτε τους αριθμούς που έχουν απόλυτη τιμή 5.

β) Να βρείτε τις τιμές του x, όταν $|x| = \frac{5}{7}$

Λύση

α. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι τετμημένες των σημείων του άξονα x΄x, που η απόστασή τους από το Ο είναι 5.

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι η απόσταση των σημείων Α και Β από το Ο είναι 5. Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ο 5 και ο – 5.



β. Επειδή $|x| = \frac{5}{7}$ έχουμε $x = \frac{5}{7}$ ή $x = -\frac{5}{7}$, αφού $|\frac{5}{7}| = \frac{5}{7}$ και $|-\frac{5}{7}| = \frac{5}{7}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα 1η

Α: 1 μονάδα, Β: 3 μονάδες, Γ: 5 μονάδες, Δ: 4 μονάδες

Δραστηριότητα 2η

Η τετμημένη του Μ είναι το 8 και του Μ΄ το –8.
Οι τετμημένες είναι αντίθετοι αριθμοί.
Η τετμημένη του Α είναι το 3,5, ενώ η τετμημένη του Α΄ είναι το –3,5.
Η τετμημένη του Β είναι το 6, ενώ η τετμημένη του Β΄ είναι το –6.

Δραστηριότητα 3η

Με αύξουσα σειρά: $-3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +3 < +5$

Με φθίνουσα σειρά: $+5 > +3 > +1 > 0 > -1 > -2 > -3$

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) απόλυτη τιμή, μη αρνητικός αριθμός, β) αντίθετοι, γ) αρνητικός, –6, +6, δ) μικρότερη, ε) μικρότερη.

2. Για να βρούμε την απόσταση του σημείου από την αρχή του άξονα υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή του αριθμού στον οποίο αντιστοιχεί.
Για το $-2,73 \rightarrow |-2,73| = 2,73$
Για το $+7,66 \rightarrow |+7,66| = 7,66$
Για το $-1,05 \rightarrow |-1,05| = 1,05$
Για το $0 \rightarrow |0| = 0$
Για το $+8,07 \rightarrow |+8,07| = 8,07$
Για το $-8 \rightarrow |-8| = 8$

3. α) Σ (Κάθε θετικός ρητός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό ρητό)
β) Λ (Είναι $-7,6 < -6,7$, διότι $|-7,6| = 7,6 > 6,7 = |-6,7|$.
γ) Σ (Το x μπορεί να είναι το 3 ή το 4)
δ) Σ (Οι ακέραιοι είναι οι –2, –1, 0, +1, +2.
ε) Λ (π.χ. οι αριθμοί – 3, +5 δεν είναι αντίθετοι. Αντίθετοι ονομάζονται δύο αριθμοί που είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή, όπως π.χ. οι –6 και +6.

4. α) $|+7,25| = 7,25$, β) $|-2,5| = 2,5$, γ) $|+16| = 16$, δ) $|-20,05| = 20,05$, ε) $|-58| = 58$

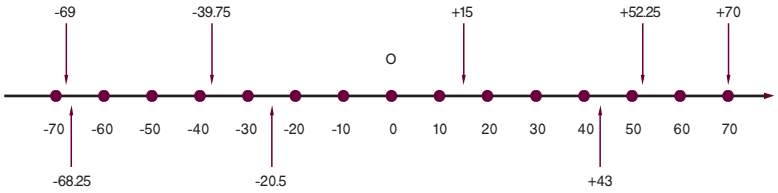
5. α) Είναι $|\alpha| = 100$ όταν $\alpha = -100$ ή $\alpha = 100$
β) Είναι $|\alpha| = 21,7$ όταν $\alpha = -21,7$ ή $\alpha = 21,7$
γ) Είναι $|\alpha| = 0$, όταν $\alpha = 0$
δ) Είναι $|\alpha| = 7,03$ όταν $\alpha = -7,03$ ή $\alpha = 7,03$
ε) Είναι $|\alpha| = 5,2$ όταν $\alpha = -5,2$ ή $\alpha = 5,2$

6. Ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

Αριθμός	1	+2	–2	–19	+8	–12	+7	–7
Αντίθετος	–1	–2	+2	+19	–8	+12	–7	+7
Απόλυτη Τιμή	1	2	2	19	8	12	7	7

7. Οι αριθμοί τοποθετούνται πάνω στον x΄Ox με την εξής σειρά:
$-9 < -7,25 < -5,5 < -3 < +1 < +3 < +8 < +9 < +12$
Συμμετρικοί ως προς την αρχή του άξονα είναι οι αριθμοί –9, +9 και –3, +3.

8. Τοποθετούμε στον x΄Ox τους αριθμούς:
$-69 < -68,25 < -39,75 < -20,5 < +15 < +43 < +52,25 < +70$.



9. α) Είναι $+38 < +41$, διότι $|+38| = 38 < 41 = |+41|$
β) Είναι $9 < 11$, διότι $|9| = 9 < 11 = |11|$
γ) Είναι $-3 < -2$, διότι $|-3| = 3 > 2 = |-2|$
δ) Είναι $-9 > -16$, διότι $|-9| = 9 < 16 = |-16|$
ε) Είναι $7 > -8$, διότι κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.
στ) Είναι $0 > -3$, διότι το 0 είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό.
ζ) Είναι $0 < +4$, διότι το 0 είναι μικρότερο από κάθε θετικό.

10. α) Είναι $11 = |11|$ και $-11 < 11$, άρα $-11 < 11 = |11|$
β) Είναι $+3 = |3|$ και $-3 < +3$, άρα $-3 < +3 = |3|$
Συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη τιμή ενός θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός και ότι κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από την απόλυτη τιμή του.

11. Με αύξουσα σειρά: $-10 < -8 < -4 < -3 < -2 < 0 < +5 < +7 < +15$

12. α) $>$, β) $<$, γ) $>$, δ) $>$, ε) $=$, στ) $=$, ζ) $=$, η) $>$, θ) $>$, ι) $>$

13. α) Το x μπορεί να είναι: $-12, -11, -10, -9$
β) Δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός έτσι ώστε να ισχύει η $-4 < x < -5$
γ) Το x μπορεί να είναι: $-1, 0, +1, +2, +3, +4$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
α. Η απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α εκφράζει την …… του σημείου με τετμημένη …… από την …… του άξονα και συμβολίζεται με ……..
β. Δύο αριθμοί που είναι …… και έχουν …… ονομάζονται αντίθετοι.
γ. Ο αντίθετος του x είναι ο ……
δ. Αν ο αριθμός α είναι αρνητικός, ο αντίθετός του είναι ……
ε. Αν $\alpha < 0$, τότε $|\alpha| =$ ……..
στ. $|0| =$ ……
ζ. Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε α … β.
η. Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ και $|\alpha| < |\beta|$, τότε α … β.

θ. Οι …… αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή.

2. α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α με τετμημένη – 3 από την αρχή Ο του άξονα x΄x.
β) Να υπολογίσετε την απόλυτη τιμή του αριθμού – 3.

3. Να βρείτε την απόλυτη τιμή των ρητών αριθμών:

α. + 13, β. – 9,

γ. 3,5, δ. $-\frac{5}{7}$, ε. 0.

7.3 • Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

Πρόσθεση Ομόσημων Αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερους ομόσημους ρητούς αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
Π.χ.
Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+ 5) + (+ 3):

- Προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών + 5 και + 3, δηλ. |+ 5| + |+ 3| = 5 + 3 = 8.
- Στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημο «+». Άρα, (+ 5) + (+ 3) = + 8

Ομοίως έχουμε:

- (– 2) + (– 3) = – (|- 2| + |-3|) = - (2 + 3) = - 5
- (- 3) + (- 5) + (- 7) = - (|- 3| + |- 5| + |- 7|) = - (3 + 5 + 7) = - 15

Πρόσθεση Ετεροσήμων Αριθμών

Για να προσθέσουμε **δύο ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, αφαιρούμε από τη μεγαλύ-

τερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Π.χ.

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα (+ 7) + (- 3)
- Βρίσκουμε τις απόλυτες τιμές των αριθμών +7 και –3. Είναι |+ 7| = 7 και |–3| = 3
- Επειδή οι αριθμοί + 7, – 3 είναι ετερόσημοι, από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή αφαιρούμε τη μικρότερη και έχουμε: |+ 7| - |- 3| = 7 – 3 = 4
- Στη διαφορά βάζουμε πρόσημο «+», διότι |+ 7| > |- 3|. Άρα, (+ 7) + (- 3) = + 4

Για το άθροισμα $\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$

Είναι $|-\frac{6}{5}|=\frac{6}{5}$, $|+\frac{3}{4}|=\frac{3}{4}$

Επειδή οι αριθμοί $-\frac{6}{5}$, $+\frac{3}{4}$ είναι ετερόσημοι και $|-\frac{6}{5}|>|+\frac{3}{4}|$ έχουμε

$$\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=-\left(|-\frac{6}{5}|-|+\frac{3}{4}|\right)=-\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{24-15}{20}=-\frac{9}{20}$$

Ομοίως έχουμε
- (+ 5) + (- 8) = - (|- 8| - |+ 5|) = - (8 – 5) = - 3
- (- 3,2) + (+1,4) = - (3,2 – 1,4) = - 1,8
- (+ 7) + (- 7) = 0

Ιδιότητες της Πρόσθεσης

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	αντιμεταθετική
$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	προσεταιριστική
$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$	
$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$	

Παρατηρήσεις

1. Από την ισότητα α + (- α) = 0 συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των αντιθέτων αριθμών α και – α είναι 0.

2. Αν α + β = 0, τότε β = - α. Δηλ. ο β είναι ο αντίθετος του α, οπότε οι α και β είναι αντίθετοι.

Άρα:
- Αν α + β = 0, τότε οι α, β αντίθετοι.
- Αν οι α, β είναι αντίθετοι, τότε α + β = 0

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σχόλιο

Για να προσθέσουμε δύο ρητούς αριθμούς:
Βρίσκουμε τις απόλυτες τιμές τους.
Εξετάζουμε αν είναι ομόσημοι ή ετερόσημοι:

- Αν είναι **ομόσημοι, προσθέτουμε** τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα βάζουμε το πρόσημό τους.
- Αν είναι **ετερόσημοι, αφαιρούμε** από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τη μικρότερη και στη διαφορά βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

1. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
α. (+ 7) + (+ 8), β. (- 5) + (- 9), γ. (+ 13) + (- 6), δ. (- 11) + (+ 8), ε. (- 17) + (+ 17)

Λύση

α. Έχουμε |+ 7| = 7 και |+ 8| = 8
Επειδή οι αριθμοί + 7 και + 8 είναι ομόσημοι έχουμε: (+ 7) + (+ 8) = + (|+ 7| + |+ 8|) = + (7 + 8) = + 15

β. Είναι |- 5| = 5 και |- 9| = 9
Αφού οι αριθμοί – 5 και – 9 είναι ομόσημοι έχουμε: (- 5) + (- 9) = - (|-5| + |- 9|) = - (5 + 9) = - 14

γ. Έχουμε |+ 13| = 13 και |- 6| = 6
Επειδή οι αριθμοί είναι + 13 και – 6 είναι ετερόσημοι έχουμε: (+ 13) + (- 6) = (|+ 13| - |- 6|) = + (13 – 6) = + 7

δ. Είναι |- 11| = 11 και |+ 8| = 8
Αφού οι αριθμοί – 11 και + 8 είναι ετερόσημοι έχουμε: (- 11) + (+ 8) = - (|- 11| - |+ 8|) = - (11 – 8) = - 3

ε. Επειδή οι αριθμοί – 17 και + 17 είναι αντίθετοι έχουμε: (- 17) + (+ 17) = 0

2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα: α. (- 3,5) + (- 4), β. $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{5}\right)$

Λύση

α. Οι αριθμοί -3,5 και – 4 είναι ομόσημοι. Έχουμε: (- 3,5) + (- 4) = - (|- 3,5| + |- 4|) = - (3,5 + 4) = - 7,5

β. Οι αριθμοί $-\frac{3}{4}$ και $+\frac{3}{5}$ είναι ετερόσημοι.

Έχουμε $|-\frac{3}{4}|=\frac{3}{4}, |+\frac{3}{5}|$ και $\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$

Οπότε: $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)=-\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)=-\frac{15-12}{20}=-\frac{3}{20}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ

2. α) + 10,2, β) +9,1, γ) +100, δ) +14, ε) +16, στ) –6, ζ) –6,5, η) –12, θ) –15, ι) –20.

3. α. –2,1, β) +0,96, γ) +94,6, δ) +8,8, ε) –1,5, στ) +1, ζ) +3,9, η) +2,3, θ) +4,5, ι) +7,4

4. Συμπληρώνουμε τον πίνακα:
Γραμμή 1: (–5) + (+4) = –1, (–5) + (–8) = –13, (–5) + (–11) = –16, (–5) + (+17) = +12
Γραμμή 2: (+9) + (+4) = +13, (+9) + (–8) = +1, (+9) + (–11) = –2, (+9) + (+17) = +26
Γραμμή 3: (–4) + (+4) = 0, (–4) + (–8) = –12, (–4) + (–11) = –15, (–4) + (+17) = +13
Γραμμή 4: (–21) + (+4) = –17, (–21) + (–8) = –29, (–21) + (–11) = –32, (–21) + (+17) = –4

5. α) (+6) + (–8) = –2, β) (+5) + (–5) = 0, γ) (+7) + (+9) = +16, δ) (–9) + (–8) = –17, ε) (+6) + (+5) = +11

6. Πρώτο τετράγωνο:
Εξετάζουμε το άθροισμα της κάθε γραμμής:
Γραμμή 1: (–1) + (+4) + (–3) = (–1) + (–3) + (+4) = (–4) + (+4) = 0
Γραμμή 2: (–2) + 0 + (+2) = (–2) + (+2) = 0
Γραμμή 3: (+3) + (–4) + (+1) = (+3) + (+1) + (–4) = (+4) + (–4) = 0
Εξετάζουμε το άθροισμα της κάθε στήλης:
Στήλη 1: (–1) + (–2) + (+3) = (–3) + (+3) = 0
Στήλη 2: (+4) + 0 + (–4) = (+4) + (–4) = 0

Στήλη 3: (–3) + (+2) + (+1) = (–3) + (+3) = 0
Εξετάζουμε το άθροισμα των διαγωνίων
Διαγώνιος 1: (–1) + 0 + (+1) = (–1) + (+1) = 0
Διαγώνιος 2: (–3) + 0 + (+3) = (–3) + (+3) = 0

Άρα, το τετράγωνο είναι μαγικό.

Δεύτερο τετράγωνο

Εξετάζουμε το άθροισμα κάθε γραμμής:
Γραμμή 1: (+1,1) + (+2,4) + (–2,5) = (+3,5) + (–2,5) = +1
Γραμμή 2: (–0,1) + (+3,5) + (–4,9) = (+5,9) + (–4,9) = +1
Γραμμή 3: 0 + (–4,9) + (+5,9) = +1
Εξετάζουμε το άθροισμα κάθε στήλης
Στήλη 1: (+1,1) + (–0,1) + 0 = +1
Στήλη 2: (+2,4) + (+3,5) + (–4,9) = (+5,9) + (–4,9) = +1
Στήλη 3: (–2,5) + (–2,4) + (+5,9) = (–4,9) + (+5,9) = +1
Εξετάζουμε το άθροισμα των διαγωνίων
Διαγώνιος 1: (+1,1) + (+3,5) + (+5,9) = +10,5

Άρα, το τετράγωνο δεν είναι μαγικό, αφού η πρόσθεση των αριθμών της διαγωνίου δεν δίνει άθροισμα 1.

7. α) (–3,8) + (+2,8) + (–5,4) + (+8,2) = (–3,8) + (–5,4) + (+2,8) + (+8,2)
= (–9,2) + (+11) = +1,8
β) (–3,5) + (–9,99) + (–15,75) + (+20,75) + (+9,99)
= (–3,5) + (–9,99) + (–15,75) + (+2,5) + (+20,75) + (+9,99) =
(–29,24) + (+33,24) = +4

8. α)

$$\left(+\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{7}{13}\right)+\left(-\frac{20}{13}\right)=\left(+\frac{4}{4}\right)+\left(-\frac{3}{3}\right)+\left(-\frac{13}{13}\right)$$

$$=(+1)+(-2)=-1$$

β) $$\left(+\frac{1}{7}\right)+\left(-\frac{5}{7}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{1}{35}\right)=\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}\right)+\left(-\frac{1}{35}\right)$$

$$=\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{21}{35}\right)+\left(-\frac{1}{35}\right)=\left(-\frac{4}{7}\right)+\left(+\frac{20}{35}\right)=\left(-\frac{4\cdot 5}{7\cdot 5}\right)+\left(+\frac{20}{35}\right)$$

$$=\left(-\frac{20}{35}\right)+\left(+\frac{20}{35}\right)=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, και με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

β. Αν το άθροισμα ομόσημων ρητών είναι θετικός αριθμός, τότε οι ρητοί είναι θετικοί.

γ. Αν το άθροισμα δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός, τότε μεγαλύτερη απόλυτη τιμή έχει ο αρνητικός.

δ. Αν το άθροισμα ομόσημων ρητών είναι αρνητικός, τότε οι ρητοί είναι αρνητικοί.

ε. Αν $\alpha + \beta = 0$, τότε οι α και β είναι αντίθετοι.

2. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α. $(+5) + (+8)$, **β.** $(+12) + (+18)$, **γ.** $(-3) + (-7)$, **δ.** $(-23) + (-17)$,

ε. $(+3), + (+5) + (+9)$, **στ.** $(-2) + (-10) + (-1)$

3. Αν $\alpha = +3$, $\beta = -2$ και $\gamma = -5$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha + \beta + \gamma$.

7.4 • Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

Για να αφαιρέσουμε από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετό του β. Δηλ. $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

π.χ. $(+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -2$

Παρατηρήσεις

1. Η αφαίρεση στους ρητούς αριθμούς είναι πάντα δυνατή.

2. Για τις εξισώσεις έχουμε:

- $x + \alpha = \beta$ ή $x = \beta - \alpha$
- $\alpha - x = \beta$ ή $x = \alpha - \beta$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις διαφορές: α. (- 5) – (- 3), β. (+ 8) – (+ 13)

Λύση
Μετατρέπουμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις και έχουμε:
α. (- 5) – (- 3) = (- 5) + (+ 3) = - 5 + 3 = 2
β. (+ 8) – (+ 13) = (+ 8) + (- 13) = 8 – 13 = - 5

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
A = (- 8) + (+ 6) – (- 4) + (- 2) – (+ 7) + (+ 3)

Λύση
Μετατρέπουμε τις αφαιρέσεις σε προσθέσεις και έχουμε:
A = (- 8) + (+ 6) – (- 4) + (- 2) – (+ 7) + (+ 3)
= (- 8) + (+ 6) + (+ 4) + (- 2) + (- 7) + (+ 3) = – 8 + 6 + 4 – 2 – 7 + 3
= – 8 – 2 – 7 + 6 + 4 +3 = –17 + 13 = – 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα

Πιο ζεστός: Ιούλιος ($+36^0$ C), πιο κρύος: Δεκέμβριος (-10^0 C).
Διαφορά θερμοκρασίας: (–10) – (+36) = –46, δηλ. η θερμοκρασία από τον Ιούλιο στον Δεκέμβριο μειώθηκε κατά 46 βαθμούς.
Διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών μηνών:

- Ιανουάριος – Φεβρουάριος: (–5) – (–8) = (–5) + (+8) = +3, δηλ. η θερμοκρασία από τον Ιανουάριο στον Φεβρουάριο αυξήθηκε κατά 3^0 C.
- Φεβρουάριος – Μάρτιος: (+10) – (–5) = (+10) + (+5) = +15, δηλ. η θερμοκρασία από τον Φεβρουάριο στον Μάρτιο αυξήθηκε κατά 15^0 C.
- Μάρτιος – Απρίλιος: (+18) – (+10) = +8
- Απρίλιος – Μάιος: (+24) – (+18) = +6
- Μάιος – Ιούνιος: (+32) – (+24) = +8
- Ιούνιος – Ιούλιος: (+36) – (+32) = +4
- Ιούλιος – Αύγουστος: (+28) – (+36) = (+28) + (–36) = –8, δηλ. η θερμοκρασία από τον Ιούλιο στον Αύγουστο μειώθηκε κατά 8^0 C.
- Αύγουστος – Σεπτέμβριος: (+20) – (+28) = (+20) + (–28) = –8, δηλ. η θερμοκρασία

από τον Αύγουστο στον Σεπτέμβρη μειώθηκε κατά 8^0 C.

- Σεπτέμβριος – Οκτώβριος: (+7) – (+20) = (+7) + (–20) = –13
- Οκτώβριος – Νοέμβριος: (–3) – (+7) = (–3) + (–7) = –10
- Νοέμβριος – Δεκέμβριος: (–10) – (–3) = (–10) + (+3) = –7

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) Λ (π.χ. (+5) – (–2) = (+5) + (+2) = +7)
β) Λ (π.χ. (–9) – (+3) = (–9) + (–3) = –12
γ) Λ (π.χ. (–4) – (+1) = (–4) + (–1) = –5, ενώ (+1) – (–4) = (+1) + (+4) = +5)
δ) Λ (είναι 6 – (+8) + (+5) + (–3) + 2 + (–1) = 6 – 8 + 5 – 3 + 2 – 1 =
=6 + 5 + 2 – 8 – 3 – 1 = 13 – 12 = 1)
ε) Σ (είναι x + (–3) = –2 ή x = (–2) – (–3) ή x = (–2) + (+3) ή x = +1)
στ) Λ (είναι x + (–2) = +5 ή x = (+5) – (–2) ή x = (+5) + (+2) ή x = +7.
Είναι x – (+7) = –10 + (+5) ή x – (+7) = (–5) ή x = (–5) – (–7) ή x = (–5) + (+7)
ή x = +2. Επομένως, οι εξισώσεις έχουν διαφορετικές λύσεις)
ζ) Σ (είναι x – (–2) = (–8) + (+7) – (–4) ή x + 2 = –8 + 7 + 4 ή x = –8 – 2 + 7 +4
ή x = –10 + 11 ή x = 1

2. α) 5 – (–7) = 5 + 7 = 12, β) –8 – (+8) = –8 – 8 = –16, γ) –2 – (–15,2) = –2 + 15,2 = 13,2, δ) 14,55 – 18,45 = –3,9, ε) $-\frac{2}{7}-\left(-\frac{2}{7}\right)=-\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=0$

3. α) |+3| + |–2| + |–9| = 3 + 2 + 9 = 14
β) |–20| + |–10| – |+10| = 20 + 10 – 10 = 20
γ) |–3| – |–2| + |–5| – |+6| = 3 – 2 + 5 – 6 = 3 + 5 – 2 – 6 = 0

4. α) (+5) – (+3) + (+8) = 5 – 3 + 8 = 5 + 8 – 3 = 13 – 3 = 10
β) (–25) + (–4) – (–10) = –25 – 4 + 10 = –29 + 10 = –19
γ) (+12) + (+2) – (–8) = 12 + 2 + 8 = 22

5.
Γραμμή 1:
Είναι α = +3 και α + β = –5 ή (+3) + β = –5 ή β = (–5) – (+3) ή β = (–5) + (–3)
ή β = –8
Είναι α – β = (+3) – (–8) = (+3) + (+8) = +11
Γραμμή 2:
Είναι β = –8 και α + β = +10 ή α + (–8) = +10 ή α = (+10) – (–8) ή α = 10 + 8
ή α = 18
Είναι α – β = (+18) – (–8) = 18 + 8 = 26
Γραμμή 3
Είναι α = –2, β = –5 και α + β = (–2) + (–5) = –7

Είναι α – β = (–2) – (–5) = (–2) + (+5) = 3
Γραμμή 4
Είναι α = –9 και α + β = +6 ή (–9) + β = 6 ή β = (+6) – (–9) ή β = 6 + 9 ή β = 15
Είναι α – β = (–9) – (+15) = –24

6. α) x + (–8) = –18 ή x = (–18) – (–8) ή x = (–18) + (+8) ή x = –10
β) x + 12 = –14 ή x = –14 – 12 ή x = –26

γ) $x+\frac{5}{4}=\frac{7}{8}$ ή $x=\frac{7}{8}-\frac{5}{4}$ ή $x=\frac{7}{8}-\frac{10}{8}$ ή $x=-\frac{3}{8}$ ή x = –0,375

δ) $x-\frac{5}{4}=2$ ή $x=2+\frac{5}{4}$ ή $x=\frac{8}{4}+\frac{5}{4}$ ή $x=\frac{13}{4}$ ή x = 3,25

7.
Γραμμή 1
Είναι α – β = 7 – 3 = 4
Είναι β – α = 3 – 7 = –4
Γραμμή 2
Είναι $2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}$ και $3\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$. Άρα:

Είναι $\alpha-\beta=\frac{11}{4}-\frac{13}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

Είναι $\beta-\alpha=\frac{13}{4}-\frac{11}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Γραμμή 3
Είναι α – β = (–5,55) – (–2,45) = (–5,55) + (2,45) = –3,1
Είναι β – α = (–2,45) – (–5,55) = (–2,45) + (+5,55) = 3,1
Γραμμή 4
Είναι α – β = 3 – (–2,1) = 3 + 2,1 = 5,1
Είναι β – α = (–2,1) – 3 = –2,1 – 3 = –5,1

Παρατηρούμε ότι σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτουν αντίθετοι αριθμοί: 4, –4, $-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$, –3,1, 3,1, 5, 1, –5,1

8. α) 11 – (12 – 2) + (10 – 5) – (8 + 5) 11 – 10 + 5 – 13 = 11 + 5 – 10 – 13 =
=16 – 23 = –7
β) – (13,7 – 2,6) + 14,8 – (–8,7 + 5) = – (+11,1) + 14,8 – (–3,7) =
=–11,1 + 14,8 + 3,7 = 7,4

γ) $\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{7}{12}+\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}-\left(-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{7}{12}+\frac{10}{12}\right)$

$= \frac{2}{12} + \frac{6}{12} - \frac{17}{12} = -\frac{9}{12} = -\frac{3}{4} = -0,75$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. **Να υπολογίσετε τις διαφορές: α.** (+ 7) – (+ 3), **β.** (– 12) – (– 8), **γ.** (+ 5) – (+ 7), **δ.** (– 6) – (– 10), **ε.** (+ 7) – (+ 7), **στ.** 0 – (+ 3)

2. **Να κάνετε τις πράξεις: α.** (– 2) – (+ 3) – (– 7), **β.** (+ 5) – (– 7) + (– 3) – (+ 5), **γ.** (– 12) + (– 3) – (– 7) – (+ 5), **δ.** (+ 13) – (+ 3,4) – (– 7,6) + (– 1)

3. Αν α = + 2, β = – 3, γ = – 6 και δ = + 5, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: α. Α = – α + β – γ – δ, β. Β = α – β + γ – 7

7.5 • Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

Πρόσημο Γινομένου Ρητών Αριθμών

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. Δηλ.
- Αν α > 0 και β > 0, τότε αβ > 0
- Αν α < 0 και β < 0, τότε αβ > 0

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. Δηλ.
Αν α > 0 και β < 0, τότε αβ < 0
Αν αβ > 0, τότε οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι
Αν αβ < 0, τότε οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	Αντιμεταθετική
$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$	Προσεταιριστική
$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$	
$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$	
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	Επιμεριστική

Παρατηρήσεις

1. Οι ρητοί αριθμοί **α** και **β** λέγονται **αντίστροφοι**, όταν **αβ = 1**

2. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι.

Πολλαπλασιασμός Ρητών

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «+». Δηλ.

- $+ \cdot + = +$ $\quad (+3) \cdot (+2) = (|3|) \cdot (|2|) = + (3 \cdot 2) = + 6$
- $- \cdot - = +$ $\quad (-5) \cdot (-4) = + (5 \cdot 4) = 20$

Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε το πρόσημο «–». Δηλ.

- $+ \cdot - = -$ $\quad (+2) \cdot (-5) = -10$
- $- \cdot + = -$ $\quad (-7) \cdot (+3) = -21$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα γινόμενα: α. (+2) · (+15), β. (–3) · (–8), γ. (+5) · (–14), δ. (–8) · (+9)

Λύση

α. Επειδή οι αριθμοί +2 και +15 είναι ομόσημοι, το γινόμενό τους έχει πρόσημο «+». Οπότε έχουμε: $(+2) \cdot (+15) = + (|+2| \cdot |+15|) = + (2 \cdot 15) = + 30$ ή
$(+2) \cdot (+15) = + (2 \cdot 15) = +30$ ή
$(+2) \cdot (+15) = +30$

β. Ομοίως έχουμε: $(-3) \cdot (-8) = + (|-3| \cdot |-8|) = + (3 \cdot 8) = +24$ ή $(-3) \cdot (-8) = 24$

γ. Επειδή οι αριθμοί +5 και –14 είναι ετερόσημοι, το γινόμενό τους θα έχει πρόσημο «–». Οπότε: $(+5) \cdot (-14) = - (5 \cdot 14) = -70$

δ. Ομοίως έχουμε: $(-8) \cdot (+9) = -72$

2. Αν α = –3, β = –5 και γ = –1, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
α. Α = αβ – 4β – αγ, **β.** Β = (2α – β) · (γ – αβ) + βγ

Λύση
α. Α = αβ – 4αβ – αγ = –3 · (–5) – 4 · (–5) – (–3) · (–1) = 15 + 20 – 3 = 32
β. Β = (2α – β) · (γ – αβ) + βγ = [2 · (–3) – (–5)] · [–1 – (–3) · (–5)] + (–5) · (–1)
= (–6 + 5) · (–1 – 15) + 5 = –1 · (–16) + 5 = 16 + 5 = 21

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα

Προσθέτουμε το +524,5 €, 10 φορές (όσες και οι ημέρες που έβγαζε αυτό το κέρδος). Είναι:
(+524,5) + (+524,5) + … + (+524,5) = 5.245 €, άρα (+524,5) · (+10) = 5.245 €
Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού εκφράζει το συνολικό κέρδος, δηλ. τα χρήματα τα οποία εισέπραξε ο έμπορος, επομένως το πρόσημο είναι «+».
Προσθέτουμε το –265,4 €, 10 φορές (όσες και οι ημέρες που είχε αυτή ζημιά). Είναι:
(–265,4) · (+10) = –2.654 €.
Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού εκφράζει τη συνολική ζημιά, δηλ. τα χρήματα τα οποία έχασε ο έμπορος, επομένως το πρόσημο είναι «–».
Παρατηρούμε ότι το γινόμενο δύο θετικών ρητών είναι θετικός ρητός, ενώ το γινόμενο ενός θετικού με αρνητικό ρητό είναι αρνητικός ρητός.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) +, β) –, γ) μεταβάλλεται, δ) 1, ε) αρνητικών.

2. α) (–1) (–1) = + (1 · 1) = +1
β) –3 (–10) = + (3 · 10) = +30
γ) –1,2 (–0,5) = + (1,2 · 0,5) = +0,6
δ) 0 · (–10.589) = 0
ε) 1 · (–20.015) = –20.015
στ) –0,725 (+1.000) = –(0,725 · 1.000) = –725

ζ) $\frac{12}{25}\left(-\frac{15}{24}\right) = -\left(\frac{12}{25}\cdot\frac{15}{24}\right) = -\frac{180}{600} = -0,3$

3. α) –5 · 27 + 2 · 27 = (–5 + 2) · 27 = (–3) · 27 = –81

β) $10,35\,(-25)+9,65\,(-25)=(10,35+9,65)\,(-25)=20\,(-25)=-500$

γ) $-\frac{6}{7}(-10)+\left(-\frac{6}{7}\right)(+3)=\left(-\frac{6}{7}\right)(-10+3)=\left(-\frac{6}{7}\right)(-7)=+\left(\frac{6}{7}\cdot 7\right)=+6$

4. **Γραμμή 1**

$(-2)(-1)=+(2\cdot 1)=+2,(-2)\left(\frac{1}{2}\right)=+\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=+1,(-2)\cdot 0=0,$

$(-2)(+2)=-(2\cdot 2)=-4,(-2)(+3)=-(2\cdot 3)=-6$

Γραμμή 2:

$(-3,2)(-1)=+(3,2\cdot 1)=+3,2,\ (-3,2)\left(-\frac{1}{2}\right)=+\left(3,2\cdot\frac{1}{2}\right)=+1,6,\ (-3,2)\cdot 0=0$

$(-3,2)(+2)=-(3,2\cdot 2)=-6,4,(-3,2)(+3)=-(3,2\cdot 3)=-9,6$

Γραμμή 3:

$\left(+\frac{3}{2}\right)(-1)=-\left(\frac{3}{2}\cdot 1\right)=-\frac{3}{2}=-1,5,\left(+\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}=-0,75$

$\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot 0=0,\left(+\frac{3}{2}\right)\cdot(+2)=+\left(\frac{3}{2}\cdot 2\right)=+3,\left(+\frac{3}{2}\right)(+3)=+\left(\frac{3}{2}\cdot 3\right)+\frac{9}{2}=+4,5$

Γραμμή 4:

$(+10)(-1)=-(10\cdot 1)=-10,(+10)\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left(10\cdot\frac{1}{2}\right)=-5,(+10)\cdot 0=0,$

$(+10)(+2)=+(10\cdot 2)=+20,(+10)(+3)=+(10\cdot 3)=+30$

5. α) $(-7)(-8+10-5)=(-7)(-3)=+(7\cdot 3)=+21$

β) $(0,25-0,05)\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=0,20\left(-\frac{2}{8}+\frac{4}{8}-\frac{1}{8}\right)=0,20\left(+\frac{1}{8}\right)$

$=+\left(0,20\cdot\frac{1}{8}\right)=+(0,20\cdot 0,125)=+0,025$

γ) $(-10)-6\cdot\frac{1}{6}=-10-1=-11$

6. α) $(5+\alpha)(2+\beta)=(5+\alpha)\cdot 2+(5+\alpha)\cdot\beta=10+2\alpha+5\beta+\alpha\beta$

β) $(\alpha+7)(\alpha-7)=(\alpha+7)\cdot\alpha+(\alpha+7)(\alpha-7)=\alpha\cdot\alpha+7\alpha+\alpha(-7)+7(-7)$
$=\alpha^2+(7-7)\cdot\alpha-49=\alpha^2-49$

γ) $(\alpha-3)(\beta-3)=(\alpha-3)\cdot\beta+(\alpha-3)\cdot(-3)=\alpha\beta-3\beta+\alpha(-3)+(-3)(-3)$
$=\alpha\beta-3\beta-3\alpha+9$

δ) $(\gamma+8)(\delta+5)=(\gamma+8)\cdot\delta+(\gamma+8)\cdot5=\gamma\delta+8\delta+5\gamma+8\cdot5=\gamma\delta+8\delta+5\gamma+40$

7. α) Είναι $(-1)(-1)=+1$, αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.

β) Είναι $(-1)(-1)(-1)=-1$, αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό.

γ) Είναι $(-1)(-1)(-1)(-1)=+1$, αφού το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.

8. Για α = 3 είναι

$A=(3-1)(3+1)(3-2)(3+2)=2\cdot4\cdot1\cdot5=40$

Για β = 2 είναι

$B=2(2-3)(2+3)(2-5)(2+5)=2(-1)(+5)(-3)(+7)=+(2\cdot1\cdot5\cdot3\cdot7)=+210$

Για γ = 0,5 είναι

$\Gamma=0,5(2\cdot0,5-1)(3\cdot0,5+1)(4\cdot0,5-2)(0,5+2)(0,5-2)$
$=0,5\cdot0\cdot2,5\cdot0\cdot2,5\cdot(-1,5)=0$

9. Γραμμή 1:

$A=xyz=(-2)(+0,5)(+1)=-(2\cdot0,5\cdot1)=-1$

$B=yx\omega=(+0,5)(-2)(-3)=+(0,5\cdot2\cdot3)=+3$

$\Gamma=xA-B=(-2)(-1)-(+3)=(+2)-(+3)=2-3=-1$

$AB+\Gamma=(-1)(+3)+(-1)=(-3)+(-1)=-4$

Γραμμή 2:

$A=xyz=\left(-\frac{1}{2}\right)(+6)(-4)=+\left(\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\right)=+12$

$B=yx\omega=(+6)\left(-\frac{1}{2}\right)(-0,3)=+\left(6\cdot\frac{1}{2}\cdot0,3\right)=+0,9$

$$\Gamma = xA - B = \left(-\frac{1}{2}\right)(+12) - (+0,9) = -\left(\frac{1}{2}\cdot 12\right) - (+0,9) = -6 - 0,9 = -6,9$$

$$AB + \Gamma = (+12)(+0,9) + (-6,9) = (12\cdot 0,9) + (-6,9) = +10,8 - 6,9 = 3,9$$

Γραμμή 3:

$$A = xyz = (-2)\left(+\frac{3}{2}\right)(+0,2) = -\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot 0,2\right) = -0,6$$

$$B = yx\omega = \left(+\frac{3}{2}\right)(-2)(-7) = +\left(\frac{3}{2}\cdot 2\cdot 7\right) = +21$$

$$\Gamma = xA - B = (-2)(-0,6) - (+21) = +(2\cdot 0,6) - (+21) = 1,2 + (-21) = -19,8$$

$$AB + \Gamma = (-0,6)(+21) + (-19,8) = -(0,6\cdot 21) + (-19,8) = -12,6 - 19,8 = -32,4$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες:

α. Το πρόσημο του γινομένου δύο αρνητικών ρητών είναι «–».
β. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
γ. Αν $\alpha \cdot \beta = 5$, τότε οι αριθμοί α και β είναι πάντοτε θετικοί.
δ. Αν $\alpha \cdot \beta = -3$, τότε οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α. $(+5)\cdot(+6)$,
β. $(+7)\cdot(+9)$,
γ. $(-3)\cdot(-8)$,
δ. $(-6)\cdot(-7)$,
ε. $(+3)\cdot(-5)$,
στ. $(+6)\cdot(-8)$.

3. Αν $\alpha = -2$, $\beta = -3$ και $\gamma = -1$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α. $A = 3\alpha - 2\beta + 5\gamma$,
β. $B = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma$,
γ. $\Gamma = \gamma - \alpha\beta\gamma + 2\beta$,
δ. $\Delta = (\alpha - \beta)\cdot(\beta - 3\gamma)$

7.6 • Διαίρεση Ρητών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

Για να **διαιρέσουμε** δυο ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε:

- το πρόσημο «+», αν είναι ομόσημοι. Δηλ. + : + = + και – : – = +
  π.χ. (+15) : (+3) = +5 (–21) : (–7) = 3
- το πρόσημο «–», αν είναι ετερόσημοι. Δηλ. + : – = – και – : + = –
  π.χ. (+42) : (–6) = –7 (–72) : (+9) = –8

Το πηλίκο της διαίρεσης α : β ή $\frac{\alpha}{\beta}$ λέγεται λόγος του α προς το β και ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης βx = α. Δηλ. βx = α ή $x = \frac{\alpha}{\beta}$ (β ≠ 0).

Είναι: $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$

Διαίρεση με διαιρέτη το 0 δεν ορίζεται.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:
α. –36 : (–9), **β.** 48 : (–12), **γ.** –63 : 7, **δ.** 45 : (–9), **ε.** –3,6 : (–1,2)

Λύση
α. –36 : (–9) = + (36 : 9) = +4
β. 48 : (–12) = – (48 : 12) = –4
γ. –63 : 7 = – (63 : 7) = –9
δ. 45 : (–9) = – (45 : 9) = –5
ε. –3,6 : (–1,2) = + (3,6 : 1,2) = –3

2. Να λύσετε τις εξισώσεις: α. 7x = –21, **β.** –18x = 9, **γ.** $-\frac{2}{3}x = -4$

α. 7x = –21 ή x = $\frac{-21}{7}$ ή x = $-\frac{21}{7}$ ή x = –3

β. $-18x = 9$ ή $x = \dfrac{9}{-18}$ ή $x = -\dfrac{9}{18}$ ή $x = -\dfrac{1}{2}$

γ. $-\dfrac{2}{3}x = -4$ ή $x = -4 : \left(-\dfrac{2}{3}\right)$ ή $x = +\left(4 : \dfrac{2}{3}\right)$ ή $x = 4 \cdot \dfrac{3}{2}$ ή $x = 6$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) +, β) –, γ) διαιρετέο, διαιρέτη, δ) λόγος

2. α) $(+15{,}15) : (+3) = +(15{,}15 : 3) = +5{,}05$

β) $(-4{,}5) : (-1{,}5) = +(4{,}5 : 1{,}5) = +3$

γ) $(-81) : (+0{,}9) = -(81 : 0{,}9) = -90$

δ) $49 : (-7) = -(49 : 7) = -7$

3. **Γραμμή 1**

$$x + y = \frac{-7}{3} + \frac{5}{-6} = \frac{-14}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{19}{6}$$

$$x - y = \frac{-7}{3} - \frac{5}{-6} = -\frac{7}{3} - \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{14}{6} + \frac{5}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

$$xy = \left(\frac{-7}{3}\right) \cdot \left(\frac{5}{-6}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = +\left(\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{6}\right) = +\frac{35}{18}$$

$$x : y = \left(\frac{-7}{3}\right) : \left(\frac{5}{-6}\right) = \left(-\frac{7}{3}\right)\left(-\frac{6}{5}\right) = +\frac{42}{15}$$

Γραμμή 2

$$x + y = 1{,}7 + 2{,}3 = 4$$

$$x - y = 1{,}7 - 2{,}3 = -0{,}6$$

$$xy = 1{,}7 \cdot 2{,}3 = 3{,}91$$

$$x : y = 1{,}7 : 2{,}3 = \frac{17}{10} : \frac{23}{10} = \frac{17}{10} \cdot \frac{10}{23} = \frac{170}{230} = \frac{17}{23}$$

Γραμμή 3

$$x+y=\left(-\frac{4}{5}\right)+(-1)=-\frac{4}{5}-1=-\frac{4}{5}-\frac{5}{5}=-\frac{9}{5}$$

$$x-y=\left(-\frac{4}{5}\right)-(-1)=\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{5}=\frac{1}{5}$$

$$xy=\left(-\frac{4}{5}\right)(-1)=+\frac{4}{5}$$

$$x:y=\left(-\frac{4}{5}\right):(-1)=+\frac{4}{5}$$

4. α) $\frac{10}{0,25}=\frac{1.000}{25}=40$

β) $\frac{-0,75}{-0,5}=+\frac{0,75}{0,5}=+\frac{75}{50}=+1,5$

γ) $\frac{-120}{(-12)+(-8)}=\frac{-120}{12-8}=\frac{-120}{-20}=+\frac{120}{20}=+6$

δ) Είναι $3\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$ και $2\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$, άρα:

$$\left(-3\frac{1}{5}\right):\left(-2\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{16}{5}\right):\left(-\frac{8}{3}\right)=+\left(\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{8}\right)=+\frac{48}{40}=+\frac{6}{5}$$

5. α) $-3x=74$ ή $x=74:(-3)$ ή $x=-\frac{74}{3}=-24\frac{2}{3}$

β) $-0,14x=-49$ ή $x=(-49):(-0,14)$ ή $x=+(49:0,14)$ ή $x=+350$

γ) $x(-2)=12$ ή $(-2)x=12$ ή $x=12:(-2)$ ή $x=-(12:2)$ ή $x=-6$

δ) $\frac{2}{3}x=-\frac{4}{6}$ ή $x=\left(-\frac{4}{6}\right)$ ή $x=\left(-\frac{4}{6}\right):\left(\frac{2}{3}\right)$ ή $x=-\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{2}\right)$ ή $x=-\frac{12}{12}=-1$

6. α) $\frac{-1}{3}+\frac{2}{-6}-\frac{12}{-15}=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{6}\right)-\left(-\frac{12}{15}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)$

$=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=-\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{2}{15}$

β) $-\dfrac{(-2)(-5)(-1)}{-10}=-\left[-\dfrac{(-2)(-5)(-1)}{10}\right]=+\dfrac{(-2)(-5)(-1)}{10}=-\dfrac{(2\cdot5\cdot1)}{10}=-\dfrac{10}{10}=-1$

γ) $\left(\dfrac{-7}{3}-\dfrac{5}{-3}\right):\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\left[\dfrac{-7}{3}-\left(-\dfrac{5}{3}\right)\right]:\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\left(-\dfrac{7}{3}+\dfrac{5}{3}\right):\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

$=\left(-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=+\dfrac{4}{9}$

7. α) $\left[(-8)\left(\dfrac{-7}{64}\right)-(-15):(-8)\right](-8)+(-27):\left(-\dfrac{9}{8}\right)$

$=\left\{+\left(8\cdot\dfrac{7}{64}\right)-\left[+(15:8)\right]\right\}(-8)+(-27):\left(-\dfrac{9}{8}\right)=$

$\left(\dfrac{56}{64}-\dfrac{15}{8}\right)(-8)+\left(27:\dfrac{9}{8}\right)=\left(\dfrac{7}{8}-\dfrac{15}{8}\right)(-8)+\left(27\cdot\dfrac{8}{9}\right)=$

$\left(-\dfrac{8}{8}\right)\cdot(-8)+\dfrac{216}{9}=+8+24=+32$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Το πηλίκο ομόσημων αριθμών έχει πρόσημο ……

β. Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, τότε $\dfrac{\alpha}{\beta}$ … 0

γ. $\dfrac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\dfrac{\dots}{\dots}$

δ. Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση $\beta x = \alpha$ έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\dots}{\dots}$

ε. Διαίρεση με διαιρέτη το 0 ……

2. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α. (+15) : (+3), **β.** (–24) : (–8) , **γ.** (–45) : (+9), **δ.** (+39) : (–13)

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $3x = 6$,

β. $-2x = 5$,

γ. $-6x = -18$,

δ. $5x = -\frac{2}{3}$,

ε. $-\frac{3}{5}x = 2$,

στ. $-\frac{5}{3}x = -\frac{10}{3}$

7.7 • Δεκαδική Μορφή Ρητών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

Αν ένας ρητός είναι ακέραιος, τότε προφανώς γράφεται ως δεκαδικός.

Αν ένας ρητός είναι κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ($\frac{\alpha}{\beta}$ ανάγωγο), τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, δηλ. $\beta = 2^{\nu} \cdot 5^{\kappa}$, τότε ο ρητός $\frac{\alpha}{\beta}$ γράφεται ως δεκαδικός, π.χ. $\frac{37}{20} = \frac{37}{2^2 \cdot 5} = 1{,}85$

Αν ο παρονομαστής δε γράφεται ως γινόμενο δυνάμεων του 2 και του 5, τότε ο ρητός αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ δε γράφεται ως δεκαδικός.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε π.χ. $\frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$, όπου το ψηφίο 6 επαναλαμβάνεται ατελείωτα.

Ο αριθμός 0,666… λέγεται περιοδικός δεκαδικός με περίοδο το 6 και γράφεται συμβολικά $0{,}\overline{6}$.

Π.χ. $-\frac{163}{99} = -1{,}646464\ldots$

Τους αριθμούς που βρήκαμε παραπάνω τους ονομάζουμε περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Το πλήθος των επαναλαμβανόμενων δεκαδικών ψηφίων κάθε περιοδικού αριθμού ονομάζεται περίοδος.
Κάθε **ρητός** αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή **δεκαδικού** ή **περιοδικού δεκαδικού** αριθμού.

Παρατήρηση

- Ένας περιοδικός αριθμός λέγεται απλός περιοδικός, όταν η περίοδος ξεκινά μετά την υποδιαστολή, διαφορετικά λέγεται μικτός περιοδικός.

Αντίστροφα: Κάθε περιοδικός δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί ως ρητός με κλασματική μορφή.
Άρα:
Το σύνολο των ρητών αποτελείται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σχόλιο

Για να μετατρέψουμε έναν περιοδικό δεκαδικό αριθμό κάνουμε τα εξής βήματα:

1. Θέτουμε τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό α με x δηλ. x = α.
2. Αν ο x είναι μικτός, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με κατάλληλη δύναμη του 10, ώστε ο μικτός να γίνει απλός περιοδικός.
3. Αν ο x είναι απλός, πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (1) με μια δύναμη του 10, που έχει εκθέτη όσα τα ψηφία της περιόδου.
4. Γράφουμε το 2ο μέλος ως άθροισμα ενός φυσικού και ενός άλλου που εκφράζεται με τη βοήθεια του x.
5. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.

1. Να γράψετε σε κλασματική μορφή τους δεκαδικούς περιοδικούς αριθμούς: α. $0,\overline{7}$, β. $-1,\overline{53}$.

Λύση

α. $0,\overline{7}$

Έστω x = $0,\overline{7}$ Είναι
x = 0,777…
10x = 7,777…
10x = 7 + 0,777…
10x = 7 + x
10x – x = 7

$(10 - 1)x = 7$
$9x = 7$

$$x = \frac{7}{9}$$

Άρα $0,\overline{7} = \frac{7}{9}$

β. $-1,\overline{53}$

Έστω $x = 1,\overline{53}$ Είναι
$x = 1,535353\ldots$
$100x = 153,5353$
$100x = 153 + 0,5353\ldots$
$100x = 153 + x - 1$
$100x - x = 153 - 1$
$(100 - 1)x = 152$
$99x = 152$

$$x = \frac{152}{99}$$

Άρα $-1,\overline{53} = x = -\frac{152}{99}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

1. α) $-\frac{15}{10} = -1,5$, β) $\frac{5}{8} = 0,625$, γ) $\frac{13}{14} = 0,9\overline{285714}$, δ) $\frac{20}{11} = 1,\overline{81}$,
ε) $\frac{32}{31} = 1,\overline{032258064516129}$

2. α) $57,92 = \frac{5.792}{100} = \frac{5.792:4}{100:4} = \frac{1.448}{25}$

β) Θέτουμε $x = 2,\overline{8}$ και έχουμε: $x = 2,888\ldots$ ή $10x = 28,888\ldots$ ή $10x = 26 + 2,888\ldots$
ή $10x = 26+x$ ή $10x - x = 26$ ή $(10 - 1)x = 26$ ή $9x = 26$ ή $x = \frac{26}{9}$

Συμπεραίνουμε ότι $2,\overline{8}=\frac{26}{9}$

γ) Θέτουμε $x=3,\overline{83}$ και έχουμε: x = 3,838383… ή 100x = 383,838383… ή 100x = 380 + 3,838383… ή 100x = 380 + x ή 100x – x = 380 ή (100 – 1)x = 380 ή 99x = 380 ή $x=\frac{380}{99}$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $3,\overline{83}=\frac{380}{99}$.

δ) Ομοίως προς τα προηγούμενα.

ε) Ομοίως προς τα προηγούμενα.

3. α) 3, β) 7,7, γ) 7,326

Δραστηριότητα για το σπίτι

Όταν ο Αχιλλέας βαδίσει το 1 στάδιο που τον χωρίζει από τη χελώνα, αυτή θα έχει βαδίσει το $\frac{1}{10}$ του σταδίου και επομένως θα προηγείται. Όταν ο Αχιλλέας βαδίσει το $\frac{1}{10}$ του σταδίου, η χελώνα θα έχει βαδίσει το $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$ και επομένως πάλι θα προηγείται. Μας δίνεται η εντύπωση ότι η χελώνα πάντα θα προηγείται. Όμως όλοι γνωρίζουμε από την εμπειρία μας ότι ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα. Η απόσταση που θα διανύσει ο Αχιλλέας μέχρι να φθάσει τη χελώνα είναι:

$$A=1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1.000}+\frac{1}{10.000}+\ldots \text{ ή}$$

A = 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + … ή
A = 1,1111…

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η απόσταση Α που πρέπει να καλύψει ο Αχιλλέας είναι ίση με τον αριθμό $1,\overline{1}$.

Είναι $x=1,\overline{1}$ και έχουμε:
x = 1,1111… ή 10x = 11,111… ή 10x = 11 + 0,1111… + 1,1111… - 1,1111… ή 10x = 11 + 0,1111… + x – 1,1111… ή 10x – x = 11 + 0,1111… - 1,1111… ή 9x = 11 – 1

ή 9x = 10 ή $x=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$

Τελικά ο Αχιλλέας θα φθάσει τη χελώνα, όταν βαδίσει $1\frac{1}{9}$ στάδια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε με δεκαδική μορφή τους ρητούς:

α. $-\frac{7}{10}$, **β.** $\frac{15}{8}$, **γ.** $\frac{17}{20}$, **δ.** $\frac{5}{3}$, **ε.** $\frac{30}{11}$, **στ.** $-\frac{91}{44}$

2. Να βρείτε την κλασματική μορφή των αριθμών:

α. 3,2, **β.** – 5,45, **γ.** 0,047, **δ.** $1,\overline{5}$, **ε.** $3,\overline{26}$, **στ.** $9,7\overline{3}$, **ζ.** $1,2\overline{75}$

7.8 • Δυνάμεις Ρητών Αριθμών με Εκθέτη Φυσικό

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμοί

Δύναμη με βάση ένα ρητό αριθμό α και εκθέτη φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ που συμβολίζεται με α^{ν}, λέμε το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α. Δηλ. $\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$

Ορίζουμε ακόμη $\alpha^1 = \alpha$

Πρόσημο δύναμης

Μία δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.

