

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

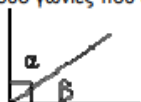
ΑΠΟ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

- **Μηδενική** είναι η γωνία που οι πλευρές της συμπίπτουν και είναι ίση με 0° .
- **Ορθή** είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι κάθετες και είναι ίση με 90° .
- **Ευθεία** είναι η γωνία που οι πλευρές της είναι η μια προέκταση της άλλης και είναι ίση με 180° .
- **Πλήρης** είναι η γωνία που η μια πλευρά της, αφού κάνει μια πλήρη στροφή συμπίπτει με την άλλη πλευρά και είναι ίση με 360° .
- **Οξεία γωνία** είναι κάθε γωνία που είναι μικρότερη από 90° .
- **Αμβλεία γωνία** είναι κάθε γωνία που είναι μεγαλύτερη από μια ορθή και μικρότερη από 180° .



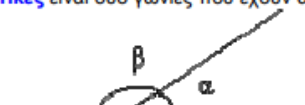
Απόσταση σημείου από ευθεία είναι το μήκος του κάθετου τμήματος που φέρνουμε από το σημείο στην ευθεία

Συμπληρωματικές είναι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 90° .



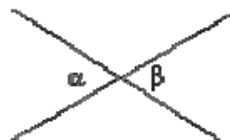
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}, \hat{\beta} \text{ συμπληρωματικές}$$

Παραπληρωματικές είναι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα 180° .



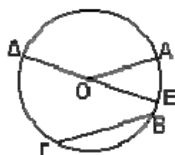
$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ \Rightarrow \hat{\alpha}, \hat{\beta} \text{ παραπληρωματικές}$$

Κατακορυφήν είναι δύο γωνίες που οι πλευρές της μιας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης. Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι **πάντα ίσες**.



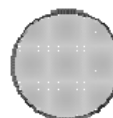
$$\text{Οι } \hat{\alpha} \text{ και } \hat{\beta} \text{ κατακορυφήν} \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

Στοιχεία κύκλου



Ο κέντρον του κύκλου
ΟΑ ακτίνα κύκλου
ΒΓ χορδή
ΔΕ διάμετρος
ΒΓ τόξο (ένα μέρος του κύκλου)

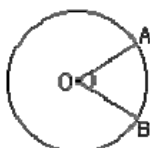
- **Κυκλικός δίσκος** είναι το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από ένα κύκλο.



- Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους:

- Σε **ίσες χορδές** αντιστοιχούν **ίσα τόξα**
- Σε **ίσα τόξα** αντιστοιχούν **ίσες χορδές**.

- **Επίκεντρη γωνία** είναι η γωνία που έχει κορυφή το κέντρο του κύκλου και πλευρές δύο ακτίνες του.

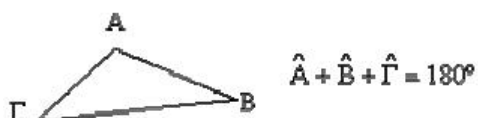


$$\hat{\omega} = \text{Επίκεντρη γωνία με } \widehat{AB} \text{ αντιστοιχο τόξο}$$

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

- **Διάμεσος** τριγώνου είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Το σημείο τομής των διαμέσων λέγεται **κέντρο βάρους** ή **βαρύκεντρο** του τριγώνου.
- **Διχοτόμος** τριγώνου είναι η διχοτόμος μιας γωνίας του. Το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου λέγεται **έγκεντρο** του τριγώνου.
- **Ύψος** τριγώνου είναι η απόσταση μιας κορυφής του τριγώνου από την απέναντι πλευρά (μήκος της κάθετης που φέρνουμε από τη κορυφή στην απέναντι πλευρά). Το σημείο τομής των υψών τριγώνου λέγεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου.

Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με 180° .



Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του

Είδη τριγώνων

(α) Ανάλογα με τις γωνίες του

- **Οξυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
- **Ορθογώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή (και τις δύο άλλες οξείες). Οι πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία του τριγώνου τις λέμε **κάθετες πλευρές** του ενώ η πλευρά που είναι απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** του.
- **Αμβλυγώνιο** λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία αμβλεία (και τις δύο άλλες οξείες).



