

Επιλογή ασκήσεων

από τα θέματα του διαγωνισμού Αρχιμήδης

1

Αν ο αριθμός

$$K = \frac{9n^2 + 31}{n^2 + 7}$$

είναι ακέραιος, να προσδιορίσετε τις τιμές του ακέραιου n .

Σάββατο 21 Φεβρουαρίου 2009

2

Από την κορυφή A ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ φέρουμε ημιευθεία $A\alpha$ που τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Δ . Πάνω στην $A\alpha$ παίρνουμε σημείο E τέτοιο ώστε $BA = BE$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{E}\Gamma$.

Σάββατο 21 Φεβρουαρίου 2009

3

Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80\kappa + 3\lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Σάββατο 27 Φεβρουαρίου 2010

4

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$ και $B\Gamma = \beta$. Έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = AO$ και την διαγώνιο ΔB προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = BO$. Αν το τρίγωνο $EZ\Gamma$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

(i) $\beta = \alpha\sqrt{3}$, (ii) $AZ = EO$, (iii) $EO \perp Z\Delta$.

Σάββατο 27 Φεβρουαρίου 2010

5

Θεωρούμε το σύνολο των τετραψήφιων θετικών ακέραιων αριθμών $x = \overline{\alpha\beta\gamma\delta}$ των οποίων όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά από το μηδέν και διαφορετικά μεταξύ τους. Θεωρούμε επίσης τους αριθμούς $y = \overline{\delta\gamma\beta\alpha}$ και υποθέτουμε $x > y$. Βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή της διαφοράς $x - y$, καθώς και τους αντίστοιχους τετραψήφιους ακέραιους x, y για τους οποίους λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Σάββατο 26 Φεβρουαρίου 2011

6

Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση

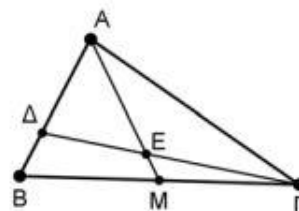
$$|x-4| - 2x + 8 = ax + 4.$$

Σάββατο 3 Μαρτίου 2012

7

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB < A\Gamma$. Έστω M το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε, αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ τέμνει τη διάμεσο AM στο σημείο E , τότε ισχύει ότι $A\Delta = DE$. Να αποδείξετε ότι $AB = \Gamma E$. *Μονάδες 5*



Σάββατο 23 Φεβρουαρίου 2013

8

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC . Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \perp AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD .

Σάββατο 22 Φεβρουαρίου 2014

9

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p, m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m) + p = (m+1)^3.$$

Σάββατο 22 Φεβρουαρίου 2014

10

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{Q}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Σάββατο 28 Φεβρουαρίου 2015