Π.χ. $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8 > 0$

Μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός:

Π.χ. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81 > 0$

Μια δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός:

Π.χ. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$

Παρατήρηση
Επειδή ο εκθέτης σε μια δύναμη δηλώνει το πλήθος των παραγόντων, οι προηγούμενες προτάσεις απορρέουν από τις αντίστοιχες προτάσεις του πρόσημου γινομένου πολλών παραγόντων.
Άρα:
1. Αν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^{\nu} > 0$
2. Αν $\alpha < 0$, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις:
- Αν ο ν είναι άρτιος, τότε $\alpha^{\nu} > 0$
- Αν ο ν είναι περιττός, τότε $\alpha^{\nu} < 0$

Ιδιότητες

1. Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση , αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών: $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

2. Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη, τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου:

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu} \text{ ή } \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

3. Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτόν: $(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu}$

4. Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθέναν από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτόν:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$$

5. Για να υψώσουμε μια δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών: $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu}$

Πρόσημο Βάσης – Πρόσημο Δύναμης

Έχουμε $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = +3^4 = 3^4$ Άρα $(-3)^4 = 3^4$

Γενικά, αν ν άρτιος, τότε $(-\alpha)^{\nu} = \alpha^{\nu}$
Έχουμε $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -2^5$
Άρα $(-2)^5 = -2^5$

Γενικά, αν ν περιττός, τότε $(-\alpha)^{\nu} = -\alpha^{\nu}$
Αν ν άρτιος, τότε $(-1)^{\nu} = 1$, π.χ. $(-1)^{38} = 1$
Αν ν περιττός, τότε $(-1)^{\nu} = -1$, π.χ. $(-1)^{17} = -1$

Παρατήρηση
Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ των συμβόλων $(-\alpha)^{\nu}$ και $-\alpha^{\nu}$.
Το $(-\alpha)^{\nu}$ είναι η δύναμη του $-\alpha$ στη νιοστή.
Το $-\alpha^{\nu}$ είναι ο αντίθετος της δύναμης α^{ν} και διαβάζεται «πλην το α στη νιοστή», π.χ. είναι $-3^4 = -81$, διότι το «–» είναι πρόσημο της δύναμης και όχι της βάσης της δύναμης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών: α. $(-5)^4$, β. $(-13)^5$, γ. -7^6, δ. $-(-6)^7$

Λύση
α. Επειδή η βάση της δύναμης $(-5)^4$ είναι αρνητικός αριθμός και ο εκθέτης είναι άρτιος έχουμε: $(-5)^4 > 0$. Άρα, το πρόσημο του αριθμού είναι «+».
β. Αφού $-13 < 0$ και ο εκθέτης 5 (που δηλώνει το πλήθος των παραγόντων) είναι περιττός έχουμε $(-13)^5 < 0$. Οπότε το πρόσημο του αριθμού «–».
γ. Η παράσταση -7^6 δεν είναι δύναμη, αλλά ο αντίθετος αριθμός της δύναμης 7^6. Είναι $7^6 > 0$, οπότε $-7^6 < 0$. Άρα, το πρόσημο του αριθμού είναι «–».
δ. Επειδή $(-6)^7 < 0$, έχουμε $-(-6)^7 > 0$. Οπότε το πρόσημο του αριθμού είναι «+».

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Δραστηριότητα
Την πρώτη ώρα λειτουργίας του υπολογιστή το ένα αρχείο θα μολύνει 3 άλλα στοιχεία. Τη δεύτερη ώρα λειτουργίας καθένα από αυτά τα αρχεία θα μολύνει με τη σειρά του άλλα 3 αρχεία. Δηλ. θα μολυνθούν: $3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ αρχεία

Την τρίτη ώρα λειτουργίας καθένα από αυτά τα 9 αρχεία θα μολύνει άλλα 3 αρχεία. Δηλ. θα μολυνθούν: $3 + 3 + \ldots + 3 = 9 \cdot 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ νέα αρχεία.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο:
την τέταρτη ώρα λειτουργίας θα μολυνθούν: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ νέα αρχεία
την πέμπτη ώρα λειτουργίας θα μολυνθούν: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ νέα αρχεία.

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) θετικός, β) άρτιο, γ) αρνητικό, δ) άθροισμα, ε) τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου, στ) κάθε παράγοντα, ζ) καθένα από τους όρους, η) γινόμενο

2. Υπολογίζουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής:

$3+5^2=3+5\cdot 5=3+25=28$

$(3+5)^2=8^2=8\cdot 8=64$

$3\cdot 5^2=3\cdot 25=75$

$(3\cdot 5)^2=15^2=15\cdot 15=225$

$3-5^2=3-5\cdot 5=3-25=-22$

$(3-5)^2=(-2)^2=(-2)(-2)=+4$

$\frac{3^2}{5}=\frac{3\cdot 3}{5}=\frac{9}{5}=1,8$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3^2}{5^2}=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 5}=\frac{9}{25}=0,36$

Επομένως η αντιστοίχιση γίνεται ως εξής:
$3+5^2\rightarrow$ άθροισμα των 3 και $5^2\rightarrow 28$
$(3+5)^2\rightarrow$ τετράγωνο του αθροίσματος 3 και $5\rightarrow 64$
$3\cdot 5^2\rightarrow$ γινόμενο των 3 και $5^2\rightarrow 75$
$(3\cdot 5)^2\rightarrow$ τετράγωνο του γινομένου 3 επί $5\rightarrow 225$
$3-5^2\rightarrow$ διαφορά των 3 και $5^2\rightarrow$ -22
$(3-5)^2\rightarrow$ τετράγωνο της διαφοράς 3 πλην $5\rightarrow 4$

$\frac{3^2}{5}\rightarrow$ πηλίκο των $3^2\rightarrow$ και $5\rightarrow 1,8$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2\rightarrow$ τετράγωνο του πηλίκου 3 δια $5\rightarrow 0,36$

3. $A=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5=(-1)+(+1)+(-1)+(+1)+(-1)$
$=-1+1-1+1-1=-1$

$B=32\cdot 5^4-25\cdot 4^5+87,5\cdot 4^3=32\cdot 625-25\cdot 1.024+87,5\cdot 64$
$=20.000-25.600+5.600=0$

$\Gamma=-\frac{(-6)^5}{3^5}-\frac{8^4}{(-4)^4}+\frac{10^3}{(-5)^3}=-\frac{-6^5}{3^5}-\frac{8^4}{+4^4}+\frac{10^3}{-5^3}=+\frac{6^5}{3^5}-\frac{8^4}{4^4}-\frac{10^3}{5^3}$

$$=\left(\frac{6}{3}\right)^5-\left(\frac{8}{4}\right)^4-\left(\frac{10}{5}\right)^3=2^5-2^4-2^3=32-16-8=8$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Αν $\alpha < 0$ και ν άρτιος, τότε $\alpha^\nu < 0$

β. $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

γ. $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha \cdot \beta^\nu$

δ. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

ε. $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

2. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω δυνάμεις είναι θετικές και ποιες αρνητικές:

α. $(+7)^3$, **β.** $(-5)^4$, **γ.** $\left(-\frac{3}{2}\right)^5$.

3. Να γράψετε ως μια δύναμη τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x^2 \cdot x^3$, β. $y^5 \cdot y$, γ. $\omega^3 \cdot \omega \cdot \omega^4$, δ. $\frac{x^5}{x^2}$, ε. $\frac{y^3}{y}$

7.9 • Δυνάμεις Ρητών Αριθμών με Εκθέτη Ακέραιο

ΘΕΩΡΙΑ

Η δύναμη κάθε αριθμού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη το 0 είναι ίση με τη μονάδα: $\alpha^0 = 1$, με $\alpha \neq 0$

Η δύναμη κάθε αριθμού διαφόρου του μηδενός με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με ένα κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}, \ \alpha \neq 0$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}, \ \alpha, \beta \neq 0$$

Οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό ισχύουν και για τις δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο.

Δηλ. ισχύουν:

$$\frac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{-\nu}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Αν $\nu < \mu$, τότε $\frac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu-\nu}}$, $\alpha \neq 0$

$$10^{-\nu} = \frac{1}{10^{\nu}} = 0,00...1$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις: α. 5^{-2}, β. 3^{-1}, γ. 10^{-3}, δ. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$, ε. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$, στ. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$

Λύση

α. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

β. $3^{-1}=\frac{1}{3}$

γ. $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0,001$

δ. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$

ε. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=4^3=64$

στ. $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{5}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. Γραμμή 1:

$$(\alpha+\beta)^2=\left[\frac{1}{2}+(-2)\right]^2=\left(\frac{1}{2}-2\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=+\left(\frac{3}{2}\right)^2=$$

$$=+\frac{9}{4}=+2,25$$

$$(\alpha\beta)^2=\left[\frac{1}{2}(-2)\right]^2=\left[-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 2\right]^2=(-1)^2=+1$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}}{-2}\right)^2=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-2}{1}}\right)^2=\left[\frac{1\cdot 1}{2(-2)}\right]^2=\left(\frac{1}{-4}\right)^2=\frac{1}{16}=+0,0625$$

$$(-\alpha)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{2}{1}\right)^2=+\frac{4}{1}=+4$$

$$(\gamma\beta)^{-1}=\left[\left(-\frac{1}{5}\right)(-2)\right]^{-1}=\left[+\left(\frac{1}{5}\cdot 2\right)\right]^{-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{1}=\frac{5}{2}=2,5$$

Γραμμή 2

$$(\alpha+\beta)^2=\left[(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left(-\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=+\frac{9}{4}=+2,25$$

$$(\alpha\beta)^2=\left[(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2=\left[+\left(1\frac{1}{2}\right)\right]^2=+\left(\frac{1}{2}\right)^2=+\frac{1}{2^2}=+\frac{1}{4}=+0,25$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\left(\frac{-1}{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{\frac{-1}{1}}{\frac{-1}{2}}\right)^2=\left[\frac{(-1)\cdot 2}{1\cdot(-1)}\right]^2=\left(\frac{-1\cdot 2}{-1\cdot 1}\right)=\left(\frac{-2}{-1}\right)^2=(+2)^2=+4$$

$$(-\alpha)^{-2}=\left[-(-1)\right]^{-2}=(+1)^{-2}=(+1)^2=+1$$

$$(\gamma\beta)^{-1}=\left[\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}=\left[-\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}=\left(-\frac{4}{3}\right)^{1}=-\frac{4}{3}$$

Γραμμή 3

$$(\alpha+\beta)^2=\left[10+(-10)\right]^2=(10-10)^2=0$$

$$(\alpha\beta)^2=\left[10(-10)\right]^2=\left[-(10\cdot 10)\right]^2=(-100)^2=+10.000$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\left[\frac{10}{(-10)}\right]^2=\left(-\frac{10}{10}\right)^2=+1$$

$$(-\alpha)^{-2}=(-10)^{-2}=\left(-\frac{10}{1}\right)^{-2}=\left(-\frac{1}{10}\right)^2=+\frac{1}{100}=+0,01$$

$$(\gamma\beta)^{-1}=\left[0,01(-10)\right]^{-1}=\left[-(0,01\cdot 10)\right]^{-1}=(-0,1)^{-1}=\left(-\frac{1}{10}\right)^{-1}=\left(-\frac{10}{1}\right)^{1}=-10$$

2. $A=(-1)^{-3}+(-1)^{-2}+(-1)^{-1}+(-1)^9+(-1)^1+(-1)^2$

$$=(-1)^3+(-1)^2+(-1)^1+(+1)+(-1)+(+1)=(-1)+(-1)+(-1)+(+1)+(+1)+(+1)$$
$$=(-3)+(+3)=0$$

$$B=\left[(-2)^2\right]^5\left[(-3)^2\right]^{-2}+\left[(-23,5)^2(23,5)^{-2}\right]^5$$

$$= (-2)^{2\cdot 5}(-3)^{2(-2)} + \left[(23,5)^2 (23,5)^{-2}\right]^5 =$$

$$(-2)^{10}(-3)^{-4} + \left[(23,5)^{2+(-2)}\right]^5 = (-2)^{10}(-3)^{-4} + \left[(23,5)^0\right]^5$$

$$= (-2)^{10}\left(\frac{-3}{1}\right)^4 + (23,5)^{0\cdot 5} = 2^{10}\left(\frac{1}{-3}\right)^4 + (23,5)^0 = 1.024 \cdot \frac{1}{(-3)^4}$$

$$= 1.024 \cdot \frac{1}{81} + 1 = \frac{1.024}{81} + \frac{81}{81} = \frac{1.105}{81}$$

$$\Gamma = \frac{(-6)^{-5}}{12^{-5}} + \frac{16^{-4}}{(-32)^{-4}} - \frac{5^{-3}}{(-10)^{-3}} = \left(\frac{-6}{12}\right)^{-5} + \left(\frac{16}{-32}\right)^{-4} - \left(\frac{5}{-10}\right)^{-3}$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{-5} + \left(\frac{1}{-2}\right)^{-4} - \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{-1}\right)^5 + \left(\frac{-2}{1}\right)^4 - \left(\frac{-2}{1}\right)^3$$

$$= \frac{2^5}{(-1)^5} + \frac{(-2)^4}{1^4} - \frac{(-2)^3}{1^3} = \frac{32}{-1} + \frac{16}{1} - \frac{-8}{1} = -32 + 16 + 8 = -8$$

3. Είναι $\frac{1}{10} = 10^{-1}, 10^3 \cdot 5 \cdot 2 = 10^3 \cdot 10 = 10^{3+1} = 10^4$

$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}, 10^3 + 10^2 = 1.000 + 100 = 1.100$

(Το 1.100 δε μπορεί να γραφεί σαν δύναμη του 10)

4. Στήλη 1:

Είναι $0,001 = 10^{-3}$, επομένως:

$x^{-3} = (10^{-3})^{-3} = 10^{(-3)(-3)} = 10^9$

$x^3 = (10^{-3})^3 = 10^{(-3)\cdot 3} = 10^{-9}$

$x^{-1} = (10^{-3})^{-1} = 10^{(-3)(-1)} = 10^3$

Στήλη 2:

Είναι $0,01 = 10^{-2}$, επομένως:

$x^{-3} = (10^{-2})^{-3} = 10^{(-2)(-3)} = 10^6$

$x^3 = (10^{-2})^3 = 10^{(-2)\cdot 3} = 10^{-6}$

$x^{-1} = (10^{-2})^{-1} = 10^{(-2)(-1)} = 10^2$

Στήλη 3:

Είναι $0,1 = 10^{-1}$, επομένως:

$x^{-3} = (10^{-1})^{-3} = 10^{(-1)(-3)} = 10^3$

$x^3 = (10^{-1})^3 = 10^{(-1)\cdot 3} = 10^{-3}$

$x^{-1} = (10^{-1})^{-1} = 10^{(-1)(-1)} = 10^1 = 10$

Στήλη 4:

$x^{-3} = (-10)^{-3} = -10^{-3}$

$x^3 = (-10)^3 = -10^3$

$x^{-1} = (-10)^{-1} = -10^{-1} = -0,1$

Στήλη 5:

Είναι $-100 = -10^2$, επομένως:

$x^{-3} = (-10^2)^{-3} = -10^{2(-3)} = -10^{-6}$

$x^3 = (-10^2)^3 = -10^{2\cdot 3} = -10^6$

$x^{-1} = (-10^2)^{-1} = -10^{2(-1)} = -10^{-2} = -0,01$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, και με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$

β. $(-235)^0 = 1$

γ. $\left(\dfrac{17}{13}\right)^3 = \left(\dfrac{13}{17}\right)^{-3}$

δ. $5^3 = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

ε. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α. 3^{-2}, β. 5^{-1}, γ. 10^{-2}, δ. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$, ε. $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$, στ. $\left(\frac{18}{13}\right)^{-1}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α. $2^5 \cdot 2^{-3}$, β. $5^7 \cdot 5^{-9}$, γ. $7 \cdot 7^{-3}$, δ. $\frac{3^7}{3^5}$, ε. $\frac{1}{5^{-2}}$, στ. $\frac{2^5}{2^7}$, ζ. $(2^3)^{-1}$, η. $(3^{-1})^{-2}$, θ. $(5^2)^{-2}$

7.10 • Τυποποιημένη μορφή Μεγάλων και Μικρών Αριθμών

ΘΕΩΡΙΑ

- Οι πολύ μεγάλοι αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή: $\alpha \cdot 10^{\nu}$ όπου $1 \leq \alpha \leq 10$ και ν φυσικός.

- Οι πολύ μικροί θετικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή και συγκεκριμένα στη μορφή $\alpha \cdot 10^{-\nu}$ όπου $1 \leq \alpha \leq 10$ και ν φυσικός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τον αριθμό 4700000.

Λύση

Για να μετατρέψουμε τον αριθμό 4700000 σε τυποποιημένη μορφή:

- Βάζουμε την υποδιαστολή μεταξύ του 4 και του 7, ώστε να προκύψει δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10, δηλ. 4,700000
- Το πλήθος των ψηφίων μετά την υποδιαστολή είναι 6

- Οπότε, για να προκύψει ο αριθμός 4700000 από τον αριθμό 4,7 τον πολλαπλασιάζουμε με 10^6. Άρα, $4700000 = 4,7 \cdot 10^6$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Ασκήσεις και Προβλήματα

1. α) $3,844 \cdot 10^8 m$, β) $4,45 \cdot 10^9$ έτη, γ) $1,496 \cdot 10^8 Km$

2. Είναι $1,67 \cdot 10^{-27} = \frac{1,67}{10^{27}}$. Το 1 gr. υδρογόνου περιέχει:

$$\frac{1}{\frac{1,67}{10^{27}}} = \frac{10^{27}}{1,67} = \frac{100 \cdot 10^{27}}{167} = 0,5988 \cdot 10^{27} = 5,988 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{27} = 5,988 \cdot 10^{26}$$

3. α) $1 \cdot 10^{-14} = 10^{-14}$ cm, β) $9,7 \cdot 10^{-23}$ gr.

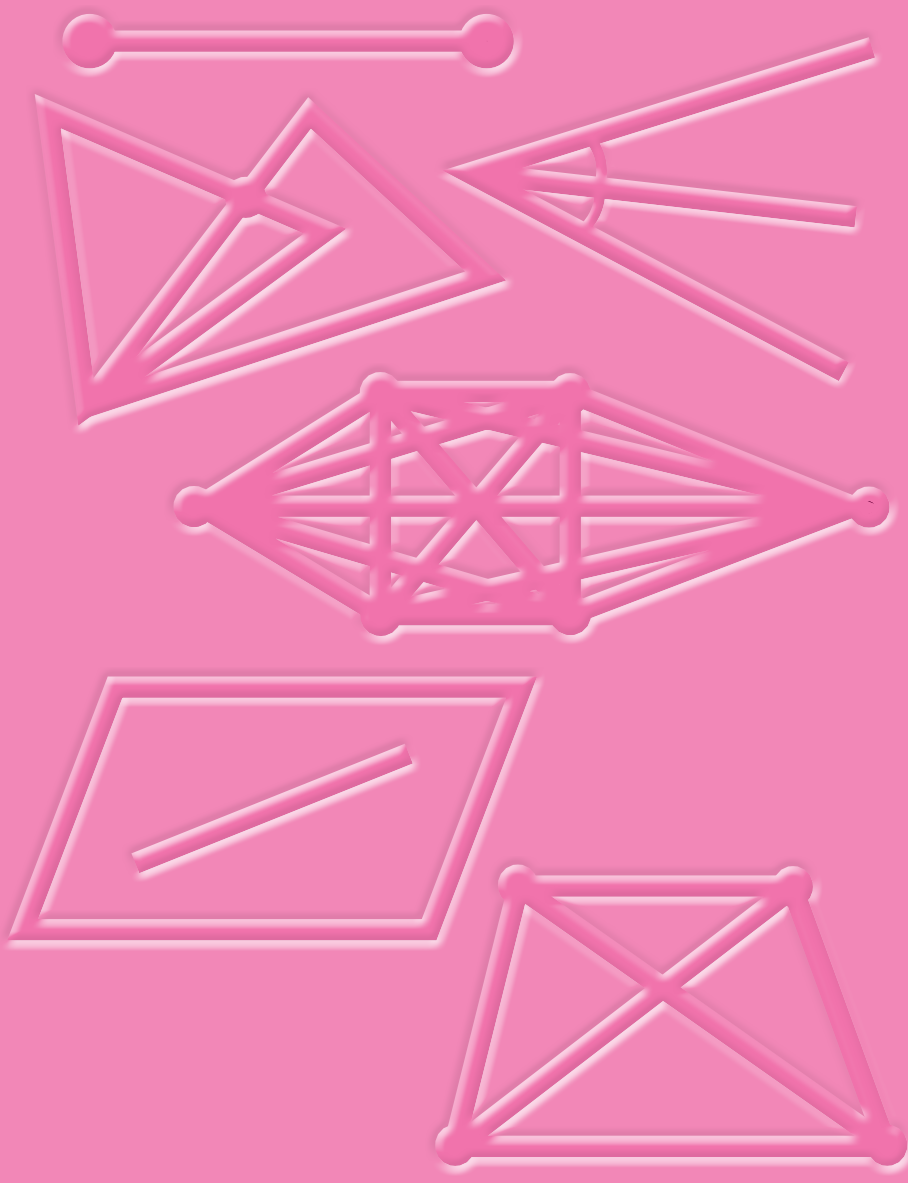
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς: α. 30.000.000, β. 5.600.000, γ. 243.000.000, δ. 0,00002, ε. 0,00000034, στ. 0,000000000735.

Β΄ ΜΕΡΟΣ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ



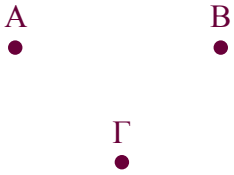
1.1

- Σημείο
- Ευθύγραμμο Τμήμα
- Ευθεία
- Ημιευθεία
- Ημιεπίπεδο

ΘΕΩΡΙΑ

ΣΗΜΕΙΟ-ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ

Η μύτη μιας βελόνας, η άκρη του μολυβιού δίνουν την έννοια του σημείου, το οποίο παριστάνεται ως μία τελεία και ένα κεφαλαίο γράμμα



Σχήμα 1. Τρία διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ

Η ένωση δύο σημείων Α και Β δημιουργούν ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα Α και Β (σχήμα 2)

Σχήμα 2. Ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ

ΕΥΘΕΙΑ-ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο δεν έχει αρχή ούτε τέλος ονομάζεται ευθεία, την οποία συμβολίζουμε με μικρά γράμματα π. χ. χy, χ΄y΄.

Σχήμα 3. Μια ευθεία χy

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες
- Από δύο σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που έχει αρχή το Α και δεν έχει τέλος ονομάζεται ημιευθεία Αχ (Σχήμα 4)

Σχήμα 4. Μια ημιευθεία Αχ

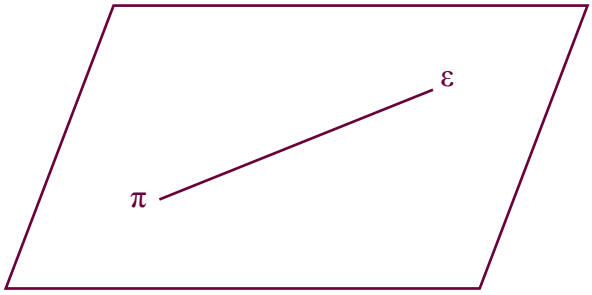
ΠΡΟΣΟΧΗ

- Αν Ο ένα σημείο της ευθείας χ΄χ, τότε οι δυο ημιευθείες Οχ και Οχ΄ που ορίζονται, ονομάζονται αντικείμενες ημιευθείες (Σχήμα 5)

Σχήμα 5. Οι αντικείμενες ημιευθείες Οχ και Οχ΄

ΕΠΙΠΕΔΟ-ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟ

Ονομάζουμε επίπεδο την επιφάνεια, πάνω στην οποία υπάρχει παντού η ευθεία γραμμή.

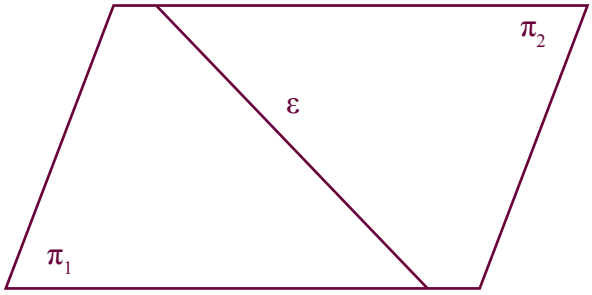


Σχήμα 6. Ένα επίπεδο

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Ένα επίπεδο επεκτείνεται απεριόριστα
- Από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένα μοναδικό επίπεδο και από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα
- Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο μέρη

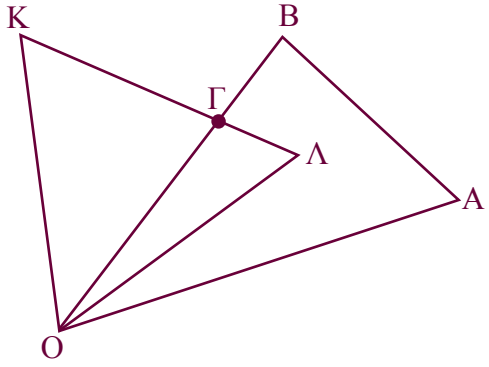
Κάθε ευθεία ενός επιπέδου, το χωρίζει σε δύο ημιεπίπεδα



Σχήμα 7. Δύο ημιεπίπεδα Π_1 και Π_2

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

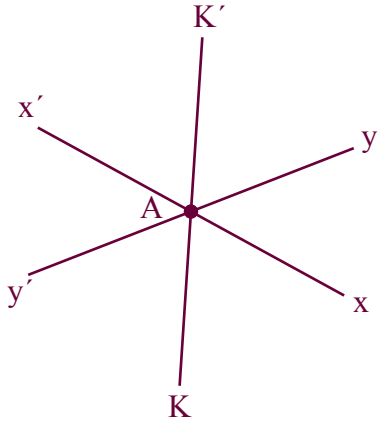
1. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται απ' όλα τα σημεία του σχήματος



Λύση

Τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται είναι: ΟΑ, ΟΛ, ΟΓ, ΟΒ, ΟΚ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΛ, ΚΓ, ΓΛ καθώς και τα ΚΒ, ΒΛ, ΛΑ τα οποία δεν είναι σχεδιασμένα στο σχήμα

2. Πόσες ημιευθείες έχουν αρχή το Α και πόσες από αυτές είναι αντικείμενες;



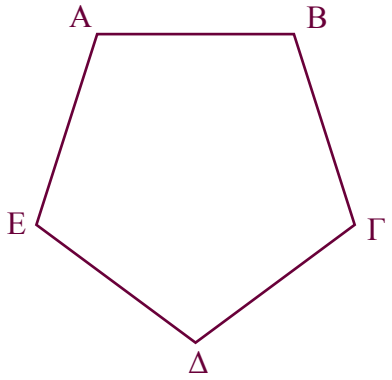
Λύση

Οι ημιευθείες που έχουν αρχή το Α είναι: Ακ, Ακ΄, Αχ, Αχ΄, Αy, Αy΄ και αντικείμενες είναι οι ημιευθείες: η Ακ με την Ακ΄, η Αχ με την Αχ΄ και η Αy με την Αy΄.

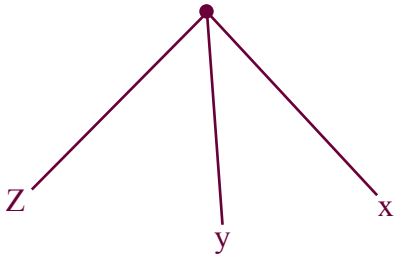
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να γράψετε τρία σημεία που δεν είναι συνευθειακά και να χαράξετε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν άκρα τα σημεία αυτά

2. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από όλα τα σημεία του πενταγώνου



3. Να χαράξετε τις αντικείμενες ημιευθείες των ημιευθειών του σχήματος

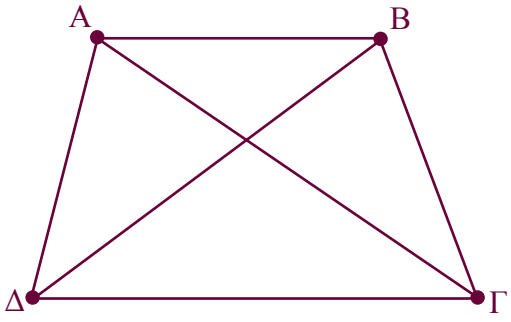


ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

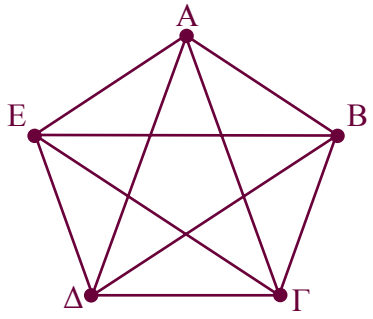
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 152

1. α) άπειρα
β) ευθεία
γ) ημιευθεία
δ) αντικείμενες
ε) επίπεδο

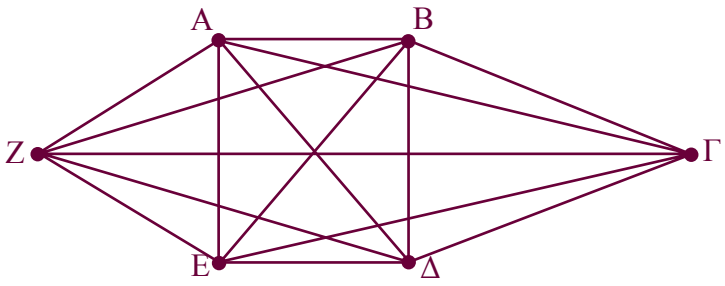
2. α) Σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ, ΒΔ



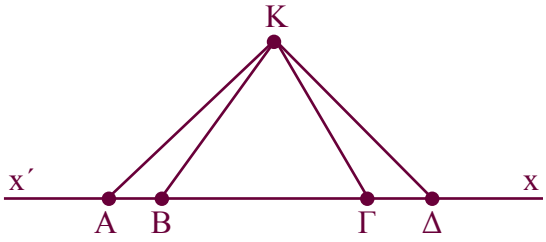
β) Σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΕ, ΒΔ, ΕΓ



γ) Σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ, ΑΔ, ΑΓ, ΑΕ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ, ΓΕ, ΓΖ, ΖΔ



3. Τα ευθύγραμμα τμήματα του διπλανού σχήματος είναι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ, ΚΑ,ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ



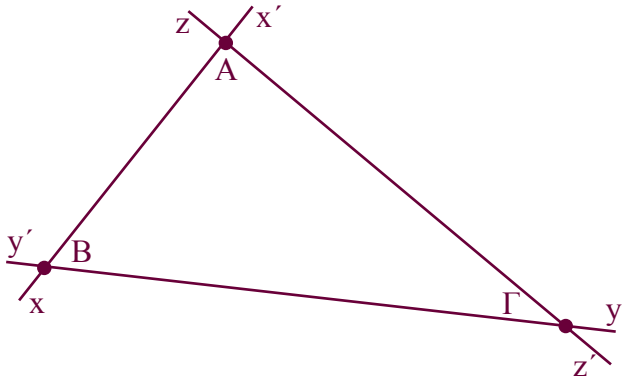
4. Οι αντικείμενες ημιευθείες του σχήματος είναι Αχ, Αχ΄, Βχ, Βχ΄

5. Για να φτιάξουμε την αντικείμενη ημιευθεία της ημιευθείας:

- ΑΒχ προεκτείνουμε τη ΒΑ προς το μέρος του Α και η αντικείμενη ημιευθεία της είναι η Αχ΄

- ΒΓy προεκτείνουμε τη ΓΒ προς το μέρος του Β και η αντικείμενη ημιευθεία της είναι η Βy΄

ΓΑζ προεκτείνουμε την ΑΓ προς το μέρος του Γ και η αντικείμενη ημιευθεία της είναι η Γζ΄



1.2

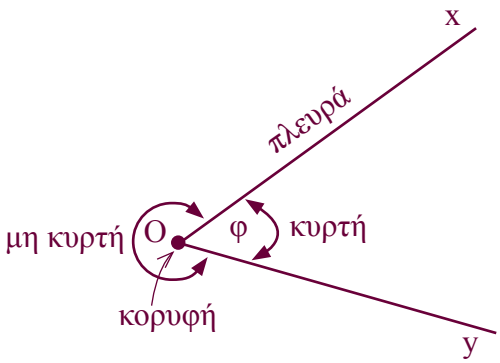
- Γωνία
- Γραμμή
- Επίπεδα Σχήματα
- Ευθύγραμμα Τμήματα
- Ίσα Σχήματα

ΘΕΩΡΙΑ

ΓΩΝΙΑ

Από το σημείο Ο φέρνουμε δύο ημιευθείες Οχ και Οy (Σχήμα 8). Ο χώρος μεταξύ των Οχ και Οy καλείται κυρτή γωνία και ο εξωτερικός χώρος μη κυρτή. Οι Οχ και Οy λέγονται πλευρές της γωνίας και το σημείο Ο κορυφή.

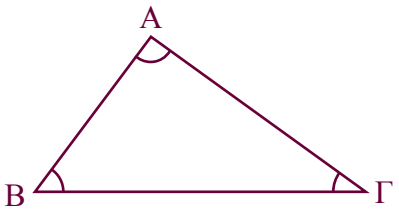
Συμβολίζουμε την παρακάτω γωνία ως $\chi\hat{O}y$ ή $\hat{\varphi}$



Σχήμα 8. Η γωνία $\chi\hat{O}y$ ή $\hat{\varphi}$

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Ένα τρίγωνο έχει τρεις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$



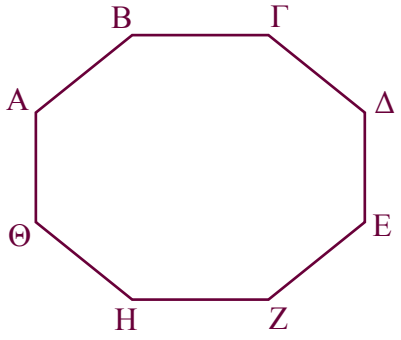
- Η γωνία $\hat{A}$ περιέχεται στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ
  Αντίστοιχα συμβαίνει στις άλλες γωνίες

- Η γωνία $\hat{A}$ βρίσκεται απέναντι από Σχήμα 9. Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$
  την πλευρά ΒΓ

- Οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ είναι προσκείμενες της πλευράς ΒΓ

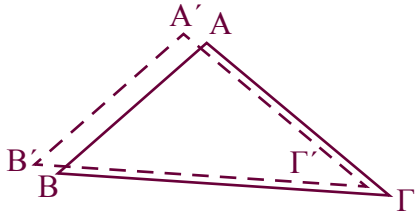
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ-ΙΣΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Ευθύγραμμα σχήματα ονομάζονται οι τεθλασμένες γραμμές, που τα άκρα τους συμπίπτουν.



Σχήμα 10. Ευθύγραμμο σχήμα

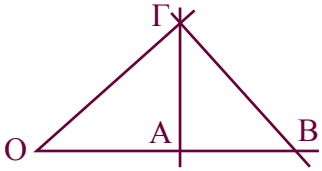
Ίσα σχήματα λέγονται τα σχήματα που συμπίπτουν, όταν το ένα τοποθετηθεί πάνω ατο άλλο κατάλληλα. Τα στοιχεία που συμπίπτουν λέγονται αντίστοιχα σχήματα.



Σχήμα 11. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

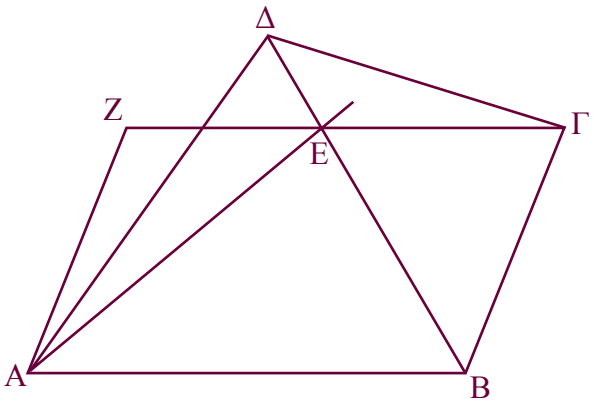
1. Να γράψετε τις γωνίες που βλέπετε στο σχήμα



Λύση

Οι γωνίες που βλέπουμε είναι: $\Gamma\hat{O}B$, $\Gamma\hat{A}B$, $O\hat{\Gamma}A$, $O\hat{\Gamma}B$, $A\hat{\Gamma}B$, $A\hat{B}\Gamma$

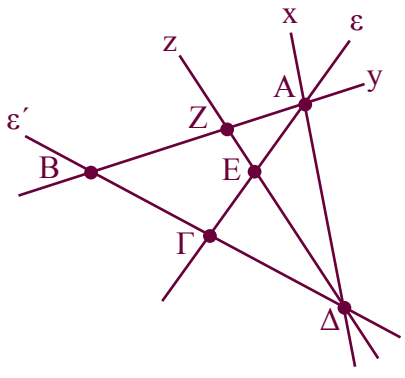
2. Ποιες γωνίες σχηματίζονται στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta E}$, $\overset{\triangle}{AEB}$, και $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$;



Λύση

- Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ έχουμε τις γωνίες: $A\hat{\Delta}E$, $\Delta\hat{E}A$, $\Delta\hat{A}E$
- Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AEB}$ έχουμε τις γωνίες: $A\hat{B}E$, $A\hat{E}B$, $B\hat{A}E$
- Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta E\Gamma}$ έχουμε τις γωνίες: $\Delta\hat{E}\Gamma$, $E\hat{\Gamma}\Delta$, $\Gamma\hat{\Delta}E$

3. Ποια ευθύγραμμα σχήματα έχουν σχηματιστεί από τις ευθείες στο παρακάτω σχήμα;

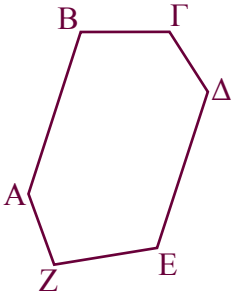


Λύση

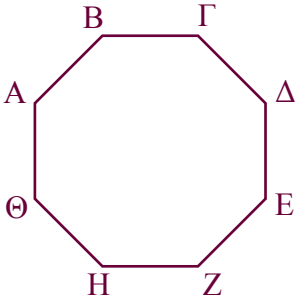
Έχουν σχηματιστεί τα τρίγωνα ΑΕΔ, ΑΒΓ. ΑΓΔ, ΑΕΔ, ΑΖΕ, ΕΓΔ, ΒΖΔ και το τετράπλευρο ΒΖΕΓ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

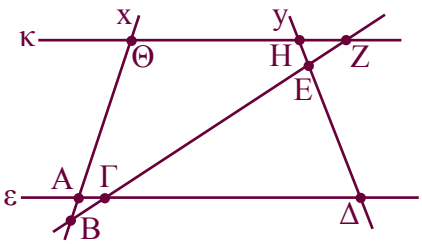
1. Να γράψετε τις κορυφές και τις πλευρές του παρακάτω σχήματος



2. Να γράψετε τις γωνίες που έχουν σχηματιστεί στο παρακάτω σχήμα

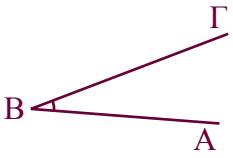


3. Ποια ευθύγραμμα σχήματα έχουν δημιουργηθεί από τις ευθείες του παρακάτω σχήματος;

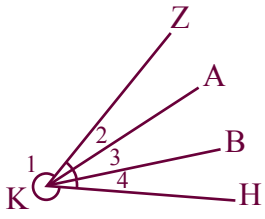


ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

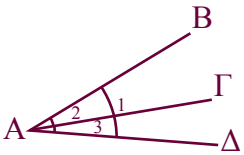
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 156

1. α) 

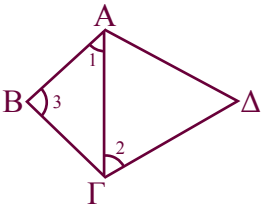
ΓΒ̂Α

β) 

1. ΗK̂Z
2. ZK̂Α
3. ΑK̂Β
4. ΒK̂Η

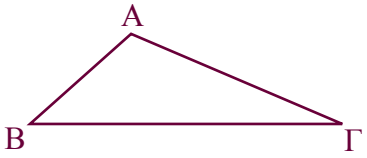
γ) 

1. ΒÂΔ
2. ΒÂΓ
3. ΓÂΔ

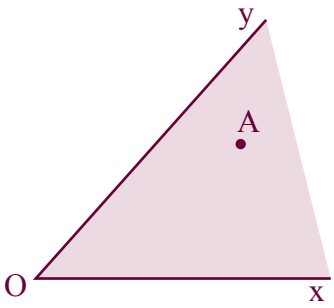
δ) 

1. ·
2. ΑΓ̂Δ
3. ΑΒ̂Γ

2. α) Μεταξύ των πλευρών ΑΒ και ΒΓ είναι η γωνία ΑΒ̂Γ ή Β̂
β) Απέναντι από την γωνία Γ είναι η πλευρά ΑΒ
γ) Προσκείμενες στην πλευρά ΑΓ είναι οι γωνίες Α και Γ



3. Το σημείο Α ανήκει στην γωνία χΟy



4. α)

Ευθύγραμμα σχήματα	Κορυφές					Πλευρές				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
ΓΩΝΙΑ	x						x			
ΤΡΙΓΩΝΟ			x					x		
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ				x					x	
ΠΕΝΤΑΠΛΕΥΡΟ					x					x

β)

Αριθμός σημείων	Αριθμός οριζόμενων ευθειών														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	x														
3			x												
4						x									
5										x					
6															x

1.3

- Μέτρηση
- Σύγκριση και Ισότητα Ευθύγραμμων Τμημάτων
- Απόσταση Σημείων
- Μέσο Ευθύγραμμου Τμήματος

ΘΕΩΡΙΑ

ΜΕΤΡΗΣΗ-ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Η σύγκριση ενός μεγέθους με την αντίστοιχη μονάδα λέγεται μέτρηση.
Έτσι, μονάδα μήκους είναι το μέτρο (m).
Πολλαπλάσια και υποδιαιρέσεις του μέτρου φαίνονται στον πίνακα 1.

Ονομασία μονάδας	**Σύμβολο**	**Σχέση με το μέτρο**
Χιλιόμετρο	Km	1 Km=1000 m
Μέτρο	m	
Δεκατόμετρο	dm	$1\ dm=\frac{1}{10}\ m=0,1m$
Εκατοστόμετρο	cm	$1\ cm=\frac{1}{100}\ m=0,01\ m$
Χιλιοστόμετρο	mm	$1\ mm=\frac{1}{1000}=0,001\ m$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΩΝ-ΜΕΣΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Απόσταση δύο σημείων Α, Β λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και συμβολίζεται με (ΑΒ) και

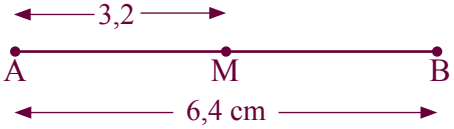
Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, λέγεται το σημείο Μ που ισαπέχει από τα άκρα του.

Σχήμα 12. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο Μ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με μήκος 6,4 cm

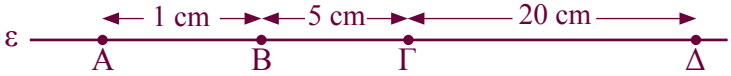
Λύση



Το μέσο Μ χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ=ΜΒ. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε το Μ ώστε το ΑΜ=3,2 cm. Άρα ΑΜ=ΜΒ=3,2 cm.

2. Σε μία ευθεία ε να πάρετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και ΑΒ=1 cm, ΒΓ=5 cm και ΓΔ=20 cm. Να εξετάσετε αν τα ΑΓ και ΒΔ είναι ίσα.

Λύση



Το μήκος του ΑΓ είναι 5+1=6 cm και του ΒΔ=5+20=25 cm
Άρα τα ΑΓ και ΒΔ δεν είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

ΑΠΟΣΤΑΣΗ	Σε m	Σε Km
Α	200	
Β		5,2
Γ	2,2	
Δ		1000

2. Σε μία ευθεία ε, να πάρετε ένα σημείο Κ. Να βρείτε δύο σημεία Α, Β της ε που να απέχουν 5 cm από το Κ. Τι είναι το σημείο Κ για το το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ;

3. Σε μία ευθεία ε να πάρετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε ΑΒ=2 cm, ΒΓ=1 cm και ΓΔ=2 cm και να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ.

4. Σε μία ευθεία ε να πάρετε τα σημεία Κ, Λ, Μ ώστε ΚΛ=3,4 cm. Αν Ο το μέσο του ΚΛ και Π το μέσο του ΛΜ, να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΠ και ΛΜ

5. Να πάρετε ένα σημείο Α και να βρείτε 3 σημεία που το καθένα να απέχει 0,43 dm από το Α

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 162

1. α) απόσταση
β) απέχει εξίσου

2. μόνο μία ευθεία

3. Μετατρέπουμε τα μήκη στην ίδια μονάδα μέτρησης
25 cm=25:100 m=0,25 m
- Πουλήθηκαν συνολικά: 3,5+0,25+7,95+3,74=15,44 m
- Στο τόπι έμειναν: 65-15,44=49,56 m

4. Η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο πεζός είναι:
619+271+205=1.095 m
Αφού το κάθε βήμα του είναι 75 cm=0,75 m, θα είναι:
1.095 m : 0.75 m=1.460 βήματα

5. Η περίμετρος του αγρού είναι $4 \cdot 15,3$ m=61,2 m
Το συρματόπλεγμα έχει μήκος 60 m+3 dm+18 cm=60,48 m
Άρα πρέπει να αγοράσει ακόμα 61,2 m-60,48 m=0.72 m ή 72 cm

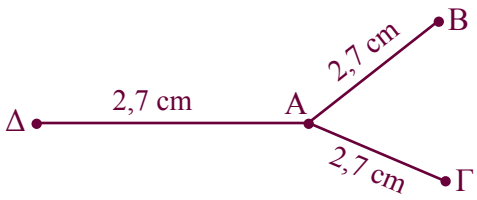
6.

ΑΚΤΙΝΑ	Σε m	Σε Km
Αφροδίτη	6.085.000	6.085
Γη	6.378.000	6.378
Άρης	3.750.000	3.750
Δίαε	71.400.000	71.400

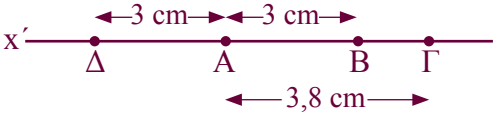
7.

	ΑΒ	ΒΓ	ΓΔ	ΔΕ	ΕΑ	Περίμετρος
cm	517	420	84	1.250	76	2.347
dm	51,7	42	8,4	125	7,6	234,7
m	5,17	4,2	0,84	12,5	0,76	23,47

8. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε τα σημεία Β, Γ, Δ που απέχουν το καθένα 2,7 cm από το Α

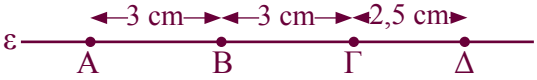


9.



α) Είναι ΑΓ>ΑΔ, αφού 3,8 cm>3 cm
β) Είναι ΑΒ=ΑΔ=3 cm

10.

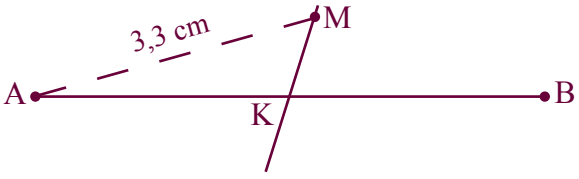


- Μήκος $A\Gamma: AB+B\Gamma=2,5+3=5,5$ cm
- Μήκος $B\Delta: B\Gamma+\Gamma\Delta=3+2,5=5,5$cm

$\Rightarrow A\Gamma=B\Delta$

11. Επειδή το Ο είναι το μέσο του ΑΒ, θα είναι ΟΑ=ΟΒ
Αφού ΟΑ=4,2 cm, θα είναι και ΟΒ= 4,2 cm. Οπότε ΑΒ=ΟΑ+ΟΒ=4,2+4,2 ή ΑΒ=8,4 cm

12. Το μέσο Κ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ θα απέχει από το Α και το Β ίση απόσταση, δηλαδή ΚΑ=ΚΒ. Στη συνέχεια παίρνουμε με το υποδεκάμετρο σημείο Μ, εκτός της ευθείας ΑΒ και φέρνουμε την ΚΜ

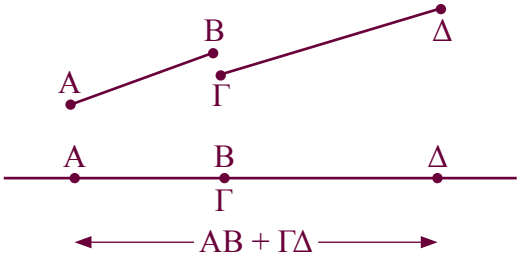


1.4 • Πρόσθεση και Αφαίρεση Ευθύγραμμων Τμημάτων

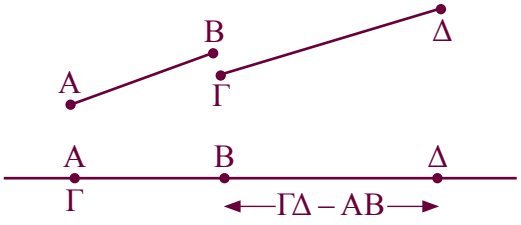
ΘΕΩΡΙΑ

Για να προσθέσουμε δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα, τα τοποθετούμε το ένα μετά το άλλο διαδοχικά και για να αφαιρέσουμε ευθύγραμμα τμήματα τα τοποθετούμε με κοινή αρχή και η διαφορά τους είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το τέλος του μικρότερου και τέλος το τέλος του μεγαλύτερου.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ



ΑΦΑΙΡΕΣΗ



Σχήμα 13. Πρόσθεση και αφαίρεση ευθύγραμμου τμήματος

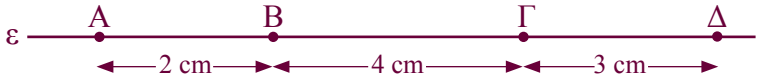
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ έτσι ώστε ΑΒ=2 cm, το

ΒΓ να είναι μεγαλύτερο κατά 2 cm από το ΑΒ και το ΓΔ να είναι κατά 1 cm μικρότερο από το ΒΓ. Να βρείτε το μήκος του ΑΔ.

Λύση

Έχουμε ΑΒ=2 cm, ΒΓ=ΑΒ+2=2+2=4 cm και ΓΔ=ΒΓ-1=3 cm



Άρα ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ=2+4+3=9 cm

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ με πλευρές ΑΒ=60mm, ΒΓ=2cm, ΓΔ=0,6dm και ΔΕ=1,3cm

2. Σε μια ευθεία να πάρετε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε ΑΒ=2 cm, ΒΓ=10cm και ΓΔ=8cm. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΑΓ, ΒΔ και ΑΔ.

