Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει τη σφραγίδα των εκδόσεων ΒΟΛΟΝΑΚΗ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΒΟΛΟΝΑΚΗ

Μαυρομιχάλη 41 & Βαλτετσίου, Αθήνα
Τηλ.: 210 3608065, Fax: 210 3608197
www.volonaki.gr, mail: info@volonaki.gr

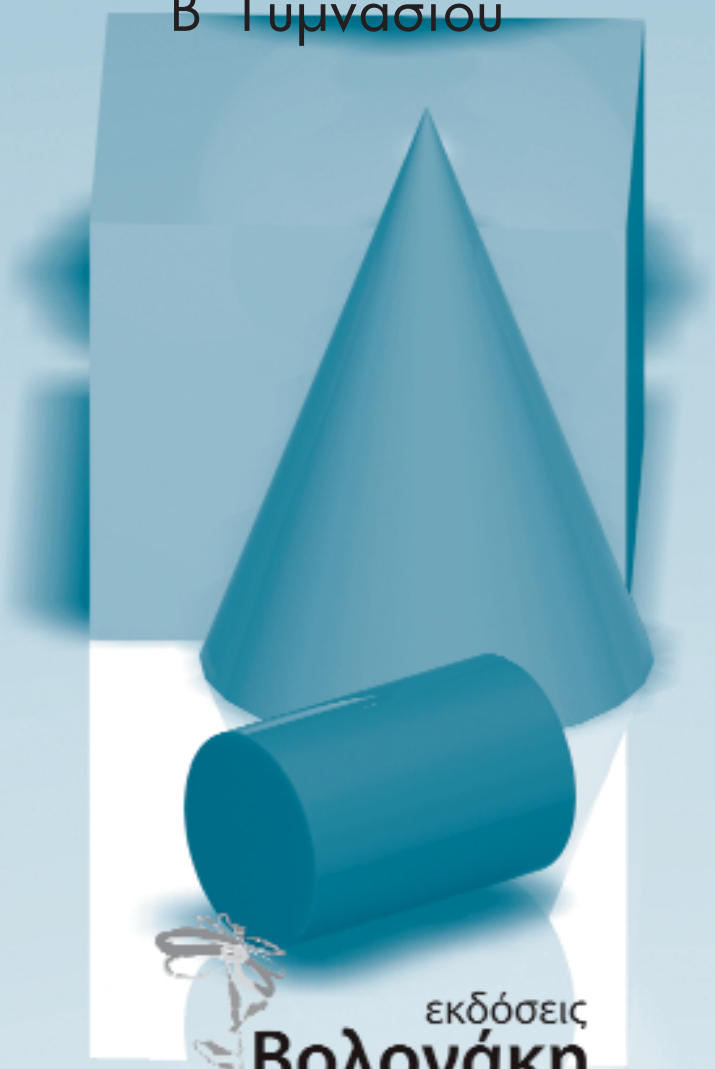
Διορθώσεις δοκιμίων: *Αθανάσιος Τσιόνκης*
Δημιουργικό εξωφύλλου: *Κωνσταντίνος Παπακωνσταντίνου*
Ηλεκτρονική σελιδοποίηση: *Πάρις Καρδαμίτσης*

ISBN 978-960-381-362-0

Αθανάσιος Π. Τσιόνκης

Μαθηματικά

Β΄ Γυμνασίου



εκδόσεις
Βολονάκη

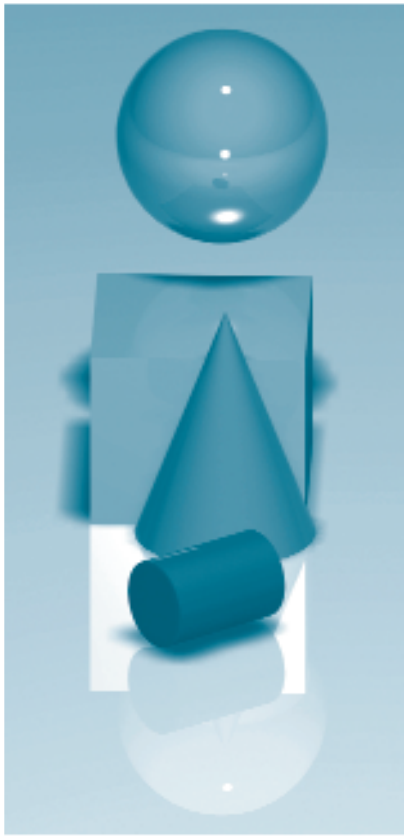
Στα παιδιά μου
Πέτρο, Γιάννη, Άννα-Ελένη