οξυγώνιο



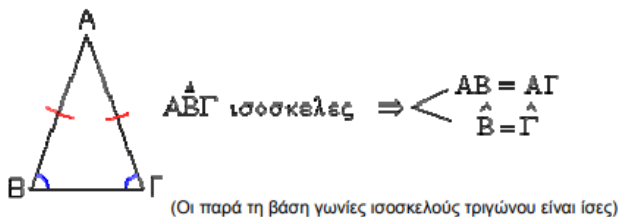
ορθογώνιο



αμβλυγώνιο

β) Ανάλογα με τις πλευρές του

- **Ισοσκελές** λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.

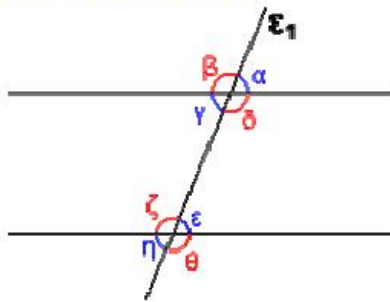


- **Ισόπλευρο** λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει και όλες τις γωνίες του ίσες.
- **Σκαληνό** λέγεται το τρίγωνο που έχει τις πλευρές του άνισες.

ΓΩΝΙΕΣ ΑΠΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

1. Δύο ευθείες του ίδιου επιπέδου που όσο και αν προεκταθούν δεν έχουν κοινά σημεία λέγονται **παράλληλες**

2. Γωνίες παράλληλων ευθειών



Οι γωνίες γ, δ, ε και ζ λέγονται **εντός γωνίες**
 Οι γωνίες α, β, η και θ λέγονται **εκτός γωνίες**
 Οι γωνίες α, δ, ε και θ λέγονται **επί τα αυτά μέρη γωνίες**
 Οι γωνίες β, γ, ζ και η είναι επίσης **επί τα αυτά μέρη γωνίες**
 Οι γωνίες δ και ζ, οι γ και ε, οι α και η κ.τ.λ. που βρίσκονται σε διαφορετική πλευρά της ευθείας ε1 λέγονται **εναλλάξ γωνίες**

Ετσι:

- οι γωνίες δ και ζ είναι **εντός εναλλάξ γωνίες**
- οι γωνίες ε και α είναι **εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες**

- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες ($\hat{\delta} = \hat{\zeta}$ και $\hat{\gamma} = \hat{\epsilon}$)
- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες ($\hat{\alpha} = \hat{\epsilon}$, $\hat{\delta}_1 = \hat{\theta}$, $\hat{\beta} = \hat{\zeta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\eta}$)
- Οι εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές ($\hat{\delta} + \hat{\epsilon} = 180^\circ$, $\hat{\gamma} + \hat{\zeta} = 180^\circ$)

3. Όταν δύο ευθείες τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες ή δύο εντός εκτός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές τότε είναι παράλληλες.

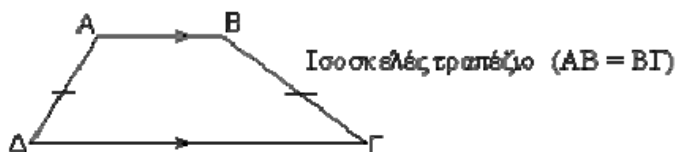
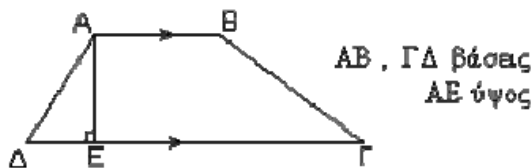
3

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ – ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