3. Σε μια ημιευθεία Αχ να πάρετε τα σημεία Β, Γ, Δ και Ε, έτσι ώστε ΑΒ=20cm, ΒΓ=3dm, ΓΔ=2cm και ΔΕ=5cm. Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων
α) ΑΓ, β) ΓΕ, γ) ΑΒ+ΒΓ δ) ΒΓ+ΓΔ ε) ΑΒ_ΓΔ

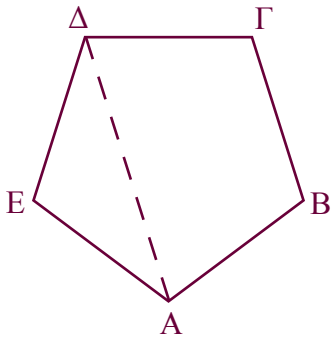
4. Θεωρούμε δύο αντικείμενες ημιευθείες Αχ και Αχ΄. Να πάρετε τα σημεία Β στην Αχ έτσι ώστε ΑΒ=5cm και ένα σημείο Γ στην Αχ΄ έτσι ώστε ΓΒ=2,6cm. Να βρείτε το μήκος του ΑΓ

5. Σε μια ευθεία ε, να πάρετε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε ΑΓ=6cm, ΒΓ=0,5km και Γ μέσο του ΑΔ. Να βρείτε τα μήκη των ΓΔ, ΑΒ και ΑΔ

6. Σε μια ευθεία ε να πάρετε τα σημεία Κ, Λ ώστε ΚΛ=5cm και ένα σημείο Α ώστε ΑΚ=2,5cm. Να βρείτε το μήκος του ΛΑ για κάθε πιθανή θέση του Α πάνω στην ευθεία ε

7. Να βρείτε την περίμετρο του παρακάτω σχήματος αν όλες οι πλευρές είναι

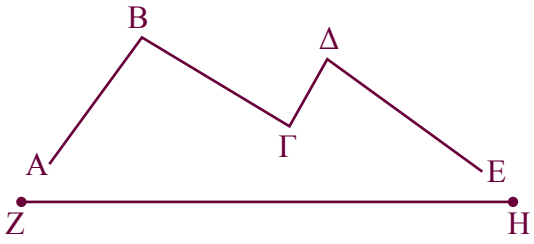
ίσες με 3 cm και να συγκρίνετε το μήκος του ΑΔ με το μήκος ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ



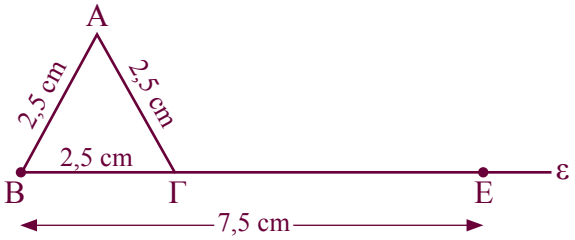
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 164

1. Με το υποδεκάμετρο μετράμε το μήκος των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. Τα προσθέτουμε και βρίσκουμε το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ, το οποίο είναι 1,3+1,3+1,5+2,5 cm=6,6 cm
Μετράμε το μήκος του τμήματος ΖΗ και είναι ΖΗ=6,3cm. Άρα το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕ είναι μεγαλύτερο από το μήκος του τμήματος ΖΗ



2. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις τρεις πλευρές του ίσες με 2,5cm, δηλαδή είναι ισόπλευρο. Η περίμετρος του είναι $3 \cdot 2,5=7,5$cm
Παίρνουμε στην ημιευθεία ΒΓ, με αρχή το Β, ένα σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΒΕ=7,5cm

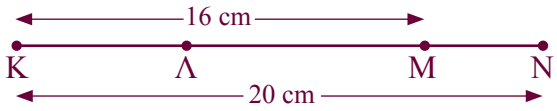


3. Μετετρέπουμε τα 2cm σε mm. δηλαδή 2cm=20mm. Οπότε το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕΖ είναι το άθροισμα των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ δηλαδή ισούται με 16+9+12+14+20=71mm

4. ΑΒ=0,4m=0,4 · 100cm=40cm

ΒΓ=3dm=3 $\chi\hat{O}y$ 10cm=30 cm
ΔΕ=380mm=380:10 cm=38 cm
Άρα το μήκος της τεθλασμένης γραμμής ΑΒΓΔΕ είναι ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ=40+30+50+38=158cm

5. Παίρνουμε τα σημεία με την βοήθεια του υποδεκάμετρου

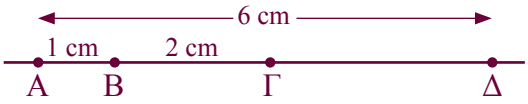


Έχουμε
- ΛΜ=ΚΜ-ΚΛ=16-6=10cm
- ΛΝ=ΚΝ-ΚΛ=20-6=14cm
- ΜΝ=ΚΝ-ΚΜ=20-16=4cm

6. Έστω ημιευθεία Οχ. Με το υποδεκάμετρο παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, έτσι ώστε ΑΒ=3cm, ΒΔ=5,5cm και ΑΓ=4,6cm
α) ΑΔ=ΑΒ+ΒΔ=3+5,5=8,5cm
β) ΒΓ=ΑΓ-ΑΒ=4,6-3=1,6cm
γ) ΓΔ=ΒΔ-ΒΓ=5,5-1,6=3,9cm
Άρα ΑΓ+ΓΔ=4,6+3,9=8,5cm
δ) ΑΔ-ΔΒ=8,5-5,5=3cm

7. Παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ έτσι ώστε ΑΔ=6cm

- $AB=\frac{A\Delta}{6}=1cm$
- $B\Gamma=\frac{A\Delta}{3}=2cm$
- $\Gamma\Delta=A\Delta-(AB+B\Gamma)=6-(1+2)=6-3=3cm$

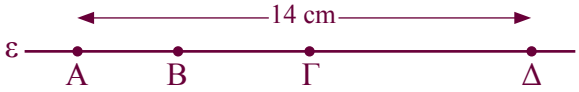


8. Παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Έχουμε ότι $B\Gamma=AB+4$ και $B\Gamma=\Gamma\Delta-3$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$2B\Gamma=AB+4+\Gamma\Delta-3 \Leftrightarrow 2B\Gamma=AB+\Gamma\Delta+1 \Leftrightarrow 2B\Gamma=A\Delta-B\Gamma+1 \Leftrightarrow$

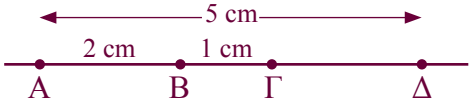
$2B\Gamma+B\Gamma=A\Delta+1 \Leftrightarrow 3B\Gamma=15$

$B\Gamma=5cm$



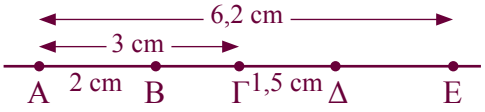
9. Έχουμε ότι $AB=2cm$, οπότε

- $B\Gamma=0,5\cdot AB=0,5\cdot 2=1cm$
- $A\Delta=2,5\cdot AB=2,5\,\hat{\rho}>\hat{\theta}\,2=5cm$
- $A\Gamma=AB+B\Gamma=2+1=3cm$



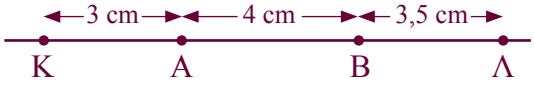
10. Παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε

- $A\Delta=A\Gamma+\Gamma\Delta=4,5cm$
- $\Gamma E=AE-A\Gamma=3,2cm$



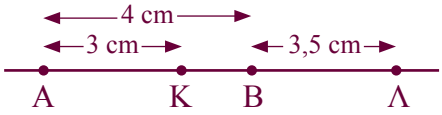
11. Τα σημεία Κ και Λ μπορούμε να τα πάρουμε εκατέρωθεν των σημείων Α και Β αντίστοιχα. Έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις

i)



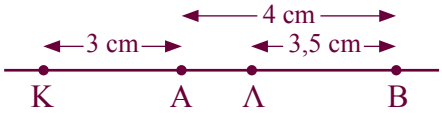
ΚΛ=ΚΑ+ΑΒ+ΒΛ=11cm

ii)



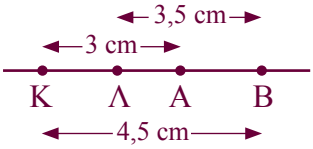
- ΚΒ=ΑΒ-ΑΚ=5cm. Επομένως ΚΑ=ΚΒ+ΒΛ=5cm

iii)



- ΑΛ=ΑΒ-ΒΛ=1cm. Επομένως Κλ=ΚΑ+ΑΛ=4cm

iv)



- ΑΛ=ΑΒ-ΒΛ=1cm
- ΒΚ=ΑΒ-ΑΚ=1,5cm

Επομένως ΚΑ=ΑΒ-ΑΛ-ΚΒ=2cm

α) Ανάλογα με τις θέσεις των σημείων Κ και Λ, το ΚΛ παίρνει τις τιμές 11cm, 5cm, 4cm, 2cm

β) Είναι ΚΛ=11cm όταν τα σημεία Κ και Λ είναι εκτός του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ

- ΚΛ=5cm, όταν το Κ είναι εντός και το Λ εκτός του ΑΒ
- ΚΛ=4cm, όταν το Κ είναι εκτός και το Λ εντός του ΑΒ
- ΚΛ=2cm, όταν το Κ και το Λ εντός του ΑΒ

Σε καμιά περίπτωση το ΚΛ δεν παίρνει τιμή μεγαλύτερη από 11cm

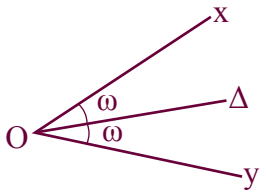
1.5

- Μέτρηση
- Σύγκριση
- Ισότητα Γωνιών
- Διχοτόμος Γωνίας

ΘΕΩΡΙΑ

- Η μέτρηση των γωνιών γίνεται με μοιρογνωμόνιο και ο αριθμός που προκύπτει ονομάζεται μέτρο της γωνίας

- Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες



Σχήμα 14. Η διχοτόμος ΟΔ της γωνίας $\chi\hat{O}y$

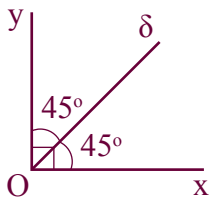
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να κατασκευάσετε τη διχοτόμο μιας γωνίας 90^o

Λύση

Με το μοιρογνωμόνιο κατασκευάζουμε τη γωνία $\chi\hat{O}y = 45^o$
Η διχοτόμος της θα τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες που η καθεμία θα έχει μέτρο $90^o:2=45^o$

Με το μοιρογνωμόνιο κατασκευάζουμε τη γωνία $\chi\hat{O}\delta = 45^o$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε μια γωνία α) 80^o β) 180^o

2. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\chi\hat{O}y = 120^o$ και να φέρετε την ημιευθεία Οζ, η οποία χωρίζει τη γωνία $\chi\hat{O}y$ σε δύο γωνίες, από τις οποίες η μία είναι $\frac{1}{4}$ $\chi\hat{O}y$

3. Να σχεδιάσετε μια γωνία $\chi\hat{O}y = 60^o$ και να φέρετε τις ημιευθείες Οζ και Οδ, οι οποίες χωρίζουν τη γωνία $\chi\hat{O}y$ σε τρεις ίσες γωνίες

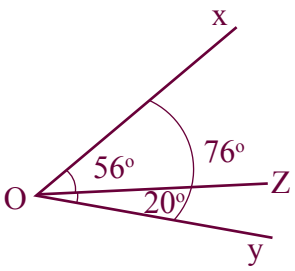
4. Να χωρίσετε τη γωνία $\chi\hat{O}y = 105^o$ σε δύο άλλες γωνίες, έτσι ώστε η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

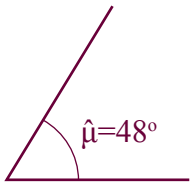
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 168

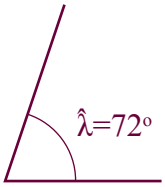
1. …από το άνοιγμα των πλευρών της

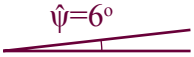
2. Με το μοιρογνωμόνιο σχηματίζουμε την γωνία $\chi\hat{O}y = 76^o$. Μετά φτιάχνουμε με πλευρά την Οχ, γωνία $\chi\hat{O}z = 56^o$. Επομένως $z\hat{O}y = 76^o - 56^o = 20^o$

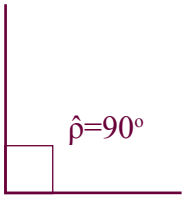


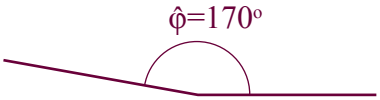
3. Με το μοιρογνωμόνιο σχηματίζουμε τις γωνίες

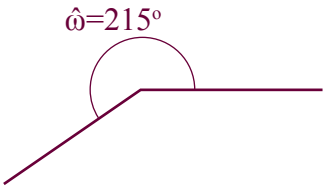


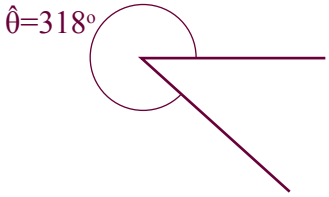












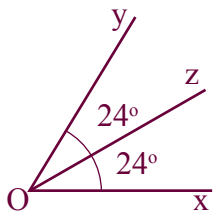
4. Μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε:

$\hat{\alpha} = 45^o$, $\hat{\beta} = 93^o$, $= 323^o$, $\hat{\delta} = 82^o$, $\hat{\varepsilon} = 180^o$, $\hat{\kappa} = 324^o$, $\hat{\lambda} = 60^o$, $\hat{\mu} = 140^o$

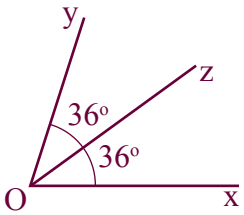
5. $\hat{\alpha} > \hat{\delta} > \ > \hat{\beta}$

6. α) $\hat{\omega} < \hat{\phi}$ β) $\hat{\phi} < \hat{\rho}$ γ) $\hat{\omega} < \hat{\rho}$ δ) $\hat{\psi} > \hat{\kappa}$ ε) $\hat{\psi} < \hat{\lambda}$ στ) $\hat{\psi} > \hat{\mu}$ ζ) $\hat{\rho} > \hat{\theta}$

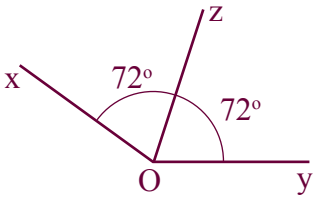
7. Με το μοιρογνωμόνιο, σχεδιάζουμε τις γωνίες $\chi\hat{O}y$ και τις διχοτόμους Οζ
α) Η διχοτόμος χωρίζει την γωνία 48° σε δύο ίσες γωνίες 24°



β) Η διχοτόμος χωρίζει την γωνία 72° σε δύο ίσες γωνίες 36°



γ) Η διχοτόμος χωρίζει την γωνία 144° σε δύο ίσες γωνίες 72°



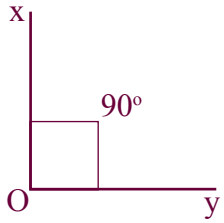
1.6

- Είδη Γωνιών
- Κάθετες ευθείες

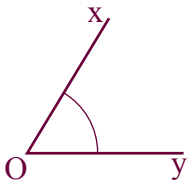
ΘΕΩΡΙΑ

ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

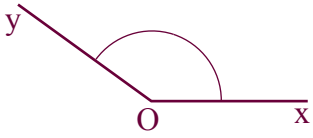
- Ορθή γωνία



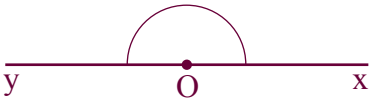
- Οξεία γωνία



- Αμβλεία γωνία

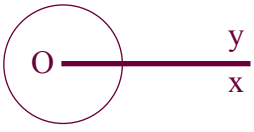


- Ευθεία γωνία



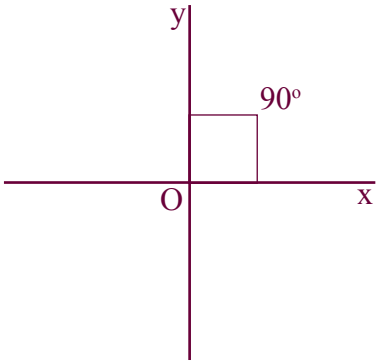
- Μηδενική γωνία

- Πλήρης γωνία



ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Δυο ευθείες χ, y είναι κάθετες, όταν σχηματίζουν ορθή γωνία

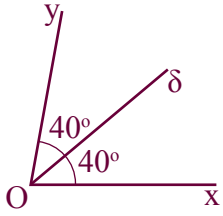


ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε μια γωνία 80^o και να φέρετε τη διχοτόμο της

Λύση

Με το μοιρογνωμόνιο μετράμε μια γωνία $\chi\hat{O}y=80^o$ και φέρνουμε την διχοτόμο της $O\delta \Rightarrow \chi\hat{O}\delta = \delta\hat{O}y=40^o$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=40^o$ και $\hat{B}=60^o$

α) Να βρείτε τη γωνία Γ ως προς το μέτρο της
β) Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών του τριγώνου

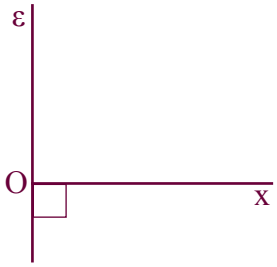
2. Να σχεδιάσετε μια ορθή γωνία $\chi\hat{O}y$ και να πάρετε ένα σημείο Α στην Οχ, έτσι ώστε ΟΑ=2cm.
α) Να βρείτε στην Οy σημείο Β, έτσι ώστε ΑΒ=4 cm
β) Να μετρήσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΑΒ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 172

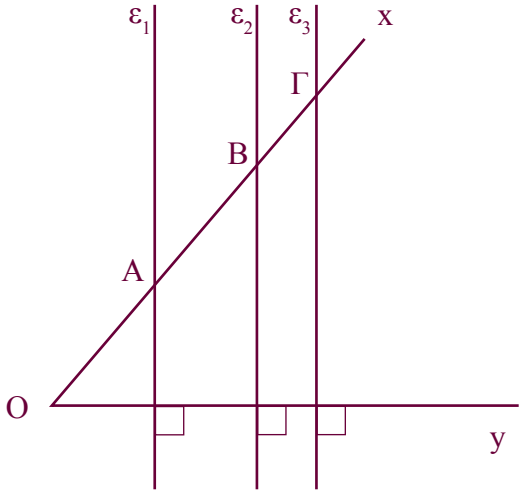
1. α) Ορθή
β) Πλήρης γωνία

2. Με χάρακα φέρνουμε μια ημιευθεία Οχ. Στη συνέχεια τοποθετούμε το γνώμονα πάνω στην Οχ έτσι ώστε η μία από τις κάθετες πλευρές του να συμπίπτει με την Οχ και η κορυφή του να ακουμπάει στο Ο. Χαράσσουμε έπειτα την ευθεία ε, που είναι κάθετη στην Οχ.



3. Με το χάρακα φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Στη συνέχεια με το γνώμονα φέρνουμε στα σημεία Α και Β ευθείες ε_1, ε_2 κάθετες στο ΑΒ.

4. Με το χάρακα φέρνουμε τις ημιευθείες Οχ και Οy που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τοποθετούμε το γνώμονα στην Οy έτσι ώστε η μία από τις δύο κάθετες να συμπίπτει με την Οy και η άλλη κάθετη να έρθει σε επαφή μ' ένα από τα δοσμένα σημεία. Από το σημείο χαράσσουμε την ευθεία που είναι κάθετη στην Οy. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία αυτή για κάθε σημείο Α, Β και Γ, οπότε κατασκευάζουμε τις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ κσι $ε_3$ αντίστοιχα που είναι κάθετες στην Οy.

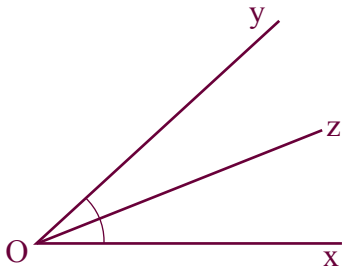


5. Βάζουμε το γνώμονα στο σημείο Ο έτσι ώστε η μία κάθετη πλευρά του να συμπίπτει με την Οy και χαράσσουμε την ευθεία $ε_1$ που είναι κάθετη στην Οy. Στη συνέχεια τοποθετούμε το γνώμονα στο σημείο Ο έτσι ώστε η μία κάθετη να συμπίπτει με την Οχ και χαράσσουμε την $ε_2$ που είναι κάθετη στην Οχ. Παρατηρούμε ότι η γωνία που σχηματίζουν οι $ε_1$ και $ε_2$ είναι ίση με τη γωνία των δύο ημιευθειών (μετρήσεις με το μοιρογνωμόνιο).

1.7 • Εφεξης και Διαδοχικές Γωνίες • Άθροισμα Γωνιών

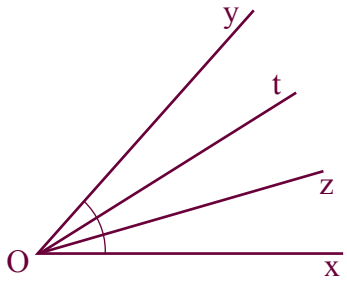
ΘΕΩΡΙΑ

- Εφεξής ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν την ίδια κορυφή, μια κοινή πλευρά και τις άλλες πλευρές εκατέρωθεν της κοινής (Σχήμα 15)



Σχήμα 15. Δύο εφεξής γωνίες

- Διαδοχικές ονομάζονται οι γωνίες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και η μία είναι εφεξής με την άλλη (Σχήμα 16)

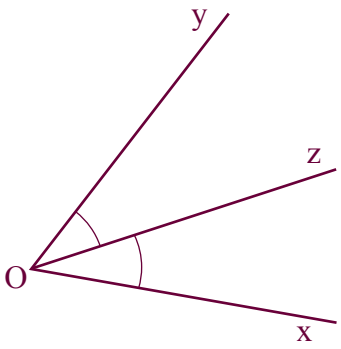


Σχήμα 16. Διαδοχικές γωνίες

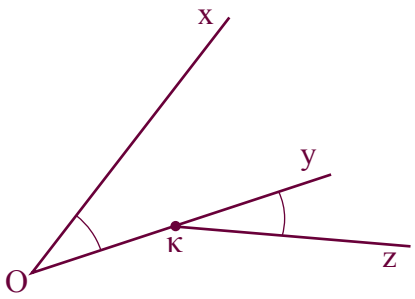
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Σε ποια σχήματα οι σημειωμένες γωνίες είναι εφεξής;

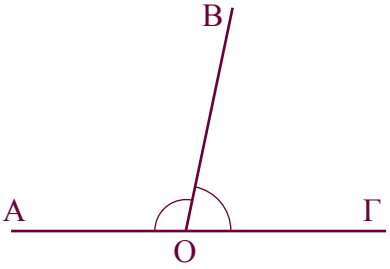
α)



β)



γ)



Λύση

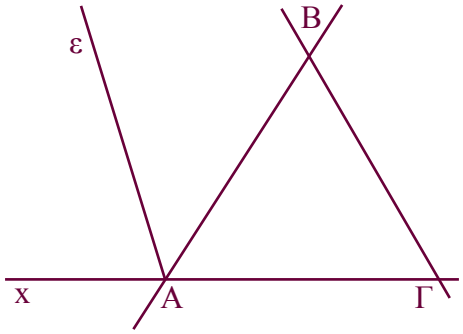
α) Οι γωνίες $\chi\hat{O}z$ και $\chi\hat{O}y$ δεν είναι εφεξής σύμφωνα με τον ορισμό

β) Οι γωνίες $y\hat{O}x$ και $z\hat{O}y$ δεν είναι εφεξής, αφού έχουν διαφορετική κορυφή

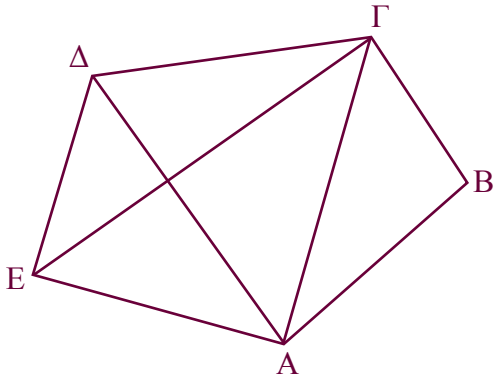
γ)) Οι γωνίες $\Gamma\hat{O}B$ και $B\hat{O}A$ είναι εφεξής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε και να ονομάσετε όλες τις εφεξής γωνίες του σχήματος

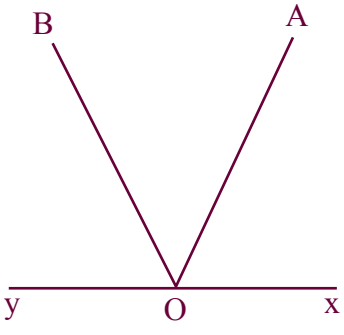


2. Να βρείτε τις εφεξής γωνίες του σχήματος

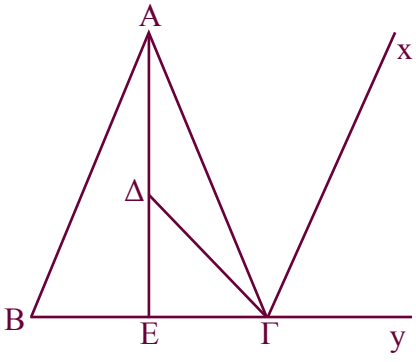


3. Να γράψετε τις εφεξής και τις διαδοχικές γωνίες που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα

α)



β)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 175

1. α) …εφεξής
β) …διαδοχικές

2. Εφεξής γωνίες:
- $E\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$
- $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$
- $E\hat{\Delta}A$ και $\Gamma\hat{A}B$
- $A\hat{\Delta}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$
- $B\hat{\Gamma}A$ και $A\hat{\Gamma}\Delta$
- $AB\hat{\Delta}$ και $\Delta B\hat{\Gamma}$
- $E\hat{\Delta}B$ και $B\hat{\Delta}\Gamma$
- $E\hat{A}\Delta$ και $A\hat{\Delta}\Gamma$
- $B\hat{K}A$ και $A\hat{K}\Delta$
- $A\hat{K}\Delta$ και $\Delta\hat{K}\Gamma$
- $\Delta\hat{K}\Gamma$ και $\Gamma\hat{K}B$
- $\Gamma\hat{K}B$ και $B\hat{K}A$
- $E\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$
- $E\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}B$

Διαδοχικές γωνίες:
- $E\hat{A}\Delta$, $\Delta\hat{A}\Gamma$, $\Gamma\hat{A}B$
- $E\hat{\Delta}A$, $A\hat{\Delta}B$, $B\hat{\Delta}\Gamma$
- $B\hat{K}A$, $A\hat{K}\Delta$, $\Delta\hat{K}\Gamma$, $\Gamma\hat{K}B$

3. Εφεξής γωνίες:
- $\Delta\hat{A}E$ και $E\hat{A}B$
- $\chi\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{B}E$
- $\Gamma\hat{B}E$ και $E\hat{B}A$
- $\Gamma\hat{\Delta}E$ και $E\hat{\Delta}A$
- $\Delta\hat{E}A$ και $A\hat{E}B$
- $\chi\hat{B}\Gamma$ και $\Gamma\hat{B}A$
- $\chi\hat{B}E$ και $E\hat{B}A$

4. α)

Εφεξής γωνίες:
- $B\hat{A}Z$ και $Z\hat{A}\Gamma$
- $AB\hat{Z}$ και $Z\hat{B}\Delta$
- $Z\hat{E}A$ και $Z\hat{E}\Gamma$
- $A\hat{Z}E$ και $E\hat{Z}\Delta$
- $\Delta\hat{Z}B$ και $B\hat{Z}A$
- $\chi\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}E$
- $B\hat{\Delta}Z$ και $Z\hat{\Delta}\Gamma$
- $B\hat{Z}A$ και $A\hat{Z}E$
- $E\hat{Z}\Delta$ και $\Delta\hat{Z}B$

Διαδοχικές γωνίες: $\Delta\hat{Z}B$, $B\hat{Z}A$, $A\hat{Z}E$, $E\hat{Z}\Delta$

β)

Εφεξής γωνίες:
- $y\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}A$
- $\chi\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}\Gamma$
- $\Delta\hat{\Gamma}A$ και $A\hat{\Gamma}B$
- $\chi\hat{A}\Delta$ και $\Delta\hat{A}B$
- $\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$
- $y\hat{\Gamma}A$ και $A\hat{\Gamma}B$
- $y\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}B$
- $\chi\hat{A}\Gamma$ και $\Gamma\hat{A}B$

Διαδοχικές γωνίες:
- $\chi\hat{A}\Delta$, $\Delta\hat{A}\Gamma$, $\Gamma\hat{A}B$
- $y\hat{\Gamma}\Delta$, $\Delta\hat{\Gamma}A$ $A\hat{\Gamma}B$

γ)

Εφεξής γωνίες:
- $\chi\hat{O}y$ και $y\hat{O}z$
- $y\hat{O}z$ και $z\hat{O}v$
- $\chi\hat{O}z$ και $z\hat{O}v$
- $\chi\hat{O}y$ και $y\hat{O}v$

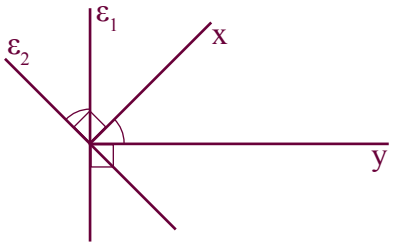
Διαδοχικές γωνίες:
- $\chi\hat{O}y$, $y\hat{O}z$, $z\hat{O}v$

δ)

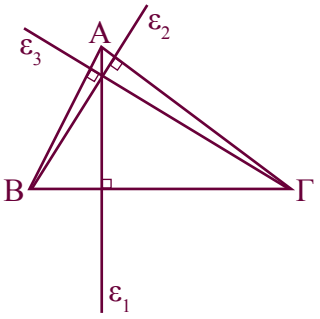
Εφεξής γωνίες:
- $\Delta\hat{A}K$ και $K\hat{A}B$
- $A\hat{B}K$ και $K\hat{B}\Gamma$
- $B\hat{\Gamma}K$ και $K\hat{\Gamma}\Delta$
- $K\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}\chi$
- $\Gamma\hat{\Delta}K$ και $K\hat{\Delta}A$
- $\Gamma\hat{K}\Delta$ και $\Delta\hat{K}A$
- $\Delta\hat{K}A$ και $A\hat{K}B$
- $A\hat{K}B$ και $B\hat{K}\Gamma$
- $B\hat{K}\Gamma$ και $\Gamma\hat{K}\Delta$
- $\chi\hat{\Gamma}\Delta$ και $\Delta\hat{\Gamma}B$
- $\chi\hat{\Gamma}K$ και $K\hat{\Gamma}B$

Διαδοχικές γωνίες:
- $B\hat{\Gamma}K$, $K\hat{\Gamma}\Delta$, $\Delta\hat{\Gamma}\chi$
- $B\hat{K}\Gamma$, $\Gamma\hat{K}\Delta$, $\Delta\hat{K}A$, $A\hat{K}B$

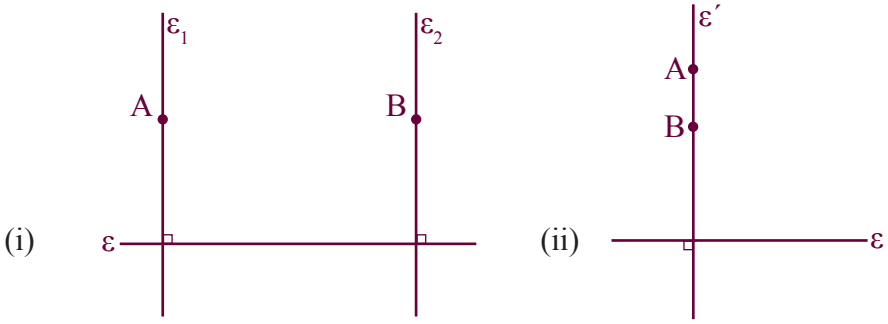
5.



6. Βάζουμε το γνώμονα πάνω σε καθεμιά από τις πλευρές του τριγώνου έτσι ώστε η μία από τις δύο κάθετες πλευρές του να συμπίπτει με την πλευρά του τριγώνου και η άλλη κάθετη πλευρά του να έρθει σε επαφή με την κορυφή του τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά. Χαράσσουμε που είναι κάθετη στην πλευρά του τριγώνου. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία αυτή και για τις τρεις πλευρές του τριγώνου.



7. Σχεδιάζουμε μια ευθεία ε και τοποθετούμε το γνώνομα έτσι ώστε η μία κάθετη πλευρά του να συμπίπτει με την ευθεία ε και η άλλη κάθετη πλευρά του να έρθει σε επαφή μ' ένα από τα σημεία. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για καθένα από τα σημεία Α και Β, σχηματίζοντας τις ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ αντίστοιχα που είναι κάθετες στην ε (i)
Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ συμπίπτουν, μόνο αν τα σημεία Α και Β βρίσκονται στην ίδια κάθετη ε΄ προς την ε (ii)



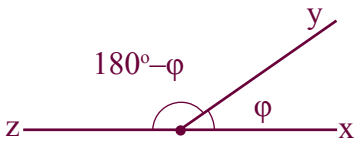
8. Οι γωνίες, από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη είναι :
Μηδενική, Οξεία, Ορθή, Αμβλεία, Ευθεία, Μη κυρτή, Πλήρης

1.8

- Παραπληρωματικές Γωνίες
- Συμπληρωματικές Γωνίες
- Κατακορυφήν Γωνίες

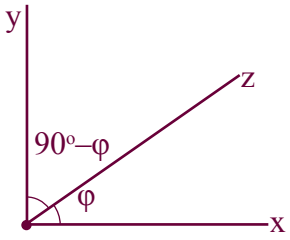
ΘΕΩΡΙΑ

- Παραπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180^o.



Σχήμα 17. Οι γωνίες $\hat{\phi}$ και $180^o-\hat{\phi}$ είναι παραπληρωματικές

- Συμπληρωματικές γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90^o.

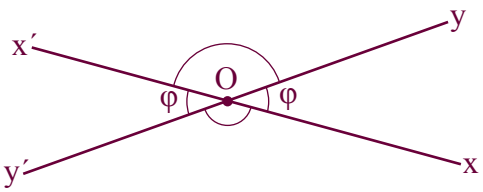


Σχήμα 18. Οι γωνίες $\hat{\phi}$ και $90^o-\hat{\phi}$ είναι συμπληρωματικές

- Κατακορυφήν γωνίες ονομάζονται δύο γωνίες που έχουν κοινή κορυφή και τις πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.



Σχήμα 19. Κατακορυφήν γωνίες

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες α και β, όταν
α) η γωνία α είναι διπλάσια της γωνίας β
β) η γωνία β είναι μικρότερη κατά 20^o από την γωνία α
γ) η γωνία α είναι ίση με το $\frac{1}{4}$ της γωνίας β

Λύση

α) Για την γωνία α έχουμε ότι $\hat{\alpha}=2\hat{\beta}$. Όμως από εκφώνηση ισχύει: $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{\beta}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow 3\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\beta}=60^o$
Άρα $\hat{\alpha}=120^o$

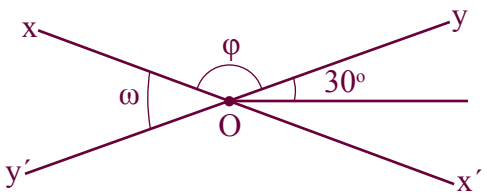
β) Για την γωνία β ισχύει: $\hat{\beta}=\hat{\alpha}-20^o$. Όμοια ισχύει ότι $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\alpha}+\hat{\alpha}-20^o=180^o \Leftrightarrow 2\hat{\alpha}=180^o+20^o \Leftrightarrow 2\hat{\alpha}=200^o \Leftrightarrow \hat{\alpha}=100^o$. Άρα $\hat{\beta}=100^o-20^o=80^o$

γ) Για την γωνία α ισχύει: $\hat{\alpha}=\frac{1}{4}\hat{\beta}$

$\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \frac{1}{4}\hat{\beta}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \frac{5}{4}\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\beta}=144^o$

Άρα $\hat{\alpha}=\frac{1}{4}144^o=36^o$

2. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



Λύση

Αφού η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $y\hat{O}\chi'$ και αφού $y\hat{O}\delta = 30^o$ ισχύει ότι και η $\delta\hat{O}\chi' = 30^o$

Η γωνία $y\hat{O}\chi'$ και $\hat{\omega}$ είναι κατακορυφήν γωνίες, έτσι θα είναι $y\hat{O}\chi' = \hat{\omega} = 60^o$

Η γωνία $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, έτσι θα είναι $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^o \Leftrightarrow 60^o + \hat{\phi} = 180^o \Leftrightarrow \hat{\phi} = 120^o$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να βρείτε την παραπληρωματική της γωνίας
α) $\hat{A} = 100^o$ β) $\hat{B} = 20^o$ γ) $\hat{\Gamma} = 105^o$ δ) $\hat{\Delta} = 30^o$

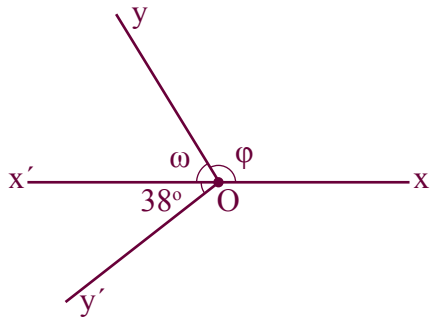
2. Να βρείτε την συμπληρωματική της γωνίας
α) $\hat{A} = 10^o$ β) $\hat{B} = 50^o$ γ) $\hat{\Gamma} = 80^o$

3. Δυο γωνίες είναι συμπληρωματικές μεταξύ τους και η μία είναι τριπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις δυο γωνίες ω και φ

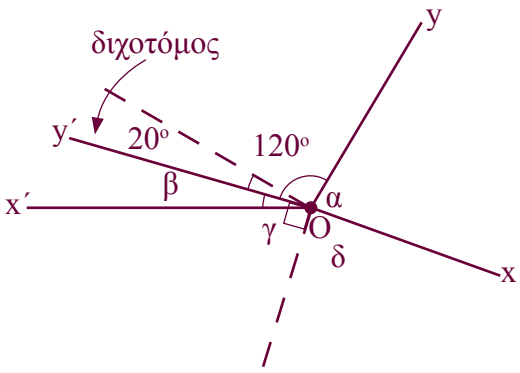
4. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και φ, όταν η $\hat{\phi}$ είναι διπλάσια της $\hat{\omega}$

5. Να βρείτε δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και φ, όταν η $\hat{\phi}$ είναι μεγαλύτερη κατά 50^o από την $\hat{\omega}$

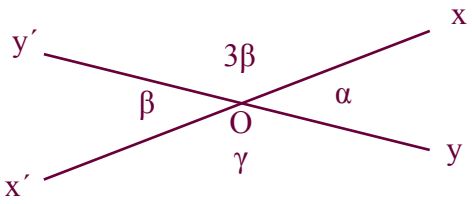
6. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος



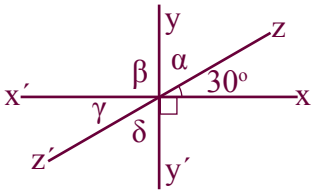
7. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



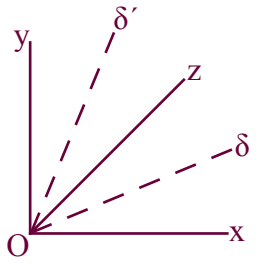
8. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



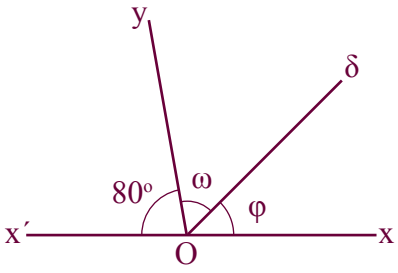
9. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



10. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\chi\hat{O}y = 90^o$ και $y\hat{O}z = 40^o$. Αν Οδ είναι η διχοτόμος της $\chi\hat{O}z$ και Οδ΄ η διχοτόμος της $y\hat{O}z$, να υπολογίσετε η γωνία $\delta\hat{O}\delta'$



11. Στο παρακάτω σχήμα η Οδ είναι η διχοτόμος της $\chi\hat{O}y$. Να βρείτε τις γωνίες ω και φ

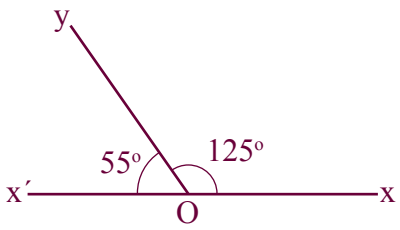


ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 179

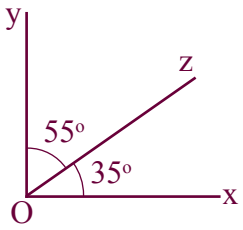
1. …κατακορυφήν γωνίες

2. Η παραπληρωματική της γωνίας 125^o είναι 180^o-125^o=55^o. Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε τη γωνία 125^o και προεκτείνοντας τη μία πλευρά της προς το μέρος της κορυφής, σχεδιάζουμε την παραπληρωματική της.



3. α) Η παραπληρωματική μιας αμβλείας είναι οξεία γωνία
β) Η παραπληρωματική μιας ορθής είναι ορθή γωνία, διότι $90^o+90^o=180^0$
γ) Η παραπληρωματική μιας οξείας είναι αμβλεία γωνία

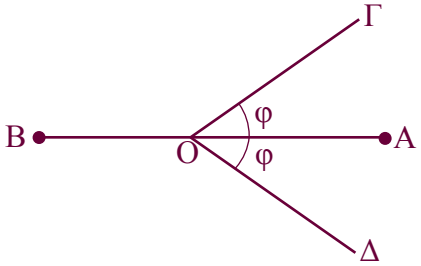
4. Η συμπληρωματική της γωνίας 35^o είναι $90^o-35^o=55^o$. Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε τη $\chi\hat{O}z=35^o$ και δέρνουμε την $Oy\perp O\chi$. Η γωνία $y\hat{O}z=55^o$ είναι η συμπληρωματική της $\chi\hat{O}z$



5. Η $\Gamma\hat{O}B$ είναι παραπληρωματική της $A\hat{O}\Gamma$, οπότε $\Gamma\hat{O}B=180^o-A\hat{O}\Gamma \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}B=180^o-\hat{\phi}$ (1)

Η $\Delta\hat{O}B$ είναι παραπληρωματική της $\Delta\hat{O}\Gamma$, οπότε $\Delta\hat{O}B=180^o-\Delta\hat{O}A \Leftrightarrow \Delta\hat{O}B=180^o-\hat{\phi}$ (2)

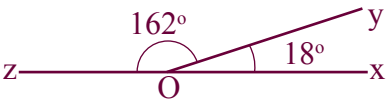
Από τις (1) και (2) έχουμε $\Gamma\hat{O}B=\Delta\hat{O}B$



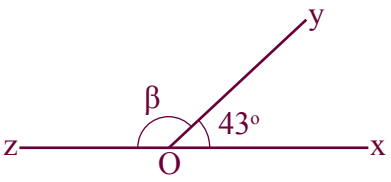
6.

- $\hat{\alpha}=15^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-15^o=165^o$

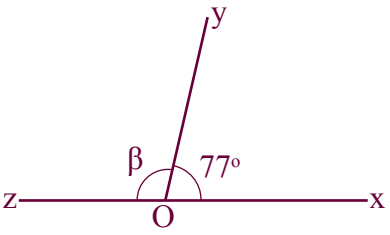
- $\hat{\alpha}=18^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-18^o=162^o$



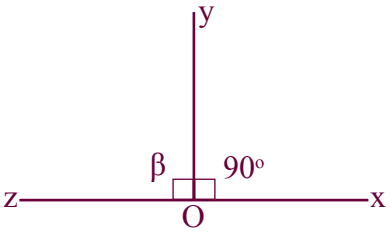
- $\hat{\alpha}=43^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-43^o=137^o$



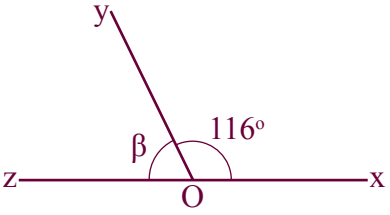
- $\hat{\alpha}=77^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-77^o=103^o$



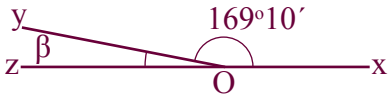
- $\hat{\alpha}=90^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-90^o=90^o$



- $\hat{\alpha}=116^o$, άρα $\hat{\beta}=180^o-116^o=64^o$



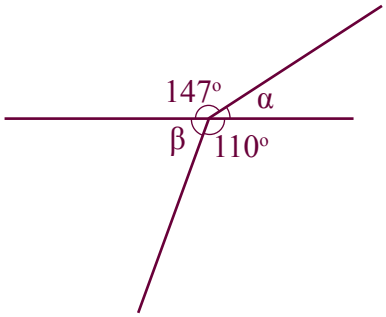
- $\hat{\alpha}=169^o\ 10'$, άρα $\hat{\beta}=180^o-(169^o\ 10')=10^o\ 50'$ $(1^o=60')$



$\hat{\alpha}$	15^o	18^o	43^o	77^o	90^o	116^o	$169^o\ 10'$
$\hat{\beta}$ (από μέτρηση)	165^o	162^o	137^o	103^o	90^o	64^o	περίπου 11^o
$\hat{\beta}$ (από υπολογισμό)	165^o	162^o	137^o	103^o	90^o	64^o	$10^o\ 50'$

7.

- Η γωνία α είναι παραπληρωματική με τις 147^o οπότε $\hat{\alpha} = 180^o - 147^o = 33^o$
- Η γωνία β είναι παραπληρωματική με τις 110^o οπότε $\hat{\beta} = 180^o - 110^o = 70^o$



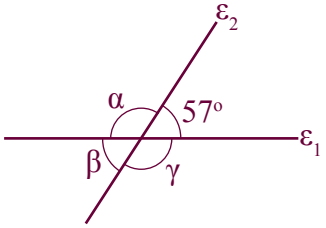
8. Με το μοιρογνωμόνιο σχεδιάζουμε τη $\chi\hat{O}y = 37^o$. Φέρνουμε τις αντικείμενες ημιευθείες των πλευρών της και η $\chi\hat{O}y$ είναι η κατακορυφήν της.

9.

- $\hat{\alpha}$ και $\hat{\gamma}$
- $\hat{\beta}$ και $\hat{\delta}$
- $\hat{\lambda}$ και $\hat{\nu}$
- $\hat{\mu}$ και $\hat{\kappa}$

10. Έστω ε_1 και ε_2 οι τεμνόμενες ευθείες, όπως στο σχήμα

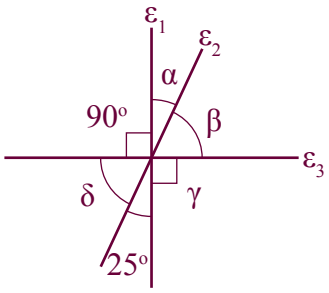
- Η $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματική με τις 57^o, άρα $\hat{\alpha} = 180^o - 57^o = 123^o$
- Η $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν των 57^o, άρα $\hat{\beta} = 57^o$
- Η $\hat{\gamma}$ είναι κατακορυφήν της $\hat{\alpha}$, άρα $\hat{\gamma} = \hat{\alpha} = 123^o$



11.

- Η γωνία α είναι κατακορυφήν των 25^o, άρα $\hat{\alpha}=25^o$
- Η γωνία γ είναι κατακορυφήν των 90^o, άρα $\hat{\gamma}=90^o$
- Προφανώς $\hat{\delta}+25^o=90^o$, γιατί $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, οπότε $\hat{\delta}=65^o$

Οι γωνίες $\hat{\delta}$ και $\hat{\beta}$ είναι κατακορυφήν, άρα $\hat{\delta}=\hat{\beta}=65^o$



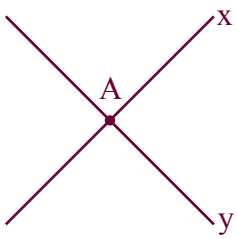
1.9 • Θέσεις Ευθειών στο Επίπεδο

ΘΕΩΡΙΑ

- Παράλληλες ευθείες λέγονται δύο σημειώσεις του ίδιου επιπέδου που δεν έχουν κοινό σημείο

Σχήμα 11. Παράλληλες ευθείες $\chi \parallel y$

- Τεμνόμενες λέγονται δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που έχουν ένα κοινό σημείο



Σχήμα 20. Τεμνόμενες ευθείες

ΠΡΟΣΟΧΗ

Δύο ευθείες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο ή θα είναι παράλληλες ή θα τέμνονται

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 183

1.

α)…παράλληλες
β)…μία και μοναδική κάθετη ευθεία
γ)…παράλληλες

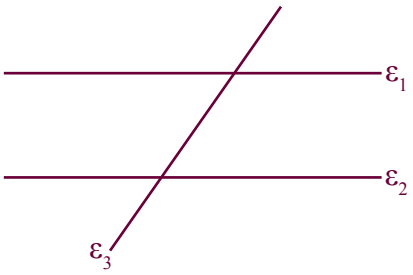
2.

α)…άπειρες
β)…θα τέμνονται
γ)…παράλληλες
δ)…παράλληλες
ε)…τεμνόμενες

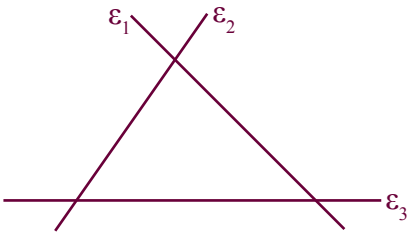
3.

α)

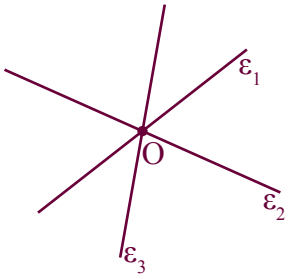
β)



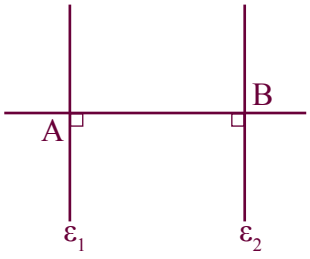
γ)



δ)

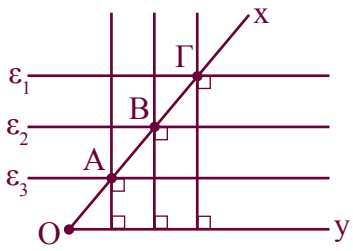


4. Με το χάρακα σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και με το γνώμονα φέρνουμε τις κάθετες ευθείες στα άκρα Α, Β του ευθύγραμμου τμήματος



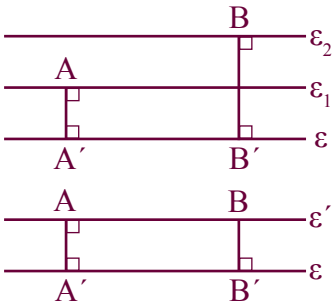
5. Με το χάρακα και το γνώμονα σχεδιάζουμε ευθείες που να διέρχονται από τα σημεία Α, Β, Γ και να είναι παράλληλες προς την Οy, ως εξής:
Φέρνουμε την ΑΑ΄ κάθετη στη Οy και στη συνέχεια φέρνουμε την $ε_3$ κάθετη

στην ΑΑ΄, στο σημείο Α. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία και για τα σημεία Β και Γ



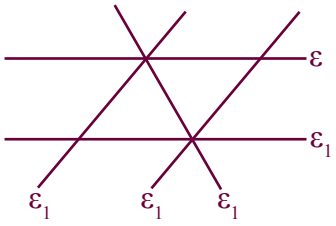
$\varepsilon_1 \| \varepsilon_2 \| \varepsilon_3 \| Oy$

6. Με το γνώμονα φέρνουμε από το Α ευθεία ΑΑ΄ η οποία διέρχεται από το Α. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το σημείο Β και φέρνουμε την ε_2 παράλληλη στην ε.
Οι παράλληλες από τα σημεία Α και Β συμπίπτουν, όταν τα Α και Β βρίσκονται σε μια ευθεία ε΄ παράλληλη προς την ε.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ποιες από τις ευθείες του σχήματος είναι παράλληλες και ποιες τεμνόμενες;



Λύση

$\varepsilon \| \varepsilon_1$, $\varepsilon_4 \| \varepsilon_3$
Τεμνόμενες: ε_1-ε_3, ε-ε_4, ε-ε_2, ε_1-ε_2, ε_1-ε_4, ε_2-ε_3, ε_2-ε_4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε τέσσερις ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, έτσι ώστε:
α) οι ευθείες να μην τέμνονται

β) $\varepsilon_1 \| \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ κσι $\varepsilon_2 \| \varepsilon_4$
γ) ένα μόνο κοινό σημείο

2. Από ένα σημείο Α που βρίσκεται εκτός ευθείας ε να φέρετε ευθεία ε_1 κάθετη στην ε.

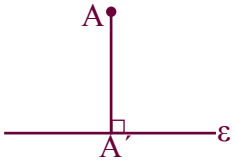
3. Από ένα σημείο Α που βρίσκεται εκτός ευθείας ε να φέρετε ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε.

1.10

- Απόσταση Σημείου από Ευθεία
- Απόσταση Παραλλήλων

ΘΕΩΡΙΑ

- Απόσταση σημείου Α από την ευθεία ε ονομάζεται το μήκος του κάθετου τμήματος ΑΑ΄ από το σημείο Α προς την ευθεία ε

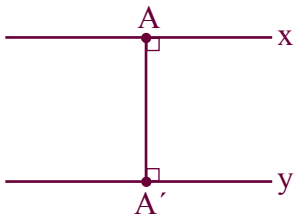


Σχήμα 21. Απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε

ΠΡΟΣΟΧΗ

Από το σημείο Α υπάρχει μόνο μια κάθετη στην ευθεία ε

- Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών ονομάζεται το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο ευθείες



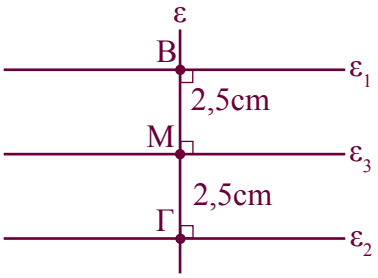
Σχήμα 22. Απόσταση των παράλληλων ευθειών χ, y

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 που να απέχουν 5cm. Να βρείτε ένα σημείο Μ, το οποίο να ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2. Στη συνέχεια να φέρετε από το Μ ευθεία παράλληλη στις ε_1 και ε_2

Λύση

Σε μια ευθεία ε παίρνουμε δύο τυχαία σημεία Β, Γ έτσι ώστε ΒΓ=5cm. Σχεδιάζουμε τις ευθείες ε_1 και ε_2 κάθετες στην ε, οι οποίες διέρχονται από τα σημεία Β και Γ. Επομένως $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. Θεωρούμε το Μ μέσο του ΒΓ. Τότε ΒΜ=ΜΓ=2,5cm και το Μ ισαπέχει από τις ε_1 και ε_2. Φέρνουμε $\varepsilon_3 \perp \varepsilon$, η οποία διέρχεται από το Μ. Έτσι είναι $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και η ε_3 λέγεται μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και να κατασκευάσετε δυο ευθείες ε_1, ε_2 παράλληλες στην ε που να απέχουν από αυτή 2cm.

2. Να σχεδιάσετε μια ευθεία ε και ένα σημείο Α το οποίο απέχει 0,56dm από την ε. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε μια ευθεία $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ που να διέρχεται από το Α.

3. Να σχεδιάσετε δύο ημιευθείες Αx και Ay, όχι αντικείμενες. Να βρείτε ένα σημείο Β της Αx το οποίο από την Ay ΒΒ΄=30mm και ένα σημείο Γ της Ay το οποίο απέχει από την Αx απόσταση ΓΓ΄=0,5dm

α) Να συγκρίνετε μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ
β) Να συγκρίνετε μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο τις γωνίες ΑΓΓ΄και ΑΒΒ΄

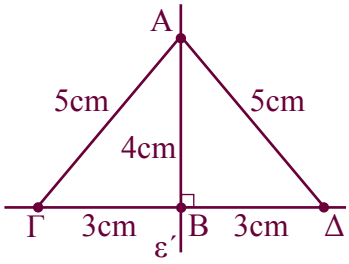
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 186

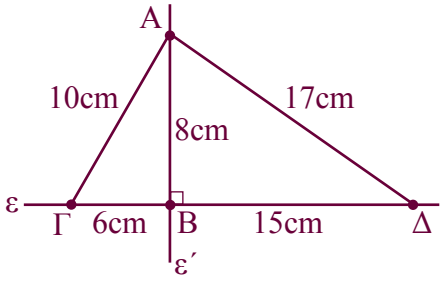
1.
α) …απόσπαση
β) …απόσπαση

2. Με το χάρακα φτιάχνουμε την ευθεία ε και παίρνουμε τα σημεία Γ, Β, Δ έτσι ώστε ΓΒ=ΒΔ=3cm.