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί συμπλήρωμα του σχολικού εγχειριδίου και φιλοδοξεί να συμβάλλει στην καλύτερη εμπέδωση της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, η οποία αποτελεί τη βάση για την ύλη των μαθηματικών των επόμενων τάξεων.
Ο σκοπός αυτός καθόρισε τη δομή και το περιεχόμενο του βοηθητικού αυτού βιβλίου. Παρατίθενται ανά κεφάλαιο:

- Θεωρία
- Παρατηρήσεις - Σχόλια
- Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις
- Ερωτήσεις κατανόησης (πολλαπλής επιλογής, αντιστοίχισης, σωστό-λάθος)
- Ασκήσεις για λύση
- Κριτήρια αξιολόγησης (στο τέλος κάθε κεφαλαίου)
- Λύσεις-απαντήσεις σε όλα τα θέματα.

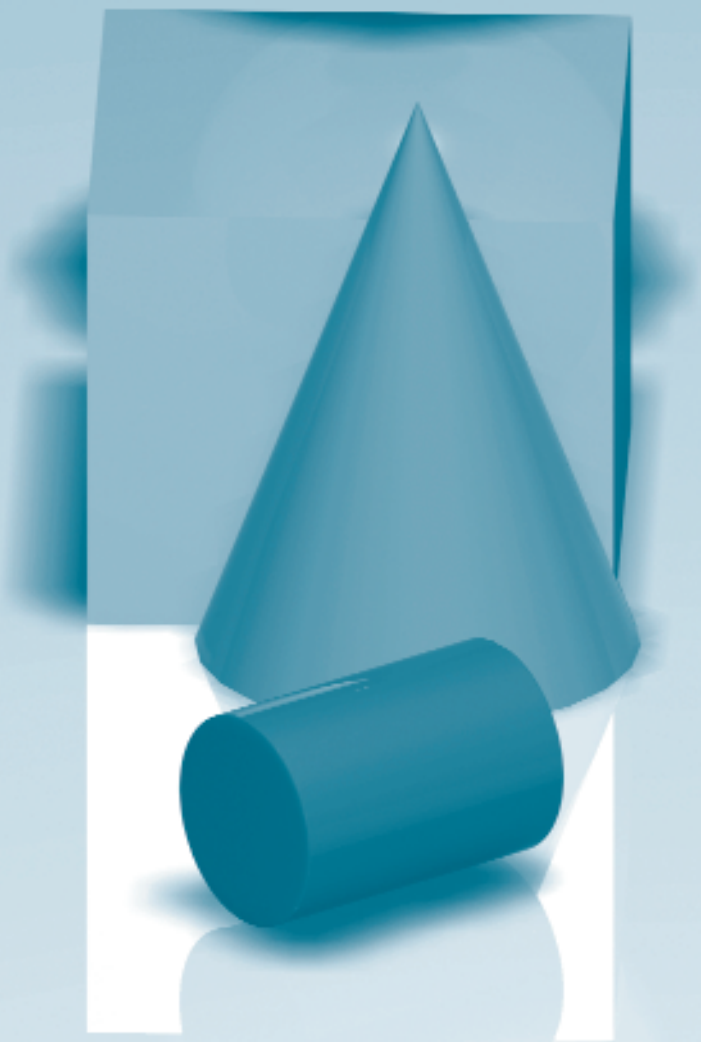
Ελπίζω το βιβλίο αυτό όχι μόνο να βοηθήσει τους μαθητές αλλά να αποτελέσει και ένα χρήσιμο εργαλείο στα χέρια των συναδέλφων μαθηματικών.