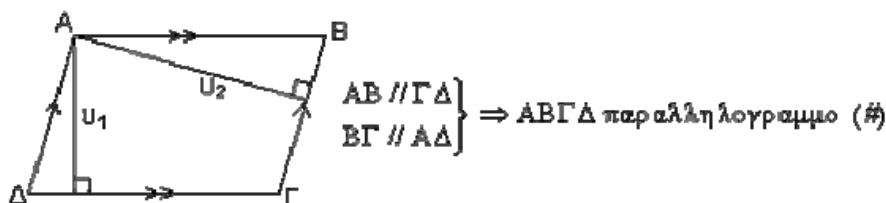
Τετράπλευρα

Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι 360°

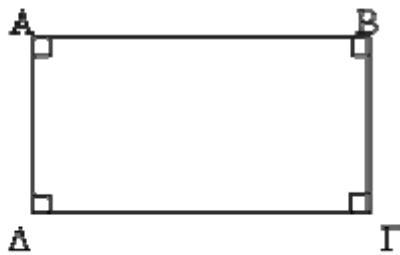
- **Τραπεζίο** είναι το τετράπλευρο που έχει δύο πλευρές παράλληλες (**βάσεις** του τραπεζίου) ενώ οι δύο άλλες πλευρές δεν είναι παράλληλες. Η απόσταση των βάσεων ενός τραπεζίου λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου είναι ίσες, τότε το τραπεζίο λέγεται **ισοσκελές**. Αν η μια μη παράλληλη πλευρά του είναι κάθετη στις βάσεις του τότε το τραπεζίο λέγεται **ορθόγωνιο**.



- **Παραλληλόγραμμο** είναι το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι του πλευρές παράλληλες. Η απόσταση δύο απέναντι πλευρών του λέγεται **ύψος** του παραλληλόγραμμου.



- **Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει τις γωνίες του ορθές.



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ \Rightarrow \text{ΑΒΓΔ ορθογώνιο}$$

- **Ρόμβος** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες

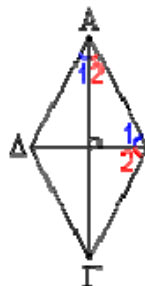


$$AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \Rightarrow \text{ΑΒΓΔ ρόμβος}$$

Ιδιότητες ρόμβου

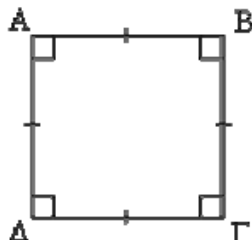
- Έχει όλες τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
- Οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα.
- Οι διαγώνιες του διχοτομούν τις γωνίες του.

4



$$\text{ΑΒΓΔ ρόμβος} \Rightarrow \begin{cases} AG \perp BD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \text{ κ.ο.κ} \end{cases}$$

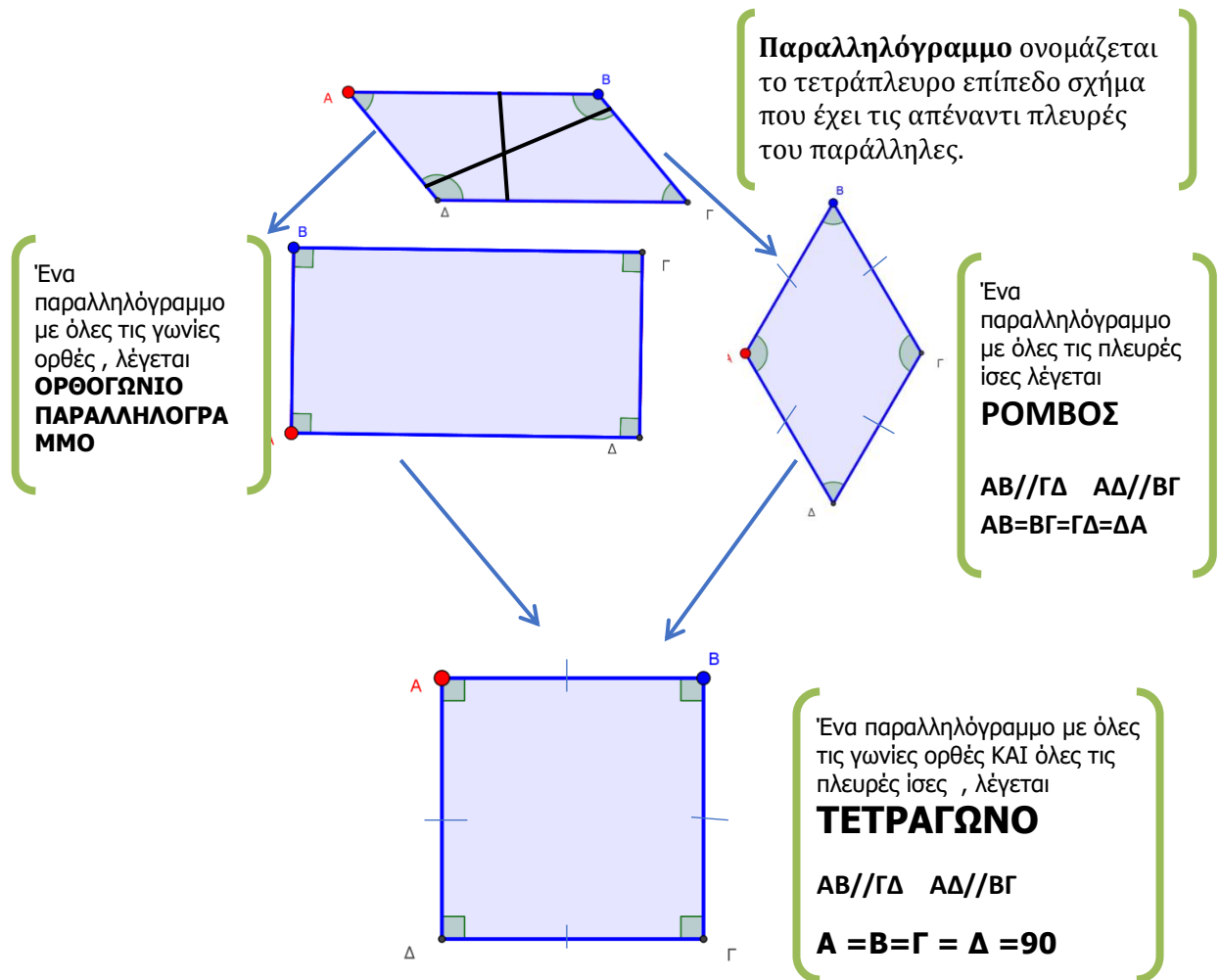
- **Τετράγωνο** είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες.