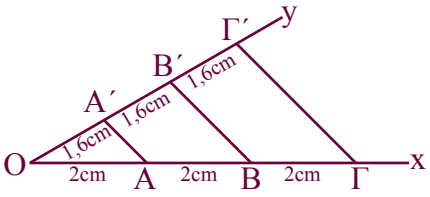
Με το γνώμονα φέρνουμε στο Β την ε΄ κάθετη στην ε και παίρνουμε το σημείο Α ώστε ΑΒ=4cm. Μετράμε το ΑΓ και ΑΔ και τα βρίσκουμε ίσα, δηλαδή ΑΓ=ΑΔ=5cm



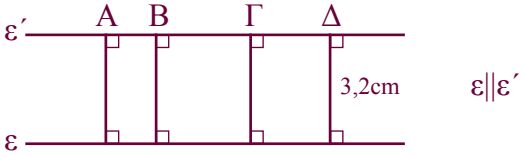
3. Φέρνουμε την ε΄ κάθετη στην ε, η οποία διέρχεται από το Β. Μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα ΑΓ και ΑΔ τα βρίσκουμε άνισα, ΑΓ<ΑΔ
Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ΑΔ αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη απόσταση ΔΒ και το μικρότερο ΑΓ αντιστοιχεί στη μικρότερη απόσταση ΒΓ



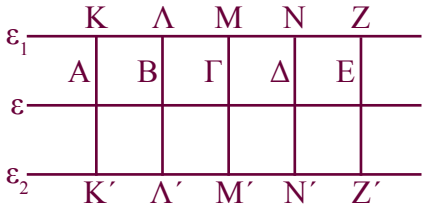
4. Μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε Α΄Β΄=1,6cm, Β΄Γ΄=1,6cm. Παρατηρούμε ότι είναι ΟΑ΄=Α΄Β΄=Β΄Γ΄=1,6cm.



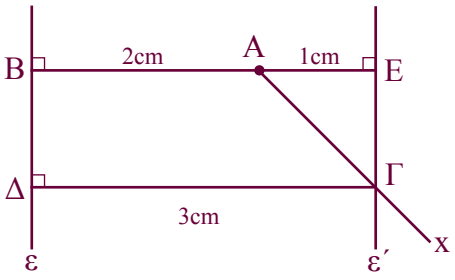
5. Με το γνώμονα φέρνουμε από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ παράλληλη προς την ε και παρατηρούμε ότι και οι τέσσερις παράλληλες που φέραμε συμπίπτουν σε μία, την ε΄



6. Σχεδιάζουμε τις παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2. Παίρνουμε τις αποστάσεις ΚΚ΄, ΛΛ΄, ΜΜ΄, ΝΝ΄ και ΖΖ΄ των παραλλήλων ε_1 και ε_2 και βρίσκουμε τα μέσα τους, που είναι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε. Με αυτό τον τρόπο τα σημεία αυτά ισαπέχουν από τις ευθείες ε_1 και ε_2.
Από το Α φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη προς τις ε_1 και ε_2 και παρατηρούμε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε ανήκουν στην ε



7. Προεκτείνουμε τη ΒΑ κατά τμήμα ΑΕ=1cm και φέρνουμε από το Ε παράλληλη προς την ε, η οποία τέμνει την Αχ στο Γ. Η απόσταση ΓΔ των παραλλήλων είναι 3 cm, επομένως το Γ είναι το ζητούμενο σημείο

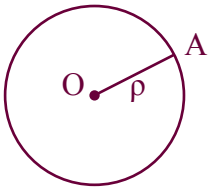


1.11 • Κύκλος και Στοιχεία Κύκλου

ΘΕΩΡΙΑ

- Κύκλος ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο.

- Η απόσταση αυτή λέγεται ακτίνα του κύκλου και συμβολίζεται με ρ
- Το σημείο Ο λέγεται κέντρου του κύκλου



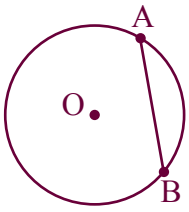
Σχήμα 23. Κύκλος (Ο,ρ)

- Συμβολίζουμε ένα κύκλο με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ρ, ως (Ο,ρ)

ΠΡΟΣΟΧΗ

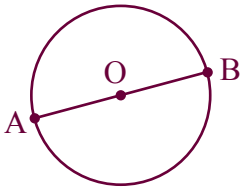
- Δυο κύκλοι με ίσες ακτίνες είναι ίσοι
- Δυο ή περισσότεροι κύκλοι με ίδιο κέντρο λέγονται ομόκεντροι

- Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δύο σημεία ενός κύκλου λέγεται χορδή



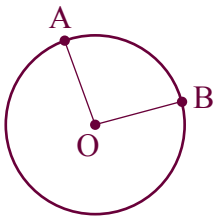
Σχήμα 24. Χορδή κύκλου

- Η χορδή που περνά από το κέντρο του κύκλου λέγεται διάμετρος του κύκλου



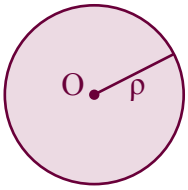
Σχήμα 25. Διάμετρος κύκλου

- Δύο σημεία χωρίζουν τον κύκλο σε δύο μέρη ή σε δύο τόξα



Σχήμα 26. Τόξο κύκλου

- Κυκλικός δίσκος (O, ρ) είναι ο κύκλος (O, ρ) μαζί με το επίπεδο που περικλείει



Σχήμα 27. Κυκλικός δίσκος (O, ρ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα
α) ρ_1=20cm β) ρ_2=3cm γ) ρ_3=0,13dm

2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο με κέντρο το σημείο O και διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB=2,5cm

3. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (O, 3cm) και να πάρετε σημείο M του κύκλου. Να σχεδιάσετε ένα άλλο κύκλο (M, 2dm)

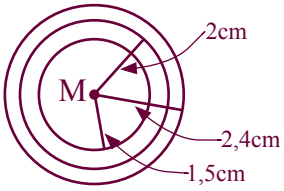
4. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (O, 3cm). Να ορίσετε ένα σημείο A του κύκλου αυτού και να χαράξετε τις χορδές AB=1,2 cm και AΓ=3cm

5. Να σχεδιάσετε τρεις ομόκεντρους κύκλους με κέντρο το σημείο O και διαμέτρους 3,2cm, 5 cm, 3,4 cm

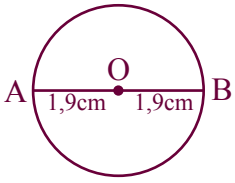
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 189

1. Με το διαβήτη σχεδιάζουμε τρεις κύκλους με ακτίνες 2,4cm, 2cm και 15mm=1,5 cm

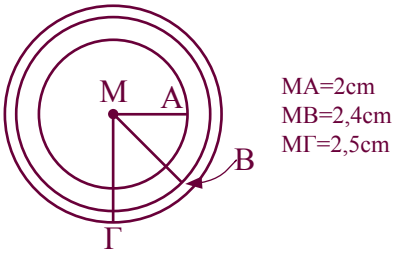


2. Αφού η διάμετρος του κύκλου είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=3,8 cm, το κέντρο Ο του κύκλου θα είναι το μέσο του ΑΒ και η ακτίνα του κύκλου θα είναι $ΟΑ=\frac{3,8}{2}=1,9$ cm

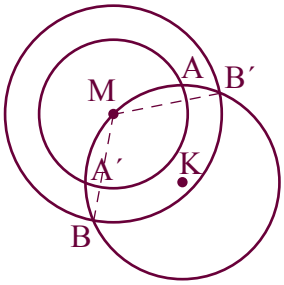


3. Βρίσκουμε τις ακτίνες των τριών κύκλων, αφού τις αντίστοιχες διαμέτρους

- ακτίνα πρώτου κύκλου: 2 cm
- ακτίνα δεύτερου κύκλου: 2,5 cm
- ακτίνα τρίτου κύκλου: 2,4 cm



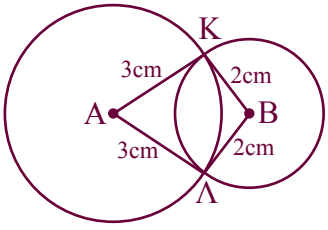
4. Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Κ, 3,4cm) και παίρνουμε τυχαία ένα σημείο του Μ. Με κέντρο το Μ και ακτίνα 2,4 cm γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Κ, 3,4cm) στα σημεία Α και Α΄. Οι χορδές ΜΑ=ΜΑ΄=2,4 cm είναι οι ζητούμενες χορδές. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για το σημείο Μ και γράφουμε κύκλο με ακτίνα 4,1 cm, ο οποίος τέμνει τον κύκλο (Κ, 3,4cm) στα σημεία Β και Β΄. Οι χορδές ΜΒ=ΜΒ΄=4,1 cm είναι οι ζητούμενες χορδές.



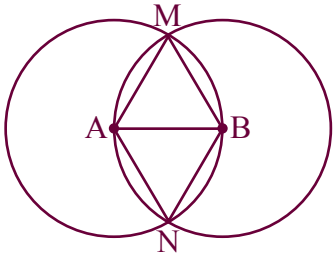
5.

α) Γράφουμε τους κύκλους (Α, 3cm) και (Β, 2cm). Τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία των κύκλων.

β) Οι κύκλοι (Α, 3cm) και (Β, 2cm) τέμνονται στα σημεία Κ και Λ, τα οποία απέχουν 3cm από το Α και 2cm από το Β.



6. Οι κύκλοι (Α, ΑΒ) και (Β, ΑΒ) είναι ίσοι, γιατί έχουν την ίδια ακτίνα. Επομένως ΜΑ=ΜΒ και ΝΑ=ΝΒ ως ακτίνες ίσων κύκλων. Άρα ΜΑ=ΜΒ=ΝΑ=ΝΒ.

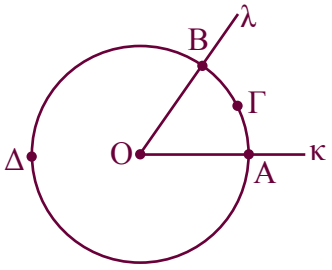


1.12

- Επίκεντρη Γωνία
- Σχέση Επίκεντρης Γωνίας και του Αντίστοιχου τόξου
- Μέτρηση Τόξου

ΘΕΩΡΙΑ

- Η γωνία της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο ενός κύκλου λέγεται επίκεντρη



Σχήμα 28. Επίκεντρη γωνία

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Το τόξο ΑΓΒ που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας κΟλ ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας κΟλ
- Το τόξο ΑΔΒ που βρίσκεται στο εξωτερικό της γωνίας κΟλ ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της μη κυρτής επίκεντρης γωνίας κΟλ
- Το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας λέγεται μέτρου ενός τόξου

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

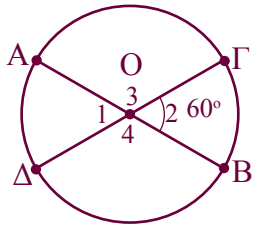
1. Σ' ένα κύκλο (Ο,ρ) να φέρετε δυο διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ.
α) Να συγκρίνετε τα τόξα ΑΔ και ΒΓ, καθώς και τα τόξα ΑΓ και ΒΔ

β) Αν $\overset{\frown}{A\Delta}=60^o$, να βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν οι δύο διάμετροι

Λύση

α) Οι επίκεντρες γωνίες O_1 και O_2 είναι ίσες ως κατακορυφήν. Άρα και τα αντίστοιχα τόξα τους ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{A\Delta}=\overset{\frown}{B\Gamma}$.

Οι επίκεντρες γωνίες O_3 και O_4 είναι επίσης κατακορυφήν, άρα $\overset{\frown}{O_3}=\overset{\frown}{O_4}$ και όμοια τα αντίστοιχα τόξα, $\overset{\frown}{A\Gamma}=\overset{\frown}{B\Delta}$



β) Το τόξο ΑΔ=60°, άρα η αντίστοιχη επίκεντρη $\hat{O}_1=60^o=\hat{O}_2$

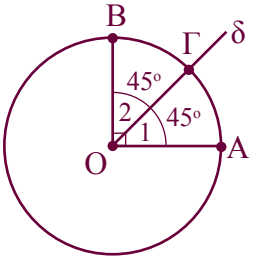
Οι γωνίες O_1, O_3 είναι παραπληρωματικές. άρα $\hat{O}_1+\hat{O}_3=180^o \Leftrightarrow 60^o+\hat{O}_3=180^o \Leftrightarrow \hat{O}_3=120^o$, οπότε $\hat{O}_3=\hat{O}_4=120^o$

2. Σε κόκλο (Ο, ρ) να σχεδιάσετε δύο κάθετες ακτίνες ΟΑ, ΟΒ. Αν Οδ είναι η διχοτόμος της $A\hat{O}B$, η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ, να συγκρίνετε τις χορδές ΑΓ και ΒΓ

Λύση

Η διχοτόμος Οδ της ορθής $A\hat{O}B$ τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες: (Σχήμα)

$A\hat{O}\Gamma=\Gamma\hat{O}B=45^o$

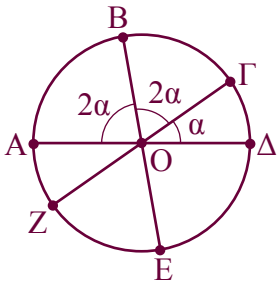


Άρα τα τόξα ΑΓ και ΒΓ είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Gamma} = 45^o$. Επομένως και οι αντίστοιχες χορδές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

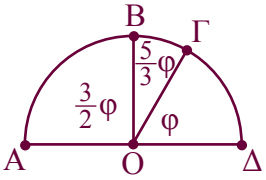
1. Σ' ένα κύκλο (Ο,ρ) φέρνουμε διάμετρο ΑΒ και παίρνουμε στο ίδιο ημικύκλιο τρία σημεία Κ, Λ, Μ έτσι ώστε $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{K\Lambda} = \overset{\frown}{\Lambda M} = 20^o$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι το τόξο ΜΒ

2. Να υπολογίσετε σε μοίρες τα τόξα στα οποία έχει χωριστεί ο κύκλος του παρακάτω σχήματος



3. Σε κύκλο (Ο, ρ) να πάρετε δύο τόξα ΑΒ και ΒΓ έτσι ώστε το $\overset{\frown}{AB}$ να ισούται με το $\frac{1}{6}$ του κύκλου και το $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με τα $\frac{4}{9}$ του κύκλου. Να υπολογίσετε τις επίκεντρες γωνίες ΑΟΒ και ΑΟΓ

4. Στο παρακάτω ημικύκλιο να υπολογίσετε τις γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ και ΓΟΔ



5. Σε κύκλο (Ο, ρ) να σχεδιάσετε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες ΑΟΒ=80° και ΒΟΓ=115°. Να υπολογίσετε την κυρτή γωνία ΑΟΓ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 192

1.

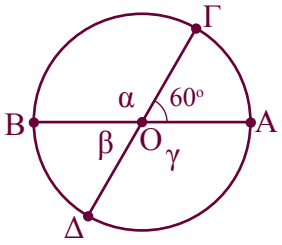
α) 360°

β) 180°

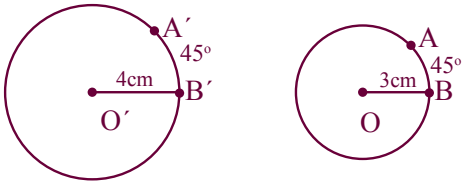
γ) 90°

2.

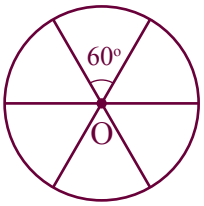
- Το τόξο ΑΓ αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 60°, άρα $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}=60^\circ$
- Η γωνία β είναι κατακορυφήν με τις 60°, άρα $\hat{\beta}=60^\circ$. Άρα το τόξο ΒΔ=60°, αφού αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία β.
- Η γωνία α είναι παραπληρωματική των 60°, οπότε $\hat{\alpha}=120^\circ$. Το τόξο ΓΒ αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 120°, άρα $\overset{\frown}{\text{ΓΒ}}=120^\circ$



3. Τα τόξα ΑΒ και Α΄Β΄ δεν είναι ίσα, γιατί, ενώ έχουν το ίδιο μέτρο 45°, δεν ανήκουν σε ίσους κύκλους

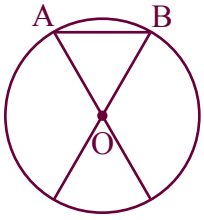


4. Αφού τα έξι τόξα είναι ίσα, θα είναι και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες ίσες. Ο κύκλος αντιστοιχεί σε μια πλήρη επίκεντρη γωνία, δηλαδή 360^o. Οπότε καθεμία από τις έξι επίκεντρες γωνίες είναι $360^o:6=60^o$



5. Αφού η χορδή ΑΒ είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο. Μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι η επίκεντρη γωνία $AOB=60^o$.

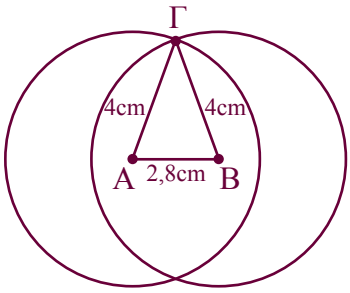
Το τόξο ΑΒ αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία ΑΟΒ, άρα $\overset{\frown}{AB}=60^o$ και αντιστοιχεί στο $\frac{60^o}{360^o}=\frac{1}{6}$ του κύκλου



$OA=OB=AB$

6. Οι ΑΓ και ΒΓ είναι ακτίνες στους ίσους κύκλους (Α, 4 cm) και (Β, 4 cm) αντίστοιχα, οπότε ΑΓ=ΒΓ. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

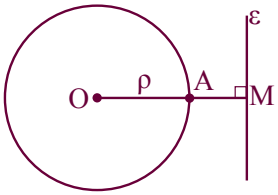
Μετρώντας με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε ότι $\Gamma\hat{A}B=\Gamma\hat{B}A=70^o$ και $A\hat{\Gamma}B=40^o$ περίπου



1.13 • Θέσεις Ευθείας και Κύκλου

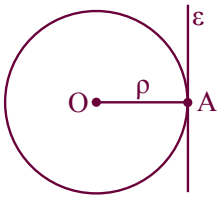
ΘΕΩΡΙΑ

- Όταν η ευθεία ε και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε λέμε ότι η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου



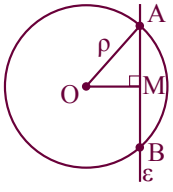
Σχήμα 29. Η ευθεία ε είναι εξωτερική του κύκλου (O, ρ)

- Όταν η ευθεία ε και ο κύκλος έχουν ένα κοινό σημείο, τότε λέμε ότι η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο αυτό



Σχήμα 30. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη του κύκλου (O, ρ)

- Όταν η ευθεία ε και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία, τότε λέμε ότι η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου (Σχήμα 31)



Σχήμα 31. Η ευθεία ε είναι τέμνουσα του κύκλου (O,ρ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

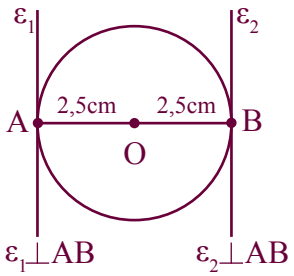
1. Να σχεδιάσετε κύκλο (Ο, ρ) με διάμετρο ΑΒ=5cm. Να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Β.

Λύση

Ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}AB=2,5$ cm.

Για να σχεδιάσουμε τις εφαπτόμενες φέρνουμε κάθετες στην ΑΒ, στα σημεία Α και Β.

Αφού $\varepsilon_1 \perp AB$ και $\varepsilon_2 \perp AB \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Έστω μία ευθεία ε και ένα σημείο Ο, του οποίου η απόσταση από την ε είναι ΟΜ=4,2cm. Να βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η ε με τον κύκλο (Ο, ρ) όταν:

α) ρ=2,3cm β) ρ=3,8cm γ) ρ=4,1cm

2. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο (Ο, 6cm) και να φτιάξετε μια χορδή ΑΒ. Να φέρετε τις εφαπτομένες του κύκλου στα Α και Β.

3. Να χαράξετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2, που να απέχουν μεταξύ τους 10cm. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο που να εφάπτεται στις ευθείες ε_1, ε_2

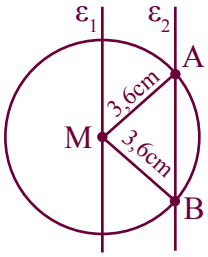
4. Να χαράξετε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2, που να απέχουν μεταξύ τους 2cm και να φέρετε μια ευθεία ε που τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α και

Β αντίστοιχα. Με διάμετρο ΑΒ να σχεδιάσετε ένα κύκλο. Ποια είναι η θέση των ευθειών $ε_1$, $ε_2$ ως προς τον κύκλο;

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

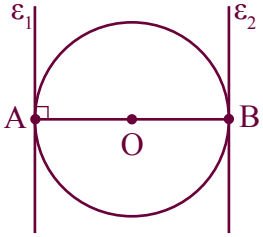
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 194

1. Φτιάχνουμε, με απόσταση 2,5 cm, τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$. Παίρνουμε σημείο Μ στην $ε_1$ και με κέντρο το Μ και ακτίνα 3,6 cm γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την $ε_2$ στα σημεία Α και Β. Επειδή τα τμήματα ΜΑ, ΜΒ είναι ακτίνες του κύκλου (Μ, 3,6 cm), έχουμε ΜΑ=ΜΒ=3,6 cm. Οπότε τα σημεία Α και Β είναι τα ζητούμενα σημεία



2. Βρίσκουμε το μέσο Ο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ=3,6 cm. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ=1,8 cm φτιάχνουμε τον κύκλο.

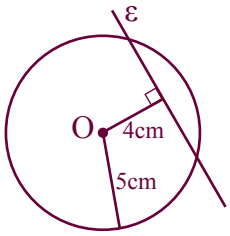
- Η εφαπτομένη $ε_1$ στο Α είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, οπότε και στη διάμετρο ΑΒ
- Η εφαπτομένη $ε_2$ στο Β είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΒ, οπότε και στη διάμετρο ΑΒ
- Οι εφαπτομένες $ε_1$ και $ε_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΒ



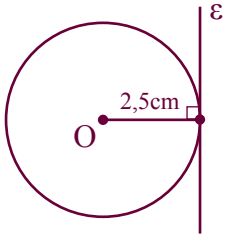
$ε_1 \| ε_2$

3.

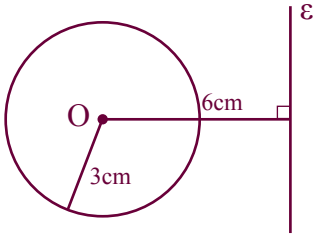
α) Είναι ρ=5cm και δ=4cm. Επειδή ρ>δ, ο κύκλος και η ευθεία έχουν δυο κοινά σημεία



β) Είναι ρ=2,5cm και δ=2,5cm. Επειδή ρ=δ, ο κύκλος και η ευθεία έχουν ένα κοινό σημείο



γ) Είναι ρ=3cm και δ=6cm. Επειδή ρ<δ, ο κύκλος και η ευθεία δεν έχουν κανένα κοινό σημείο

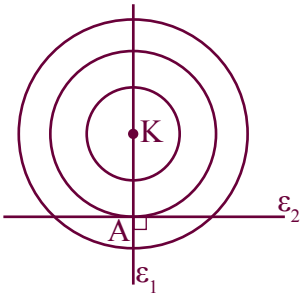


4. Το κέντρο Κ των κύκλων απέχει από την ευθεία $ε_2$ απόσταση ΚΑ=3,1cm.

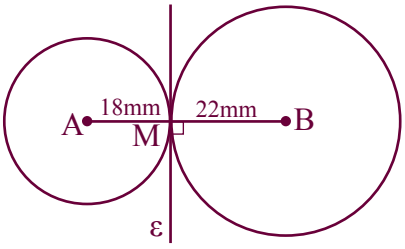
α) Ο κύκλος (Κ, 2,1cm) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με την $ε_2$, γιατί η ακτίνα του είναι μικρότερη από την απόσταση ΚΑ

β) Ο κύκλος (Κ, 3,1cm) έχει ένα κοινό σημείο με την $ε_2$, γιατί η ακτίνα του είναι ίση με την απόσταση ΚΑ

γ) Ο κύκλος (Κ, 36mm) ή (Κ, 3,6 cm) έχει δύο κοινά σημεία με την $ε_2$, γιατί η ακτίνα του είναι μεγαλύτερη από την απόσταση ΚΑ



5. Επειδή ΑΜ=18mm και ΒΜ=22 mm, το σημείο Μ είναι σημείο και των δύο κύκλων. Η κάθετη ευθεία ε από το Μ στην ΑΒ είναι κάθετη και στις ακτίνες ΜΑ και ΜΒ των κύκλων. Επομένως η ε είναι εφαπτομένη των δύο κύκλων



Επαναληπτικές ασκήσεις 1ου κεφαλαίου

Ι. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΣ

	Σ	Λ
1. Άπειρες ευθείες διέρχονται από ένα σημείο		
2. Δυο ευθείες τέμνονται, όταν είναι παράλληλες		
3. Αν ένα σημείο Μ είναι το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε μπορεί μπορεί να είναι και ένα από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος		

4. Μια οξεία γωνία έχει συμπληρωματική γωνία ☐ ☐

5. Η παραπληρωματική της μηδενικής γωνίας είναι η ευθεία γωνία ☐ ☐

6. Αν δυο εφεξής γωνίες είναι ίσες, είναι οπωσδήποτε παραπληρωματικές ☐ ☐

7. Το άθροισμα δύο παραπληρωματικών γωνιών είναι 90^o ☐ ☐

8. Δυο εφεξής γωνίες μπορεί να είναι και κατακορυφήν ☐ ☐

9. Οι διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιών είναι αντικείμενες ημιευθείες ☐ ☐

10. Αν $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=270^o$, τότε οι $\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}$ είναι παραπληρωματικές ☐ ☐

11. Δίνεται η γωνία χOy και η γωνία χOζ που περιέχεται στην χOy. Τότε οι $\chi\hat{O}y, \chi\hat{O}\zeta$ είναι διαδοχικές ☐ ☐

12. Δυο κύκλοι με ίδιο κέντρο λέγονται ομόκεντροι ☐ ☐

13. Στον κύκλο (O, 4cm) δεν υπάρχει χορδή μεγαλύτερη από 3cm ☐ ☐

14. Δίνονται οι διάμετροι ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου. Τα τόξα ΑΔ και ΒΓ είναι ίσα ☐ ☐

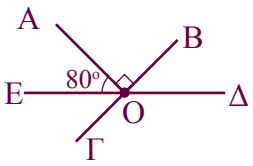
ΙΙ. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος λέγεται:
α) ένα σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος
β) ένα ευθύγραμμο τμήμα που έχει μήκος το μέσο του αρχικού

γ) ένα από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος
δ) ένα σημείο εκτός του ευθύγραμμου τμήματος

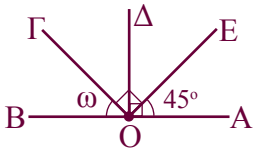
2. Αν ΟΑ ⊥ ΒΓ και $A\hat{O}E = 80^o$, τότε η γωνία ΓΟΔ είναι:

α) 20^o β) 170^o
γ) 90^o δ) 80^o



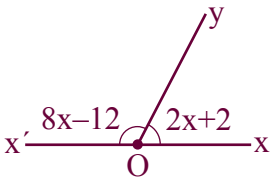
3. Στο διπλανό σχήμα η ΟΔ ⊥ ΑΒ και η ΟΕ ⊥ ΟΓ
Η γωνία ω είναι:

α) 90^o β) 45^o
γ) 30^o δ) 135^o



4. Η γωνία χ του διπλανού σχήματος είναι:

α) 20^o β) 35^o
γ) 19^o δ) 47^o



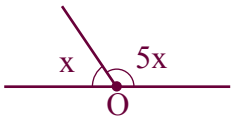
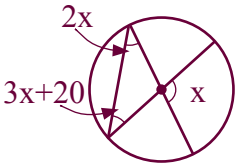
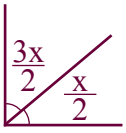
5. Το μέσο ενός τόξου ΚΛ
α) είναι σημείο του τόξου
β) ανήκει στη χορδή ΚΛ
γ) δεν είναι σημείο του κύκλου
δ) είναι τόξο με μέτρο το μισό του αρχικού τόξου

ΙΙΙ. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Αν ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα με ΑΒ=10cm, Μ το μέσο του ΑΒ, Ν το μέσο του ΑΜ, Κ το μέσο του ΝΜ και Λ το μέσο του ΜΒ, να αντιστοιχίσετε κάθε τμήμα της στήλης Α με το μήκος από την στήλη Β

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β	
i.	ΑΝ	α.	7,5cm
ii.	ΑΝ+ΚΜ	β.	2,5cm
iii.	ΑΛ	γ.	8,75cm
iv.	ΝΚ+ΜΒ	δ.	3,75cm

2. Να αντιστοιχίσετε τη γωνία χ της στήλης Α με την τιμή της στη στήλη Β

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β	
i.		α.	30^o
		β.	$\approx 27^o$
ii.		γ.	45^o
		δ.	60^o
iii.		ε.	90^o

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΣΤΗ ΣΕΛΙΔΑ 198

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ Η΄ ΛΑΘΟΥΣ

1. Λ, πρέπει να ανήκουν και στην ίδια ευθεία

2. Σ

3. Λ, λέγεται το μήκος κάθε ευθύγραμμου τμήματος που είναι κάθετο στις δύο παράλληλες και έχει τα άκρα του σ' αυτές

4. Σ

5. Σ

6. Λ, τόξο ΑΒ λέγεται το μέρος του κύκλου που περιέχεται ανάμεσα σε δύο σημεία του κύκλου, μαζί με τα Α και Β

7. Σ

8. Λ, παραπληρωματικές είναι δύο γωνίες με άθροισμα 180^o

9. Λ, συμπληρωματικές είναι δύο γωνίες με άθροισμα 90^o

10. Λ, κατακορυφήν λέγονται δύο γωνίες με κοινή κορυφή και οι πλευρές τους είναι αντικείμενες ημιευθείες

11. Λ, διέρχονται άπειρες ευθείες

12. Λ, διέρχεται μόνο μια ευθεία

13. Σ

14. Σ

15. Λ, το χωρίζει σε δυο ημιεπίπεδα

16. Λ, είναι παράλληλες ή τεμνόμενες

17. Λ, από ένα σημείο Α μπορούμε να φέρουμε μία μόνο κάθετη σε μια ευθεία

18. Λ, είναι μεταξύ τους παράλληλες

19. Λ, διακρίνονται σε κυρτές και μη κυρτές

20. Σ

21. Λ, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή με τα ίδια άκρα Α και Β

22. Λ, είναι ακτίνα του κύκλου

23. Λ, είναι άνισοι

24. Λ, είναι διπλάσια από την ακτίνα

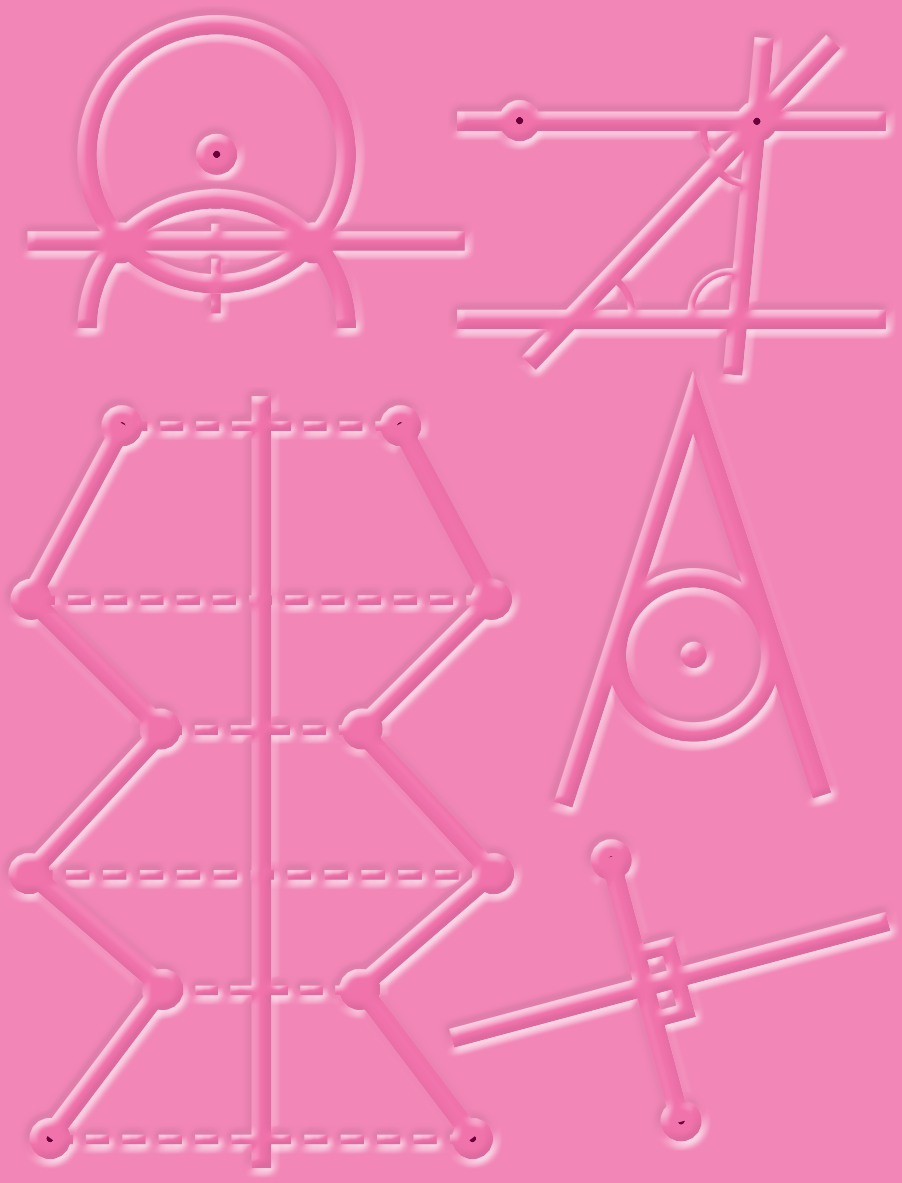
25. Σ

26. Σ

27. Λ, είναι ίσες

28. Σ

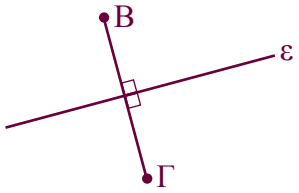
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ



2.1 • Συμμετρία ως προς Άξονα

ΘΕΩΡΙΑ

- Συμμετρικό σημείου Β ως προς ευθεία ε είναι το σημείο Γ με το οποίο συμπίπτει το Β, αν διπλώσουμε το φύλλο κατά μήκος της ευθείας ε



Σχήμα 1. Τα συμμετρικά σημεία Β και Γ ως προς την ευθεία ε

- Δυο σχήματα είναι συμμετρικά, όταν τα σημεία του ενός αποτελούν συμμετρικά σημεία του άλλου

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Τα συμμετρικά σχήματα ως προς μια ευθεία είναι ίσα

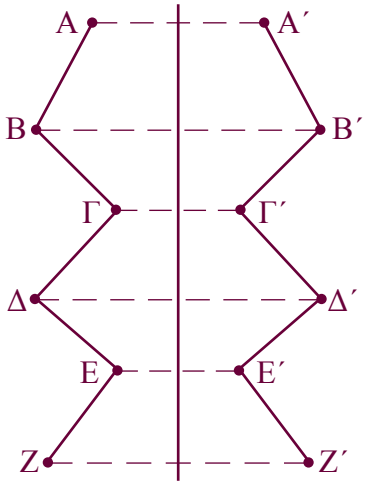
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό μιας τεθλασμένης γραμμής ως προς μια ευθεία ε

Λύση

Κατασκευάζουμε το συμμετρικό μιας τεθλασμένης γραμμής ενώνοντας τα συμμετρικά των κορυφών της.

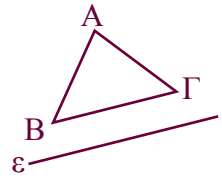
Η γραμμή ΑΒΓΔΕ έχει συμμετρική την Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄



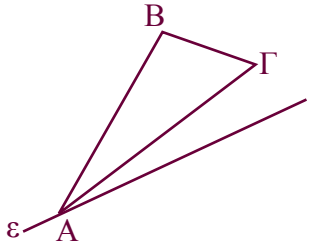
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ε σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα

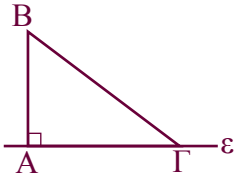
α)



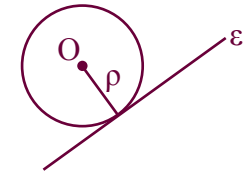
β)

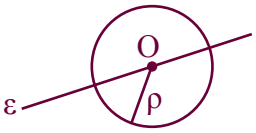


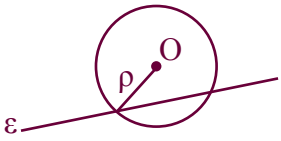
γ)



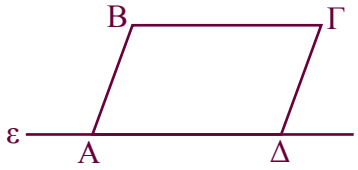
2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του κύκλου (Ο, ρ) ως προς την ευθεία ε σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα

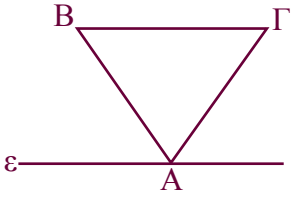
α) 

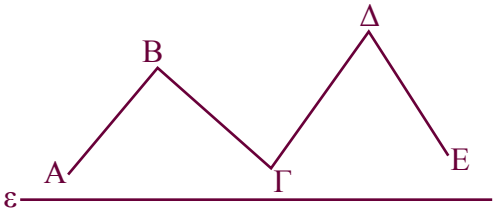
β) 

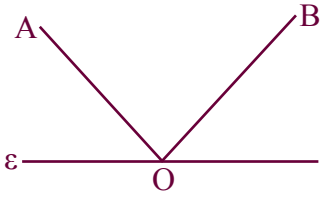
γ) 

3. Να κατασκευάσετε τα συμμετρικά των παρακάτω σχημάτων ως προς την ευθεία ε

α) 

β) 

γ) 

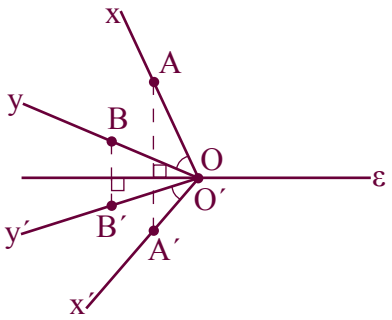
δ) 

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

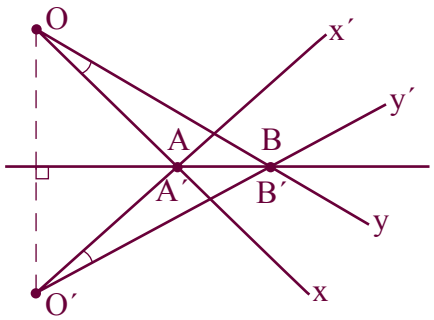
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 203

1. Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε το συμμετρικό Ο΄ της κορυφής Ο καθώς και τα συμμετρικά Α΄, Β΄ δύο ακόμα σημείων Α και Β που ανήκουν το καθένα σε μια από τις πλευρές της αντίστοιχα

α) επειδή το Ο ανήκει στην ε, το συμμετρικό του ως προς την ε είναι ο εαυτός του

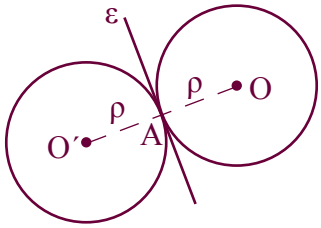


β) Τα σημεία Α και Β ανήκουν στην ε οπότε τα συμμετρικά τους ως προς την ε είναι τα ίδια τα σημεία

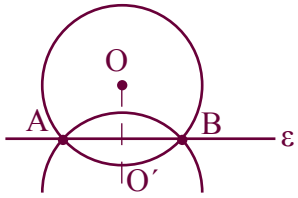


2. Το συμμετρικό του κύκλου (Ο, ρ) ως προς την ευθεία ε είναι ο κύκλος (Ο΄, ρ), ίσος με τον (Ο, ρ) με Ο΄ το συμμετρικό του κέντρου Ο ως προς την ε

α)

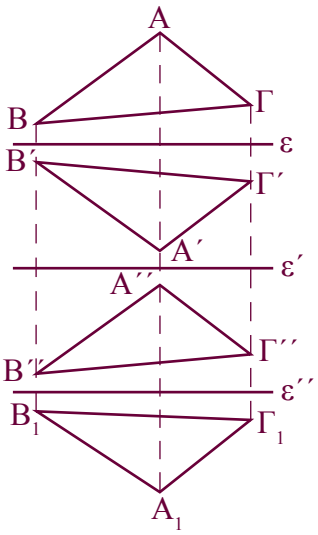


β)



3. Βρίσκουμε το συμμετρικό Α΄Β΄Γ΄ του τριγώνου ΑΒΓ προς την ευθεία ε, με Α΄, Β΄, Γ΄ τα συμμετρικά των κορυφών Α, Β, Γ αντίστοιχα.
Έπειτα βρίσκουμε το συμμετρικό Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ του τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ ως προς την ευθεία ε΄, με Α΄΄, Β΄΄, Γ΄΄ τα συμμετρικά των κορυφών Α΄, Β΄, Γ΄ αντίστοιχα.

Παρατηρούμε ότι το Α΄΄Β΄΄Γ΄΄ είναι ίσο με το αρχικό και ομοίως κείμενο.



Φέρνοντας την τρίτη παράλληλη ε΄΄, βρίσκουμε το συμμετρικό $Α_1Β_1Γ_1$ του Α΄΄Β΄΄Γ΄΄, το οποίο είναι ίσο με τα υπόλοιπα και ομοίως κείμενο με το Α΄Β΄Γ΄

2.2 • Άξονας Συμμετρίας

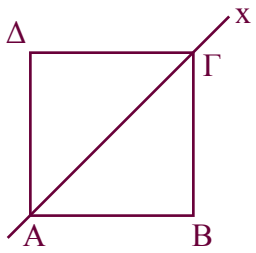
ΘΕΩΡΙΑ

- Η ευθεία που χωρίζει το σχήμα σε δύο κομμάτια, τα οποία συμπίπτουν όταν διπλωθεί το σχήμα κατά μήκος της ευθείας, λέγεται άξονας συμμετρίας

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να εξετάσετε αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι άξονας συμμετρίας του

Λύση

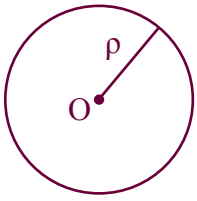


Έστω ότι η ευθεία χ αποτελεί τη διαγώνιο του τετραγώνου. Αν διπλώσουμε κατά μήκος της ευθείας αυτής το σχήμα ΑΒΓΔ τότε διαπιστώνουμε ότι η ευθεία χ και κατ' επέκταση η διαγώνιος ΑΓ, αποτελεί άξονα συμμετρίας

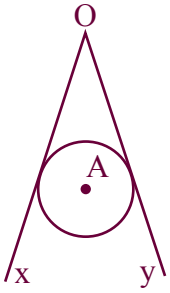
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χαράξετε τους άξονες συμμετρίας των παρακάτω σχημάτων

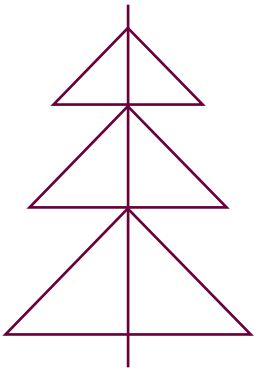
α)



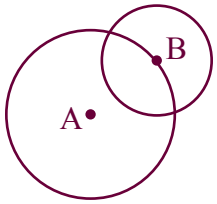
β)



γ)



2. Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας του παρακάτω σχήματος



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 205

1. …άπειρους άξονες συμμετρίας

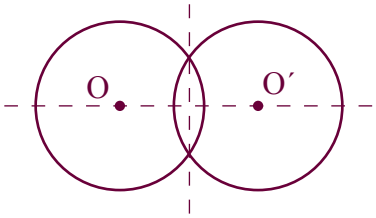
2.

Αριθμός όταν συμμετρίας	Α	Ι	Γ	Θ
0			Χ	
1	Χ			
2 και πάνω		Χ		Χ

3.
α) Το σχήμα έχει 3 άξονες συμμετρίας
β) Το σχήμα έχει 4 άξονες συμμετρίας
γ) Το σχήμα έχει 5 άξονες συμμετρίας
δ) Το σχήμα έχει 6 άξονες συμμετρίας
ε) Το σχήμα έχει 7 άξονες συμμετρίας
στ) Το σχήμα έχει 8 άξονες συμμετρίας

4. Οι άξονες συμμετρίας του σχήματος που δημιουργείται από δύο ίσους και τεμνόμενους κύκλους είναι:
α) η ευθεία της κοινής χορδής τους

β) η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των δύο κύκλων

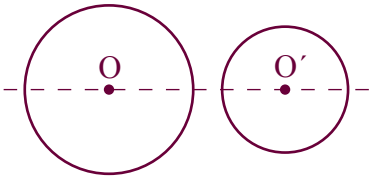


5.

α) Όταν οι κύκλοι είναι ομόκεντροι, κάθε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο είναι άξονας συμμετρίας

β) Όταν οι κύκλοι έχουν διαφορετικά κέντρα, άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία που διέρχεται από τα δύο κέντρα.

Αν οι κύκλοι τέμνονται, άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία της κοινής τους χορδής

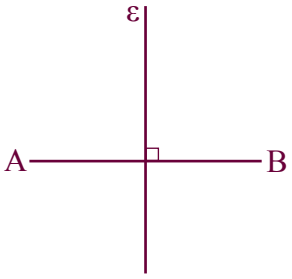


2.3 • Μεσοκάθετος Ευθύγραμμου Τμήματος

ΘΕΩΡΙΑ

- Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται η ευθεία που είναι

κάθετη προς αυτό και διέρχεται από το μέσο του



Σχήμα2.

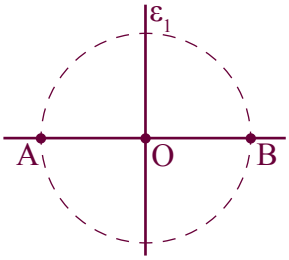
ΠΡΟΣΟΧΗ

- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του
- Η μεσοκάθετος κάθε χορδής κύκλου διέρχεται από το κέντρο του
- Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος αποτελεί και άξονα συμμετρίας του
- Η μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία τομής των κύκλων (Α, ρ), (Β, ρ), όπου η ακτίνα ρ είναι μεγαλύτερη από το μισό του μήκους του ΑΒ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Δίνεται μια ευθεία ε και ένα σημείο της Ο. Να κατασκευάσετε την ευθεία που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το Ο

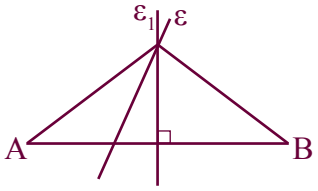
Λύση



Με κέντρο το σημείο Ο και τυχαία ακτίνα ρ σχεδιάζουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ευθεία ε στα σημεία Α και Β. Το Ο μέσο του ΑΒ, οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η μεσοκάθετος ε_1 του ΑΒ

2. Να σχεδιάσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και μια ευθεία ε που δεν είναι κάθετη σ' αυτό. Να βρείτε σημείο Μ της ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία Α και Β

Λύση
Το σημείο Μ της ε, επειδή ισαπέχει από τα Α κα Β το ευθύγρ. τμήματος ΑΒ θα ανήκει στη μεσοκάθετο ε_1 του ΑΒ



Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο ε_1 του ΑΒ και το ζητούμενο σημείο Μ είναι το σημείο τομής της μεσοκαθέτου με την ε.

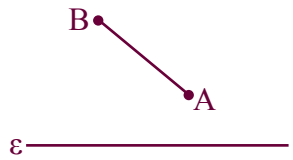
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε 10 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

2. Να σχεδιάσετε μια γωνία ΑΟΒ και να πάρετε σημείο Μ στην ΟΑ και ένα σημείο Κ στην ΟΒ, έτσι ώστε ΟΜ=ΟΚ. Γιατί το Ο ανήκει στη μεσοκάθετη του ΚΜ;

3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να χαράξετε ευθεία ε||ΒΓ που να διέρχεται από το Α. Αν οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ δεν είναι ίσες, να βρείτε σημείο Μ της ε, το οποίο ισαπέχει από τις κορυφές Β και Γ

4. Να βρείτε ένα σημείο της ευθείας ε που να ισαπέχει από τα σημεία Α και Β



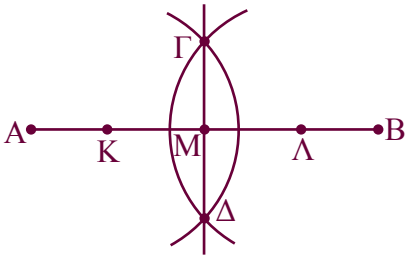
5. Να σχεδιάσετε ένα κύκλο και μια διάμετρο του ΚΛ. Βρείτε δύο σημεία του κύκλου, ώστε το καθένα να ισαπέχει από τα Κ και Λ.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

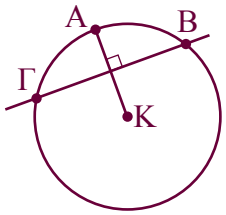
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 209

1.
α) …μεσοκάθετο του
β) …μέσο…
γ) …μεσοκάθετος…

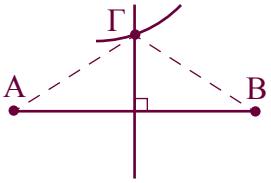
2. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Σχεδιάζουμε αρχικά τη μεσοκάθετο του ΑΒ ως εξής:
Φτιάχνουμε δύο ίσους κύκλους (Λ, ρ) και (Β, ρ), όπου η ακτίνα ρ είναι μεγαλύτερη από το μισό του ΑΒ, ώστε οι κύκλοι να τέμνονται.
Τα σημεία Γ, Δ τομής των δύο κύκλων ορίζουν τη μεσοκάθετο του, οπότε το Μ είναι το μέσο του ΑΒ, δηλαδή ΑΜ=ΜΒ.
Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και κατασκευάζουμε τις μεσοκαθέτους των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΜ και ΜΒ, οπότε βρίσκουμε τα μέσα τους Κ, Λ αντίστοιχα.
Επομένως ΑΚ=ΚΜ=ΜΛ=ΛΒ



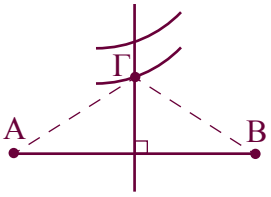
3. Φέρνουμε την μεσοκάθετο της ΚΑ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ. Τα σημεία αυτά ισαπέχουν από τα Κ και Α



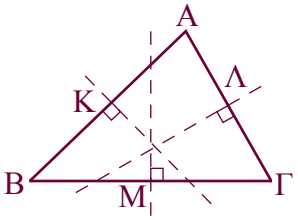
4. Για να ισαπέχει η στάση από τους δύο οικισμούς, πρέπει να ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο, η οποία τέμνει την καμπύλη γ στο σημείο Γ, το οποίο είναι και το ζητούμενο σημείο.



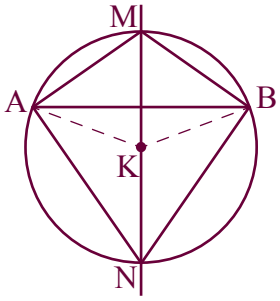
5. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, η οποία τέμνει την καμπύλη του ποταμού στο σημείο Γ, το οποίο ισαπέχει από τα δυο χωριά α, Β



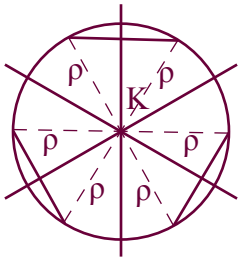
6. Με κανόνα και διαβήτη κατασκευάζουμε τις μεαοκαθέτους των πλευρών του. Τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου



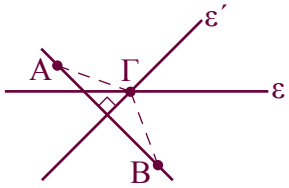
7.
α) Συγκρίνουμε τα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και τα βρίσκουμε ίσα. Αυτό συμβαίνει γιατί το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
β) Ομοίως ΝΑ=ΝΒ
γ) Επειδή τα σημεία Α και Β είναι σημεία του κύκλου, θα είναι ΚΑ=ΚΒ ως ακτίνες του κύκλου. Επομένως το Κ ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του.



8. Σχεδιάζουμε τις τρεις μεσοκαθέτους και παρατηρούμε ότι και οι τρεις διέρχονται από το κέντρο Κ του κύκλου, αφού το Κ ισαπέχει από τα άκρα των χορδών απόσταση ίση με ρ.