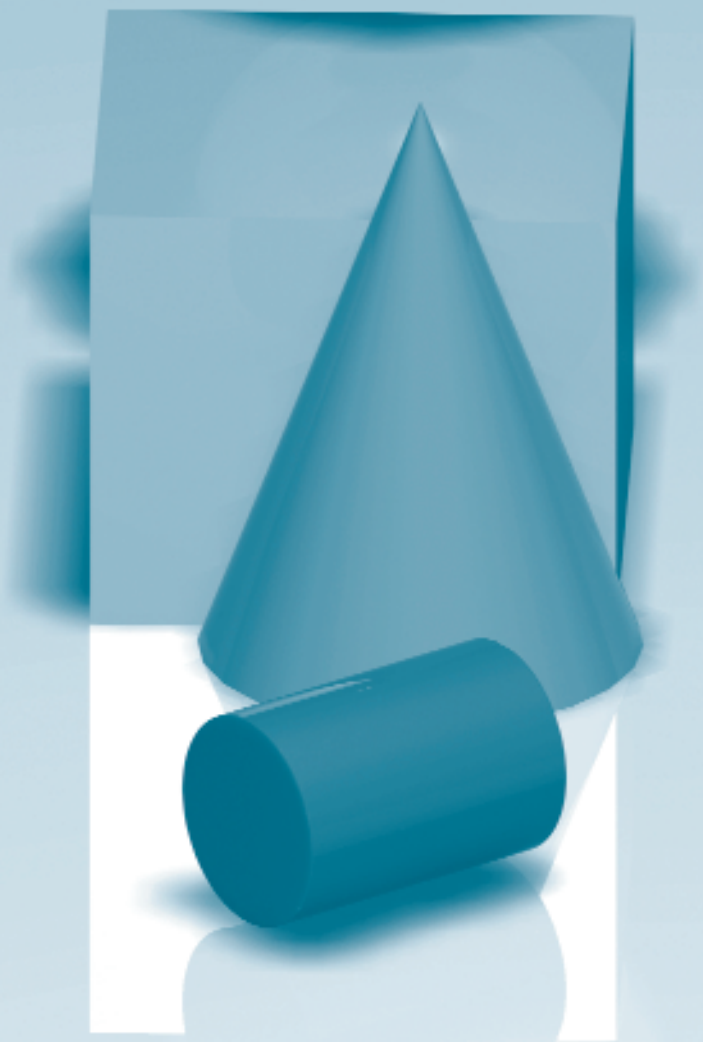
Αθανάσιος Π. Τσιόνκης

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Α΄



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο



1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Όταν παίρνουμε ταξί, πληρώνουμε 1,2 ευρώ για τη σημαία, και 0,5 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.
Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι:

- για μια διαδρομή 5 χιλιομέτρων, θα πληρώσουμε
  $1{,}2 + 0{,}5 \cdot 5 = 3{,}7$ ευρώ
- για μια διαδρομή 8 χιλιομέτρων, θα πληρώσουμε
  $1{,}2 + 0{,}5 \cdot 8 = 5{,}2$ ευρώ
- για μια διαδρομή 10 χιλιομέτρων, θα πληρώσουμε
  $1{,}2 + 0{,}5 \cdot 10 = 6{,}2$ ευρώ

Για να βρούμε λοιπόν πόσο θα πληρώσουμε, προσθέτουμε στο 1,2 το γινόμενο 0,5 · (χιλιόμετρα διαδρομής).
Για ευκολία συμβολίζουμε με το γράμμα x τα χιλιόμετρα της διαδρομής οπότε έχουμε:

$$\text{ποσό} = 1{,}2 + 0{,}5x \cdot \text{ευρώ}$$

Το γράμμα x που παριστάνει οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.

Ορισμός

Γενικά, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου, ευκολύνει τη διατύπωση να δηλώσουμε το στοιχείο αυτό με ένα γράμμα. Το γράμμα αυτό ονομάζεται **μεταβλητή**. Συνήθως οι μεταβλητές παριστάνονται με γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ή και με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. (α, β, γ, x, y, z, t, ...)

Αλγεβρικές παραστάσεις

- **Αριθμητική παράσταση**, ονομάζεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς. Δηλαδή οι παραστάσεις

$$5 \cdot (-2) + 8 : 2 - 3 \quad \text{και} \quad \frac{7 \cdot 6 - 5 \cdot (-4)}{8 \cdot (-3) + 4 \cdot 7}$$

είναι αριθμητικές παραστάσεις

- **Αλγεβρική παράσταση** ονομάζεται μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές. Δηλαδή οι παραστάσεις

$-7x + 3 + 2y$ και $\dfrac{6x^2 - 5}{x+1}$

είναι αλγεβρικές παραστάσεις

Αναγωγή ομοίων όρων

Με εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας
$\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$ ή
$\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = (\alpha - \beta) \cdot \gamma$
μπορούμε μια αλγεβρική παράσταση να την γράψουμε σε απλούστερη μορφή. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **αναγωγή ομοίων όρων**.