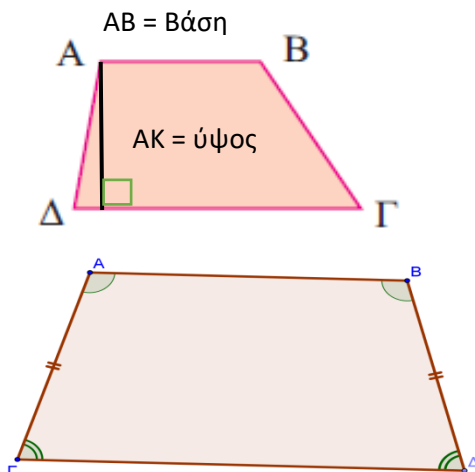
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ \\ AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ΑΒΓΔ τετράγωνο}$$

Ιδιότητες τετραγώνου

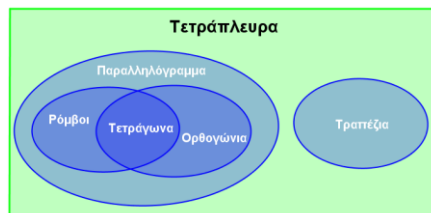
- Έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου
- Έχει όλες τις ιδιότητες του ρόμβου.



5



- Ένα τετράπλευρο με δύο μόνο απέναντι πλευρές παράλληλες ονομάζεται **Τραπέζιο** ($AB//\Gamma\Delta$)
- Αν σε ένα τραπέζιο οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες τότε ονομάζεται **ισοσκελές τραπέζιο** $AB//\Gamma\Delta$, $A\Delta=B\Gamma$.
Επίσης στο ισοσκελές τραπέζιο:
Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του είναι ίσες



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

	ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ • Το σημείο τομής των διαγωνίων το λέμε κέντρο του παραλληλογράμμου • Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες • Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες • Οι διαγώνιοι διχοτομούνται (κάθε μια περνά από το μέσο της άλλης)
	ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ + • Οι διαγώνιες είναι ίσες • Οι μεσοκάθετοι των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας
	ΡΟΜΒΟΣ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ + ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ + • Οι διαγώνιες είναι κάθετες και διχοτομούνται • Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες • Οι ευθείες των διαγωνίων είναι άξονες συμμετρίας
	ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ + ΙΣΧΥΕΙ ΟΤΙ ΣΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ + ΟΤΙ ΣΤΟ ΡΟΜΒΟ