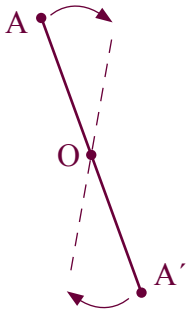
9. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο ε΄ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, η οποία τέμνει την ε στο σημείο Γ. Το σημείο Γ ισαπέχει από τα Α, Β ως σημείο της μεσοκαθέτου



2.4 • Συμμετρία ως προς Σημείο

ΘΕΩΡΙΑ

- Συμμετρικό σημείου Α ως προς κέντρο Ο είναι το σημείο Α΄ με το οποίο συμπίπτει το Α, αν περιστραφεί κατά 180^o



Σχήμα 3. Δύο συμμετρικά σημεία ως προς Ο

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Δυο σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς κέντρο Ο, όταν το Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΜΜ΄

- Δυο σχήματα είναι συμμετρικά ως προς σημείο Ο, όταν κάθε σημείο του ενός είναι συμμετρικό ενός σημείου του άλλου

- Το συμμετρικό μιας ευθείας ε ως προς σημείο Ο είναι ευθεία ε΄ || ε και μιας ημιευθείας Αχ, είναι μια ημιευθεία Αχ΄ || Αχ

- Το συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ ως προς σημείο Ο είναι τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄, το οποίο είναι ίσο προς το $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$

- Όμοια μια γωνία χΟy είναι συμμετρική ως προς σημείο Ο με την γωνία χ

Όy΄ η οποία είναι ίση με την πρώτη

- Το συμμετρικό κύκλου (Ο, ρ) ως προς σημείο Α είναι κύκλος (Ο΄, ρ) όπου Ο΄ το συμμετρικό του Ο ως προς Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ως προς την κορυφή Α ($\hat{A}=90^{o}$)

2. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό κύκλου (Ο, ρ) ως προς εξωτερικό σημείο

3. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό τετραγώνου ως προς το μέσο Μ της μιας πλευράς του

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό Δ της κορυφής Β ως προς την κορυφή Γ και το συμμετρικό Ε του σημείου Δ ως προς την ημιευθεία ΑΓ.
α) Γιατί είναι ΓΕ=ΓΔ;
β) Η ημιευθεία ΑΓ τι είναι για το τμήμα ΕΔ;

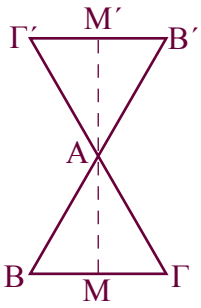
5. Δίνεται ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό Μ της κορυφής Α ως προς τη κορυφή Β

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

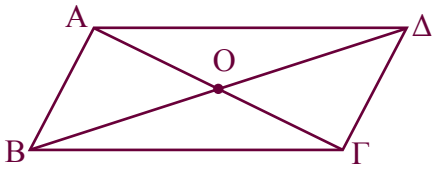
Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 211

1. Επειδή τα Β΄. Γ΄ είναι τα συμμετρικά των Β, Γ ως προς το Α, το ευθύγραμμο τμήμα Β΄Γ΄ είναι το συμμετρικό του ΒΓ ως προς το Α. Άρα Β΄Γ΄=ΒΓ, οπότε τα μέσα τους ως αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι συμμετρικά ως προς το

Α. Όμως το συμμετρικό του Μ ως προς το Α είναι το Μ΄, οπότε ΓΜ=Γ΄Μ΄ και ΒΜ=Β΄Μ΄. Επομένως Γ΄Μ΄=Β΄Μ΄, αφού ΒΜ=ΜΓ, άρα το Μ΄ είναι μέσο του Β΄Γ΄



2. Το Ο είναι το μέσο της πλευράς ΒΔ, άρα ΒΟ=ΟΔ. Επίσης το Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς το Ο, οπότε ΑΟ=ΟΓ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται



2.5 • Κέντρο Συμμετρίας

ΘΕΩΡΙΑ

- Κέντρο συμμετρίας σχήματος ονομάζεται ένα σημείο Ο, γύρω από το οποίο, αν περιστραφεί το σχήμα κατά 180^{o}, θα συμπέσει με το αρχικό σχήμα

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Το κέντρο συμμετρίας Ο ενός σχήματος έχει συμμετρικό ως προς το σημείο Ο το ίδιο το σημείο

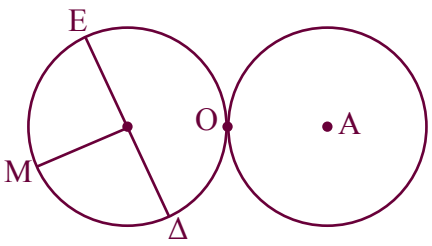
- Όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας, τότε το συμμετρικό του ως προς το κέντρο συμμετρίας είναι το ίδιο το σχήμα

- Ένα παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του

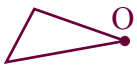
- Το κέντρο του κύκλου είναι κέντρο συμμετρίας του

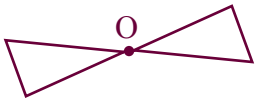
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

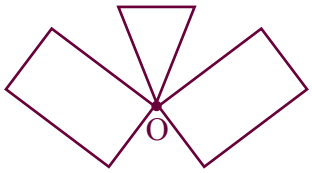
1. Να συμπληρώσετε κατάλληλα το σχήμα, ώστε το Ο να γίνει κέντρο συμμετρίας του



2. Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα παρακάτω σχήματα, ώστε το Ο να γίνει κέντρο συμμετρίας του

α) 

β) 

γ) 

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 213

1.

κέντρο συμμετρ.	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ
0	Χ	Χ	Χ	Χ	Χ					Χ	Χ
1						Χ	Χ	Χ	Χ		

(συνέχεια)	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
0	Χ				Χ	Χ	Χ	Χ	Χ			Χ	Χ
1		Χ	Χ	Χ						Χ	Χ		

2. Με στροφή 180^{o} διαπιστώνουμε ποια σχήματα έχουν κέντρο συμμετρίας. Αυτά είναι τα γ, δ, ζ, θ

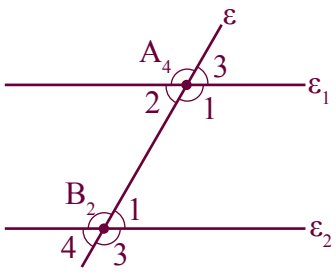
3.

	Άξονες συμμετρίας						Έχει κέντρο συμμετρ.
	κανένα	ένα	δύο	τρεις	τέσσερις	περισσότ.	
Ευθύγραμμο τμήμα			Χ				Χ
Ισοσκελές τρίγωνο		Χ					
Ισόπλευρο τρίγωνο				Χ			
Παραλληλόγραμμο	Χ						Χ
Ορθογώνιο			Χ				Χ
Ρόμβος			Χ				Χ
Τετράγωνο					Χ		Χ
Κύκλος						Χ	Χ

2.6 • Παράλληλες Ευθείες που Τέμνονται από μια άλλη Ευθεία

ΘΕΩΡΙΑ

- Έστω δύο ευθείες ε_1, ε_2 παράλληλες και ευθεία ε που τέμνει τις άλλες δύο στα σημεία Α και Β αντίστοιχα



Σχήμα 4.

Τότε:

i) Οι γωνίες A_1, A_2, B_1, B_2 βρίσκονται εντός των παραλλήλων και λέγονται εντός

ii) Οι γωνίες A_3, A_4, B_3, B_4 βρίσκονται εκτός των παραλλήλων και λέγονται εκτός

iii) Οι γωνίες A_1, A_3, B_1, B_3 βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της ευθείας ε και λέγονται επί ταυτά

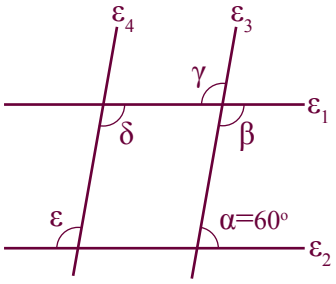
iv) Οι γωνίες A_2, B_1 και A_1, B_2 βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και λέγονται εναλλάξ

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Δυο γωνίες εντός εναλλάξ είναι ίσες
- Δυο γωνίες εντός εκτός και επί ταυτά είναι ίσες
- Δυο γωνίες εντός και επί ταυτά είναι παραπληρωματικές

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon_4$. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες



Λύση

- Οι γωνίες α και β είναι παραπληρωματικές ως εντός και επί ταυτά.

Άρα είναι $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow 60^o+\hat{\beta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\beta}=120^o$

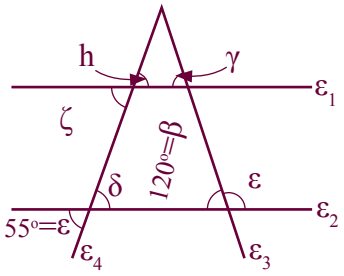
- Οι γωνίες γ και β είναι κατακορυφήν, άρα $\hat{\gamma}=\hat{\beta}=120^o$

- Οι γωνίες δ και ε είναι εντός εναλλάξ, άρα $\hat{\varepsilon}=\hat{\delta}=120^o$

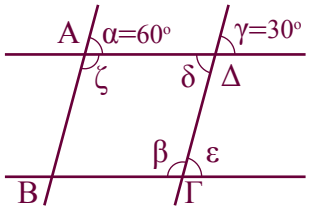
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες στα παρακάτω σχήματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

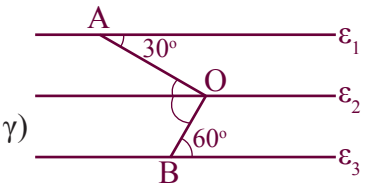
α)



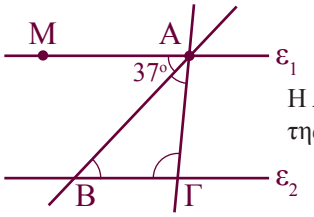
β)



γ)

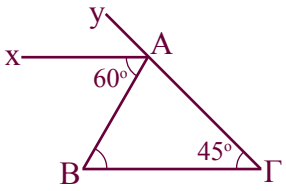


δ)

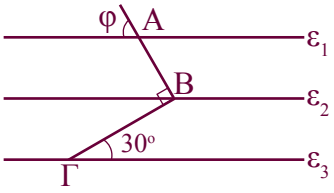


Η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας ΓΑ̂Μ

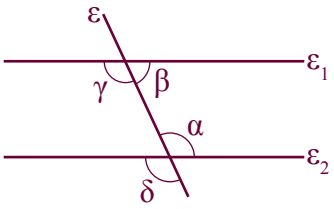
2. Στο παρακάτω σχήμα είναι Αχ ||ΒΓ. Να υπολογίσετε τις γωνίες Α και Β του τριγώνου ΑΒΓ



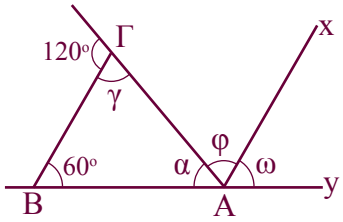
3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 || \varepsilon_2 || \varepsilon_3$ και $A\hat{B}\Gamma = 90^o$. Να υπολογίσετε τη γωνία φ



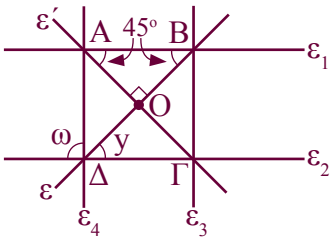
4. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος, αν είναι $\varepsilon_1 || \varepsilon_2$ και $\hat{\alpha} = 3\hat{\beta}$



5. Στο παρακάτω σχήμα είναι Αχ ||ΒΓ και $\Gamma\hat{A}y = 120^o$. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω, φ, α και γ



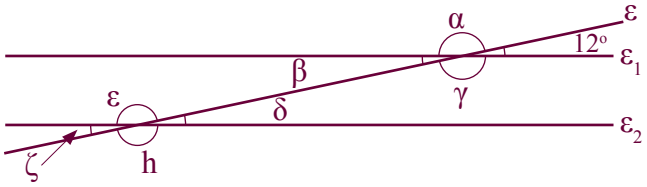
6. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 216

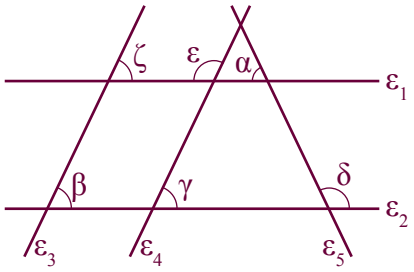
1.



- Η $\hat{\alpha}$ είναι παραπληρωματική των 12°, οπότε $\hat{\alpha}=180^{o}-12^{o}=168^{o}$
- $\hat{\beta}=12^{o}$ ως κατακορυφήν με τις 12°
- $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}=168^{o}$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\delta}=12^{o}$ ως εντός εκτός και επί ταυτά με τις 12°
- $\hat{\varepsilon}=\hat{\delta}=12^{o}$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\eta}=\hat{\varepsilon}=168^{o}$ ως κατακορυφήν

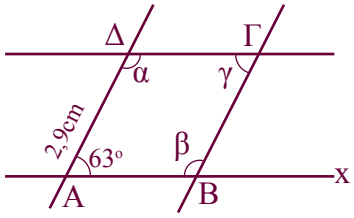
2.

- $\hat{\beta} = \hat{\gamma} = 70^o$, ως εντός εκτός και επί ταυτά των $\varepsilon_3 \| \varepsilon_4$
- $\hat{\beta} = \hat{\zeta} = 70^o$, ως εντός εκτός και επί ταυτά των $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$
- $\hat{\zeta} + \hat{\varepsilon} = 180^o$ ως εντός και επί ταυτά των $\varepsilon_3 \| \varepsilon_4$, άρα $\hat{\varepsilon} = 180^o - \hat{\zeta} \Leftrightarrow \hat{\varepsilon} = 110^o$
- $\hat{\delta} + \hat{\alpha} = 180^o$, ως εντός και εναλλάξ των $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$, άρα $\hat{\delta} = 180^o - \hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\delta} = 110^o$



3.

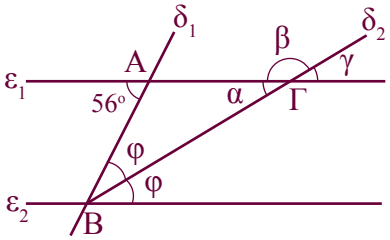
- $\hat{\alpha} + \hat{A} = 180^o$, ως εντός και επί ταυτά των $\Gamma\Delta \| AB$, άρα $\hat{\alpha} = 180^o - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 117^o$
- $\hat{\beta} + \hat{A} = 180^o$ ως εντός και επί ταυτά των $A\Delta \| B\Gamma$, άρα $\hat{\beta} = 180^o - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 117^o$
- $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} = 180^o$ ως εντός και επί ταυτά των $A\Delta \| B\Gamma$, άρα $\hat{\gamma} = 180^o - \hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\gamma} = 63^o$



4.

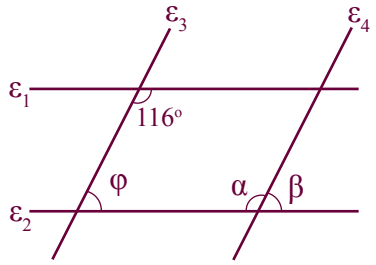
- Η $\hat{B} = 56^o$ ως εντός και εναλλάξ των $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$ με τέμνουσα την δ_1. Επειδή η $B\delta_2$ είναι διχοτόμος της $\hat{B}$, έχουμε $2\hat{\phi} = 56^o \Leftrightarrow \hat{\phi} = 28^o$
- $\hat{\alpha} = \hat{\phi} = 28^o$ ως εντός και εναλλάξ των $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$ με τέμνουσα τη δ_2

- $\hat{\gamma}=\hat{\alpha}=28^o$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\beta}+\hat{\alpha}=180^o$ ως παραπληρωματικές, άρα $\hat{\beta}=180^o-\hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\beta}=152^o$



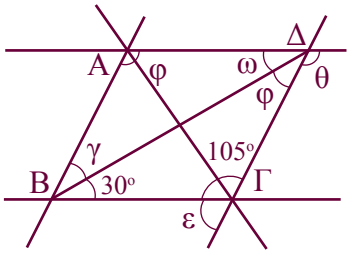
5.

- $\hat{\phi}+116^o=180^o$ ως εντός και επί ταυτά των $\varepsilon_1 \| \varepsilon_2$, άρα $\hat{\phi}=180^o-116^o \Leftrightarrow \hat{\phi}=64^o$
- $\hat{\beta}=\hat{\phi}=64^o$ ως εντός εκτός και επί ταυτά των $\varepsilon_3 \| \varepsilon_4$
- $\hat{\alpha}+\hat{\beta}=180^o$ ως παραπληρωματικές, άρα $\hat{\alpha}=110^o$



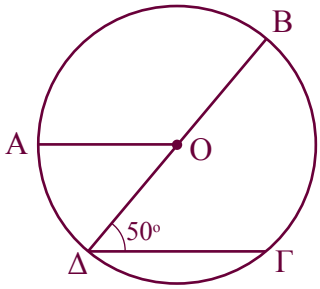
6.

- $\hat{\omega}=30^o$, ως εντός και εναλλάξ των $A\Delta \| B\Gamma$ με τέμνουσα την $B\Delta$
- $\hat{\theta}=105^o$, ως εντός και εναλλάξ των $A\Delta \| B\Gamma$ με τέμνουσα την $\Delta\Gamma$
- $\hat{\theta}+\hat{\omega}+\hat{\phi}=180^o \Leftrightarrow \hat{\phi}=45^o$
- $\hat{\gamma}=\hat{\phi}=45^o$, ως εντός και εναλλάξ των $\Delta\Gamma \| AB$ με τέμνουσα την $B\Delta$
- $\hat{\alpha}=\hat{\theta}=105^o$, ως εντός εκτός και επί ταυτά των $AB \| \Gamma\Delta$ με τέμνουσα την $A\Delta$
- $\hat{\varepsilon}+105^o=180^o$, ως παραπληρωματικές, άρα $\hat{\varepsilon}=75^o$

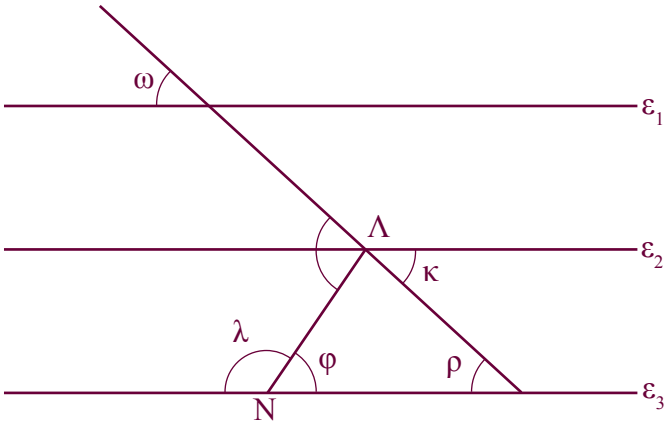


Επαναληπτικές ασκήσεις 2ου κεφαλαίου

1. Να υπολογίσετε τα τόξα ΑΟΒ και ΑΔ, αν ΑΟ || ΓΔ



2. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, $\hat{\omega}=30^o$, $\hat{\phi}=60^o$ και $\text{Κ}\hat{\Lambda}\text{Μ}=121^o$.
Να βρείτε τις υπόλοιπες γωνίες του σχήματος $\hat{\kappa}$, $\hat{\lambda}$ και $\hat{\rho}$



3. Ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος

	Σ	Λ
α) Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές	☐	☐
β) Οι διχοτόμοι δυο εντός και επί ταυτά γωνιών τέμνονται κάθετα	☐	☐
γ) Η διαγώνιος ορθογωνίου παραλληγράμμου είναι άξονας συμμετρίας του	☐	☐
δ) Η μεσοκάθετος κάθε χορδής ενός κύκλου δεν είναι άξονας συμμετρίας του κύκλου	☐	☐
ε) Κάθε επίπεδο σχήμα έχει άξονα και κέντρο συμμετρίας	☐	☐
στ) Το ισοσκελές τρίγωνο δεν έχει άξονα συμμετρίας	☐	☐

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΡΙΓΩΝΑ - ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ - - ΤΡΑΠΕΖΙΑ

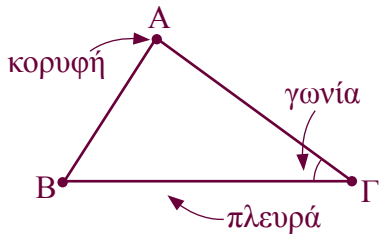
3.1

- Στοιχεία Τριγώνου
- Είδη Τριγώνου

ΘΕΩΡΙΑ

ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

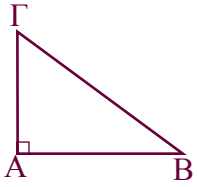
- Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι οι κορυφές Α, Β, Γ οι τρεις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και οι τρεις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$



Σχήμα 1. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα στοιχεία του

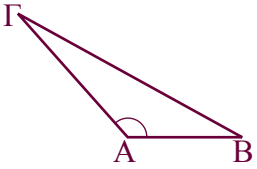
- Υπάρχουν διάφορα είδη τριγώνου:

- Ορθογώνιο



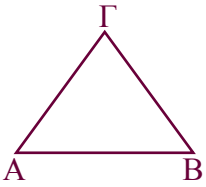
$\hat{A} = 90^o$

- Αμβλυγώνιο



$\hat{A} > 90^o$

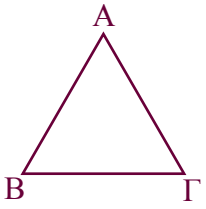
- Οξυγώνιο



$\hat{A} < 90^o$, $\hat{B} < 90^o$, $\hat{\Gamma} < 90^o$

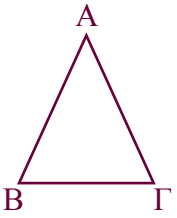
ΑΒ, ΑΓ κάθετες πλευρές και ΒΓ υποτείνουσα

- Ισόπλευρο



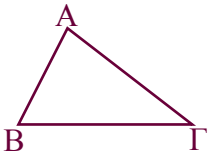
ΑΒ=ΑΓ=ΒΓ

- Ισοσκελές



ΑΒ=ΑΓ

- Σκαληνό

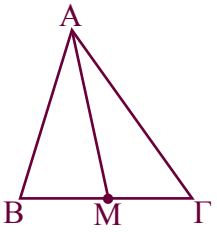


ΑΒ ≠ ΑΓ ≠ ΒΓ ≠ ΑΒ

ΒΓ βάση τριγώνου

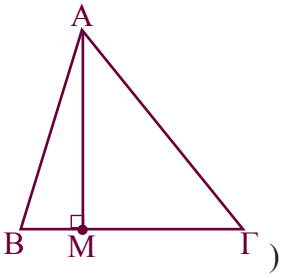
ΔΕΥΤΕΡΕΥΟΝΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται διάμεσος



Σχήμα 2. Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου

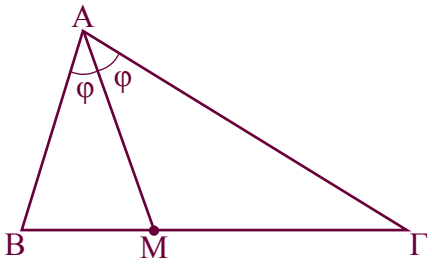
- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται ύψος



)

Σχήμα 3. Το ύψος ΑΜ του τριγώνου

- Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή στην απέναντι πλευρά, λέγεται διχοτόμος



Σχήμα 4. Η διχοτόμος ΑΜ του τριγώνου

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Ο που λέγεται βαρύκεντρο του τριγώνου
- Τα ύψη ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Η, το οποίο λέγεται ορθόκεντρο του τριγώνου
- Οι διχοτόμοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Ε, το οποίο λέγεται έκκεντρο του τριγώνου

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

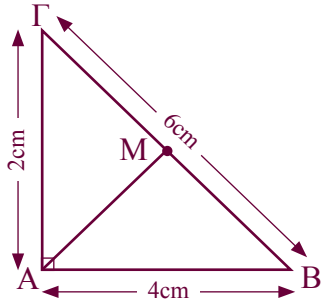
1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) με ΑΒ=4cm, ΑΓ=2 cm, ΒΓ=6 cm και να φέρετε την διάμεσο ΑΜ. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΜ και να το συγκρίνεται με την υποτείνουσα ΒΓ

Λύση

Έστω Μ το μέσο της ΒΓ.

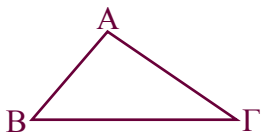
Το τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Μετρώντας με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι ΑΜ=3 cm. Άρα

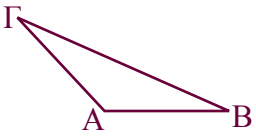
$AM=\frac{1}{2}B\Gamma$

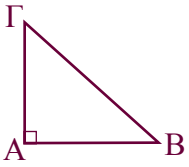


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε τα ύψη στα παρακάτω τρίγωνα

α) 

β) 

γ) 

2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τα μέσα των πλευρών του και να χαράξετε τις διαμέσους του

3. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να πάρετε το μέσο Μ της ΒΓ. Να σχεδιάσετε τις αποστάσεις του Μ από τις δύο άλλες πλευρές του τριγώνου

4. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τη διχοτόμο ΑΔ. Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους και τις διαμέσους του $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΓ}}$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 220

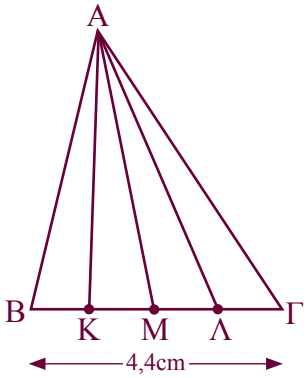
1.

α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ

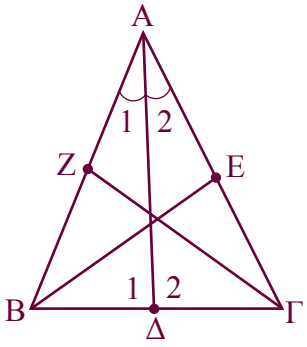
ε) Λ στ) Σ ζ) Σ η) Λ

2.

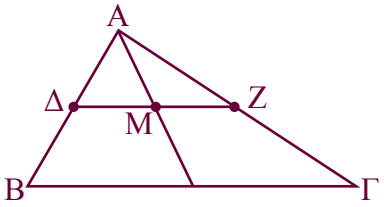
- Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος, θα είναι ΒΜ=ΜΓ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ=2,2cm
- Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΚ είναι διάμεσος, θα είναι ΒΚ=ΚΜ=$\frac{1}{2}$ ΒΓ=1,1cm
- Επειδή στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΛ είναι διάμεσος, θα είναι ΜΛ=ΛΓ=$\frac{1}{2}$ ΜΓ=1,1cm



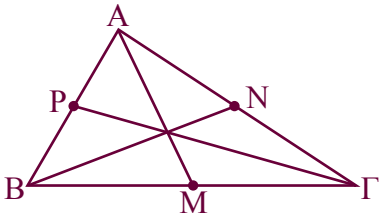
3. Αφού η διάμεσος ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας του τριγώνου ΑΒΓ, τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ συμπίπτουν όταν διπλώσουμε το σχήμα κατά τον άξονα ΑΔ και είναι ίσα. άρα και οι γωνίες A_1, A_2 είναι ίσες. Ομοίως προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$. Επειδή $\hat{A}_1=\hat{A}_2$, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α και ακόμα είναι $\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2=180^o$ ($\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2$) άρα $2\hat{\Delta}_1=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}_1=90^o$, οπότε η ΑΔ είναι και ύψος. Επαναλαμβάνουμε για τις διαμέσους ΒΕ και ΓΖ και προκύπτει ότι οι ΒΕ, ΓΖ είναι διχοτόμοι και ύψη



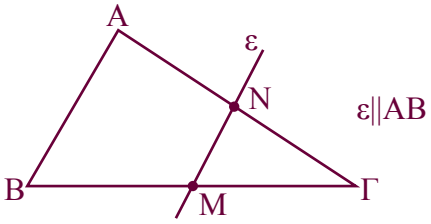
4. Συγκρίνοντας με τον διαβήτη τα τμήματα ΔΜ και ΜΖ, παρατηρούμε ότι ΔΜ=ΗΖ



5. Συγκρίνοντας με τον διαβήτη τα τμήματα ΑΡ και ΡΒ, παρατηρούμε ότι ΑΡ=ΡΒ. Δηλαδή η ΓΡ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ



6. Συγκρίνοντας με τον διαβήτη τα τμήματα ΑΝ και ΝΓ, παρατηρούμε ότι ΑΝ=ΝΓ. Δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΑΓ



3.2

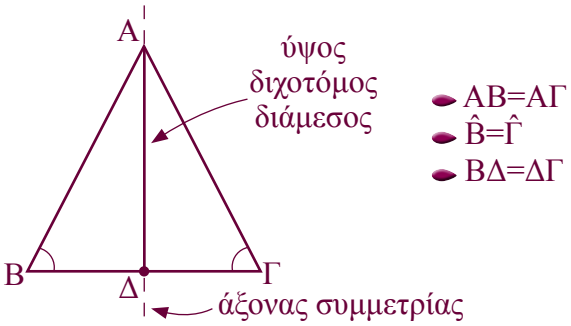
- Άθροισμα Γωνιών Τριγώνου
- Ιδιότητες Ισοσκελούς Τριγώνου

ΘΕΩΡΙΑ

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ ισχύουν:

i) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση, είναι ύψος, διχοτόμος και άξονας συμμετρίας του τριγώνου

ii) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση του τριγώνου είναι ίσες ($\hat{B}=\hat{\Gamma}$)

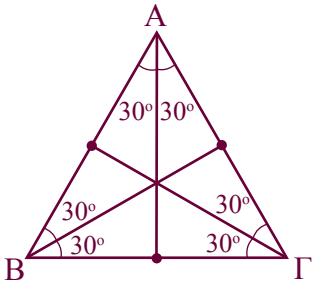


Σχήμα 5. Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ

- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

i) Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας και κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος

ii) Όλες οι γωνίες είναι ίσες ($\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=60^o$)



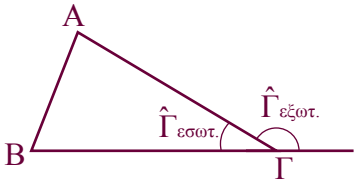
Σχήμα 6. Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$

- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές γιατί $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 90^o+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o$

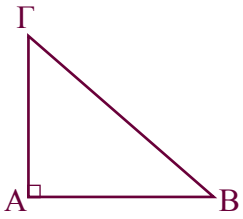
- Η γωνία ΑΓχ που σχηματίζεται από την πλευρά ΑΓ και την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, ονομάζεται εξωτερική γωνία και συμβολίζεται $\hat{\Gamma}_{εξ}$. Μια εξωτερική γωνία είναι παραπληρωματική της αντίστοιχης εσωτερικής



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Σ' ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$), να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ

Λύση



Αφού το τρίγωνο είναι ορθογώνιο $\overset{\hat{A}=90^o}{\Leftrightarrow}$ $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^o$

Επίσης γνωρίζουμε ότι ΑΒ=ΑΓ. Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}$ ή $\hat{B}+\hat{B}=90^o$ ή $\hat{B}=45^o$

Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45^o$

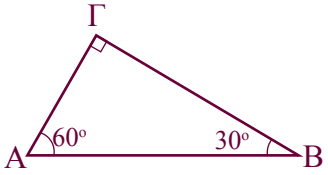
2. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Α είναι διπλάσια από τη Β, ενώ η γωνία Γ είναι τριπλάσια από τη Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου

Λύση

Για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o$

$\hat{A}=2\hat{B}$, $\hat{\Gamma}=3\hat{B}$



Άρα

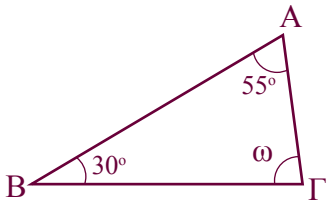
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\hat{B}+\hat{B}+3\hat{B}=180^o \Leftrightarrow \hat{B}=30^o$

$\hat{A}=2\hat{B} \Leftrightarrow \hat{A}=60^o$ και $\hat{\Gamma}=3\hat{B} \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=90^o$

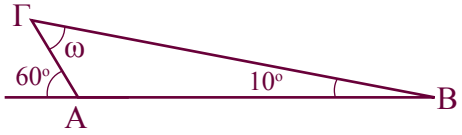
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες στα παρακάτω σχήματα

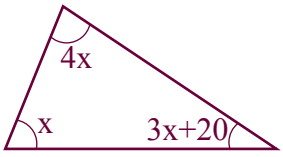
α)



β)

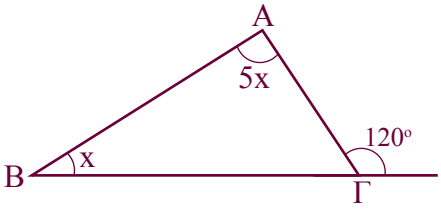


γ)



2. Να βρείτε τη γωνία Α ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ, αν $\hat{B}=60^{o}$

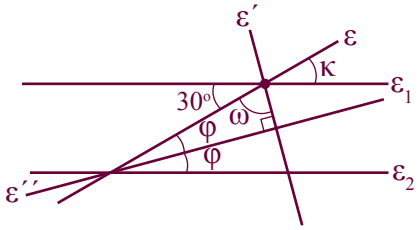
3. Να υπολογίσετε τις γωνίες στο παρακάτω σχήμα



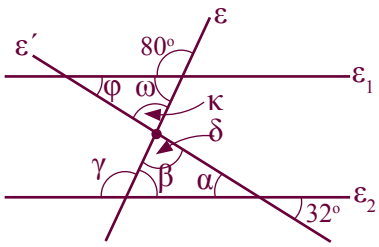
4. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β είναι τριπλάσια από την Α και η Α είναι μικρότερη από τη Γ κατά 50^{o}. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου

5. Να υπολογίσετε τις γωνίες στα παρακάτω σχήματα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$

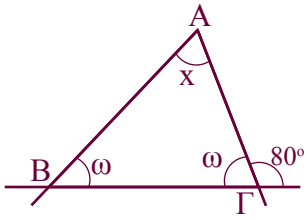
α)



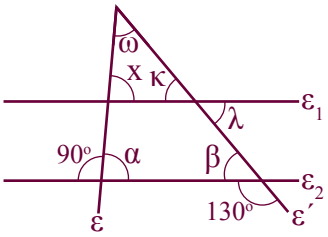
β)



6. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω σχήματος



7. Να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες στο παρακάτω σχήμα, αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$



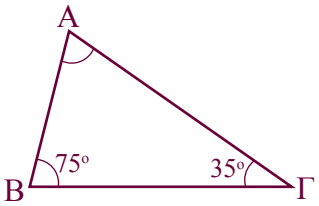
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 224

1.

α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ
ε) Σ στ) Λ ζ) Σ η) Σ θ) Λ

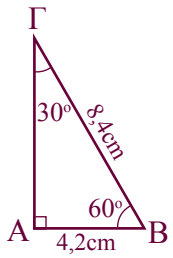
2. Ισχύει ότι: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{A}+75^o+35^o=180^o \Leftrightarrow \hat{A}=70^o$



3.

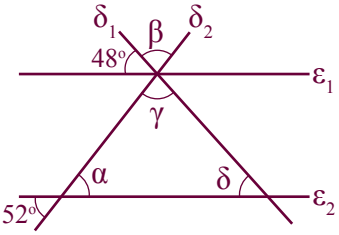
α) Ισχύει ότι: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 90^o+60^o+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=30^o$

β) Σχεδιάζουμε με υποδεκάμετρο και μοιρογνωμόνιο το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=60^o$, ΑΒ=4,2cm και $\hat{A}=90^o$. Μετρώντας με το υποδεκάμετρο τη ΒΓ βρίσκουμε ΒΓ=8,4 cm. Δηλαδή $AB=\frac{1}{2}B\Gamma$



4.

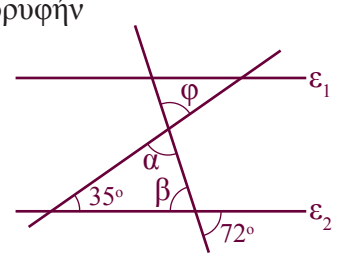
- $\hat{\alpha}=52^o$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\delta}=48^o$ ως εντός εκτός και επί ταυτά με $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ και τέμνουσα τη δ_1
- επειδή $\hat{\alpha}, \hat{\delta}, \hat{\gamma}$ είναι γωνίες τριγώνου, ισχύει $\hat{\alpha}+\hat{\gamma}+\hat{\delta}=180^o \Leftrightarrow 52^o+\hat{\gamma}+48^o=180^o \Leftrightarrow \hat{\gamma}=80^o$
- $\hat{\beta}=\hat{\gamma}=80^o$ ως κατακορυφήν



5.

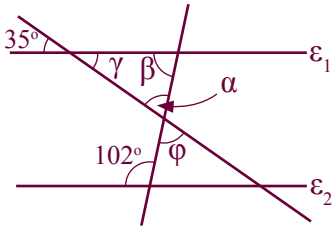
α)

- $\hat{\beta}=72^o$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, 35^o γωνίες τριγώνου, άρα $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+35^o=180^o \Leftrightarrow \hat{\alpha}=73^o$
- $\hat{\phi}=\hat{\alpha}=73^o$ ως κατακορυφήν



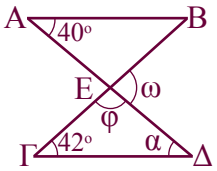
β)

- $\hat{\gamma}=35^o$ ως κατακορυφήν
- $\hat{\beta}+102^o=180^o$, ως εντός και επί ταυτά, άρα $\hat{\beta}=78^o$
- $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ γωνίες τριγώνου, άρα $\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}=180^o \Leftrightarrow \hat{\alpha}+78^o+35^o=180^o \Leftrightarrow \hat{\alpha}=67^o$
- $\hat{\phi}=\hat{\alpha}=67^o$ ως κατακορυφήν



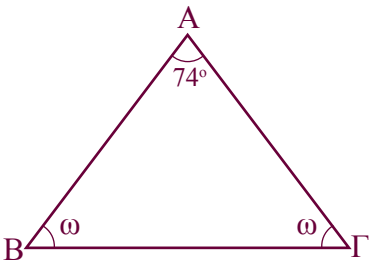
6.

- $\hat{\alpha}=40^o$ ως εντός εναλλάξ των $AB \parallel \Gamma\Delta$
- στο τρίγωνο ΓΔΕ είναι $\hat{\phi}+\hat{\alpha}+42^o=180^o \Leftrightarrow \hat{\phi}=98^o$
- επειδή $\hat{\phi}$, $\hat{\omega}$ είναι παραπληρωματικές, έχουμε $\hat{\phi}+\hat{\omega}=180^o \Leftrightarrow \hat{\omega}=82^o$



7. Οι γωνίες της βάσης είναι ίσες. Ισχύει ότι $\hat{\omega}+\hat{\omega}+74^o+180^o \Leftrightarrow \hat{\omega}=53^o$

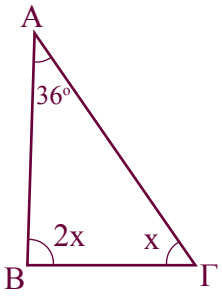
Άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=53^o$



8. Έχουμε ότι $\hat{B}=2\hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{B}=2\chi$ και $\hat{\Gamma}=\chi$

Ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 36^o+2\chi+\chi=180^o \Leftrightarrow \chi=48^o$

Άρα $\hat{\Gamma}=48^o$ και $\hat{B}=96^o$



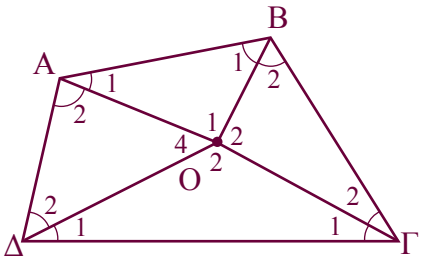
9. Έστω ότι $\hat{B}=\chi$, οπότε $\hat{A}=2\chi$ και $||=3\chi$

Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^o \Leftrightarrow 2\chi+\chi+3\chi=180^o \Leftrightarrow \chi=30^o$

Άρα $\hat{B}=30^o$, $\hat{A}=60^o$, $\hat{\Gamma}=90^o$

10. Έστω $A\hat{O}B=\hat{O}_1$, $B\hat{O}\Gamma=\hat{O}_2$, $\Gamma\hat{O}\Delta=\hat{O}_3$, $\Delta\hat{O}A=\hat{O}_4$

- Οι $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$ είναι διαδοχικές και σχηματίζουν μια πλήρη γωνία, οπότε $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=360^o$



- Στο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}_1=180^o$
- Στο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε $\hat{B}_2+\hat{\Gamma}_2+\hat{O}_2=180^o$
- Στο τρίγωνο ΔΟΓ έχουμε $\hat{\Gamma}_1+\hat{O}_3+\hat{\Delta}_1=180^o$
- Στο τρίγωνο ΑΟΔ έχουμε $\hat{\Delta}_2+\hat{O}_4+\hat{A}_2=180^o$

Επομένως $\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{O}_1+\hat{B}_2+\hat{\Gamma}_2+\hat{O}_2+\hat{\Gamma}_1+\hat{O}_3+\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2+\hat{O}_4+\hat{A}_2=4\cdot 180^o$

$\Leftrightarrow (\hat{A}_1+\hat{A}_2)+(\hat{B}_1+\hat{B}_2)+(\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2)+(\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_2)+\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4=720^o \Leftrightarrow$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+360^o=720^o \Leftrightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}=360^o$

3.3

- Παραλληλόγραμμο
- Ορθογώνιο
- Ρόμβος
- Τετράγωνο
- Τραπέζιο
- Ισοσκελές Τραπέζιο

ΘΕΩΡΙΑ

- Το τετράεδρο ΑΒΓΔ που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες ονομάζεται παραλληλόγραμμο

Σχήμα 7. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΔΓ και ΑΔ || ΒΓ)

ΠΡΟΣΟΧΗ

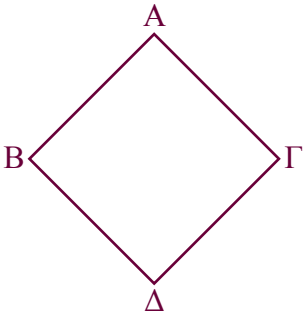
- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου χαρακτηρίζεται και ως βάση του
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται ύψος του παραλληλογράμμου

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

- Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο: όταν όλες του οι γωνίες είναι ορθές

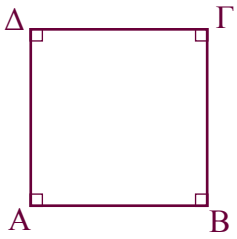
Σχήμα 8. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ

- Ρόμβος: όταν όλες οι πλευρές του είναι ίσες



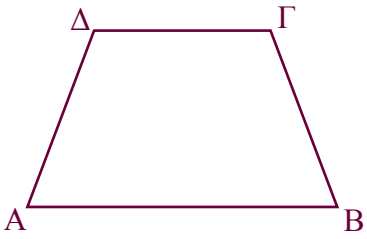
Σχήμα 9. Ρόμβος ΑΒΓΔ

- Τετράγωνο: όταν όλες οι γωνίες είναι ορθές και όλες οι πλευρές ίσες



Σχήμα 10. Τετράγωνο ΑΒΓΔ

- Τραπέζιο: το τετράπλευρο που έχει μόνο δυο πλευρές παράλληλες ονομάζεται τραπέζιο



Σχήμα 11. Τραπέζιο ΑΒΓΔ

ΠΡΟΣΟΧΗ

- Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ, ΓΔ του τραπεζίου λέγονται βάσεις του
- Η απόσταση των βάσεων ονομάζεται ύψος του τραπεζίου
- Το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες λέγεται ισοσκελές

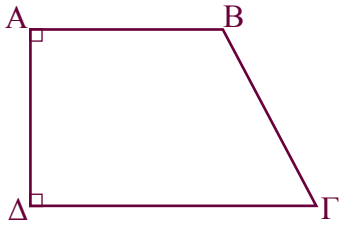
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να σχεδιάσετε το ύψος τραπεζίου ΑΒΓΔ, με $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $\hat{A} = 90^o$

Λύση

Αφού στο τραπέζιο είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $BA \perp A\Delta$, τότε θα είναι και $\Gamma\Delta \perp A\Delta$, δηλαδή $\hat{\Delta} = 90^o$

Άρα η πλευρά ΑΔ είναι η απόσταση των δύο βάσεων του τραπεζίου, δηλαδή το ύψος του



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B}=60^{o}$, ΒΓ=4 cm και ΒΑ=2 cm. Να σχεδιάσετε τα ύψη του παραλληλογράμμου που άγονται από την κορυφή Α

2. Να σχεδιάσετε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ στο οποίο είναι ΑΒ=2 cm, ΓΔ=6 cm και το ύψος του είναι 2 cm

3. Να σχεδιάσετε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου $AB \parallel \Gamma\Delta$, με ΑΒ=3 cm και ΓΔ=4 cm. Να πάρετε το μέσο Μ της ΑΔ και το μέσο Ν της ΒΓ.
α) Να υπολογίσετε το άθροισμα ΑΒ+ΓΔ
β) Να συγκρίνετε το ΜΝ με το άθροισμα ΑΒ+ΓΔ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 227

1.

α) Σ
β) Λ
γ) Σ
δ) Λ
ε) Λ

2.

- Φέρνουμε τη διαγώνιο ΑΔ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, αφού ΑΒ=ΒΔ, άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του

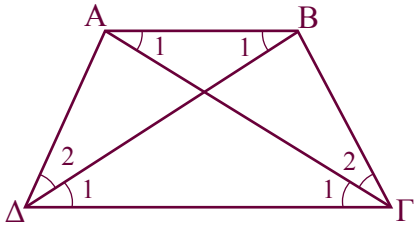
- Φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΓ, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού ΑΓ=ΑΒ, άρ $\hat{A}_1$ α $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_2$ ως γωνίες που πρόσκεινται στη βάση του

- Συγκρίνοντας με διαφανές χαρτί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα, με τις αντίστοιχες γωνίες ίσες, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_2$

- Είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοκελές

- Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων $AB \parallel \Gamma\Delta$. Επειδή $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ προκύπτει $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ισοσκελές.

Επομένως οι διαγώνιοι χωρίζουν το τραπέζιο σε 4 ισοσκελή τρίγωνα



$AB \parallel \Gamma\Delta$
$A\Gamma = AB = B\Delta$

3. Τα τετράπλευρα που θα δημιουργηθούν θα έχουν τις 4 πλευρές τους ίσες, επομένως θα είναι ρόμβος ή τετράγωνο, αν βάλουμε τα σπίρτα να σχηματίζουν ορθές γωνίες

4. Οι πλευρές θα είναι ανά δύο απέναντι ίσες, οπότε θα κατασκευάσουμε πλάγιο παραλληλόγραμμο ή ορθογώνιο αν βάλουμε τα σπίρτα να σχηματίζουν ορθές γωνίες

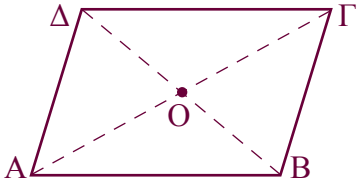
3.4

- Ιδιότητες Παραλληλογράμμου
- Ιδιότητες Ορθογωνίου
- Ιδιότητες Ρόμβου
- Ιδιότητες Τετραγώνου
- Ιδιότητες Τραπεζίου
- Ιδιότητες Ισοσκελούς Τραπεζίου

ΘΕΩΡΙΑ

- Ιδιότητες παραλληλογράμμου

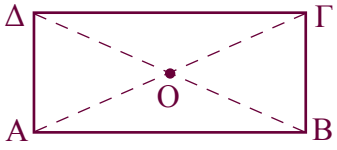
I. Το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του
II. Οι διαγώνιοι του διχοτομούνται
III. Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες
IV. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες
V. Δυο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές



Σχήμα 12. Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ

- Ιδιότητες ορθογωνίου παραλληλογράμμου

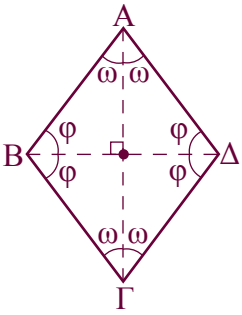
I. Οι διαγώνιες του είναι ίσες
II. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας του



Σχήμα 13. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ

- Ιδιότητες ρόμβου

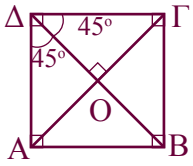
I. Οι διαγώνιοι του είναι κάθετες
II. Οι διαγώνιοι του είναι διχοτόμοι των γωνιών του
III. Οι ευθείες των διαγωνίων του είναι άξονες συμμετρίας



Σχήμα 14. Ρόμβος ΑΒΓΔ

- Ιδιότητες τετραγώνου

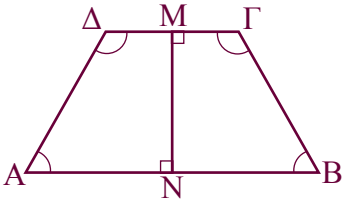
I. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες και κάθετες
II. Οι διαγώνιοι του είναι και διχοτόμοι των γωνιών του
III. Οι ευθείες των διαγωνίων του και οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας



Σχήμα 15. Τετράγωνο ΑΒΓΔ

- Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου

I. Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες
II. Η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι άξονας συμμετρίας του και μεσοκάθετος των βάσεων του



Σχήμα 16. Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

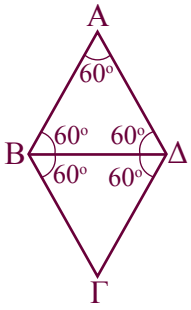
1. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 24 cm. Αν ΑΒ=3ΒΓ και $\hat{A}=60^o$, να βρείτε:
α) τις πλευρές του παραλληλογράμμου
β) τις γωνίες Β, Γ και Δ

Λύση
α) Η περίμετρος του παραλληλογράμμου είναι ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ=24 cm $\Leftrightarrow$ 3ΒΓ+ΒΓ+3ΒΓ+ΒΓ=24 cm $\Leftrightarrow$ 8ΒΓ=24cm $\Leftrightarrow$ ΒΓ=3cm
Άρα ΑΒ=9cm, ΓΔ=ΑΒ=9cm, ΒΓ=3cm, ΔΑ=3cm

β) Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A}=\hat{\Gamma}=60^o$. Επίσης δύο διαδοχικές γωνίες του παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\hat{A}+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow 60^o+\hat{\Delta}=180^o \Leftrightarrow \hat{\Delta}=120^o$ και $\hat{\Delta}=\hat{B}=120^o$

2. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ ενός ρόμβου ΑΒΓΔ, αν $\hat{A}=60^o$ και ΑΒ=4 cm.

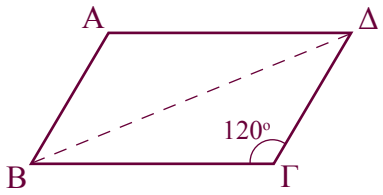
Λύση



Ο ρόμβος έχει όλες τις πλευρές του ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΑΔ=4 cm. Η γωνία Β είναι παραπληρωματική της Α, δηλαδή $\hat{A}+\hat{B}=180^o \Leftrightarrow 60^o+\hat{B}=180^o \Leftrightarrow \hat{B}=\hat{\Delta}=120^o$. Στο ρόμβο η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τις γωνίες Β, Δ οπότε $A\hat{B}\Delta=60^o$ και $A\hat{\Delta}B=60^o$, άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο. Άρα ΒΔ=ΑΒ=ΑΔ=4 cm

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παρακάτω παραλληλογράμμου



2. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει περίμετρο 20 cm και η πλευρά ΑΒ ισούται με 5 cm. Να υπολογίσετε τις άλλες πλευρές του παραλληλογράμμου

3. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και να πάρετε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Να συγκρίνετε μετρώντας με το υποδεκάμετρο τα τμήματα ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ

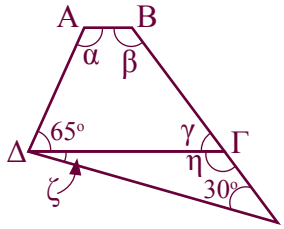
4. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο και ισοκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) και να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ. Στην προέκταση της ΑΜ προς το μέρος του Μ να πάρετε σημείο Δ έτσι ώστε ΑΜ=ΜΔ. Γιατί το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο;

5. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ=ΒΛ=ΓΜ=ΔΝ.
α) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΚΝ, ΚΛ, ΝΜ και ΛΜ μετρώντας τα με το υποδεκάμετρο
β) Να μετρήσετε τη γωνία ΝΜΛ με το μοιρογνωμόνιο
γ) Γιατί το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο;

6. Να σχεδιάσετε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, ΑΒ || ΓΔ και να πάρετε τα

μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.
α) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ και ΝΚ
β) Γιατί το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι ρόμβος;

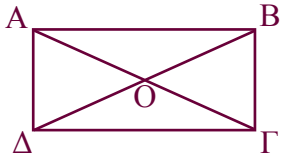
7. Να βρείτε τις άγνωστες γωνίες του παρακάτω σχήματος, στο οποίο το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο



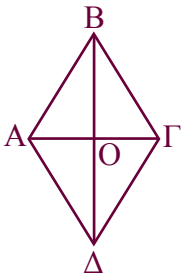
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι παρακάτω απαντήσεις αφορούν τις ασκήσεις και τα προβλήματα του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 231

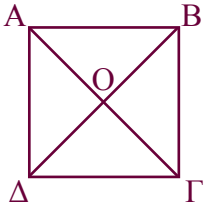
1.
α) Με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι τα τρίγωνα
- ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΒΓΔ και ΑΒΔ είναι ίσα
- ΑΟΒ και ΔΟΓ είναι ίσα
- ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα



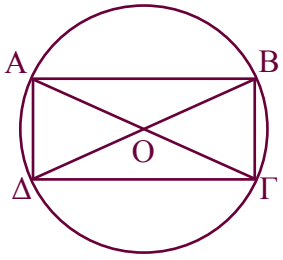
β) Με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι τα τρίγωνα
- ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΑΟΔ είναι ίσα
- ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα
- ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ίσα



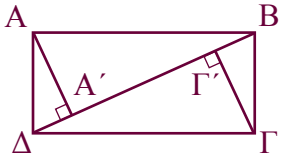
γ) Με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι τα τρίγωνα
- ΑΒΔ, ΒΔΓ, ΑΒΓ, ΑΔΓ είναι ίσα
- ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΑΟΔ είναι ίσα



2. Ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής Ο των διαγωνίων του ορθογωνίου, για το οποίο ισχύει ΟΑ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΒ. Επομένως ο κύκλος διέρχεται από τις 4 κορυφές διότι ισαπέχουν από το κέντρο Ο



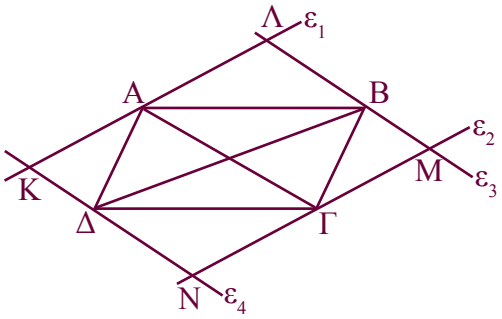
3. Φέρνουμε τις αποστάσεις ΑΑ΄ και ΓΓ΄ των κορυφών Α και Γ από τη διαγώνιο ΒΔ, τις μετράμε με το υποδεκάμετρο και τις βρίσκουμε ίσες



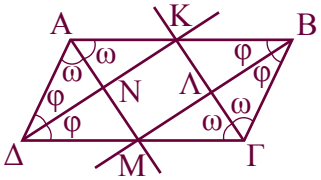
4.

- Σχεδιάζουμε την $\varepsilon_1 \parallel B\Delta$ και την $\varepsilon_2 \parallel B\Delta$, άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
- Σχεδιάζουμε την $\varepsilon_3 \parallel A\Gamma$ και την $\varepsilon_4 \parallel B\Delta$, άρα $\varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$

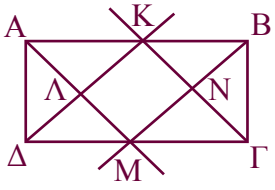
Επομένως το σχήμα ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες



5. Σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο και με τη βοήθεια του μοιρογνωμόνιου φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών του, οι οποίες προεκτεινόμενες σχηματίζουν το τετράπλευρο ΚΛΜΝ. Μετρώντας τις γωνίες του ΚΛΜΝ με το μοιρογνωμόνιο, τις βρίσκουμε όλες ορθές, άρα είναι ορθογώνιο

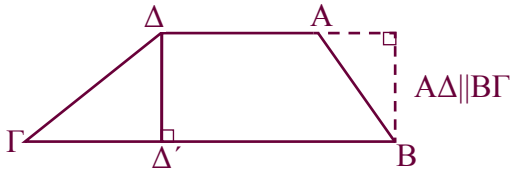


6. Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με βοήθεια του μοιρογνωμόνιου. Το τετράπλευρο που δημιουργείται από τις διχοτόμους είναι το ΚΛΜΝ. Με το υποδεκάμετρο διαπιστώνουμε ότι οι πλευρές του είναι ίσες και με το μοιρογνωμόνιο βρίσκουμε όλες τις γωνίες του ορθές. Άρα το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο

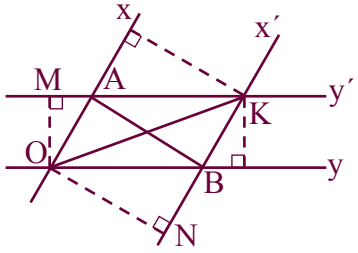


α) φέρνουμε τις διχοτόμους του τετραγώνου ΑΒΓΔ και διαπιστώνουμε ότι αυτές είναι οι διαγώνιοι του
β) φέρνουμε τις διχοτόμους του ρόμβου ΑΒΓΔ και διαπιστώνουμε ότι αυτές είναι οι διαγώνιοι του

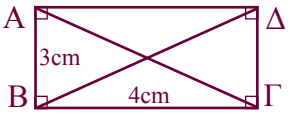
7. Φέρνουμε με τον γνώμονα τα ύψη ΒΒ΄ και ΔΔ΄ των τριγώνων ΑΔΒ και ΔΒΓ αντίστοιχα. Μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε ότι ΔΔ΄=ΒΒ΄. Τα ύψη είναι ίσα, ως απόσταση μεταξύ δύο παράλληλων ευθειών.



8. Με το υποδεκάμετρο βρίσκουμε ότι ΑΚ=ΚΒ=ΒΟ=ΟΑ, δηλαδή το ΑΟΒΚ είναι ρόμβος άρα οι διαγώνιοι του ΑΒ, Οκ διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα.
Φέρνουμε τις αποστάσεις ΟΜ και ΟΝ του Ο από τις Αy΄ και Βχ΄ αντίστοιχα. Μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε ότι ΟΜ=ΟΝ. Ομοίως και οι αποστάσεις του Κ από τις Οχ, Οy είναι ίσες



9. Επειδή ΑΒ ⊥ ΒΓ και ΔΓ ⊥ ΒΓ θα είναι ΑΒ || ΔΓ και ομοίως επειδή ΑΔ ⊥ ΔΓ και ΒΓ ⊥ ΔΓ θα είναι ΑΔ || ΒΓ, οπότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο
α) Άρα ΓΔ=ΒΑ=3 cm και ΑΔ=ΒΓ=4 cm
β) Μετράμε με το υποδεκάμετρο και βρίσκουμε ΒΔ=5 cm και ΓΑ= 5 cm, δηλαδή ΒΔ=ΑΓ



Επαναληπτικές ασκήσεις 3ου κεφαλαίου

Ι. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

	Σ	Λ
1. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου δεν είναι ίσες	☐	☐
2. Οι απέναντι γωνίες κάθε παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές	☐	☐
3. Μία διαγώνιος παραλληλογράμμου είναι άξονας συμμετρίας του	☐	☐
4. Ένα ορθογώνιο με κάθετες διαγώνιους είναι ρόμβος	☐	☐
5. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τον χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τρίγωνα	☐	☐
6. Σε κάθε τραπέζιο, οι διαγώνιοι το χωρίζουν σε τέσσερα ίσα τετράγωνα	☐	☐
7. Αν ένας ρόμβος έχει τρεις γωνίες ίσες, είναι τετράγωνο	☐	☐
8. Ένα τετράπλευρο που έχει τις δυο πλευρές του παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο	☐	☐
9. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου δεν είναι ίσες	☐	☐
10. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του δεν διχοτομούν τις γωνίες του	☐	☐

ΙΙ. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σ' ένα τυχαίο παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι του
α) είναι ίσοι
β) είναι κάθετοι
γ) διχοτομούνται
δ) διχοτομούν τις γωνίες του

2. Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, αν οι διαγώνιοι του είναι
α) ίσες
β) κάθετες
γ) διχοτομούνται
δ) διχοτομούν τις γωνίες του

3. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Αν $\hat{B}=(6\chi+10)^o$ και $\hat{\Gamma}=58^o$, ητιμή του χ είναι:
α) 18^o
β) 53^o
γ) 121^o
δ) 137^o

4. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.Αν ΑΒ=14, ΑΔ=6, ΓΔ=3χ+5, ΒΓ=2y-4 οι τιμές των χ, y είναι:
α) χ=3, y=5
β) χ=4, y=5
γ) χ=3, y=6
δ) χ=6, y=1

5. Στο τετράγωνο οι διαγώνιοι:
α) Σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60^o
β) το χωρίζουν σε 5 ισόπλευρα τρίγωνα
γ) είναι άνισες
δ) το χωρίζουν σε 4 ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα

6. Στο ρόμβο
α) οι διαγώνιοι είναι κάθετες
β) οι διαγώνιοι είναι ίσες
γ) οι πλευρές είναι ίσες και ανά δύο κάθετες

δ) οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές

7. Ισοσκελές ονομάζεται το τραπέζιο που έχει
α) τις προσκείμενες στην ίδια βάση γωνίες παραπληρωματικές
β) τις μη παράλληλες πλευρές ίσες
γ) δυο πλευρές ίσες
δ) τις βάσεις του ίσες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΥΤΟΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2ου ΚΑΙ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Οι απαντήσεις αφορούν τις επαναληπτικές ασκήσεις αυτοαξιολόγησης 2ου και 3ου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 232

Α.

ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΖΕΥΓΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ	ΣΧΕΣΗ	
Παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από ευθεία	Ίσες	Παραπληρωματικές
«εντός εναλλάξ»	Χ	
«εκτός εναλλάξ»	Χ	
«εντός και επί τ' αυτά»		Χ
«εκτός και επί τ' αυτά»		Χ
«εντός-εκτός εναλλάξ»		Χ
«εντός-εκτός επί τ' αυτά»	Χ	

Β.

1. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o

2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση είναι και

α. άξονας συμμετρίας
β. ύψος
γ. διχοτόμος

3. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι εξωτερικές γωνίες είναι ίσες με 120^o

4. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες οι

α. προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του
β. οι διαγώνιοί του

5. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοί του είναι

α. άξονας συμμετρίας
β. κάθετες και διχοτομούνται
γ. διχοτόμοι των γωνιών του

6. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άξονες συμμετρίας είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του

7. Σε κάθε τετράγωνο οι ευθείες των διαγωνίων του είναι

α. διχοτόμοι των γωνιών του
β. άξονες συμμετρίας

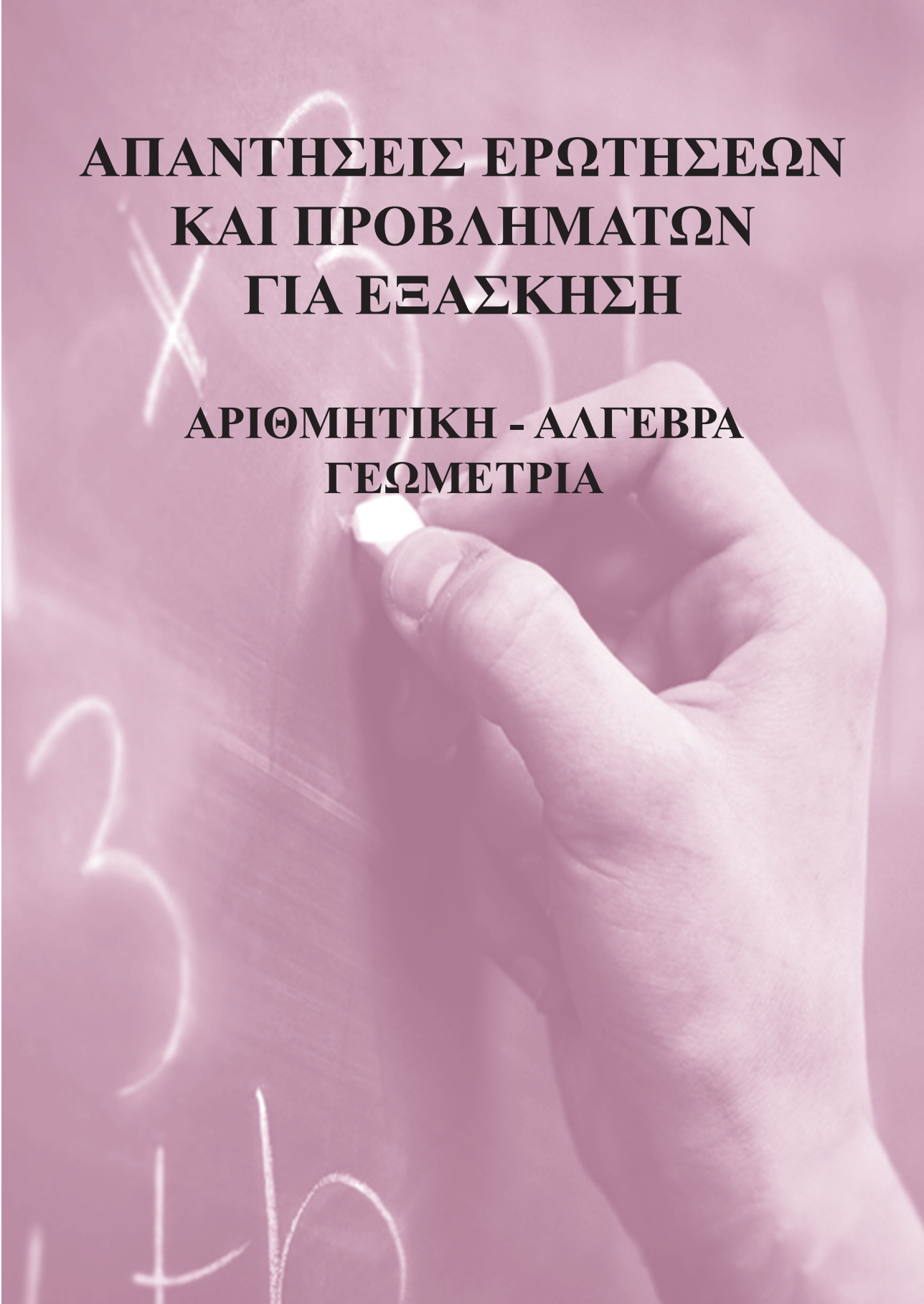
8. Σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι:
α. κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του
β. οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

9.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ	ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ												ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕ-ΤΡΙΑΣ
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Ευθύγραμμο τμήμα			X											X
Γωνία		X												
Κατακορυφήν γωνίες			X											X
Εντός εναλλάξ γωνίες	X													X
Τυχαίο τρίγωνο	X													
Ισοσκελές τρίγωνο		X												
Ισόπλευρο τρίγωνο				X										
Τραπέζιο	X													
Ισοσκελές τραπέζιο		X												
Τυχαίο τετράπλευρο	X													
Παραλληλό-γραμμο	X													X
Ορθογώνιο			X											X
Τετράγωνο				X										X
Ρόμβος			X											X

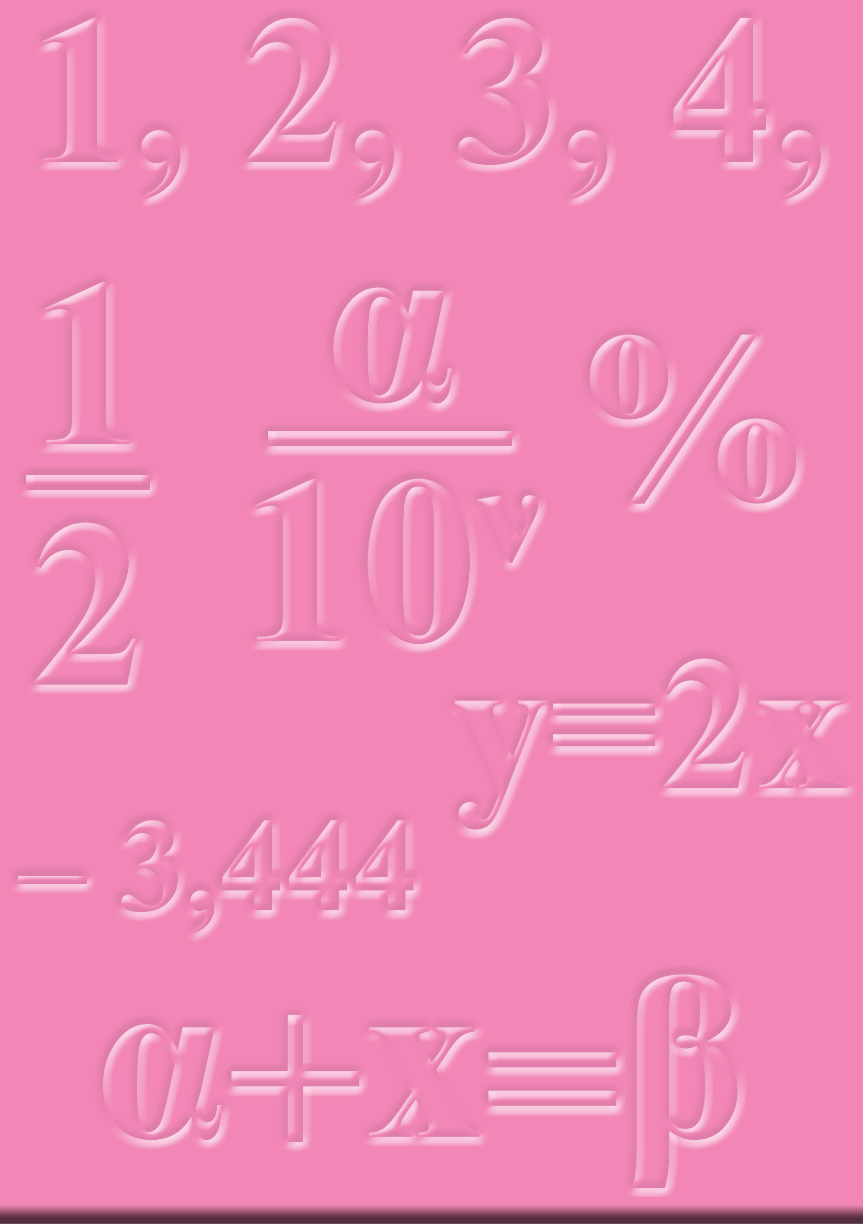
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ – ΑΛΓΕΒΡΑ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1

1.
Α. Σ
Β. Σ
Γ. Λ 26>14 γιατί 2>4
Δ. Λ Όλοι οι φυσικοί αριθμοί τοποθετούνται στον άξονα
ΣΤ. Λ Το 0 αγνοείται όταν είναι 1ο από αριστερά
Η. Σ

2.
Α. Εικοσιδύο χιλιάδες πεντακόσια εξήντα επτά, χίλια τετρακόσια πενήντα τρία, χίλια εννιακόσα είκοσι ένα, σαράντα εννιά χιλιάδες οκτακόσια εβδομήντα, πεντακόσιες εξήντα επτά χιλιάδες πεντακόσια τριάντα δύο, ένα εκατομμύριο διακόσες τριάντα τέσσερις χιλιάδες επτακόσια εννιά

Β.

εκατομμύρια	0	0	0	0	0	1
εκατοντάδες χιλιάδες	0	0	0	0	5	2
δεκάδες χιλιάδες	2	0	0	4	6	3
χιλιάδες	2	1	1	9	7	4
εκατοντάδες	5	4	9	8	5	7
δεκάδες	6	5	2	7	3	0
μονάδες	7	3	1	0	2	9

3.
Α. Άρτιοι: 332, 1234, 700, 12, 0 Περιττοί: 233, 8455, 32.459

Β. 332:	Προηγούμενοι	331 και 330	Επόμενος	333
1234:	>>	1233 και 1232	>>	1235
700:	>>	699 και 698	>>	701
12:	>>	11 και 10	>>	13
233:	>>	232 και 231	>>	234
8455:	>>	8454 και 8453	>>	8456
32.459:	>>	32.458 και 32.457	>>	32.460
0:	>>	Δεν υπάρχουν	>>	1

4.
Α. Είναι 500-5-1=494 αριθμοί
Β. Είναι 2007-21+1=1987 αριθμοί

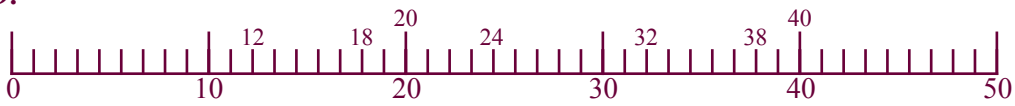
5.
34<43, 457=0457, 1234<1324, 6010>6001, 4568<4569, 5944<59440

6.
Α. 1234<1243<2.134<2.431<3.124<4.213<4.312
Β. 8.765>8.576>7.685>6.786>6.587>5.689>5.678

7.
Α. Είναι 567, 576, 657, 675, 765, 756
Β. Άρτιοι: 576, 756 Περιττοί: 567, 657, 675, 765
Γ. 765>756>675>657>576>567

8.

9.



10.
Α. 11130, 21250, 58390, 97760
Β. 1110, 21300, 58400, 97800
Γ. 11000, 21000, 58000, 98000

11. Στρογγυλοποιούνται μόνο τα: 48.265 kg, 384.394 km, 4.550.644 €
Εκατοντάδα: 48.300, 384.400, 4.550.600

Χιλιάδα: 48.000, 384.000, 4.551.000
Δεκ. Χιλιάδες: 50.000, 380.000, 4.550.000

12. Οι άρτιοι ανάμεσα στο 3 και στο 8 είναι οι 4 και 6.Εφόσον η στρογγυλοποίηση δίνει 830 ο αριθμός δεξιά είναι μικρότερος του 5, άρα σωστή απάντηση ο αριθμός 4 (834)

1.2

1.
Α. $82+13-(2\cdot 16+5)+11=82+13-(32+5)+11=82+13-37+11=69$
Β. $45+21\cdot(87-2\cdot 14)\cdot(2\cdot 3\cdot 4)-22=45+21(87-28)\cdot 24-22=45+21\cdot 59\cdot 24-22$
$=45+29736-22=29759$
Γ. $29-8\cdot 2+24\cdot 3-[2\cdot 3\cdot 4-(2+3+4)]=29-8\cdot 2+24\cdot 3-(2\cdot 3\cdot 4-9)=29-8\cdot 2+24\cdot 3-(24-9)$
$=29-8\cdot 2+24\cdot 3-15=29-16+72-15=70$

2.
Α. $27\cdot 101=27\cdot(100+1)=27\cdot 100+27\cdot 1=2700+27=2727$
Β. $68\cdot 111=68(100+10+1)=68\cdot 100+68\cdot 10+68\cdot 1=6800+680+68=7548$
Γ. $52\cdot 99=52(100-1)=52\cdot 100-52\cdot 1=5200-52=5148$
Δ. $12\cdot 199=12\cdot(2\cdot 100-1)=24\cdot 100-12=2400-12=2388$
Ε. $2007\cdot 11=2007(10+1)=2007\cdot 10+2007=20070+2007=22077$

3.
Α. $12\cdot 147+12\cdot 3-12\cdot 150=12(147+3-150)=12(150-150)=12\cdot 0=0$
Β. $24\cdot 16+24\cdot 18-24\cdot 32=24(16+18-32)=24\cdot 2=48$

4.
Α. $5+10+20+50+100+200+500=885$ €
Β. $1\cdot 500+2\cdot 200+3\cdot 100+4\cdot 50+5\cdot 20+6\cdot 10+7\cdot 5=500+400+300+200+100+60+35=15$
95 €

5.
Οι υπόλοιπες στάσεις είναι 12-7=5, οπότε ο τελικός αριθμός επιβατών υπολογίζεται από την παράσταση:
$7\cdot 17-7\cdot 5+5\cdot 8-5\cdot 22=119-35+40-110=14$ επιβάτες

6. Είναι $28\cdot 97+36\cdot 98+19\cdot 99=28(100-3)+36(100-2)+12(100-1)$
$=2800-84+3600-72+1200-12=7600-168=7.432$ λεπτά= 74 € και 32 λεπτά

7. Είναι $\alpha+2\beta-\gamma+4=\alpha+\beta+\beta-\gamma+4=9+8+4=19$

8.

Α. Ένας άρτιος αριθμός διαιρείται με το 2, άρα είναι της μορφής 2ν, όπου ν οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός.
Ο επόμενος του παραπάνω άρτιου αριθμού είναι 2ν+1 και είναι περιττός.
Β. Έστω ν>μ οπότε και 2ν>2μ. Η διαφορά των άρτιων αυτών είναι Δ=2ν-2μ=2(ν-μ) και είναι άρτιος αριθμός ανεξάρτητα με το αν ν-μ είναι άρτιος ή περιττός.
Για τους περιττούς 2ν+1, 2μ+1 είναι Δ=2ν+1-2μ-1= 2(ν-μ)+1-1=2(ν-μ) δηλαδή άρτια.

1.3

1.

$3^4=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$
$4^5=4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4=1024$
$5^6=5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=15625$
$10^{11}=10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=100.000.000.000$

2.

$\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{9}=2^9$, $\underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{7}=3^7$, $\underbrace{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5}_{6}=5^6$, $\underbrace{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10}_{4}=10^4$

3.

α	2	4	6	8	12	14	18
α^2	4	16	36	64	144	196	324
α^3	8	64	216	512	1728	2744	5832

4.

α	1	2	3	4	5	6	7
β	14	13	12	11	10	9	8
$\alpha^2+\beta^2$	197	173	153	137	125	117	120
$(\alpha+\beta)^2$	225	225	225	225	225	225	225

5.

α	7	6	5	4	3	2	1
β	14	13	12	11	10	9	8
$\beta^2-\alpha^2$	147	133	119	105	91	77	63
$(\beta-\alpha)^2$	49	49	49	49	49	49	49

6.

$2007=2\cdot 100+7\cdot 1=2\cdot 10^2+7\cdot 10^0$

$88.106=8\cdot 10000+8\cdot 1000+1\cdot 100+6\cdot 1=8\cdot 10^4+8\cdot 10^3+10^2+6\cdot 10^0$

$277.890=2\cdot 100.000+7\cdot 10.000+7\cdot 1000+8\cdot 100+9\cdot 10=$
$=2\cdot 10^5+7\cdot 10^4+7\cdot 10^3+8\cdot 10^2+9\cdot 10^1$

$2.342.909=2\cdot 1.000.000+3\cdot 100.000+4\cdot 10.000+2\cdot 1.000+9\cdot 100+9\cdot 1=$
$=2\cdot 10^6+3\cdot 10^5+4\cdot 10^4+2\cdot 103+9\cdot 10^2+9\cdot 10^0$

$12.456.987=1\cdot 10.000.000+2\cdot 1.000.000+4\cdot 100.000+5\cdot 10.000+6\cdot 1.000+9\cdot 100+$
$+8\cdot 10+7\cdot 1=10^7+2\cdot 10^6+4\cdot 10^5+5\cdot 10^4+6\cdot 10^3+9\cdot 10^2+8\cdot 10^1+7\cdot 10^0$

$7.007.007.007=7\cdot 1.000.000.000+7\cdot 1.000.000+7\cdot 1.000+7\cdot 1=$
$=7\cdot 10^9+7\cdot 10^6+7\cdot 10^3+7\cdot 10^0$

7.

A. $2+4\cdot 4^3+2^2-6\cdot 1^{2007}=2+4\cdot 64+4-6\cdot 1=2+256+4-6=258$

B. $4+5\cdot 2^2(1+2^2)^3-5^3+10^0-0^{2007}=4+5\cdot 2^2(1+4)^3-5^3+10^0-0^{2007}=4+5\cdot 2^2\cdot 5^3-5^3+10^0-0^{2007}=$
$=4+5\cdot 4\cdot 125-125+1-0=4+2500-125+1=2380$

Γ. $4\cdot 4\cdot 4+4(4^2-2\cdot 4)+4^2+4^4=4\cdot 4\cdot 4+4(16-2\cdot 4)+4^2+4^4=4\cdot 4\cdot 4+4(16-8)+4^2+4^4=$
$=4\cdot 4\cdot 4+4\cdot 8+16+256=368$

Δ. $(3^2-5^1)^2-3(9-2^3)+2^3\cdot 3^2-(2\cdot 3)^2=(9-5)^2-3(9-8)+2^3\cdot 3^2-(2\cdot 5)^2=$
$=4^2-3\cdot 1+2^3\cdot 3^2-6^2-16-3\cdot 1+8\cdot 9-36=16-3+72-36=49$

1.4

1.

A. $\begin{array}{r|l} 23 & 3 \\ \hline 21 & 7 \\ \hline 2 & \end{array}$ $23=3\cdot 7+2$

Β. $\begin{array}{r|l} 145 & 12 \\ \underline{144} & 7 \\ 1 & \end{array}$ $154=12\cdot 12+1$

Γ. $\begin{array}{r|l} 1550 & 25 \\ \underline{1500} & 62 \\ 50 & \\ \underline{50} & \\ 0 & \end{array}$ $1550=25\cdot 62$

Δ. $\begin{array}{r|l} 2345 & 44 \\ \underline{220} & 53 \\ 145 & \\ \underline{132} & \\ 13 & \end{array}$ $2345=44\cdot 35+13$

2.

Δ	24	55	465	990	53	156	924	221	730
δ	4	6	13	99	17	19	77	44	14
π	6	9	35	10	3	8	12	5	52
υ	0	1	10	0	2	4	0	1	2

3.

Α: είναι ταυτότητα Β: όχι γιατί 8>4 Γ: όχι γιατί αφαιρείται το 1
Δ: είναι ταυτότητα Ε: όχι γιατί 14>10 και 14>8

4. Πρέπει υ<8 άρα, υ=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 οπότε υ=7
Α. $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon=8\cdot 20+7=160+7=167$
Β. Πρέπει δ>4 άρα δ=5 και $\Delta=5\cdot 11+4=55+4=59$

5.

Α. 416:52=8 άρα 8 λεωφορεία
Β. 416:32=13 άρα 13 συνοδοί
Γ. 416:3=138 και υπόλοιπο 2 άρα θα χρειαστούν 139 δωμάτια και δεν θα χωρέσουν ακριβώς

6.

Α. $88:11-4^2:2^2+(168:3-12^2)=88:12-4^2:2^2+(168:3-4)=$
$=88:11-4^2:2^2+(56-4)=88:11-16:4+59=8-4+52=56$

Β. $2\cdot(2^4+4-55:5)^2:(180:5-10-2^3)=2(16+4-55:5)^2:(180:5-10-8)=$
$=2(16+4-11)^2:(36-10-8)=2\cdot 9^2:18=2\cdot 81:18=9$
Γ. $(501-64:2^6):5^2-2000:(4\cdot 5^2)=(501-64:64):5^2-2000:(4\cdot 5^2)=$
$=(501-1):5^2-2000:(4\cdot 25):500:5^2-2000:100=20-20=0$
Δ. $32(3^2-144:8):(12^2:6^2)\cdot(5^2-3^2)=32(9-144:48):(144:36)\cdot(25-9)=32(9-3):4\cdot 16=768$

7. Ζητάμε τον ΜΚΔ των αριθμών των γλυκών. Τόσες θα είναι οι πιατέλες. Άρα: $32=2^5$, $48=2^4\cdot 3$, $72=2^3\cdot 3^2$
ΜΚΔ$=2^3=8$ άρα οι πιατέλες θα είναι 8 και θα έχουν οι κάθε μία
32:8=4 παστάκια φράουλας
48:8=6 παστάκια σοκολάτας
72:8=9 παστάκια βανίλιας

8. Ζητάμε το ΕΚΠ των αριθμών των ημερών για κάθε εργασία:
$8=2^3$, $30=2\cdot 3\cdot 5$, $160=2^5\cdot 5$ ΕΚΠ$=2^5\cdot 3\cdot 5=32\cdot 3\cdot 5=480$
Μετά από 480 ημέρες θα χρειαστεί να κάνει τις τρεις δουλειές μαζί

9. Εφόσον ΕΚΠ$=16=2^4$ οι α, β, γ, δ έχουν διαιρέτη μόνο το 2 σε δύναμη μικρότερη ή ίση του 4, άρα είναι οι
2^1, 2^2, 2^3, 2^4 δηλαδή οι 2, 4, 8, 16

1.5

1. Το 42 έχει διαιρέτες τους 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42. Άρα είναι σύνθετος αριθμός
Το 43 έχει διαιρέτες τους 1, 43 άρα είναι πρώτος αριθμός
Το 44 έχει διαιρέτες τους 1, 2, 4, 11, 22, 44 άρα είναι σύνθετος αριθμός
Το 45 έχει διαιρέτες τους 1,3, 5, 9, 15, 45 άρα είναι σύνθετος αριθμός
Το 46 έχει διαιρέτες τους 1,2,23,46 άρα είναι σύνθετος αριθμός
Το 47 έχει διαιρέτες τους 1,47 άρα είναι πρώτος αριθμός

2. Ο πενταπλάσιος ενός πρώτου αριθμού ν ισούται με 5ν και έχει διαιρέτες τουλάχιστον τους 1, 5, ν, 5ν οπότε είναι σύνθετος αριθμός

3.
Α. $25=5^2$, $45=3^2\cdot 5$, $65=5\cdot 13$
ΕΚΠ$=5^2\cdot 3^2\cdot 13=25\cdot 9\cdot 13=2925$, ΜΚΔ$=5$
Β. $40=2^3\cdot 5$, $50=2\cdot 5^2$, $60=2^2\cdot 3\cdot 5$
ΕΚΠ$=2^3\cdot 3\cdot 5^2=8\cdot 3\cdot 25=600$, ΜΚΔ$=2\cdot 5=10$
Γ. $120=2^3\cdot 3\cdot 5$, $144=2^4\cdot 3^2$, $180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$
ΕΚΠ$=2^4\cdot 3^2\cdot 5=16\cdot 9\cdot 5=720$, ΜΚΔ$=2^2\cdot 3=4\cdot 3=12$

4.

Α. Για να διαιρείται αριθμός με το 9 θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το 9, άρα αν το ψηφίο είναι 8 τότε $1+2+8+9=18=2\cdot 9$

Β. Για να διαιρείται ο αριθμός με το 5, θα πρέπει να τελειώνει σε 0 ή 5 και για να διαιρείται με το 3 θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων να διαιρείται με το 3. Άρα τα ψηφία είναι 0 και 0 και $1+0+5+0=6=3\cdot 2$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης είναι το 0 και του πολλαπλασιασμού είναι το 1

Β. Το α ονομάζεται βάση και το ν εκθέτης

Γ. Μια διαίρεση είναι τέλεια όταν όταν το υπόλοιπο είναι μηδέν

Δ. ΕΚΠ ονομάζεται το ελάχιστο μη μηδενικό πολλαπλάσιο των δύο αριθμών

ΘΕΜΑ 2

Α. $124:31-2^4:4^2+(2160:18-8^2=124:31-2^4:4^2+(2160:18-64)=$
$=124:31-2^4:4^2+(120-64)=124:31-16:16+56=4-1+56=59$

Β. $(2^3+81:3^2-88:8)^2\cdot 2(170:34+29-3^2)=(8+81:9-88:8)^2\cdot 2:(170:34+29-9)=$
$=(8+8-11)^2\cdot 2:(5+29-9)=5^2\cdot 2:25=25\cdot 2:25=25$

ΘΕΜΑ 3

Α. Το υπόλοιπο πρέπει να είναι μικρότερο από τους αριθμούς 7 και 16, άρα η μεγαλύτερη τιμή είναι το 6. Για υ=6 είναι $\Delta=7\cdot 16+6=112+6=118$

Β. Ο διαιρέτης πρέπει να είναι μεγαλύτερος του υπόλοιπου δηλαδή του 7. Η μικρότερη τιμή του είναι το 8. Για δ=8 είναι $\Delta=8\cdot 24+7=199$

ΘΕΜΑ 4ο

Α.

$$\left.\begin{array}{l}432:2=218\\216:2=108\\108:2=54\\54:2=27\\27:3=9\\9:3=3\\3:3=1\end{array}\right\}432=2^4\cdot 3^3 \qquad \left.\begin{array}{l}1250:2=625\\625:5=125\\125:5=25\\25:5=5\\5:5=1\end{array}\right\}1250=2\cdot 5^4$$

$$\left.\begin{array}{l}1890:2=945\\945:3=315\\315:3=105\\105:3=35\\35:5=7\\7:7=1\end{array}\right\}1890=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$$

Β. ΕΚΠ=$2^4\cdot 3^3\cdot 5^4\cdot 7$=$16\cdot 9\cdot 625\cdot 7$=630.000, ΜΚΔ=2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1

1. Οι Έλληνες ποδοσφαιριστές είναι 11–4=7 οπότε:

Α. Αλλοδαποί είναι οι 4 στους 11, δηλαδή τα $\frac{4}{11}$ της ομάδας

Β. Έλληνες είναι οι 7 στους 11, δηλαδή τα $\frac{7}{11}$ της ομάδας

2. Το $\frac{1}{7}$ των αυτοκινήτων αντιστοιχεί σε $140\cdot\frac{1}{7}=\frac{140}{7}$=140:7=20 αυτ. Άρα τα $\frac{2}{7}$, δηλαδή τα λευκά, είναι $3\cdot 5$=15 αυτ.

3. Τα $\frac{5}{9}$ των παιδιών αντιστοιχούν σε 85 παιδιά, άρα το $\frac{1}{9}$ είναι 85:5=17 παιδιά. Το σύνολο των παιδιών είναι τα $\frac{9}{9}$ δηλαδή $9\cdot 15$=135 παιδιά

4.

Α. Ο Κώστας μάζεψε τα $\frac{5}{12}$ των 240 κογχυλιών. Το $\frac{1}{12}$ είναι 240:12=20 κογχύλια, άρα ο Κώστας μάζεψε $5 \cdot 20=100$ κογχύλια

Β. Ο Γιώργος μάζεψε τα 100-22=78 κογχύλια, άρα μάζεψε $\frac{78}{240}$ των κογχυλιών

Γ. Η Ελένη μάζεψε 78-16=62 κογχύλια, άρα μάζεψε τα $\frac{62}{240}$ των κογχυλιών

5. Το $\frac{1}{9}$ των 72 κιλών είναι $\frac{72}{9}$=72:9=8 κιλά, άρα τα $\frac{8}{9}$ είναι $8 \cdot 8$=64 κιλά.

Τόσο είναι το νερό σε ένα σώμα μάζας 72 κιλών

6. Τα 5 € αντιστοιχούν στα $\frac{5}{500}$ των 500 €

Τα 10 € αντιστοιχούν στα $\frac{10}{500}$ των 500 €

Τα 20 € αντιστοιχούν στα $\frac{20}{500}$ των 500 €

Τα 50 € αντιστοιχούν στα $\frac{50}{500}$ των 500 €

Τα 200 € αντιστοιχούν στα $\frac{200}{500}$ των 500 €

7.

Α. Το $\frac{1}{8}$ της τιμής αντιστοιχεί σε 2.500 €, άρα το αυτοκίνητο αρχικά στοιχίζει $8 \cdot$ 2.500=20000 €

Β. Τελικά θα πληρώσουμε 20.000-2.500=17500 €

Γ. Η νέα έκπτωση είναι $\frac{1}{10} \cdot 20000=\frac{20000}{10}$=2000 €. Άρα θα πληρώσουμε 20000-2000=18000 €

8. Τον πρώτο χρόνο παίρνει αύξηση ίση με το $\frac{1}{10}$ των 1000 €, δηλαδή 1000:10=100 €

Τον δεύτερο χρόνο παίρνει αύξηση ίση με το $\frac{1}{10}$ των 1100 €, δηλαδή 1100:10=110 €

Τον τρίτο χρόνο παίρνει αύξηση ίση με το $\frac{1}{10}$ των 1210 €, δηλαδή 1210:10=121 €

Ο μισθός του μετά από τρία χρόνια είναι 1210+121=1331 €

2.2

1.

Α. Είναι 30:15=2 άρα $\frac{6}{15}=\frac{6\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{12}{30}$

Β. Είναι 75:15=5 άρα $\frac{6}{15}=\frac{6\cdot 5}{15\cdot 5}=\frac{30}{75}$

Γ. Είναι 105:15=7 άρα $\frac{6}{15}=\frac{6\cdot 7}{15\cdot 7}=\frac{42}{105}$

Δ. Είναι 135:15=9 άρα $\frac{6}{15}=\frac{6\cdot 9}{15\cdot 9}=\frac{54}{135}$

2.

Είναι 24:3=8 άρα $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{8}{24}$

Είναι 24:6=4 άρα $\frac{3}{6}=\frac{3\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{12}{24}$

Είναι 24:8=3 άρα $\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{15}{24}$

Είναι 24:12=2 άρα $\frac{7}{12}=\frac{7\cdot 2}{12\cdot 2}=\frac{14}{24}$

3.

Α. ΜΚΔ(14,42)=14 άρα $\frac{14}{42}=\frac{14:14}{42:14}=\frac{1}{3}$

Β. ΜΚΔ(96,144)=48 άρα $\frac{96}{144}=\frac{96:48}{144:48}=\frac{2}{3}$

Γ. ΜΚΔ(39,40)=1 άρα το κλάσμα είναι ανάγωγο

Δ. ΜΚΔ(225,315)=45 άρα $\frac{225}{315}=\frac{225:45}{315:45}=\frac{5}{7}$

4. Εξετάζουμε σε κάθε περίπτωση τα χιαστί γινόμενα. Είναι:

Α. $13\cdot 144=1872$, $12\cdot 169=2028\neq 1872$ άρα δεν είναι ισοδύναμα

Β. $14\cdot 36=504$, $9\cdot 58=504$ άρα είναι ισοδύναμα

Γ. $84\cdot 1358=114072$, $97\cdot 1176=114072$ άρα είναι ισοδύναμα

5. Πρέπει τα χιαστί γινόμενα να είναι ίσα, δηλαδή $4\alpha=12\cdot 5 \Leftrightarrow 4\alpha=60 \Leftrightarrow \alpha=60:4 \Leftrightarrow \alpha=15$

Ομοίως $125\cdot 11=55\beta \Leftrightarrow 1375=55\beta \Leftrightarrow \beta=1375:55 \Leftrightarrow \beta=25$

6. Εφόσον τα αεροπλάνα είναι ίδιων θέσεων για να μεταφέρουν ίσους αριθμούς επιβατών θα πρέπει τα κλάσματα $\frac{28}{32}$ και $\frac{98}{112}$ να είναι ισοδύναμα. Τα χιαστί γινόμενα είναι: $28\cdot 112=3136$ και $28\cdot 112=3136$, άρα είναι ισοδύναμα, οπότε μεταφέρουν τον ίδιο αριθμό επιβατών.

7.

Α. ΕΚΠ(3,4)=12 και 12:3=4, 12:4=3

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12} \text{ και } \frac{7}{4}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{21}{12}$$

Β. ΕΚΠ(12,18,72)=72 και 72:12=6, 72:18=4, 72:24=3 άρα

$$\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 6}{12\cdot 6}=\frac{30}{72} \text{ και } \frac{7}{18}=\frac{7\cdot 4}{18\cdot 4}=\frac{28}{72} \text{ και } \frac{11}{24}=\frac{11\cdot 3}{24\cdot 3}=\frac{33}{72}$$

Γ. ΕΚΠ(5,12,15,30)=60 και 60:5=12, 60:12=5, 60:15=4, 60:30=2

$$\frac{7}{5}=\frac{7\cdot 12}{5\cdot 12}=\frac{84}{60},\ \frac{9}{12}=\frac{9\cdot 5}{12\cdot 5}=\frac{45}{60},\ \frac{21}{15}=\frac{21\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{84}{60},\ \frac{17}{30}=\frac{17\cdot 2}{30\cdot 2}\ \frac{34}{60}$$

8. Είναι 55:5=11 άρα $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 11}{5\cdot 11}=\frac{44}{55}$

Το 62 δεν διαιρείται ακριβώς με το 5, άρα δεν υπάρχει ισοδύναμο κλάσμα με παρονομαστή το 62

2.3

1.

Α. Τα κλάσματα είναι ομώνυμα, άρα συγκρίνουμε αριθμητές

$3<7<9<13$ άρα $\frac{3}{15}<\frac{7}{15}<\frac{9}{15}<\frac{13}{15}$

Β. Τα κλάσματα έχουν ίδιους αριθμητές άρα συγκρίνουμε παρονομαστές

$3<5<6<9$ άρα $\frac{7}{9}<\frac{7}{6}<\frac{7}{5}<\frac{7}{3}$

Γ. Πρέπει να γίνουν τα κλάσματα ομώνυμα: ΕΚΠ(6,9,12,18)=36 και 36:6=6, 36:9=4, 36:12=3, 36:18=2

$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 6}{6\cdot 6}=\frac{30}{36}$, $\frac{11}{12}=\frac{11\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{33}{36}$, $\frac{17}{18}=\frac{17\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{34}{36}$, $\frac{8}{9}=\frac{8\cdot 4}{9\cdot 4}=\frac{32}{36}$

$24<30<32<34$ οπότε $\frac{24}{36}<\frac{30}{36}<\frac{32}{36}<\frac{34}{36}$

2.

Α. Τα κλάσματα είναι ομώνυμα και οι αριθμητές είναι $11>8>5>3$. Άρα

$\frac{11}{9}>\frac{8}{9}>\frac{5}{9}>\frac{3}{9}$

Β. Τα κλάσματα έχουν ίσους αριθμητές και οι παρονομαστές είναι:$12>11>4>2$ άρα $\frac{11}{2}>\frac{11}{4}>\frac{11}{11}>\frac{11}{12}$

Γ. Είναι ΕΚΠ(7,5,10,15)=30 και 30:3=10, 30:5=6, 30:10=3, 30:15=2 άρα $\frac{5}{3}=\frac{5\cdot 10}{3\cdot 10}=\frac{50}{30}$, $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{18}{30}$, $\frac{6}{10}=\frac{6\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{18}{30}$, $\frac{10}{15}=\frac{10\cdot 2}{15\cdot 2}=\frac{20}{30}$ και $50>21>20>18$ οπότε $\frac{50}{30}>\frac{21}{30}>\frac{20}{30}>\frac{18}{30}$

3.

Α. $188<189$ άρα $\frac{188}{189}<1$ ενώ $\frac{189}{188}>1$ οπότε $\frac{189}{188}>\frac{188}{189}$

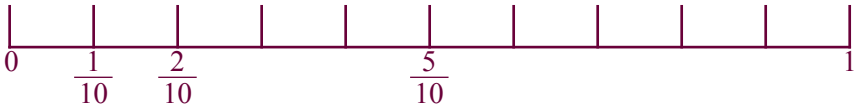
Β. $265>256$ άρα $\frac{265}{256}>1$ ενώ $\frac{256}{265}<1$ οπότε $\frac{265}{256}>\frac{256}{265}$

Γ. $450>150$ και $6>2$ άρα $\frac{450}{150}>1$ και $\frac{6}{2}>1$. Επίσης τα χιαστί $450\cdot 2=900$ και $150\cdot 6=900$ άρα $\frac{450}{150}=\frac{6}{2}$

4.

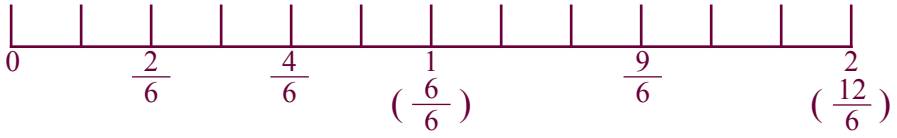
Α. Κάνουμε τα κλάσματα ομώνυμα: ΕΚΠ(2,5,10)=10 και 10:5=2, 10:2=5

$\frac{1}{5}=\frac{1\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{2}{10}$, $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}$. Είναι $\frac{1}{10}<\frac{2}{10}<\frac{5}{10}<1$. Χωρίζουμε το χώρο μεταξύ 0 και 1 σε 10 ίσα μέρη. Καθένα αντιστοιχεί στο $\frac{1}{10}$, άρα $\frac{2}{10}$ αντιστοιχούν σε 2 μέρη και τα $\frac{5}{10}$ σε 5 μέρη



Β. Ομοίως ΕΚΠ(2,3)=6, 6:3=2, 6:2=3 άρα $\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}=\frac{4}{6}$, $\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{9}{6}$, $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$

$\frac{2}{6}<\frac{4}{6}<1$, $\frac{9}{6}>1$. Χωρίζουμε το χώρο ανάμεσα στο 0 και 1 σε 6 ίσα μέρη και το χώρο ανάμεσα στα 1, 2 επίσης σε 6 ίσα μέρη. Το κάθε τμήμα αντιστοιχεί στο $\frac{1}{6}$ άρα:



5.

Α. $\frac{12}{13}<\frac{13}{13}<\frac{14}{13}$ δηλαδή $\frac{12}{13}<1<\frac{14}{13}$ άρα είναι το 1

Β. $\frac{14}{3}>\frac{13}{3}>\frac{12}{3}>\frac{11}{3}>\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{14}{3}>4>\frac{10}{3}$ άρα είναι το 4

Γ. $\frac{21}{5}<\frac{22}{5}<\frac{23}{5}<\frac{24}{5}<\frac{25}{5}<\frac{26}{5}<\frac{27}{5}<\frac{28}{5}<\frac{29}{5}\Rightarrow \frac{21}{5}<5<\frac{29}{5}$ άρα είναι το 5

6.

Α. Είναι $8\cdot\frac{3^3}{2^3\cdot\alpha}=\frac{8\cdot 27}{8\alpha}=\frac{27}{\alpha}$. Πρέπει το κλάσμα να είναι ίσο με 1, άρα α=27

Β. Πρέπει το κλάσμα να είναι μικρότερο του 1, άρα $\frac{27}{\alpha}<1\Rightarrow \alpha>27$. Ο αριθμός 28 είναι ο πιο μικρός από τους φυσικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 27

7. Στο δρόμο Α οι παραβάτες ήταν το $\frac{140}{5000}$ των οδηγών, ενώ στον Β το $\frac{220}{7500}$ των οδηγών. Για να συγκρίνουμε τα κλάσματα τα κάνουμε ομώνυμα: ΕΚΠ(5000,7500)=15000

$\frac{140}{5000}=\frac{140\cdot 3}{5000\cdot 3}=\frac{420}{15000}$, $\frac{220}{7500}=\frac{220\cdot 2}{7500\cdot 2}=\frac{440}{15000}$. Άρα στον δρόμο Α κινήθηκαν λιγότεροι παραβάτες άρα περισσότεροι νομοταγείς πολίτες

8.

Α. $\frac{4+1}{5+1}=\frac{5}{6}$. Για να συγκριθεί με το $\frac{4}{5}$ πρέπει να γίνουν ομώνυμα, άρα ΕΚΠ(5,6)=30

οπότε $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{24}{30}$, $\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{25}{30}$, άρα $\frac{24}{30}<\frac{25}{30}$ ή $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}$

Β. $\frac{4-1}{5-1}=\frac{5}{4}$ Ομοίως ΕΚΠ(4,5)=20 άρα $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{15}{20}$, $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{16}{20}>\frac{15}{20}$ ή $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$

Γ. $\frac{4+1}{5-1}=\frac{6}{4}$ ΕΚΠ(4,5)=20 άρα $\frac{6}{4}=\frac{6\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{30}{20}$, $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{16}{20}<\frac{30}{20}$ ή $\frac{4}{5}<\frac{6}{4}$

Δ. $\frac{4-1}{5+1}=\frac{3}{6}$ ΕΚΠ(5,6)=30 άρα $\frac{3}{6}=\frac{3\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{15}{30}$, $\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{24}{30}>\frac{15}{30}$ ή $\frac{4}{5}>\frac{3}{6}$

(Προσθέτοντας ή αφαιρώντας τον ίδιο αριθμό από αριθμητή και παρονομαστή ΔΕΝ προκύπτουν ισοδύναμα κλάσματα)

2.4

1.

Α. $\frac{14}{42}+\frac{7}{42}=\frac{14+7}{42}=\frac{21}{42}=\frac{21:21}{42:21}=\frac{1}{2}$

Β. $\frac{5}{12}+\frac{7}{12}+\frac{6}{12}=\frac{5+7+6}{12}=\frac{18}{12}=\frac{18:6}{12:6}=\frac{3}{2}$

Γ. ΕΚΠ(44,11)=44 και 44:44=1, 44:11=4 άρα

$\frac{25}{44}+\frac{3}{11}=\quad\frac{25}{44}+\frac{3\cdot4}{11\cdot4}=\frac{25}{44}+\frac{12}{44}=\frac{25+12}{44}=\frac{37}{44}$

Δ. ΕΚΠ(4,7,14)=28

$\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{9}{14}=\frac{1\cdot7}{4\cdot7}+\frac{3\cdot4}{7\cdot4}+\frac{9\cdot2}{14\cdot2}=\frac{7}{28}+\frac{12}{28}+\frac{18}{28}=\frac{7+12+18}{28}=\frac{37}{28}$

2.

Α. $\frac{17}{8}-\frac{9}{8}=\frac{17-9}{8}=\frac{8}{8}=1$

Β. $\frac{32}{15}-\frac{23}{15}-\frac{4}{15}=\frac{32-23-4}{15}=\frac{5}{15}=\frac{5:5}{15:5}=\frac{1}{3}$

Γ. ΕΚΠ(5,6)=30

$\frac{8}{5}-\frac{5}{6}=\frac{8\cdot6}{5\cdot6}-\frac{5\cdot5}{6\cdot5}=\frac{48}{30}-\frac{25}{30}=\frac{48-25}{30}=\frac{23}{30}$

Δ. ΕΚΠ(4,6,8)=24

$\frac{5}{4}-\frac{1}{8}-\frac{4}{6}=\frac{5\cdot6}{4\cdot6}-\frac{1\cdot3}{8\cdot3}-\frac{4\cdot4}{6\cdot4}=\frac{30}{24}-\frac{3}{24}-\frac{16}{24}=\frac{30-3-16}{24}=\frac{11}{24}$

3.

Α. $(4-\frac{5}{3})+(\frac{2}{3}+\frac{1}{6})-(\frac{3^2}{5}-\frac{9}{15})=(4-\frac{5}{3})+(\frac{2}{3}+\frac{1}{6})-(\frac{9}{5}-\frac{9}{15})=$

$=(\frac{4\cdot3}{1\cdot3}-\frac{5}{3})+(\frac{2\cdot2}{3\cdot2}+\frac{1}{6})-(\frac{9\cdot3}{5\cdot3}-\frac{9}{15})=(\frac{12}{3}-\frac{5}{3})+(\frac{4}{6}+\frac{1}{6})-(\frac{27}{15}-\frac{9}{15})=$

$=\frac{12-5}{3}+\frac{4+1}{6}-\frac{27-9}{15}=\frac{7}{3}+\frac{5}{6}-\frac{18}{15}\overset{\text{ΕΚΠ}(3,6,15)=30}{=}\frac{7\cdot10}{3\cdot10}+\frac{5\cdot5}{6\cdot5}-\frac{18\cdot2}{15\cdot2}=\frac{73}{30}+\frac{25}{30}-\frac{36}{30}=$

$\frac{70+25-36}{30}=\frac{59}{30}$

Β. $(2^3-\frac{3^2}{2^3})+(\frac{2\cdot 4^2}{16}-\frac{9}{24})=(8-\frac{9}{8})+(\frac{2\cdot 16}{16}-\frac{9}{24})=(8-\frac{9}{8})+(\frac{32}{16}-\frac{9}{24})=$

$=(\frac{8\cdot 8}{1\cdot 8}-\frac{9}{8})+(\frac{32\cdot 3}{16\cdot 3}-\frac{9\cdot 2}{24\cdot 2})=(\frac{64}{8}-\frac{9}{8})+(\frac{96}{48}-\frac{18}{48})=\frac{64-9}{8}+\frac{96-18}{48}=\frac{55}{8}+\frac{78}{48}=$

$=\frac{55\cdot 6}{8\cdot 6}+\frac{78}{48}=\frac{330}{48}+\frac{78}{48}=\frac{408}{48}=\frac{408:24}{48:24}=\frac{17}{2}$

4. Έστω $\frac{\alpha}{\beta}$ το άγνωστο κλάσμα. Τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{5}=\frac{13}{15}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\frac{13}{15}-\frac{1}{5}=\frac{13}{15}-\frac{1\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{13}{15}-\frac{3}{15}=$

$\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}$

5. Εφόσον τα κλάσματα είναι ομώνυμα και το ένα είναι διπλάσιο του άλλου είναι $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{2\alpha}{\beta}$ και ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{2\alpha}{\beta}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow\frac{\alpha+2\alpha}{\beta}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow\frac{3\alpha}{\beta}=\frac{9}{7}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha=9\Leftrightarrow\alpha=3\\ \beta=7\end{cases}$ Άρα τα κλάσματα είναι $\frac{3}{7}$ και $\frac{6}{7}$

6.

Α. $4\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{1}+\frac{4}{5}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{4}{5}=\frac{20}{5}+\frac{4}{5}=\frac{24}{5}$

Β. $7\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{1}+\frac{1}{12}=\frac{7\cdot 12}{1\cdot 12}+\frac{1}{12}=\frac{84}{12}+\frac{1}{12}=\frac{85}{12}$

Γ. $14\frac{1}{3}=\frac{14}{1}+\frac{1}{3}=\frac{14\cdot 3}{1\cdot 3}+\frac{1}{3}=\frac{42}{3}+\frac{1}{3}=\frac{43}{3}$

Δ. $\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 2+1}{2}=\frac{3\cdot 2}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$

Ε. $\frac{25}{12}=\frac{2\cdot 12+1}{12}=\frac{2\cdot 12}{12}+\frac{1}{12}=2+\frac{1}{12}\,2\frac{1}{12}$

ΣΤ. $\frac{153}{12}=\frac{12\cdot 12}{12}+\frac{9}{12}=12+\frac{9}{12}=12+\frac{9:3}{12:3}=12+\frac{3}{4}=12\frac{3}{4}$

7.

Α. $3\frac{1}{2}+(\frac{4}{5}-\frac{2}{3})+2^2\frac{3}{5}=3\frac{1}{2}+(\frac{4\cdot3}{5\cdot3}-\frac{2\cdot5}{3\cdot5})+2^2\frac{3}{5}=3\frac{1}{2}+(\frac{12}{15}-\frac{10}{15})+2^2\frac{3}{5}=$

$=3\frac{1}{2}+\frac{2}{15}+2^2\frac{3}{5}=3\frac{1}{2}+\frac{2}{15}+4\frac{3}{5}=(\frac{3\cdot2}{1\cdot2}+\frac{1}{2})+\frac{2}{15}+(\frac{20}{5}+\frac{3}{5})=(\frac{6}{2}+\frac{1}{2})+\frac{2}{15}+\frac{23}{5}=$

$=\frac{7}{2}+\frac{2}{15}+\frac{23}{5}=\frac{7\cdot15}{2\cdot15}+\frac{2\cdot2}{15\cdot2}+\frac{23\cdot3}{5\cdot3}=\frac{105}{30}+\frac{4}{30}+\frac{156}{30}=\frac{265}{30}=\frac{265:5}{30:5}=\frac{53}{6}$

Β. $4\frac{1}{5}-3\frac{1}{3}+3^2\frac{3}{10}=4+\frac{1}{5}-(3+\frac{1}{3})+9+\frac{3}{10}=\frac{4}{1}+\frac{1}{5}-(\frac{3}{1}+\frac{1}{3})+\frac{9}{1}+\frac{3}{10}=\frac{20}{5}+\frac{1}{5}-(\frac{9}{3}+\frac{1}{3})+\frac{90}{10}$

$+\frac{3}{10}=\frac{21}{5}-\frac{10}{3}+\frac{93}{10}=\frac{21\cdot6}{5\cdot6}-\frac{10\cdot10}{3\cdot10}+\frac{93\cdot3}{10\cdot3}=\frac{126}{30}-\frac{100}{30}+\frac{279}{30}=\frac{305}{30}=\frac{305:5}{30:5}=\frac{61}{6}$

8. Το σύνολο των εξόδων είναι: $\frac{19}{100}+\frac{1}{50}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{19}{100}+\frac{1}{50}+\frac{3}{5}=\frac{19}{100}+\frac{1\cdot2}{50\cdot2}+\frac{3\cdot20}{5\cdot20}=$

$\frac{19}{100}+\frac{2}{100}+\frac{60}{100}=\frac{81}{100}$

Άρα περισσεύει το $1-\frac{81}{100}=\frac{100}{100}-\frac{81}{100}=\frac{19}{100}$ του τζίρου

2.5

1.

Α. Είναι ο $\frac{12}{21}$ Β. Είναι ο $\frac{2007}{1}=2007$

Γ. Είναι $2^4=16$ άρα ο αντίστροφος είναι ο $\frac{1}{16}$

Δ. Είναι $3\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot4}{4}+\frac{1}{4}=\frac{12}{4}+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$ άρα ο αντίστροφος είναι ο $\frac{4}{13}$

Ε. Είναι $3^2\frac{2}{3}=9\frac{2}{3}=9+\frac{2}{3}=\frac{27}{3}+\frac{2}{3}=\frac{29}{3}$ άρα ο αντίστροφος είναι ο $\frac{3}{29}$

2.

Α. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+2\frac{3}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+2+\frac{3}{12}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2\cdot12}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{6}+\frac{24}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{6}+\frac{27}{12}=\frac{1\cdot2}{6\cdot2}+\frac{27}{12}=$

$=\frac{2}{12}+\frac{27}{12}=\frac{29}{12}$

Β. $(\frac{7}{15}+\frac{7}{30})10-5\frac{1}{5}=(\frac{7\cdot 2}{15\cdot 2}+\frac{7}{30})10-(5+\frac{1}{5})=(\frac{14}{30}+\frac{7}{30})10-(\frac{5\cdot 5}{5}+\frac{1}{5})=$

$=\frac{21}{30}\cdot 10-(\frac{25}{5}+\frac{1}{5})=\frac{21}{30}\cdot 10-\frac{26}{5}=\frac{210}{30}-\frac{26}{5}=\frac{21}{3}-\frac{26}{5}=\frac{21\cdot 5}{3\cdot 5}-\frac{26\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{105}{15}-\frac{78}{15}=\frac{27}{15}$

Γ. $(\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3}+2\frac{1}{4}\cdot 2)+(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2})=[\frac{1}{8}+(2+\frac{1}{4})2]+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+2\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+4+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}+$

$\frac{4\cdot 8}{8}+\frac{2\cdot 2}{4\cdot 2}+\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}+\frac{32}{8}+\frac{4}{8}+\frac{6}{8}=\frac{43}{8}$

3.

Α. Είναι: $\frac{3}{4}\cdot 1000=\frac{3000}{4}=750$ γραμμάρια

Β. Είναι: $\frac{4}{5}\cdot 1000=\frac{4000}{5}=800$ γραμμάρια

Γ. Είναι: $\frac{5}{8}\cdot 2\cdot 1000=\frac{10000}{8}=1250$ γραμμάρια

Δ. Είναι: $\frac{9}{10}\cdot 5\cdot 1000=\frac{45000}{10}=4500$ γραμμάρια

4.

Α. Είναι $\frac{22}{330}=\frac{22:22}{330:22}=\frac{1}{15}$ του κουτιού

Β. Είναι $\frac{44}{330}=\frac{44:22}{330:22}=\frac{2}{15}$ του κουτιού

Γ. Είναι $\frac{110}{330}=\frac{110:110}{330:110}=\frac{1}{3}$ του κουτιού

Δ. Είναι $\frac{121}{330}=\frac{121:11}{330:11}=\frac{11}{30}$ του κουτιού

Ε. Είναι $\frac{440}{330}=\frac{440:110}{330:110}=\frac{4}{3}$ του κουτιού

5.

Είναι $1\frac{4}{100}=1+\frac{4}{100}=\frac{100}{100}+\frac{4}{100}=\frac{104}{100}$ € το λίτρο

Α. Το $\frac{1}{3}$ κοστίζει $45\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{100}=\frac{45\cdot1\cdot4}{3\cdot100}=\frac{4680}{300}=\frac{4680:3}{300:3}=\frac{1560}{100}=\frac{1500+60}{100}=\frac{1500}{100}+\frac{60}{100}=15+\frac{60}{100}=15\frac{60}{100}$ €

Β. Τα $\frac{2}{5}$ κοστίζουν $\frac{2}{5}\cdot45\cdot\frac{104}{100}=\frac{2\cdot4\cdot104}{5\cdot100}=\frac{9360}{500}=\frac{9360:5}{500:5}=\frac{1872}{100}=$

$=\frac{1800}{100}+\frac{72}{100}=18+\frac{72}{100}=18\frac{72}{100}$ €

Γ. Τα $\frac{7}{9}$ κοστίζουν $\frac{7}{9}\cdot45\cdot\frac{4}{100}=\frac{37260}{900}=\frac{37260:9}{900:9}=\frac{3640}{100}=\frac{3600}{100}+\frac{40}{100}=36\frac{40}{100}$ €

6.

Α. Με λεωφορείο πηγαίνουν $150\cdot\frac{1}{3}=\frac{150}{3}=50$ υπάλληλοι

Β. Με μετρό πηγαίνουν $150\cdot\frac{2}{5}=\frac{300}{5}=60$ υπάλληλοι

Οπότε με ΙΧ πηγαίνουν οι υπόλοιποι, δηλαδή 150-50-60=40 υπάλληλοι. Είναι το $\frac{40}{150}=\frac{4}{15}$ του συνόλου των υπαλλήλων

7.

•	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{11}$	1	$\frac{8}{7}$
$\frac{5}{4}$	1	$\frac{30}{44}=\frac{15}{22}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{40}{28}=\frac{10}{7}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{44}{30}=\frac{22}{15}$	1	$\frac{11}{6}$	$\frac{88}{42}=\frac{44}{21}$
1	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{11}$	1	$\frac{8}{7}$
$\frac{7}{8}$	$\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$	$\frac{42}{88}=\frac{21}{44}$	$\frac{7}{8}$	1

2.6

1.

Α. $\frac{5}{3}:\frac{1}{4}=\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{1}=\frac{20}{3}$

Β. $12:\frac{4}{7}=\frac{12}{1}\cdot\frac{7}{4}=\frac{84}{4}=21$

Γ. $\frac{28}{7}:8=\frac{28}{7}\cdot\frac{1}{8}=\frac{28}{56}=\frac{28:28}{56:28}=\frac{1}{2}$

Δ. $2\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=(2+\frac{2}{3}):\frac{1}{3}=(\frac{2\cdot3}{3\cdot3}+\frac{2}{3}):\frac{1}{3}=(\frac{6}{3}+\frac{2}{3}):\frac{1}{3}=\frac{8}{3}:\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{8}{1}=8$

Ε. $3^2\frac{1}{9}:4^2\frac{5}{12}=9\frac{1}{9}:16\frac{5}{12}=(9+\frac{1}{9}):(16+\frac{5}{12})=(\frac{81}{9}+\frac{1}{9}):(\frac{192}{12}+\frac{5}{12})=\frac{82}{9}:\frac{197}{15}=\frac{82}{9}\cdot\frac{15}{197}=$

$\frac{984}{1773}=\frac{984:3}{1773:3}=\frac{328}{591}$

2.

Α. Είναι $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{21}{8}}=\frac{12\cdot8}{5\cdot21}=\frac{96}{105}$ ή $\frac{\frac{12}{5}}{\frac{21}{8}}=\frac{12}{5}:\frac{21}{8}=\frac{12}{5}\cdot\frac{8}{21}=\frac{96}{105}$

Β. $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{7}{\frac{1}{3}}=\frac{7\cdot4}{1\cdot3}=\frac{28}{3}$ ή $\frac{7}{1}:\frac{3}{4}=\frac{7}{1}\cdot\frac{4}{3}=\frac{28}{3}$

Γ. $\frac{\frac{41}{19}}{4}=\frac{\frac{41}{19}}{\frac{4}{1}}=\frac{41\cdot1}{19\cdot4}=\frac{41}{76}$ ή $\frac{\frac{41}{19}}{4}=\frac{\frac{41}{19}}{\frac{4}{1}}=\frac{41}{19}:\frac{4}{1}=\frac{41}{19}\cdot\frac{1}{4}=\frac{41}{76}$

3.

Α. $\frac{\frac{2}{5}+\frac{2}{7}}{3\frac{3}{8}}=\frac{\frac{2\cdot7}{5\cdot7}+\frac{2\cdot5}{7\cdot5}}{3+\frac{3}{8}}=\frac{\frac{14}{35}+\frac{10}{35}}{\frac{24}{8}+\frac{3}{8}}=\frac{\frac{24}{35}}{\frac{27}{8}}=\frac{24\cdot8}{35\cdot27}=\frac{192}{945}=\frac{192:3}{945:3}=\frac{64}{315}$

Β. $\dfrac{4^2+3\frac{1}{4}}{3^2+\frac{2}{7}}=\dfrac{16+3+\frac{1}{4}}{9+\frac{2}{7}}=\dfrac{19+\frac{1}{4}}{\frac{9\cdot 7}{7}+\frac{2}{7}}=\dfrac{\frac{19\cdot 4}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{63}{7}+\frac{2}{7}}=\dfrac{\frac{77}{4}}{\frac{65}{7}}=\dfrac{77\cdot 7}{4\cdot 65}=\dfrac{539}{260}$

Γ. $\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}}{4^2\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{8}{45}}{16\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{\frac{8}{45}}{\frac{16}{5}}=\dfrac{8\cdot 5}{45\cdot 16}=\dfrac{40}{720}=\dfrac{40:40}{720:40}=\dfrac{1}{18}$

4.

Α. $(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}):\frac{1}{2}(4\text{-}2\frac{2}{3})=(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}):\frac{1}{2}(4\text{-}2+\frac{2}{3})=(\frac{15}{20}+\frac{8}{20}):\frac{1}{2}(2+\frac{2}{3})=$

$=\dfrac{23}{20}:\dfrac{1}{2}(\dfrac{2\cdot 3}{3}+\dfrac{2}{3})=\dfrac{23}{20}:\dfrac{1}{2}(\dfrac{6}{3}+\dfrac{2}{3})=\dfrac{23}{20}:\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{23}{20}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{368}{60}=\dfrac{368:4}{60:4}=\dfrac{92}{15}$

Β. $\dfrac{1}{2}:(2^2\dfrac{1}{7}:\dfrac{1}{3})\cdot 4:\dfrac{2^2}{3^3}=\dfrac{1}{2}:(4\dfrac{1}{7}:\dfrac{1}{3})\cdot 4:\dfrac{4}{27}=\dfrac{1}{2}:[(4+\dfrac{1}{7}):\dfrac{1}{3}]\cdot 4:\dfrac{4}{27}=$

$=\dfrac{1}{2}:[(\dfrac{28}{7}+\dfrac{1}{7}):\dfrac{1}{3}]\cdot 4:\dfrac{4}{27}=\dfrac{1}{2}:(\dfrac{29}{7}:\dfrac{1}{3})\cdot 4:\dfrac{4}{27}=\dfrac{1}{2}:(\dfrac{29}{7}\cdot\dfrac{3}{1})\cdot 4:\dfrac{4}{27}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{87}{7}\cdot 4:\dfrac{4}{27}=$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7}{87}\cdot 4\cdot\dfrac{27}{4}=\dfrac{7}{174}\cdot 27=\dfrac{189}{174}$

Γ. $\dfrac{7}{3}\cdot(\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{4^2}):(\dfrac{1}{3}\cdot 1\dfrac{7}{9})=\dfrac{7}{3}\cdot(\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{1}{16}):(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1\cdot 9+7}{9})=\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{2}{112}:(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{16}{9})=\dfrac{14}{336}:\dfrac{16}{27}=$

$=\dfrac{14}{336}\cdot\dfrac{27}{16}=\dfrac{378}{5376}=\dfrac{378:6}{5376:6}=\dfrac{63}{896}$

Δ. $(2:\dfrac{2}{3}):(\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{2})=(2\cdot\dfrac{3}{2}):(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3})=3:\dfrac{1}{3}=3\cdot\dfrac{3}{1}=3\cdot 3=9$

5.

:	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{8}{9}$
$\frac{3}{5}$	1	$\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{40}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{27}{32}$
1	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{9}{8}$
$\frac{8}{9}$	$\frac{40}{27}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{8}{9}$	1

6. Τα λίτρα του ρεζερβουάρ προκύπτουν από την διαίρεση του ποσού που πληρώσαμε διά την τιμή του ενός λίτρου. Επομένως είναι:

$$47\frac{1}{4}:1\frac{1}{20}=(47+\frac{1}{4}):(1+\frac{1}{20})=\frac{47\cdot 4+1}{4}:\frac{1\cdot 20+1}{20}=\frac{189}{4}:\frac{21}{20}=\frac{189}{4}\cdot\frac{20}{21}=\frac{3780}{84}=$$

$=84$ λίτρα

7.

Α. Έστω $\frac{\alpha}{\beta}$ το ζητούμενο κλάσμα. Τότε $\frac{2}{3}:\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow\frac{2\beta}{3\alpha}=\frac{4}{9}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}2\beta=4\\3\alpha=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=2\\\alpha=3\end{cases}$ Άρα το κλάσμα είναι το $\frac{3}{2}$

Β. Ομοίως $\frac{2}{3}:\frac{\gamma}{\delta}=4\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=4+\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{2\delta}{3\gamma}=\frac{4\cdot 3+2}{3}\Leftrightarrow\frac{2\delta}{3\gamma}=\frac{14}{3}$. Άρα για δ=7 και γ=1 $\frac{2\cdot 7}{3\cdot 1}=\frac{14}{3}$ άρα το κλάσμα είναι το $\frac{1}{7}$

8.

Α. Ο δεύτερος αδελφός έδωσε τα μισά από τον πρώτο άρα το κλάσμα του συνολικού ποσού που του αντιστοιχεί είναι το κλάσμα του πρώτου διά 2:

$\frac{4}{7}:2=\frac{4}{7}:\frac{2}{1}=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cancel{4}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{2}{7}$ του συνολικού ποσού

Ομοίως για τον τρίτο αδελφό είναι:

$\frac{4}{7}:4=\frac{4}{7}:\frac{4}{1}=\frac{\cancel{4}}{7}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}=\frac{1}{7}$ του συνολικού ποσού

Β. Είναι $\frac{4}{7}\cdot 1400=\frac{5600}{7}=800$ €, $\frac{2}{7}\cdot 1400=\frac{2800}{7}=400$ €, $\frac{1}{7}\cdot 1400=200$ €

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. Θα πρέπει τα χιαστί γινόμενα να είναι ίσα, δηλαδή αδ=βγ

Β. Γνήσιο ονομάζεται το κλάσμα με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή, δηλαδή αν

$\frac{\alpha}{\beta}$ το κλάσμα, τότε α<β

Καταχρηστικό ονομάζεται το κλάσμα με αριθμητή μεγαλύτερο του παρονομαστή, δηλαδή αν $\frac{\alpha}{\beta}$ το κλάσμα τότε α>β

Γ. Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα με τη βοήθεια του ΕΚΠ των παρονομαστών και στη συνέχεια προσθέτουμε τους αριθμητές

Δ. Σύνθετο ονομάζεται το κλάσμα του οποίου ο ένας όρος είναι και αυτός κλάσμα

ΘΕΜΑ 2

Α. $\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}+(\frac{1}{5}:\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}})=\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}+(\frac{1}{5}:\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3})=\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}+(\frac{1}{5}:\frac{14}{15})=\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}+(\frac{1}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{15}3}{14})=$

$=\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}:(2+\frac{2}{3})+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}:\frac{2\cdot 3+2}{3}+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}:\frac{8}{3}+\frac{3}{14}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{14}=\frac{3}{16}+\frac{3}{14}$

ΕΚΠ(14,16)=112

$=\frac{3\cdot 7}{16\cdot 7}+\frac{3\cdot 8}{14\cdot 8}=\frac{21}{112}+\frac{24}{112}=\frac{45}{112}$

Β. $(\frac{1}{\frac{2}{9}}+2)(2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3})=(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{9}}+2)[(2+\frac{1}{3})+(1+\frac{2}{3})]=(\frac{1\cdot 9}{1\cdot 2}+2)[(\frac{3\cdot 2}{3}+\frac{1}{3})+(\frac{1\cdot 3}{3}+\frac{2}{3})]=$

$=(\frac{9}{2}+2)(\frac{7}{3}+\frac{5}{3})=(\frac{9}{2}+\frac{18}{2})\frac{12}{3}=\frac{27}{2}\cdot 4=\frac{108}{2}=54$

ΘΕΜΑ 3

Α. $\chi_1=\alpha+\beta-\gamma=\alpha+\beta+2\beta-\gamma=(\alpha+\beta)+(2\beta-\gamma)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$

$\chi_2=2\alpha+8\beta-3\gamma=2\alpha+2\beta+6\beta-3\gamma=2(\alpha+\beta)+3(2\beta-\gamma)=2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=$

$\frac{16}{12}+\frac{9}{12}=\frac{25}{12}$

Β. Οι χ_1, χ_2 είναι ομώνυμα κλάσματα, άρα συγκρίνουμε τους αριθμητές. Είναι 25>12

άρα $\frac{25}{12}>\frac{11}{12}\Rightarrow\chi_2>\chi_1$

ΘΕΜΑ 4

Α. Είναι $12\cdot\frac{3}{5}=\frac{36}{5}=\frac{35}{5}+\frac{1}{5}=7+\frac{1}{5}=7\frac{1}{5}$ λίτρα μέλι

Β. Είναι $7\frac{1}{5}=\frac{36}{5}$ λίτρα διά την χωρητικότητα του κάθε βάζου δηλαδή $\frac{36}{5}:\frac{9}{25}=\frac{\cancel{36}4}{\cancel{5}}\cdot\frac{25}{\cancel{9}}=4\cdot 5=20$ βάζα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1

1.

Α. $\frac{24}{10}=24:10=2,4$ Β. $\frac{142}{1000}=142:1000=0,142$

Γ. $\frac{2}{100}=0,02$ Δ. $\frac{2007}{10^4}=\frac{2007}{10000}=0,2007$

Ε. $\frac{10^3}{10^5}=\frac{\cancel{1000}}{100\cancel{000}}=\frac{1}{100}=0,01$

2.

Α. 14:70=0,2 Β. 26:4=6,5 Γ. $\frac{121}{200}=0,605$ Δ. 72:90=0,8
Ε. 36:200=0,18

3.

Α. $102,4=\frac{1024}{10}$ Β. $77,28=\frac{7728}{100}$ Γ. $102,391=\frac{102391}{1000}$ Δ. $0,027=\frac{27}{1000}$

4.

Α. Εφόσον το ψηφίο των εκατοστών είναι το 7>5 τότε κατά τη στρογγυλοποίηση στην δεκάδα το ψηφίο των δεκάτων αυξάνεται κατά 1, άρα αρχικά ήταν το 2, επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι 4, 27

Β. Είναι $4,27=\frac{427}{100}$

5.
Α. 1,001<1,01<1,1<11,001<11,01<11,1
Β. 99,009>9,99>9,90>9,09

6.
Στρογγυλοποίηση στο δέκατο:
Α. 13,5555=13,6Β. 2,4242=2,4 Γ. 3,1717=3,2 Δ. 6,2549= 6,3
Στρογγυλοποίηση στο εκατοστό:
Α. 13,5555=13,56 Β. 2,4242=2,42 Γ. 3,1717=3,17 Δ. 6,2549=6,25
Στρογγυλοποίηση στο χιλιοστό:
Α. 13,5555=13,556 Β. 2,4242=2,424 Γ. 3,1717=3,172Δ. 6,2549=6,255

7.

3.2

1.
Α. $22,45 \cdot 0,2=4,490=4,49$ Β. $12,26 \cdot 20=245,2$
Γ. $9,55 \cdot 10^2=1,55 \cdot 100=155$ Δ. $11,05 \cdot 0,01=0,1105$

2.
Α. 122,48:10=12,248 Β. 33,4:0,1=334
Γ. 12,25:7,5=1,633 Δ. 9,6:0,3=32

3.
Α. $3,1^2=3,1 \cdot 3,1=9,61$ Β. $0,4^3=0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4=0,064$
Γ. $1,25^4=1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25=2,44140625$
Δ. $0,1^5=0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1=0,00001$

4.
Α. $12,52 \cdot 0,1+4,02 \cdot 10-1,01:0,1+0,9^2=12,52 \cdot 0,1+4,02 \cdot 10-1,01:0,1+0,81=$
$=1,252+40,2-10,1+0,81=32,162$
Β. $(14,4:0,5+7,12 \cdot 10)^2:(10,56:2,2+5,25:1,25)^2=(28,8+71,2):(4,8+4,2)=100^2:102=$
$=10000:100=100$

Γ. $(\frac{3}{8}+1,7):(2\frac{1}{2})^2+(\frac{4}{5}\cdot 0,8+1,5\cdot 1,8)^3=(\frac{3}{8}+1,7):(\frac{5}{2}\cdot 2,5)^2+(\frac{4}{5}\cdot 0,8+1,5\cdot 1,8)^3=$

$=(0,375+1,7):1^2+(1+2,7)^3=2,075+3,7^3=2,075+50,653=52,728$

5.

Α. $1,1^2=1,21$ $1,1^3=1,331$ $1,1^4=1,4641$ $1,1<1,1^2<1,1^3<1,1^4$

Β. $2,2^2=4,84$ $2,2^3=10,648$ $2,2^4=23,4256$ $2,2<2,2^2<2,2^3<2,2^4$

Γ. $0,9^2=0,81$ $0,9^3=0,729$ $0,9^4=0,6561$ $0,9>0,9^2>0,9^3<0,9^4$

Δ. $0,1^2=0,01$ $0,1^3=0,001$ $0,1^4=0,0001$ $0,1>0,1^2>0,1^3>0,1^4$

6.

Συνολικά έχουμε $9\cdot 1,5=13,5$ λίτρα βενζίνης. Το κόστος είναι $13,5\cdot 0,97=13,095$ €. Επειδή το € έχει υποδιαιρέσεις εκατοστών κάνουμε προσέγγιση στα εκατοστά: $13,095=13,10=13,1$ €

7.

Α. $Π=α+β+α+β=2α+2β==2(2β)+2β=4β+2β=6β=9$ m άρα $β=9:6=1,5$ m και $α=2β=2\cdot 1,5=3$ m

Β. $E=αβ=1,5\cdot 3=4,5$ cm^2

3.4

1.

Α. $4000=4\cdot 10^3$ Β. $452000=4.52\cdot 10^5$ Γ. $6250000=6,25\cdot 10^6$

Δ. $1234567=1,234567\cdot 10^6$ Ε. $150=1,5\cdot 10^2$

2.

Α. $8,025\cdot 10^6=8025000$ Β. $4,2\cdot 10^4=42000$ Γ. $6,632\cdot 10^5=663200$

Δ. $5,55\cdot 10^2=555$

3.

Οι αριθμοί Γ, Ε δεν είναι σε τυποποιημένη μορφή γιατί $12,4>10$ και $0,5<1$ άρα $12,4\cdot 10^5=$ $=1,24\cdot 10^6$ και $0,5\cdot 10^4=5\cdot 10^3$

4.

Είναι $0,3\cdot 10^7=3000000$, $3\cdot 10^6=3000000$, $30\cdot 10^5=3000000$

Πρόκειται για ίσους αριθμούς. Η τυποποιημένη έκφραση είναι το γινόμενο $3\cdot 10^6$ γιατί $0,3<1$ και $30>10$

3.5

1.

km	m	dm	cm	mm
1,44	1.440	14.400	144.00	1.440.000
0,0522	52,2	522	5.220	52.200
0,025	25	250	2.500	25.000
0,00125	1,25	12,5	125	1250
0,000036	0,036	0,36	3,6	36

2.

m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	ml
0,02	20	20.000	20.000.000	20	20.000
0,0045	4,5	4.500	4.500.000	4,5	4.500
0,0000622	0,0622	62,2	62.200	0,0622	62,2
0,000000044	0,000044	0,044	44	0,000044	0,044
0,25	250	250.000	250.000.000	250	250.000
0,00065	0,65	650	650.000	0,65	650

3.

Α. $\alpha=0,08\ m=0,8\ dm$ άρα $E_{τετ}=\alpha^2=(0,8\ dm)^2=0.64\ dm^2$, $V=\alpha^3=(0.8\ dm)^3=0.512\ dm^3$

Β. $\alpha=0,08\ m=8\ cm$ άρα $E_{τετ}=(8cm)^2=64cm^2$, $V=(8cm)^3=512cm^3$

Γ. $\alpha=0,08m=80mm$ άρα $E_{τετ}=(80mm)^2=6400mm^2$, $V=(80mm)^3=512000mm^3$

4.

Είναι $\alpha=0,5km=500m$, $\beta=400m$, $\gamma=6000dm=600m$

Περίμετρος τετραγώνου $\Pi_1=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha=4\alpha=4\cdot 500=2000m$

Περίμετρος παραλληλογράμμου $\Pi_2=\beta+\gamma+\beta+\gamma=2\beta+2\gamma=2(\beta+\gamma)=2(400+600)=2\cdot 1000=2000m$

Τα δύο σχήματα έχουν ίσες περιμέτρους

$E_1=\alpha^2=(500m)^2=250000m^2$

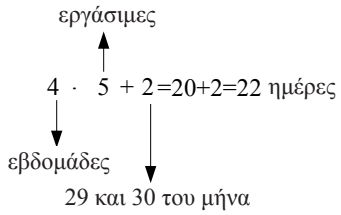
$E_2=\alpha\beta=400\cdot 600=240000m^2$. Άρα $E_1>E_2$

5.
Μετατρέπουμε όλες τις μονάδες στην ίδια υποδιαίρεση, άρα α=1,2m, β=200cm=2m, γ=8dm=0.8m. Ο όγκος της δεξαμενής είναι: $V=\alpha\beta\gamma=1,2\cdot 2\cdot 0,8=1,92m^3=1920$ L
Η ποσότητα του πετρελαίου που χρειάζεται είναι 1920 L και κοστίζει $1920\cdot 0,62=1190,4$ €

6.
Α. Το οικόπεδο κοστίζει 120000 € άρα το εμβαδόν του σε m^2 είναι:
$120000:160=750\ m^2=0.75$ στρ.

Β. Αν η άλλη πλευρά είναι μήκους α μέτρων τότε: $25\alpha=750 \Leftrightarrow \alpha=750:25=30$m
Εφόσον το οικόπεδο είναι ορθογώνιο τότε η περίμετρος είναι Π=25+30+25+30=110m. Άρα θα χρειαστούμε 110m σύρματος για την περίφραξη του οικοπέδου

7.
Ο υπάλληλος εργάζεται 15-8=7 ώρες ημερησίως. Εφόσον η $1^η$ του μήνα είναι Δευτέρα, μετά από 4 εβδομάδες θα είναι πάλι Δευτέρα 29 του μηνός. Την επομένη (Τρίτη) θα έχει 30 και θα είναι η τελευταία μέρα του μήνα:



Άρα εφόσον την ημέρα εργάστηκε 7 ώρες τότε $22\cdot 7=154$ ώρες$=154\cdot 60=9240$ λεπτά$=9240\cdot 60=554400$ δευτερόλεπτα

8.
Η διαφορά των μαζών των ανθρώπων είναι 80-65=15 κιλά
Αν και οι 6 ζύγιζαν 80 κιλά τότε $6\cdot 80=480$ κιλά. Η μέγιστη μάζα του ανελκυστήρα είναι 0,45 τόνοι=450 κιλά άρα 480-450=30 κιλά$=2\cdot 15$ κιλά. Άρα οι 2 πρέπει να ζυγίζουν 15 κιλά λιγότερο, δηλαδή 65 κιλά. Συνεπώς 4 άνθρωποι μάζας 80 κιλών και 2 μάζας 65 κιλών μπορούν να μετακινηθούν με τον ανελκυστήρα

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. $\frac{465}{1000}=0,465$, $\frac{252}{200}=1,26$, $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{15}{18}}=\frac{3\cdot 18}{4\cdot 15}=\frac{54}{60}=0,9$

$3\frac{21}{30}=\frac{3\cdot 30+21}{30}=\frac{121}{30}=41,03$

Β. $0,76=\frac{76}{100}=\frac{76:4}{100:4}=\frac{19}{25}$ $1,1=\frac{11}{10}$ $24,45=\frac{2445}{100}=\frac{2445:5}{100:5}=\frac{489}{20}$

$0,033=\frac{33}{1000}$

ΘΕΜΑ 2

Α. $1,4^4+1,6^3\cdot 2,1^2=3,8415+4,016\cdot 4,41=3,8416+18,06336\simeq 21,9$

Β. $(1,4+2,7)^2:+(1,3-0,7)^3=3,1^2:0,6^3=9,61:0,216\simeq 0,04$

Γ. $0,01\cdot 2007\cdot 10^2-4012\cdot 0,5=0,01\cdot 2007\cdot 100-2006=2007-2006=1$

Δ. $(2,8\cdot 2,4:1,4\cdot 1,2)^3:(1,25:0,5)^2=(6,72:1,68)^3:2,5^2=4^2:6,25=16:6,25=2,56$

ΘΕΜΑ 3

Α. $450000=4,5\cdot 10^5$ $1250000=1,25\cdot 10^6$ $12600000000=1,26\cdot 10^{10}$

Β. Είναι $4,251=4,25\cdot 10^6$ g

ΘΕΜΑ 4

Α. Ο συνολικός όγκος είναι $0,75m^3=750$ L. Για να μείνουν 300 L αφαιρούμε 750-300=350 L τα οποία είναι $\frac{350}{700}=\frac{1}{9}$ του δοχείου

Β. Ο όγκος του δοχείου είναι το γινόμενο του εμβαδού της βάσης (Ε) επί το ύψος, άρα Ε· ύψος=όγκος ή $Ε\cdot 1,5=0,75$ ή $Ε=0,75:1,5=0,5$ m^2

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.1

1.

Α. Αντικαθιστώντας:

$4\cdot\frac{1}{2}+5=17 \Leftrightarrow 2+5=17 \Leftrightarrow 7=17$ το $\frac{1}{2}$ δεν είναι λύση

$4\cdot 1+5=17 \Leftrightarrow 4+5=17 \Leftrightarrow 9=17$ το 1 δεν είναι λύση

$4\cdot 2+5=17 \Leftrightarrow 8+5=17 \Leftrightarrow 13=17$ το 2 δεν είναι λύση

$4\cdot 3+5=17 \Leftrightarrow 12+5=17 \Leftrightarrow 17=17$ το 3 είναι λύση

Β. Αντικαθιστώντας:

$2+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=10-4\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2}+1=10-2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3+\frac{1}{2}=8-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{2}=\frac{15}{2}$ το $\frac{1}{2}$

δεν είναι λύση

$2+1+2\cdot 1=10-4\cdot 1-1 \Leftrightarrow 2+1+2=10-4-1 \Leftrightarrow 5=5$ το 1 είναι λύση

$2+2+2\cdot 2=10-4\cdot 2-2 \Leftrightarrow 2+2+4=10-8-2 \Leftrightarrow 8=0$ το 2 δεν είναι λύση

$2+3+2\cdot 3=10-4\cdot 3-2 \Leftrightarrow 2+3+6=10-12-2 \Leftrightarrow 11=-4$ το 3 δεν είναι λύση

Γ. Αντικαθιστώντας:

$4\cdot\frac{1}{2}+2=8\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2+2=4 \Leftrightarrow 4=4$ το $\frac{1}{2}$ είναι λύση

$4\cdot 1+2=8\cdot 1 \Leftrightarrow 4+2=8 \Leftrightarrow 6=8$ το 1 δεν είναι λύση

$4\cdot 2+2=8\cdot 2 \Leftrightarrow 8+2=16 \Leftrightarrow 10=16$ το 2 δεν είναι λύση

$4\cdot 3+2=8\cdot 3 \Leftrightarrow 12+2=24 \Leftrightarrow 14=24$ το 3 δεν είναι λύση

Δ. Αντικαθιστώντας:

$5\cdot\frac{1}{2}+6=6\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2}+6=3 \Leftrightarrow \frac{17}{2}=3$ το $\frac{1}{2}$ δεν είναι λύση

$5\cdot 1+6=6\cdot 1 \Leftrightarrow 5+6=6 \Leftrightarrow 11=6$ το 1 δεν είναι λύση

$5\cdot 2+6=6\cdot 2 \Leftrightarrow 10+6=12 \Leftrightarrow 16=12$ το 2 δεν είναι λύση

$5\cdot 3+6=6\cdot 3 \Leftrightarrow 15+6=18 \Leftrightarrow 21=18$ το 3 δεν είναι λύση

2.

Α. $\chi-1=\frac{\div}{2}$ Β. $5\chi+2=6\chi-2$ Γ. $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\chi)=12$

3.

Α. Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 ισούται με 18.

Β. Το μισό ενός αριθμού αυξημένο κατά $\frac{1}{2}$ ισούται με τον αριθμό μειωμένο κατά 1.

Γ. Το διπλάσιο του αθροίσματος ενός αριθμού με το 4 ισούται με το τετραπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 2.

4.

Α. $2\chi+5=23$. Έστω $y=2\chi$, οπότε $y+5=23 \Leftrightarrow y=23-5 \Leftrightarrow y=18$ δηλαδή $2\chi=18 \Leftrightarrow \chi=18:2 \Leftrightarrow \chi=9$

Β. $15-5\chi=6\chi+4\chi \Leftrightarrow 15=-5\chi-6\chi-4\chi=-15 \Leftrightarrow -15\chi=-15 \Leftrightarrow \chi=-15:(-15) \Leftrightarrow \chi=1$

Γ. $20+\chi=10+\chi-10 \Leftrightarrow \chi-\chi=-20+10-10 \Leftrightarrow 0\chi=20$ αδύνατη

Δ. $\frac{3x+2}{3}=5=x+\frac{17}{3} \Leftrightarrow \frac{3x+2}{3}+\frac{15}{3}=\frac{3x}{3} \Leftrightarrow \frac{3x+2+15}{3}=\frac{3x+17}{3} \Leftrightarrow$

$\frac{3x+17}{3}=\frac{3x+17}{3}$ ταυτότητα

Ε. $\frac{4}{2+x}+8=3^2 \Leftrightarrow \frac{4}{2+x}+8=9 \Leftrightarrow \frac{4}{2+x}=9-8 \Leftrightarrow \frac{4}{2+x}=1 \Leftrightarrow (2+x)\times 1=4 \Leftrightarrow 2+x=4 \Leftrightarrow$

$x=4-2 \Leftrightarrow x=4$

ΣΤ. $\frac{\frac{4}{x}}{\frac{5}{2}}=0,8 \Leftrightarrow \frac{4\bullet 2}{5\bullet x}=0,8 \Leftrightarrow \frac{8}{5x}=0,8 \Leftrightarrow 0,8\bullet 5x=8 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=8:4 \Leftrightarrow x=2$

5.

Α. για $\chi=0$ $20:5\cdot 0$ Δεν ορίζεται, το 0 δεν είναι λύση
για $\chi=1$ $20:5\cdot 1=20:5=4$ το 1 είναι λύση
για $\chi=2$ $20:5\cdot 2=20:10=2$ το 2 είναι λύση
για $\chi=3$ $20:5\cdot 3=20:15=1,33$ το 3 δεν είναι λύση
για $\chi=4$ $20:5\cdot 4=20:20=1$ το 4 είναι λύση
για $\chi>4$ το $5\chi>20$ άρα το $20:5\chi<1$. Άρα οι λύσεις είναι 1, 2, 4

Β. για $\chi=0$ $\alpha+0=4 \Leftrightarrow \alpha=4$ το 0 είναι λύση
για $\chi=1$ $\alpha+1=4 \Leftrightarrow \alpha=3$ το 1 είναι λύση
για $\chi=2$ $\alpha+2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ το 2 είναι λύση
για $\chi=3$ $\alpha+3=4 \Leftrightarrow \alpha=1$ το 3 είναι λύση
για $\chi=4$ $\alpha+3=4 \Leftrightarrow \alpha=0$ το 4 είναι λύση
για $\chi>4$ το α παίρνει αρνητικές τιμές. Άρα οι λύσεις είναι 0, 1, 2, 3, 4

6.

Έστω χ το μήκος του ξύλου. Αν α η μία πλευρά του παραλληλογράμμου και β η άλλη τότε
Α. $\alpha=\chi+1$ και $\beta=\chi-2$
Β. $\Pi=2(\alpha+\beta)=2(\chi+1+\chi-2)=2(2\chi-1)=4\chi-2$
Γ. Για $\chi=10$, $\Pi=4\cdot 10-2=40-2=38$
Δ. $4\chi-2=30$. Έστω $4\chi=y$ τότε $y-2=30 \Leftrightarrow y=30+2 \Leftrightarrow y=32 \Leftrightarrow 4\chi=32 \Leftrightarrow \chi=32:4 \Leftrightarrow \chi=8$

4.2

1. Έστω χ η ηλικία του Γιάννη όταν προσελήφθη. Τότε $\chi+32=65 \Leftrightarrow \chi=65-32 \Leftrightarrow \chi=33$

2. Έστω ν ο πρώτος φυσικός αριθμός. Τότε ο δεύτερος είναι $\nu+1$ και ο τρίτος $\nu+2$. Είναι:
$3(\nu+\nu+1+\nu+2)=6(\nu+\nu+1) \Leftrightarrow 3(3\nu+3)=6(2\nu+6) \Leftrightarrow 9\nu+9=12\nu+6 \Leftrightarrow 9\nu-12\nu=6-9 \Leftrightarrow -3\nu=-3 \Leftrightarrow \nu=1$
Άρα οι αριθμοί είναι οι 1, 2, 3
Επαληθεύοντας: $3(1+2+3)=6(1+2) \Leftrightarrow 3\cdot 6=6\cdot 3 \Leftrightarrow 18=18$

3. Έστω χ ο αριθμός. Τότε $\frac{1}{2}\chi+\frac{1}{3}\chi=\chi-2 \Leftrightarrow \frac{3\chi+2\chi}{6}=\chi-2 \Leftrightarrow \frac{5\chi}{6}=\chi-2 \Leftrightarrow 5\chi=6(\chi-2)$
$\Leftrightarrow 5\chi=6\chi-12 \Leftrightarrow 5\chi-6\chi=-12 \Leftrightarrow -\chi=-12 \Leftrightarrow \chi=12$
Επαληθεύοντας: $\frac{1}{2}\cdot 12+\frac{1}{3}\cdot 12=12-2 \Leftrightarrow 6+4=10 \Leftrightarrow 10=10$

4. Έστω χ το βάρος του τούβλου. Τότε: $\chi=1+\frac{1}{2}\chi \Leftrightarrow \chi-\frac{1}{2}\chi=1 \Leftrightarrow \frac{2\chi}{2}-\frac{1}{2}\chi=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\chi=1$
$\Leftrightarrow \chi=2\cdot 1 \Leftrightarrow \chi=2$

5. Έστω χ ο αριθμός των μήλων. Τότε τα πορτοκάλια είναι $20-\chi$ και
$0,2\chi+0,15(20-\chi)=3,6 \Leftrightarrow 0,2\chi+3-0,15\chi=3,6 \Leftrightarrow 0,2\chi-0,15\chi=3,6-3 \Leftrightarrow 0,05\chi=0,6 \Leftrightarrow \chi=0,6:0,05 \Leftrightarrow \chi=12$. Άρα τα μήλα είναι 12 και τα πορτοκάλια $20-12=8$

6. Έστω Ε το εμβαδόν. Τότε $3E-120=E+\frac{1}{2}E \Leftrightarrow 3E-120=\frac{3}{2}E \Leftrightarrow 3E-\frac{3}{2}E=120$
$\Leftrightarrow \frac{6E}{2}-\frac{3}{2}E=120 \Leftrightarrow \frac{3}{2}E=120 \Leftrightarrow 3E=2\cdot 120 \Leftrightarrow 3E=240 \Leftrightarrow E=240:3 \Leftrightarrow E=80\tau\mu$

7. Έστω ν ο αριθμός και $\nu+1$ ο επόμενος. Τότε $5\nu=4(\nu+1)-3 \Leftrightarrow 5\nu=4\nu+4-3 \Leftrightarrow 5\nu-4\nu=1 \Leftrightarrow \nu=1$

8. Αν χ η ηλικία του άνδρα, τότε η ηλικία της γυναίκας είναι $77-\chi$ και $77-\chi=\frac{1}{2}\chi+17$
$\Leftrightarrow 77-17=\frac{1}{2}\chi+\chi \Leftrightarrow 60=\frac{3}{2}\chi \Leftrightarrow 3\chi=2\cdot 60 \Leftrightarrow 3\chi=120 \Leftrightarrow \chi=120:3 \Leftrightarrow \chi=40$

Άρα ο άντρας είναι 40 ετών και η γυναίκα $77-40=37$ ετών.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. $2\chi-3=(\chi+5)\ \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\chi-3=\frac{\chi}{2}+\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\chi-\frac{\chi}{2}=\frac{5}{2}+3 \Leftrightarrow \frac{3\chi}{2}=\frac{11}{2} \Leftrightarrow 3\chi=11 \Leftrightarrow \chi=\frac{11}{3}$

Β. $\frac{2}{\chi}+\frac{3}{2\chi}=1+\frac{4}{3\chi} \Leftrightarrow \frac{12}{6\chi}+\frac{9}{6\chi}=1+\frac{8}{6\chi} \Leftrightarrow \frac{12}{6\chi}+\frac{9}{6\chi}-\frac{8}{6\chi}=1 \Leftrightarrow \frac{13}{6\chi}=1 \Leftrightarrow 6\chi\cdot 1=13$

$\Leftrightarrow 6\chi=13 \Leftrightarrow \chi=\frac{13}{6}$

Γ. $26:\chi-8=\frac{10}{\chi} \Leftrightarrow \frac{26}{\chi}-8=\frac{10}{\chi} \Leftrightarrow \frac{26}{\chi}-\frac{10}{\chi}=8 \Leftrightarrow \frac{16}{\chi}=8 \Leftrightarrow 8\chi=16 \Leftrightarrow \chi=16:8 \Leftrightarrow \chi=2$

ΘΕΜΑ 2

Α. Για $\chi=2$ τότε $(2+1)^2=2^2+3\cdot 2+1-2 \Leftrightarrow 3^2=4+6+1-2 \Leftrightarrow 9=9$ είναι λύση.

Β. Το μισό ενός αριθμού μειωμένο κατά 5 ισούται με το διπλάσιο του αριθμού μειωμένο κατά 23

ΘΕΜΑ 3

Έστω χ ο αριθμός των αγοριών. Τότε τα κορίτσια είναι $\chi+3$ και $\chi+\chi+3=35$ ή $2\chi+3=35$ ή $2\chi=35-3$ ή $2\chi=32$ ή $\chi=32:2$ ή $\chi=16$.

Άρα τα αγόρια είναι 16 και τα κορίτσια $16+3=19$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.1

1.

Α. $\frac{45}{100}=45\%$ Β. $\frac{32}{50}=\frac{64}{100}=64\%$ Γ. $\frac{24}{25}=\frac{96}{100}=96\%$

Δ. $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=25\%$ Ε. $\frac{45}{20}=\frac{225}{100}=225\%$ ΣΤ. $\frac{21}{7}=3=\frac{300}{100}=300\%$

2.

Α. $33\%=\frac{33}{100}$ Β. $76\%=\frac{76}{100}=\frac{76:4}{100:4}=\frac{19}{25}$ Γ. $127\%=\frac{127}{100}$

Δ. $525\%=\frac{525}{100}=\frac{525:25}{100:25}=\frac{21}{4}$ Ε. $2,7\%=\frac{2,7}{100}=\frac{27}{1.000}$

ΣΤ. $13,25\%=\frac{13,25}{100}=\frac{1325}{10.000}=\frac{1325:25}{10.000:25}=\frac{53}{400}$ Ζ. $1,55^{o}/_{oo}=$

$\frac{1,55}{1.000}=\frac{155}{100.000}=\frac{155:5}{100.000:5}=\frac{31}{20.000}$

3.

Α. $5\%=5:100=0,05$ $12,5\%=12,5:100=0,125$ $255^{o}/oo=255:1.000=0,255$
$0,4\%=0,4:100=0,004$

Β. $22,7=\frac{22,7\cdot 100}{100}=\frac{2.270}{100}=2270\%$ $0,4=\frac{0,4\cdot 100}{100}=\frac{40}{100}=40\%$ $0,0002=$

$\frac{0,0002\cdot 100}{100}=\frac{0,02}{100}0,02\%$ $1,01=\frac{1,01\cdot 100}{100}=\frac{101}{100}=101\%$

4.

Α. $45\%\cdot 32=\frac{45}{100}\cdot 32=\frac{1.440}{100}=14,4$ Β. $11,5^{o}/_{oo}\cdot 20=\frac{11,5}{1.000}\cdot 20=\frac{230}{1.000}=0,23$

Γ. $101\%\cdot 65=\frac{101\cdot 63}{100}=\frac{6.363}{100}=63,63$ Δ. $1,1\%\cdot 55=\frac{1,1\cdot 55}{100}=\frac{60,5}{100}=0,605$

Ε. $0,9\%\cdot 18=\frac{0,9\cdot 18}{100}=\frac{16,2}{100}=0,162$

ΣΤ. $504^{o}/_{oo}\cdot 2008=\frac{504\cdot 2.008}{1.000}=\frac{1.012.032}{1.000}=1.012,032$

Ζ. $10\%\cdot 3,14=\frac{10\cdot 3,14}{100}=\frac{31,4}{100}=0,314$ Η. $22\%\cdot 0,25=\frac{22\cdot 0,25}{100}=\frac{5,5}{100}=0,055$

Θ. $40\%\cdot 0,022=\frac{40\cdot 0,022}{100}=\frac{0,88}{100}=0,0088$

5.
Α. Είναι $22\% \cdot 2m = 22\% \cdot 200cm = \frac{22}{100} \cdot 200cm = 0.22 \cdot 200cm = 44cm$
Β. $45^{o}/_{oo} \cdot 4m = 0.045 \cdot 400cm = 18cm$
Γ. $52\% \cdot 10cm = 0.52 \cdot 10cm = 5.2cm$
Δ. $0.45^{o}/_{oo} \cdot 200dm = 0.45^{o}/_{oo} \cdot 2000cm = 0.00045 \cdot 2000cm = 0.9cm$
Ε. $11^{o}/_{oo} \cdot 5km = 0.011 \cdot 500.000cm = 5.500cm$
ΣΤ. $164\% \cdot 40cm = 1.64 \cdot 40cm = 65.6cm$

6. Έστω χ το ζητούμενο ποσό. Τότε:
Α. $45\% \cdot \chi = 9 \Leftrightarrow 0,45 \cdot \chi = 9 \Leftrightarrow \chi = \frac{9}{0,45} = \frac{900}{45} = 20$

Β. $75\% \cdot \chi = 26,25 \Leftrightarrow 0,75\chi = 26,25 \Leftrightarrow \chi = \frac{26,25}{0,75} = \frac{2.625}{75} = 35$

Γ. $101\% \cdot \chi = 50,5 \Leftrightarrow \chi = \frac{50,5}{1,01} = \frac{5.050}{101} = 50$

Δ. $225^{o}/_{oo} \cdot \chi = 27 \Leftrightarrow \chi = \frac{27}{0,225} = \frac{27.000}{225} = 12$

7. Έστω α το ζητούμενο ποσοστό.Τότε:
Α. $\alpha\% \cdot 200 = 12 \Leftrightarrow \alpha\% = 12:200 \Leftrightarrow \alpha\% = 0,06 \Leftrightarrow \alpha:100 = 0,06 \Leftrightarrow \alpha = 0,06 \cdot 100 = 6$ άρα 6%

Β. $\alpha\% \cdot 20 = 8 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{100} 20 = 8 \Leftrightarrow 20\alpha = 800 \Leftrightarrow \alpha = 800:20 = 40$ άρα 40%

Γ. $\alpha\% \cdot 18 = 20 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{100} 18 = 20 \Leftrightarrow 18\alpha = 2000 \Leftrightarrow \alpha = 2000:18 \simeq 111,11$ άρα 111,11%

Δ. $\alpha\% \cdot 40 = 0,1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{100} 40 = 0,1 \Leftrightarrow 40\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 10:40 = 0,25$ άρα 0,25%

8. Το ποσό της αύξησης του 1ου είναι: $1.200 \cdot 8\% = 1.200 \cdot 0,08 = 96€$
Το ποσό της μείωσης του 2ου είναι: $1.200 \cdot 5,5\% = 1.200 \cdot 0,055 = 66€$
Άρα ο πρώτος παίρνει $1.200+96 = 1.296€$ και ο δεύτερος $1.200-66 = 1.134€$.

5.2

1.
Α. Το πρώτο κόμμα έλαβε το 45% των 1200 ψήφων δηλαδή οι ψήφοι του είναι
$1200 \cdot 45\% = 1200 \cdot 0,45 = 540$ ψήφοι

Β. Έστω α το ζητούμενο ποσοστό. Τότε $\alpha\% \cdot 1200=444 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{100} \cdot 1200=444 \Leftrightarrow$ $1200\alpha=444400 \Leftrightarrow \alpha=44400:1200=37$. Το δεύτερο κόμμα έλαβε 37%
Γ. Το τρίτο κόμμα έλαβε 1200-540-444=216 ψήφους και ποσοστό 100%-45%-37%=18%
(Επαληθεύοντας $1200 \cdot 18\%=1200 \cdot 0,18=216$)

2.
Α. Τον πρώτο χρόνο ο τόκος είναι $T_1=3\% \cdot 15.000=0,03 \cdot 15.000=450$€. Τον δεύτερο χρόνο ο τόκος είναι $T_2=3\% \cdot 15.450=0,03 \cdot 15.450=463,5$€. Συνολικά $T\alpha_{ολ}=T_1+T_2=450+463,5=913,5$€
Β. Έστω χ το κεφάλαιο. Τότε $3\% \cdot \chi=630 \Leftrightarrow 0,03\chi=630 \Leftrightarrow \chi=630:0,03=21.000$€
Γ. Σε 18 μήνες παίρνουμε για τον πρώτο χρόνο (12 μήνες) τόκο ίσο με $T_1=20.000 \cdot 3\%=600$€. Για τους υπόλοιπους 6 ο τόκος είναι τα $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ του τόκου του δεύτερου χρόνου

δηλαδή $T_2=\frac{1}{2} \cdot (20.600 \cdot 3\%)=\frac{1}{2} \cdot (20.600 \cdot 0,03)=\frac{1}{2} \cdot 618=309$€. Συνολικά για 18 μήνες $T_{ολ}=T_1+T_2=600+309=909$€.

3.
Α. Η τηλεόραση κοστίζει χ € τότε $40\% \cdot \chi=600 \Leftrightarrow 0,4\chi=600 \Leftrightarrow \chi=600:0,4=1.500$€
Β. Σε δόσεις πληρώνει τα 1.500-600=900€ και κάθε δόση ισούται με 900:5=180€
Γ. Αν η τηλεόραση κοστίζει ψ €, τότε $41\% \cdot \psi+19\% \cdot \psi=600 \Leftrightarrow 0,41\psi+0,19\psi=600 \Leftrightarrow 0,6\psi=600 \Leftrightarrow \psi=600:0,6=1,000$ €.

4.
Στην τράπεζα Α καταθέτει $\frac{2}{3} \cdot 18000=12000$€ οπότε στην Β καταθέτει18000-12000=6000€. Από την Α παίρνει τόκο $T_A=3\% \cdot 12000=$ $=0,03 \cdot 12000=360$€. Για να πάρει από την δεύτερη τόκο $T_B=360$€ θα πρέπει, $T_B=\beta\% \cdot 6000=360 \Leftrightarrow \frac{\beta}{100} 6000=360 \Leftrightarrow 6000\beta=100 \cdot 360 \Leftrightarrow \beta=36000:6000=6$. Άρα η τράπεζα Β θα πρέπει να έχει επιτόκιο 6%

5.
Α. Είναι $20\% \cdot 330=0,2 \cdot 330=66$ g φυσικό χυμό φρούτου
Β. Έστω α το ποσοστό. Τότε $\alpha\% \cdot 330=11$ ή $\frac{\alpha}{100} \cdot 330=11$ ή $\alpha \cdot 3,3=11$ ή $\alpha=11:3,3 \simeq 3,33$. Άρα περίπου περιέχει 3,33% ζάχαρη

Γ. Το νερό είναι 330-66-11=253 g που αντιστοιχεί σε 100%-20%-3,33%=76,67%

6.
Α. Αρχικά πλήρωσε 55% $\cdot$ 14.000+19% $\cdot$ 14.000=0,55 $\cdot$ 14.000+0,19 $\cdot$ 14.000=10.360 €
Β. Το ποσό που περίσσεψε για δόση είναι το 14.000-0,55 $\cdot$ 14.000=14.000-7.700=6.300 €. Άρα η κάθε δόση είναι 6.300:6=1.050 €. Στην κάθε δόση προστίθεται τόκος 2% επί του υπολοίπου, άρα:
1η δόση: T_1=2% $\cdot$ 6.300=0,02 $\cdot$ 6.300=126 € άρα 1.050+126=1.176 €
2η δόση: T_2=2% $\cdot$ 5.250=0,02 $\cdot$ 5.250=105 € άρα 1.050+105=1.155 €
3η δόση: T_1=2% $\cdot$ 4.200=0,02 $\cdot$ 4.200=84 € άρα 1.050+84=1.134 €
4η δόση: T_1=2% $\cdot$ 3.150=0,02 $\cdot$ 3.150=63 € άρα 1.050+63=1.113 €
5η δόση: T_1=2% $\cdot$ 2.100=0,02 $\cdot$ 2.100=42 € άρα 1.050+42=1.092 €
6η δόση: T_1=2% $\cdot$ 1.050=0,02 $\cdot$ 1.050=21 € άρα 1.050+21=1.071 €
Οι 6 δόσεις είναι 1.176+1.155+1.154+1.113+1.092+1.071=6.741 €
Συνολικά πλήρωσε 10.360+6.741=17.101 €

7. Έστω χ το εισόδημα του Έλληνα εστιάτορα.
Τότε θα πληρώσει 19% $\cdot$ χ+2%χ=0,19χ+0,02χ=0,21χ σε φόρους. Ο αλλοδαπός εστιάτορας για το ίδιο εισόδημα πληρώνει 14%χ+7%χ-0,14χ+0,07χ=0,21χ.
Οι δύο εστιάτορες φορολογούνται το ίδιο.

8.
Α. Από τις 14.000 € οι 12.000 είναι αφορολόγητες, άρα θα φορολογηθούν με 15% οι 14.000-12.000=2.000 € επιπλέον του αφορολόγητου ορίου.
Έτσι φόρος 15% $\cdot$ 2.000=0,15 $\cdot$ 2.000=300 €
Β. Από τις 17.000 € οι 12.000 είναι αφορολόγητες, οι 15.000-12.000=3.000 € φορολογούνται με 15% και οι 17.000-15.000=2.000 € με φόρο 30%. Άρα 15% $\cdot$ 3.000=0,15 $\cdot$ 3.000=450 € και 30% $\cdot$ 2.000=0,3 $\cdot$ 2.000=600 €. Συνολικά ο φόρος είναι 450+600=1.050 €.
Γ. Οι 40.000 φορολογούνται ως εξής:
12.000 $\rightarrow$ αφορολόγητες 15.000-12.000=3.000 $\rightarrow$ φόρος 15%=450 €
23.000-15.000=8.000 € $\rightarrow$ φόρος 30%=30% $\cdot$ 8.000=0,3 $\cdot$ 8.000=2.400 €
40.000-23.000=17.000 $\rightarrow$ φόρος 40%=40% $\cdot$ 17.000=0,4 $\cdot$ 17.000=6.800 €
Συνολικά ο φόρος είναι 450+2.400+6.800=.9650 €.

9.
Α. 1ος χρόνος: T_1=4% $\cdot$ 25.000=0,04 $\cdot$ 25.000=1.000 €.
2ος χρόνος: T_2=4% $\cdot$ (25.000+T_1)=0,04 $\cdot$ 26.000=1.040 €.
Συνολικά 1.000+1.040=2.040 €.
Β. Το επιτόκιο το δεύτερο χρόνο γίνεται 10% $\cdot$ 4%+4=0,1 $\cdot$ 0,04+0,04==0,044=4,4%, άρα οι τόκοι του δεύτερου χρόνου γίνεται τώρα T_2=4,4% $\cdot$ 26.000=0,044 $\cdot$ 26.000=1.144 €. Άρα συνολικά έχουμε 1.000+1.144=2.144 €.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α.33%=33:100=0,33 Β. 45%=45:100=0,45
Γ. 72%=72:100=0,72 Δ. 112%=112:100=1,12

ΘΕΜΑ 2

Α. ΦΠΑ=425 · 19%=425 · 0,19=80,75 €.
Β. Έστω χ η αξία. χ+19% · χ=714 ή χ+0,19χ=714 ή 1,19χ=714 ή χ=714:1,19=600 €.

ΘΕΜΑ 3

Α. Η έκπτωση είναι 45% · 120=0,45 · 120=54 €. Άρα θα πληρώσουμε 120-54=66 €.
Β. Αν χ η αρχική τιμή της μπλούζας, τότε χ=38,5+45% · χ ή χ-0,45χ=38,56 ή 0,55χ=38,5 ή χ=38,5:0,55=70 €.

ΘΕΜΑ 4

Αρχικά πλήρωσε 60% · 15.000=0,6 · 15.000=9.000 €. Τα υπόλοιπα 15.000-9.000=6.000 € τα μοιράζει σε τρεις δόσεις των 6.000:3=2.000 € η καθεμία. Με μηνιαίο επιτόκιο 2% οι τόκοι, επομένως και οι δόσεις είναι:
Πρώτος μήνας Τόκος 6.000 · 2%=120 € Πρώτη δόση 2.000+120=2.120 €
Δεύτερος μήνας Τόκος 4.000 · 2%=80 € Δεύτερη δόση 2.000+80=2.080 €
Τρίτος μήνας Τόκος 2.000 · 2%=40 € Τρίτη δόση 2.000+40=2.040 €
Συνολικά ο Κώστας πλήρωσε 9.000+2.120+2.040=15.240€ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.1

Παράσταση σημείων στο επίπεδο

2. Α (1, 3), Β (3, 2), Γ (3, 3), Δ (2, 0), Ε (0, 2).

6.2

1. 10 cm, 0,8 m, 1:250

2. 140 Km

3. 30 m, 24 m.

6.3

2. α, β, γ: είναι, δ, ε, στ: δεν είναι

3.

x	0	2	$\frac{2}{5}$	4	$\frac{6}{5}$
y	0	3	$\frac{3}{5}$	6	$\frac{9}{5}$

6.4

2. α) 2, β) 3, γ) 1

3. Αναπαριστούν.

6.5

1. 12,8 m.

2. 960 Kg.

3. 30.000 €

6.6

1. α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ.

2. α) είναι, β) δεν είναι

3.

x	2	3	1,5	15
y	6	4	8	0,8

Διαγώνισμα

2. α) α = 2, y = 2x

β)

x	1	2	3
y	2	4	6

γ) (1, 2), (2, 4), (3, 6)

3. α) i. $12m^3$, ii. 4h, iii. $2m^3/h$,

β) $y = \frac{12}{x}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

7.1

2. Θετικοί: +3, 4, Αρνητικοί: $-5, -\frac{3}{2}, -1{,}8$, Ούτε θετικοί ούτε αρνητικοί: 0

3. α) – 5, β) – 50, γ) +150, δ) – 18

7.2

2. α. 3, β. 3

3. α. 13, β. 9, γ. 3,5, δ. 5/7, ε. 0

7.3

1. α. Λ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ

2. α. +13, β. +30, γ. -10, δ. -40, ε. +17, στ. -13.

3. Α = –4

7.4

1. α. 4, β. -4, γ. -2, δ. 4, ε. 0, στ. -3

2. α. 2, β. 4, γ. -13, δ. 16,2

3. α. -4, β. -8

7.5

1. α. Λ, β. Λ, γ. Λ, δ. Σ

2. α. 30, β. 63, γ. 24, δ. 42

3. α. -5, β. 2, γ. -1, δ. 0

7.6

2. α. 5, β. 3, γ. -5, δ. -3

3. α. 2, β. $-\frac{5}{2}$, γ. 3, δ. $-\frac{2}{15}$, ε. $-\frac{10}{3}$, στ. 2

7.7

1. α. -0,7, β. 1,875, γ. 0,85, δ. $1,\overline{6}$, ε. $2,\overline{72}$, στ. $-2,06\overline{81}$

2. α. $\frac{16}{5}$, β. $-\frac{109}{20}$, γ. $\frac{47}{1.000}$, δ. $\frac{14}{9}$, ε. $\frac{323}{99}$, στ. $\frac{146}{15}$, ζ. $\frac{421}{330}$

7.8

1. α. Λ, β. Λ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

2. α. θετική, β. θετική, γ. αρνητική

3. α. x^5, β. y^6, γ. ω^8, δ. x^3, ε. y^2

7.9

1. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ, ε. Σ, στ. Σ, ζ. Λ, η. Σ

2. α. $\frac{1}{9}$, β. $\frac{1}{5}$, γ. $\frac{1}{100}$

3. α. 4, β. $\frac{1}{25}$, γ. $\frac{1}{49}$, δ. 9, ε. 25, στ. $\frac{1}{4}$, ζ. $\frac{1}{8}$, η. 9, θ. $\frac{1}{625}$

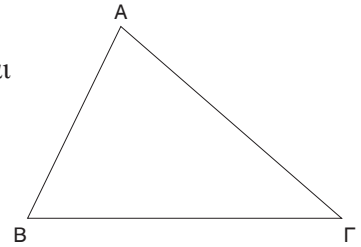
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1

1. Από τα τρία μη συνθετικά σημεία Α, Β και Γ ορίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ.



2. Τα ευθύγραμμα τμήματα είναι: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ

3. Οι αντικείμενες ημιευθείες είναι: $O_{\chi'}$, $O_{y'}$, $O_{Z'}$

1.2

1. Κορυφές: Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ
Πλευρές: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ

2. $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$, $\hat{E}$, $\hat{Z}$, $\hat{H}$, $\hat{\Theta}$

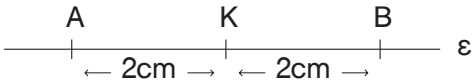
3. Τρίγωνα: $\triangle AB\Gamma$, $\triangle E\Gamma\Delta$, $\triangle EHZ$, $\triangle BEZ$.

1.3

1.

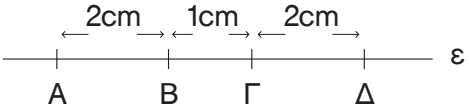
ΑΠΟΣΤΑΣΗ	Σε m	Σε Km
Α	200	0,2
Β	5.200	5,2
Γ	2,2	0,0022
Δ	1.000.000	1.000

2. Το Κ είναι το μέσο του ΑΒ.



3.

$$\left.\begin{array}{l} A\Gamma = AB + B\Gamma = 2+1 = 3cm \\ B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta = 1+2 = 3cm \end{array}\right| \Rightarrow \text{¢ ρα } A\Gamma = B\Delta$$

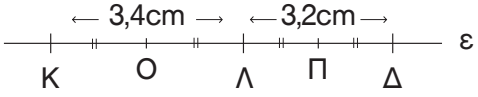


4. Το Ο μέσο του ΚΛ, οπότε

$$O\Lambda = \frac{K\Lambda}{2} = 1,7cm$$

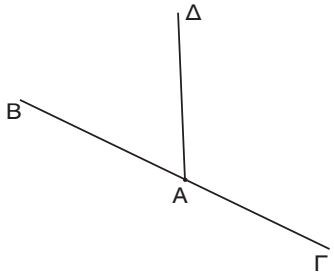
Το Π μέσο του ΛΜ, οπότε

$$\Lambda\Pi = \frac{\Lambda M}{2} = 1,6cm$$



$$\left.\begin{array}{l} O\Pi = O\Lambda + \Lambda\Pi = 1,7+1,6 = 3,3cm \\ \Lambda M = 3,2cm \end{array}\right| \Rightarrow \text{¢ ρα το } O\Pi > \Lambda M$$

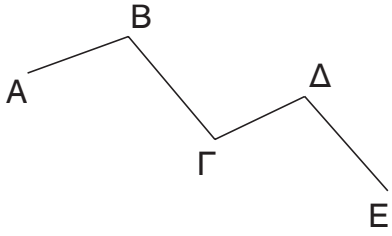
5. Είναι 0,43 dm = 4,3 cm
ΑΔ = ΑΒ = ΑΓ = 4,3 cm.



1.4

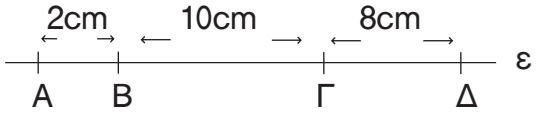
1.
ΑΒ = 60mm = 0,6cm
0,6+2+6+1,3=9,9cm
ΒΓ = 2cm
ΓΔ = 0,6dm = 6cm
ΔΕ = 1,3cm

Άρα ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ =



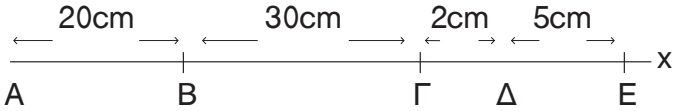
2.

ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=2+10=12cm
ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ=10+8=18cm
ΑΔ=ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ=2+10+8=20cm



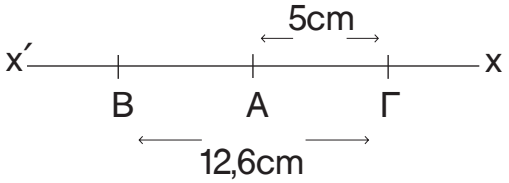
3.

Α) ΑΓ = ΑΒ+ΒΓ = 50cm
Β) ΓΕ = ΓΔ+ΔΕ = 7cm
Γ) ΑΒ+ΒΓ = 20+30 = 50cm
Δ) ΒΓ+ΓΔ = 30+2 = 32cm
Ε) ΑΒ-ΓΔ = 20-2 = 18cm



4.

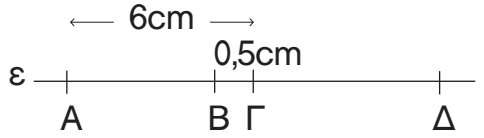
ΑΓ = ΓΒ-ΑΒ = 12,6-5 = 7,6cm



5.

$$\Gamma\Delta = \frac{A\Delta}{2} = A\Gamma = 6cm$$

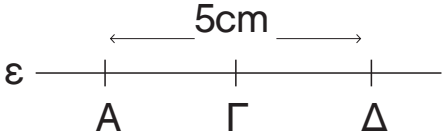
ΑΒ = ΑΓ – ΒΓ = 5,5cm
ΑΔ = 2ΑΓ = 12cm



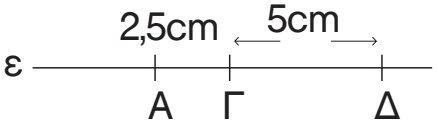
6.

Αν Α εσωτερικό,

$$AK = 2,5cm = \frac{K\Lambda}{2} \Rightarrow A\Lambda = K\Lambda - KA = 2,5cm$$



Αν Α αριστερά,
ΑΛ = ΑΚ+ΚΛ = 2,5+5 = 7,5cm



7.

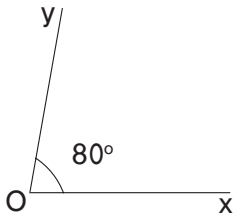
ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15cm

$$\left.\begin{array}{l} AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = 3 + 3 + 3 = 9cm \\ A\Delta = AE + E\Delta = 3 + 3 = 6cm \end{array}\right| \Rightarrow \not\in \rho\alpha\ AB + B\Gamma + \Gamma\Delta > A\Delta$$

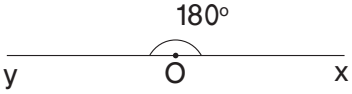
1.5

1.

α)

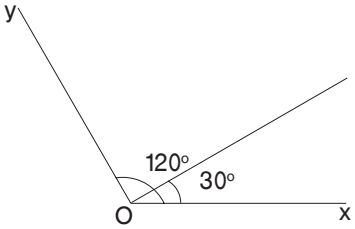


β)

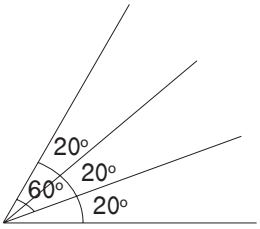


2.

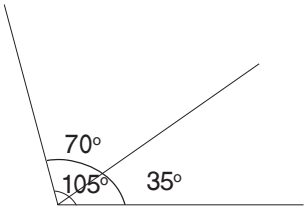
$\widehat{\chi O\zeta} = \frac{1}{4}\widehat{\chi O\psi} = 30^o$



3.



4.

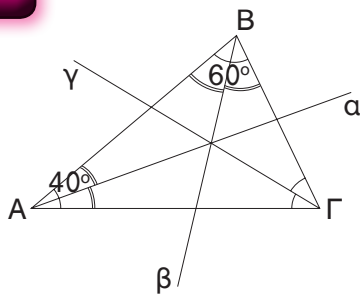


1.6

1.

α) $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$

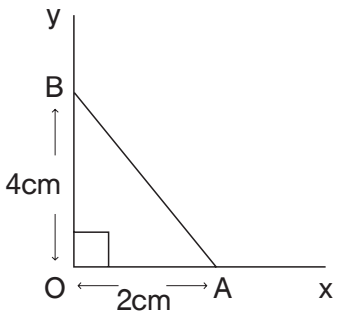
$\Rightarrow \hat{\Gamma} = 80^o$



β) Οι Ββ, Αα, Γγ διχοτόμοι των $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.

2.

α)



β) Μετράμε τις γωνίες και βρίσκουμε $\hat{A} = 60^o$, $\hat{B} = 30^o$.

1.7

1.

$\widehat{\Gamma AB}$, $\widehat{BA\varepsilon}$, $\widehat{\varepsilon A\chi}$: εφεξής

$\widehat{\Gamma AB}$, $\widehat{BA\chi}$: εφεξής

$\widehat{\Gamma A\varepsilon}$, $\widehat{\varepsilon A\chi}$: εφεξής

2.

$\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A\Delta}$, $\widehat{\Delta AE}$: εφεξής

$\widehat{\Delta\Gamma E}$, $\widehat{E\Gamma B}$: εφεξής

$\widehat{BA\Delta}$, $\widehat{\Delta AE}$: εφεξής

$\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Delta AE}$: εφεξής

3.

α) εφεξής: $\widehat{\chi OA}$ με $\widehat{AOB}$

$\widehat{AOB}$ με $\widehat{BO\psi}$

$\widehat{\chi OB}$ με $\widehat{BO\psi}$

$\widehat{\chi OA}$ με $\widehat{AO\psi}$

διαδοχικές: $\widehat{\chi OA}$, $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\psi}$

β) εφεξής: $\widehat{\psi\Gamma\chi}$ με $\widehat{\chi\Gamma A}$

$\widehat{\psi\Gamma\chi}$ με $\widehat{\chi\Gamma\Delta}$

$\widehat{\psi\Gamma\chi}$ με $\widehat{\chi\Gamma B}$

$\widehat{A\Gamma\Delta}$ με $\widehat{\Delta\Gamma E}$

$\widehat{\Gamma EA}$ με $\widehat{AEB}$

$\widehat{\psi EA}$ με $\widehat{AEB}$

$\widehat{\chi\Gamma A}$ με $\widehat{A\Gamma\Delta}$

$\widehat{\chi\Gamma A}$ με $\widehat{A\Gamma E}$

διαδοχικές: $\widehat{\psi\Gamma\chi}$, $\widehat{\chi\Gamma A}$, $\widehat{A\Gamma E}$

$\widehat{\psi\Gamma\chi}$, $\widehat{\chi\Gamma A}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$

$\widehat{\psi\Gamma\chi}$, $\widehat{\chi\Gamma A}$, $\widehat{A\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta\Gamma E}$

1.8

1.

α) $\widehat{B}=180^o-100^o=80^o$

β) $\widehat{A}=180^o-20^o=160^o$

γ) $\widehat{B}=180^o-105^o=75^o$

δ) $\hat{\Gamma}=180^o-30^o=150^o$

2.

α) $\widehat{B}=90^o-10^o=80^o$

β) $\widehat{A}=90^o-50^o=40^o$

γ) $\widehat{\Delta}=90^o-80^o=10^o$

3.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}+\hat{\varphi}=90^o\\ \widehat{\omega}=3\hat{\varphi}\end{array}\right| \Rightarrow 3\hat{\varphi}+\hat{\varphi}=90^o \Rightarrow \hat{\varphi}=22,5^o, \widehat{\omega}=67,5^o$$

4.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}+\hat{\varphi}=180^{o}\\ \hat{\varphi}=2\widehat{\omega}\end{array}\right| \Rightarrow 2\widehat{\omega}+\widehat{\omega}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\omega}=60^{o},\hat{\varphi}=120^{o}$$

5.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}+\hat{\varphi}=180^{o}\\ \hat{\varphi}=\widehat{\omega}+50^{o}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\omega}+50+\widehat{\omega}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\omega}=65^{o},\hat{\varphi}=115^{o}$$

6.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\varphi}+\widehat{\omega}=180^{o}\\ \widehat{\omega}+38^{o}=90^{o}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\omega}=52^{o},\hat{\varphi}=120$$

7.

$$\widehat{\beta}=20^{o}$$

$$\widehat{\alpha}+120^{o}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\alpha}=60^{o}$$

$$\hat{\delta}=90^{o},\ \widehat{\beta}+\hat{\gamma}+20^{o}=90^{o} \Rightarrow \hat{\gamma}=30^{o}$$

8.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}\ ,\ \widehat{\alpha}+3\widehat{\beta}=180^{o}\\ 3\widehat{\beta}=\gamma\ ,\ \widehat{\beta}+\hat{\gamma}=180^{o}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\beta}=45^{o},\hat{\gamma}=135^{o},\widehat{\alpha}=45^{o},\widehat{\beta}=135^{o}$$

9.

$$\widehat{\alpha}+30^{o}=90^{o} \Rightarrow \widehat{\alpha}=60^{o}$$

$$\widehat{\alpha}=\hat{\delta}=60^{o}$$

$$\hat{\gamma}+\hat{\delta}=90^{o} \Rightarrow \hat{\gamma}=30^{o}$$

$$\widehat{\beta}=90^{o}$$

10.

$$\widehat{\delta O\delta'}=\widehat{\delta O\zeta}+\widehat{\zeta O\delta'}=\frac{\widehat{\chi O\zeta}}{2}+\frac{\widehat{\zeta O\psi}}{2}=20^{o}+45^{o}=65^{o}$$

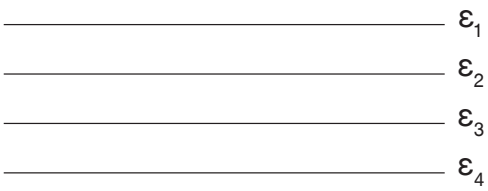
11.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}=\hat{\varphi}\\ \widehat{\omega}+\hat{\varphi}+80^{o}=180^{o}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\omega}=\hat{\varphi}=50^{o}$$

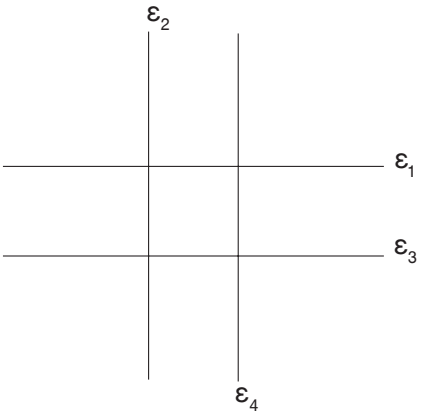
1.9

1.

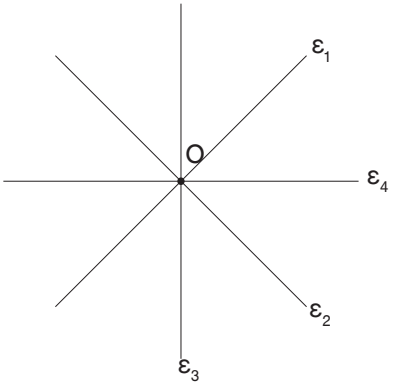
α)



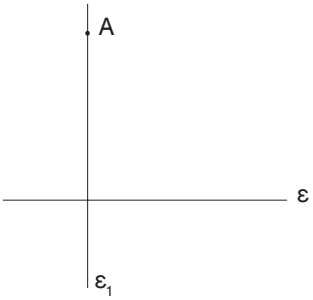
β)



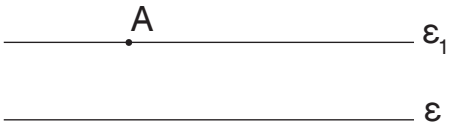
γ)



2.

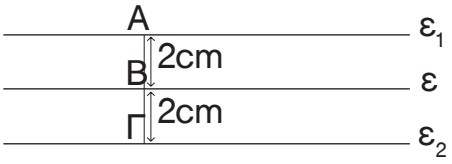


3.

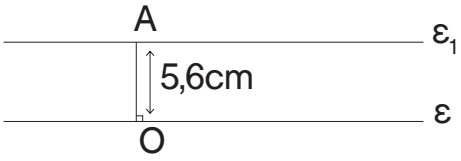


1.10

1.



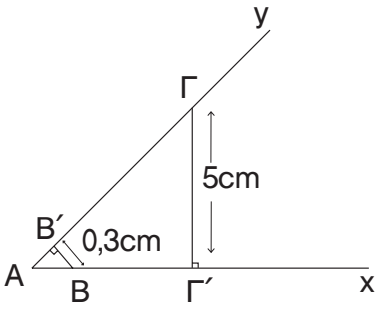
2.



3.

α) $AB < A\Gamma$

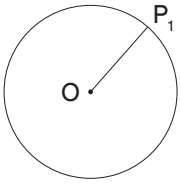
β) $A\Gamma\Gamma' = ABB'$



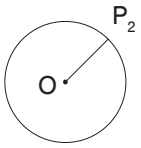
1.11

1.

α)

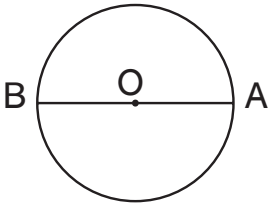


β)

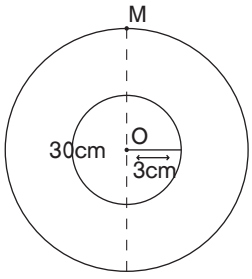


γ)

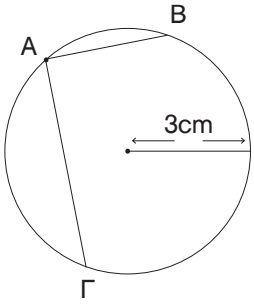
2.



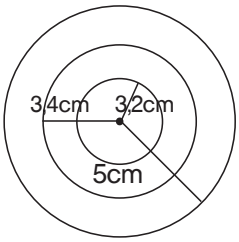
3.



4.

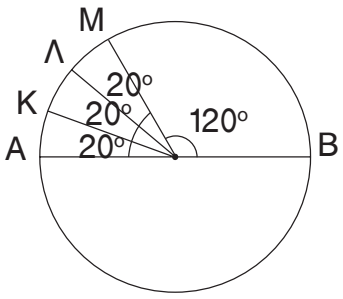


5.



1.12

1.



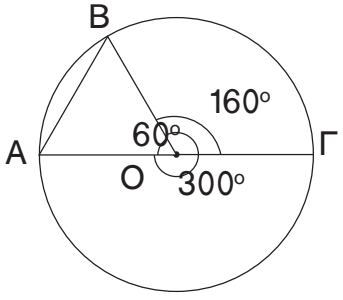
2.

$\hat{\alpha}+2\hat{\alpha}+2\hat{\alpha}=180^{o} \Rightarrow \hat{\alpha}=36^{o}$

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{B\Gamma}=72^{o}$

$\overset{\frown}{\Delta\Gamma}=36^{o}$

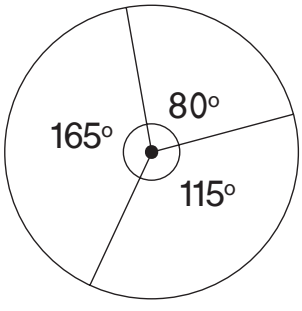
3.



4.

$\frac{3}{2}\hat{\varphi}+\frac{5}{3}\hat{\varphi}+\hat{\varphi}=180^{o} \Rightarrow \hat{\varphi}=9^{o}$

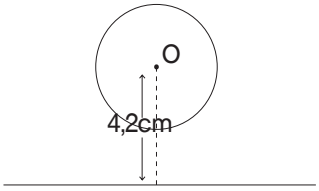
5.



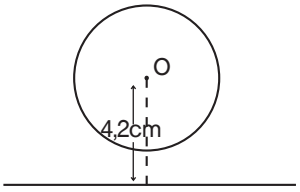
1.13

1.

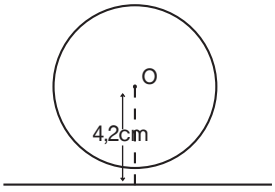
α) Κανένα κοινό σημείο



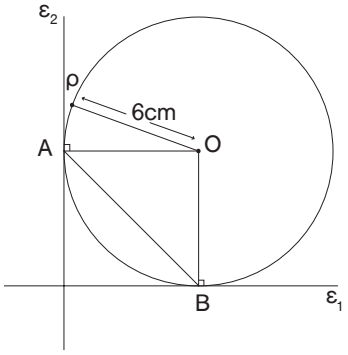
β) Κανένα κοινό σημείο



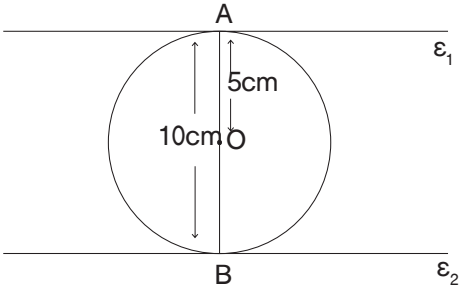
γ) Κανένα κοινό σημείο



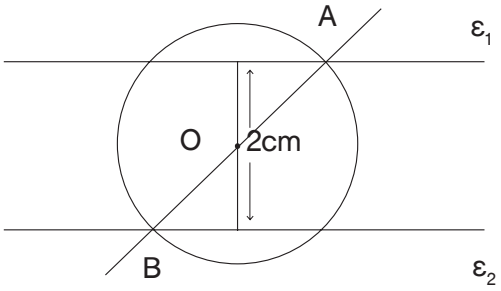
2.



3.



4. Οι $\varepsilon_1\varepsilon_2$ είναι χορδές στον κύκλο (O, OA)



ΚΡΙΤΗΡΙΟ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I.

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Σ
5. Σ
6. Λ
7. Λ
8. Λ
9. Σ
10. Λ
11. Λ
12. Σ
13. Λ
14. Σ

II.

1. α
2. β
3. β
4. γ
5. δ

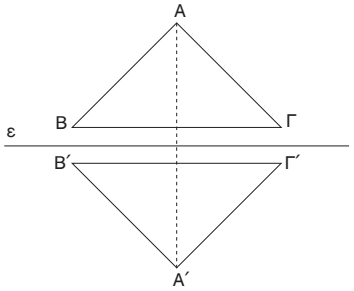
III.

1. i-β
   ii-δ
   iii-α
   iv-γ
2. i-α
   ii-β
   iii-γ

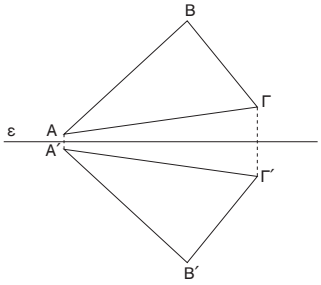
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1

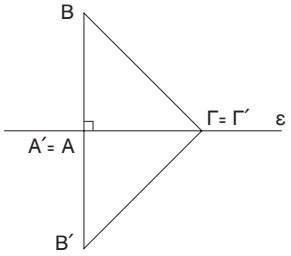
1. α)



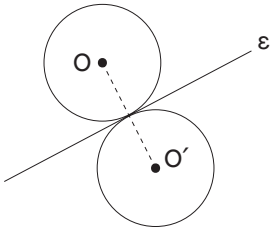
β)



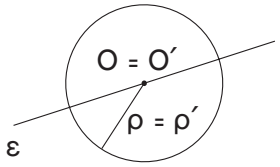
γ)



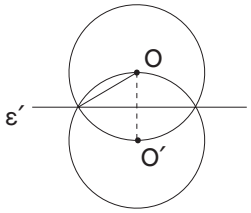
2. α)



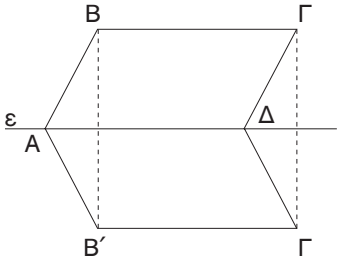
β)



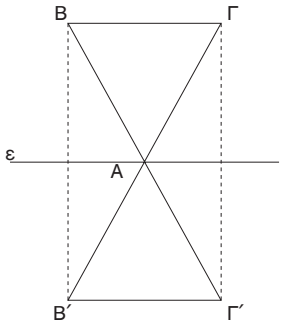
γ)



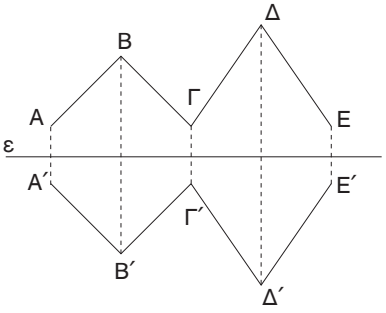
3. α)



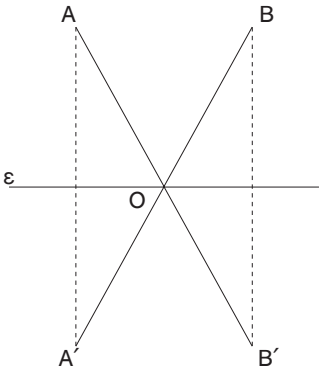
β)



γ)

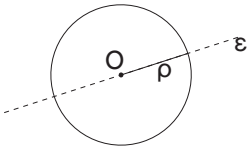


δ)

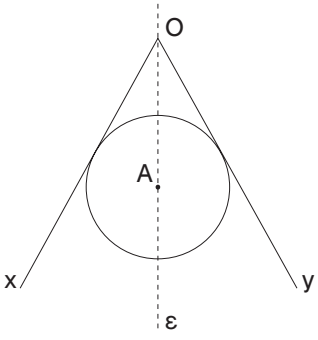


2.2

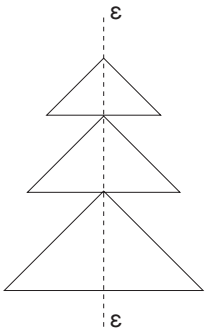
1. α)



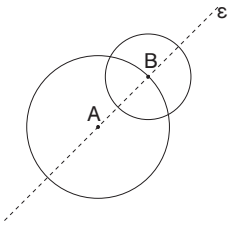
β)



γ)



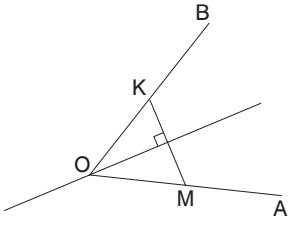
2.



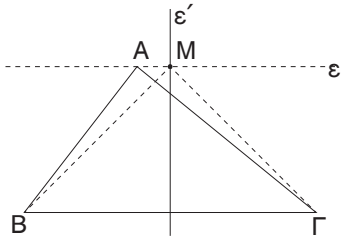
2.3

1.

2. ΟΚ = ΟΜ
Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο γιατί ισαπέχει από τα άκρα Κ,Μ.

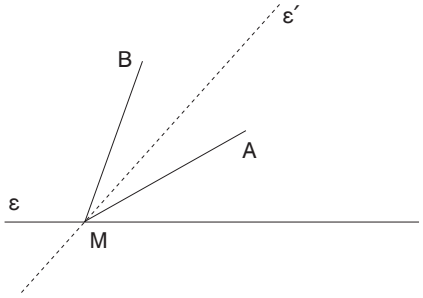


3. Αφού το Μ ισαπέχει από τα Β,Γ, ανήκει στη μεσοκάθετο ε΄ του ΒΓ.



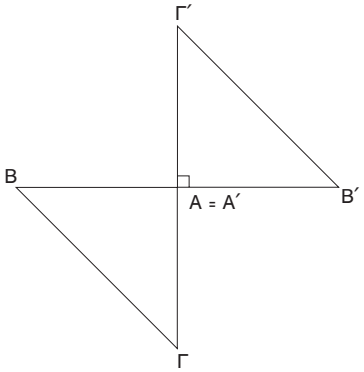
4.

Αφού το Μ ισαπέχει από τα Α,Β, ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ, ε΄.

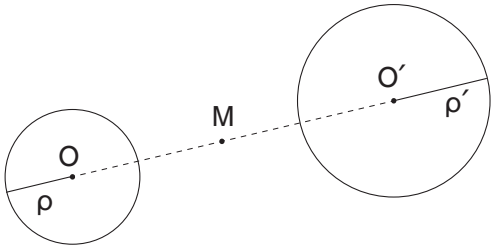


2.4

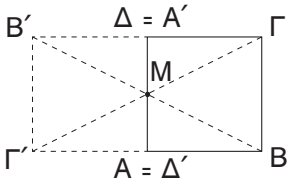
1.



2.



3.

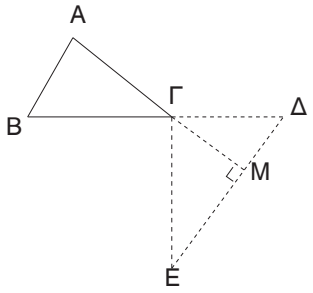


4.

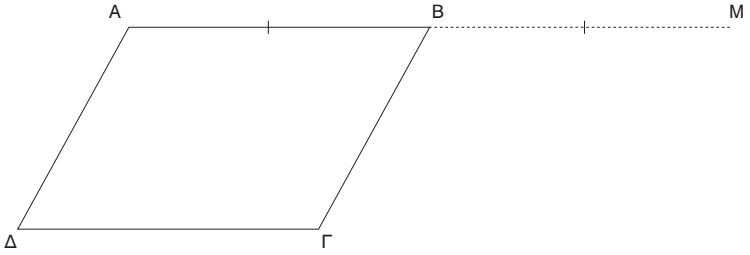
α) Στο τρίγωνο ΓΔΕ η ΓΜ είναι διάμεσος και ύψος.

Άρα το ΓΔΕ ισοσκελές.
Άρα ΓΕ=ΓΔ.

β) Επειδή ΓΕ=ΓΔ, το Γ ισαπέχει από τα Ε,Δ.
Άρα η ΑΓ μεσοκάθετος του ΔΕ.

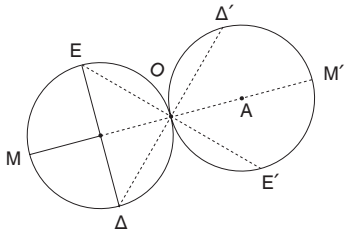


5.

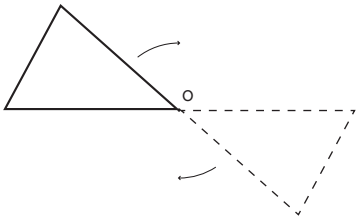


2.5

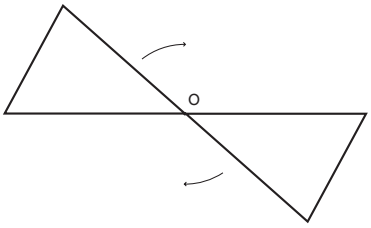
1.



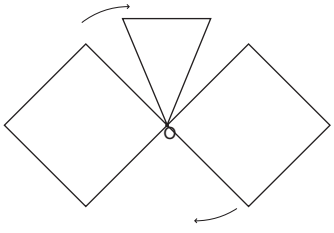
2. α)



β)



γ)



2.6

1. α) $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\alpha}=60^{o}$

$\hat{\varepsilon}=\hat{\delta}=35^{o}$

$\hat{\delta}=\widehat{\zeta}=55^{o}$

$\widehat{\zeta}=\hat{\eta}=55^{o}$

$\widehat{\beta}=\hat{\gamma}=120^{o}$

β) $\hat{\delta}=\hat{\gamma}=30^{o}$

$\hat{\varepsilon}=\hat{\delta}=30^{o}$

$\widehat{\beta}+\hat{\varepsilon}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\beta}=150^{o}$

$\widehat{\alpha}+\widehat{\zeta}=180^{o} \Rightarrow \widehat{\zeta}=120^{o}$

γ) $\widehat{AO\varepsilon_2}=30^{o}$

$\widehat{BO\varepsilon_2}=60^{o}$

δ) $\widehat{BA\Gamma}=37^{o}$

$\widehat{AB\Gamma}=37^{o}$

$\widehat{B\Gamma A}=106^{o}$

2. $\widehat{AB\Gamma}=60^{o}$

3.

$\widehat{\varepsilon_2 B\Gamma}=30^{o}$

$\widehat{AB\varepsilon_2}=60^{o}$

$\widehat{BA\varepsilon_1}=\widehat{AB\varepsilon_2}=60^{o}=\hat{\varphi}$

4.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\alpha}=\hat{\gamma}\\ \widehat{\alpha}=\hat{\delta}\\ \widehat{\alpha}=3\widehat{\beta}\\ \widehat{\beta}+\hat{\gamma}=180^{o}\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\alpha}=135^{o}=\hat{\gamma}=\hat{\delta},\widehat{\beta}=45^{o}$$

5.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{\omega}+\hat{\varphi}=120^{o}\\ \hat{\gamma}+120^{o}=180^{o}\\ \widehat{\alpha}+120^{o}=180^{o}\\ \widehat{\alpha}+\hat{\gamma}+60^{o}=180^{o}\\ \hat{\gamma}=\hat{\varphi}\end{array}\right| \Rightarrow \hat{\gamma}=60^{o},\widehat{\alpha}=60^{o},\hat{\varphi}=60^{o},\widehat{\omega}=60^{o}$$

6.

$$45^{o}+90^{o}+\widehat{\chi}=180^{o}\Rightarrow\widehat{\chi}=45$$
$$\widehat{\psi}=45^{o}$$
$$\widehat{\psi}+45^{o}+\widehat{\omega}=180^{o}\Rightarrow\widehat{\omega}=90^{o}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1.

$\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}=50^{o}$

$\overset{\frown}{\mathrm{AOB}}=130^{o}$

2.

$\hat{\varphi}+\hat{\lambda}=180^{o}\Rightarrow\hat{\lambda}=120^{o}$

$\widehat{\rho}=\hat{\kappa}\Rightarrow\widehat{\rho}=30^{o}$

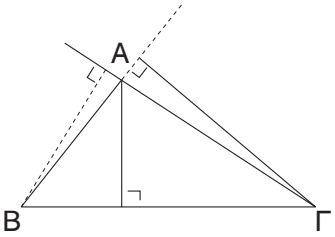
$\overset{\frown}{\varepsilon_{2}\Lambda\varepsilon_{1}}=\widehat{\omega}=30^{o}=\hat{\kappa}$

3. α - Λ
β - Σ
γ - Λ
δ - Σ
ε - Λ
στ - Λ

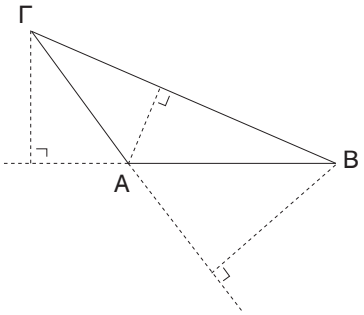
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

3.1

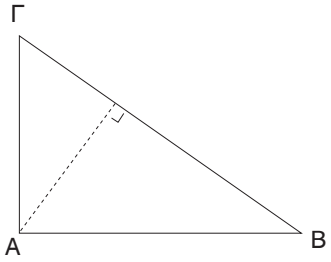
1. α)



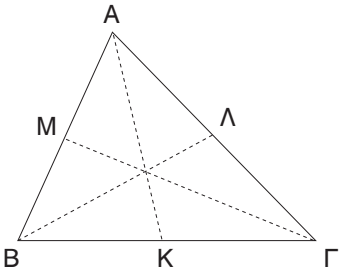
β)



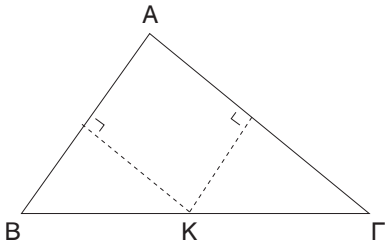
γ)



2.

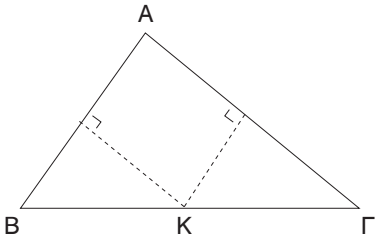


3.



4.

Α΄, Δ΄, Γ΄ μέσα πλευρών.
Κ, Λ, Μ σημεία τομής των διχοτόμων.



3.2

1.

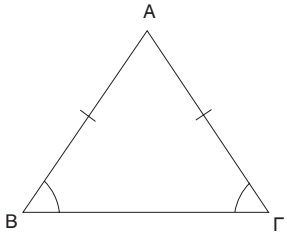
α) $\widehat{\omega}+30^o+55^o=180^o \Rightarrow \widehat{\omega}=95^o$

β) $\left.\begin{array}{l}60^o+\widehat{\Gamma AB}=180^o\\ \omega+\widehat{\Gamma AB}+10^o=180^o\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{\Gamma AB}=120^o, \widehat{\omega}=50^o$

γ) $4\widehat{\chi}+\widehat{\chi}+3\widehat{\chi}+20^o=180^o$

$\widehat{\chi}=20^o$

2. $\left.\begin{array}{l}\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^o\\ \widehat{B}=\widehat{\Gamma}=60^o\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{A}=60^o$



3. $\left.\begin{array}{l}\widehat{A\Gamma B}+120^o=180^o\\ 5\widehat{\chi}+\widehat{A\Gamma B}+\widehat{\chi}=180^o\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{A\Gamma B}=60^o, \widehat{\chi}=20^o$

4. $\left.\begin{array}{l}\widehat{B}=3\widehat{A}\\ \widehat{A}=\widehat{\Gamma}-50^o\\ \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^o\end{array}\right| \Rightarrow \widehat{A}=26^o, \widehat{B}=78^o, \widehat{\Gamma}=76^o$

5.

α)

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\kappa}=30^o\\ 2\hat{\varphi}=30^o\\ \hat{\varphi}+\widehat{\omega}+90^o=180^o\end{array}\right| \Rightarrow \hat{\varphi}=15^o, \widehat{\omega}=75^o, \hat{\kappa}=30^o$$

β)

$\widehat{\omega}+80^o=180^o \Rightarrow \widehat{\omega}=100^o$

$\widehat{\omega}=\widehat{\beta}=100^o$

$\widehat{\alpha}=32^o$

$\widehat{\alpha}=\hat{\varphi}=32^o$

$\widehat{\beta}+\hat{\gamma}=180^o \Rightarrow \hat{\gamma}=80^o$

$\widehat{\omega}+\hat{\varphi}+\hat{\kappa}=180^o \Rightarrow \hat{\kappa}=40^o$

$\hat{\kappa}=\hat{\delta}=48^o$

6.

$\widehat{\omega}+100^o=180^o \Rightarrow \widehat{\omega}=80^o$

$\widehat{\chi}+\widehat{\omega}+\widehat{\omega}=180^o \Rightarrow \widehat{\chi}=20^o$

7.

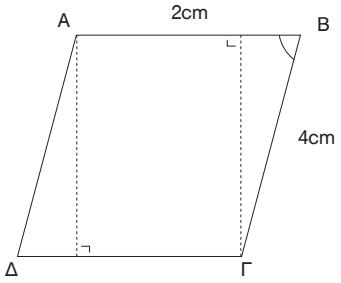
$\widehat{\beta}+130^o=180^o \Rightarrow \widehat{\beta}=50^o=\hat{\lambda}=\hat{\kappa}$

$\widehat{\alpha}+90^o=180^o \Rightarrow \widehat{\alpha}=90^o=\widehat{\chi}$

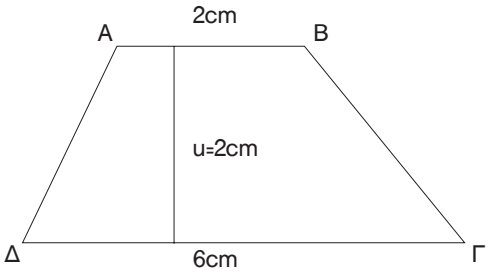
$\widehat{\omega}+\widehat{\chi}+\hat{\kappa}=180^o \Rightarrow \widehat{\omega}=40^o$

3.3

1.



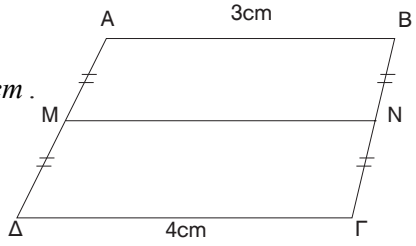
2.



3.

α) $AB+\Gamma\Delta = 3+4 = 7cm$

β) $MN = M\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma N$ ή $MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} = \frac{7}{2} = 3,5cm$.



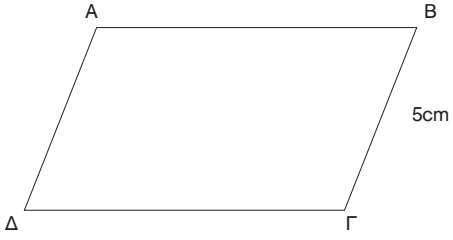
3.4

1.

$\widehat{A} = \widehat{\Gamma} = 120^o$

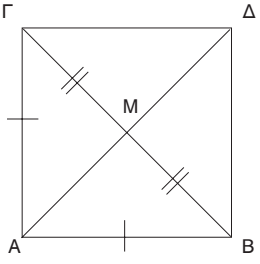
$\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 60^o$

2. Μετράμε με υποδεκάμετρο.



3. Μετράμε με υποδεκάμετρο.

4. Τα σημεία Α,Β,Γ,Δ ισαπέχουν απο τα τμήματα ΑΔ, ΓΒ.



5. Χρησιμοποιούμε υποδεκάμετρο και μοιρογνωμόνιο
γ) πλευρές ίσες

6.
Χρησιμοποιούμε υποδεκάμετρο
γ) πλευρές ίσες

7.
$\hat{\gamma} = 65^o$
$\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$
$\hat{\gamma} + \hat{\eta} = 180^o \Rightarrow \hat{\eta} = 115^o$
$115^o + 30^o + \widehat{\zeta} = 180^o \Rightarrow \widehat{\zeta} = 35^o$
$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \hat{\gamma} + \hat{\delta} = 360^o \Rightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 115^o$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

I.
1 - Λ
2 - Λ
3 - Λ
4 - Λ
5 - Σ
6 - Λ
7 - Σ
8 - Λ
9 - Λ
10 - Σ

II.
1 - γ
2 - α
3 - α
4 - α
5 - δ
6 - α
7 - β