Παραδείγματα

α) $3 \cdot x + 5 \cdot x = (3 + 5) \cdot x = 8 \cdot x$
β) $5 \cdot \alpha - \alpha + 7 \cdot \alpha = (5 - 1 + 7) \cdot \alpha = 11 \cdot \alpha$
γ) $y + 13 \cdot y + 5 = (1 + 13) \cdot y + 5 = 14 \cdot y + 5$

Παρατηρήσεις – Σχόλια

Στις αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο (.) του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Αν πολλαπλασιάζουμε όμως δύο αριθμούς πρέπει οπωσδήποτε να βάλουμε το σύμβολο (·) του πολλαπλασιασμού.
Γράφουμε
$7x - 3y$ αντί $7 \cdot x - 3 \cdot y$
$51\,(3x\omega - 2y)$ αντί $51 \cdot (3 \cdot x \cdot \omega - 2 \cdot y)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις
α) $5\alpha - 3\alpha + 18\alpha$
β) $x + 3x - 7x + 10x$
γ) $4\omega + 5x - \omega + 2x$
δ) $y - 3\omega - 8y + 6\omega - 2$

Λύση

Έχουμε:
α) $5\alpha - 3\alpha + 18\alpha = (5 - 3 + 18) \cdot \alpha = 20\alpha$
β) $x + 3x - 7x\ 10x = (1 + 3 - 7 + 10)\, x = 7x$
γ) $4\omega + 5x - \omega + 2x = (4 - 1)\, \omega + (5 + 2)\, x = 3\omega + 7x$
δ) $y - 3\omega - 8y + 6\omega - 2 = (1 - 8)\, y + (-3 + 6)\, \omega - 2 = -7y + 3\omega - 2$

2) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A = 2(x - 2y + 1) - 3(2x - y - 3) - 4x$ όταν $x = -1$ και $y = 1$

Λύση

Έχουμε:
$A = 2(x - 2y + 1) - 3(2x - y - 3) - 4x = 2x - 4y + 2 - 6x + 3y + 9 - 4x =$
$(2 - 6 - 4)x + (-4 + 3)y + 11 = -8x - y + 11$
Οπότε όταν $x = -1$ και $y = 1$ είναι:
$A = -8 \cdot (-1) - 1 + 11 = 8 - 1 + 11 = 18$

3) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A = -\alpha - 17 - [-5 + \beta - 3 + \gamma - (\gamma + 9)]$ όταν $\alpha + \beta = -12$

Λύση

Έχουμε
$A = -\alpha - 17 - (-5 + \beta - 3 + \gamma - (\gamma + 9) =$
$= -\alpha - 17 - (-5 + \beta - 3 + \gamma - \gamma - 9) =$
$= -\alpha - 17 + 5 - \beta + 3 + 9$
$= -\alpha - \beta$
$= -(\alpha + \beta)$
$= -(-12)$
$= 12$

4) Αν $x - y = \frac{1}{2}$ και $\alpha - \beta = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A = 2x + \alpha x + \beta y - \beta x - \alpha y - 2y$

Λύση

Έχουμε:
$A = 2x + \alpha x + \beta y - \beta x - \alpha y - 2y$
$A = 2x - 2y + \alpha x - \alpha y + \beta y - \beta x$
$A = 2(x - y) + \alpha(x - y) + \beta(y - x)$
$A = 2(x - y) + \alpha(x - y) - \beta(x - y)$
$A = 2 \cdot \frac{1}{2} + \alpha \cdot \frac{1}{2} - \beta \cdot \frac{1}{2}$
$A = 1 + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$A = 1 + \frac{1}{2}(-2)$
$A = 1 - 1$
$A = 0$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α, με ένα στοιχείο της στήλης Β.

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
α.	$7x - 4x + x$	1. $5x$
β.	$x + 3x - 5x$	2. $4x$
γ.	$-3 - 2x + 7x$	3. $-8x$
δ.	$-3x + 4x - 9x$	4. $-x$
		5. $7x$
		6. $2x$

2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος)

α) $15\alpha - 4\alpha + \alpha = 11\alpha$

β) $2(x - 1) + (-x + 2) = + x$

γ) $(-3\omega + 7) - (2\omega + 6) = -\omega + 1$

δ) $-y + (y - 2) + (3y + 2) = 3y + 2$

ε) $7x - (x + 1) - (6x + 6) = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:

α) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 7.

β) Την περίμετρο και το εμβαδόν ενός τετραγώνου.

γ) Το ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 3 κιλά πορτοκάλια.

δ) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν το αγοράσουμε με έκπτωση 20%.

ε) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, αν το πλάτος του είναι 5m μικρότερο από το μήκος του.

στ) Ο Πέτρος έχει 10 ευρώ περισσότερα από το $\frac{1}{2}$ των χρημάτων του Γιάννη.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2x - 3y + 7x - y$

β) $5\alpha - 22\beta + 16\alpha - 5\beta + \alpha$

γ) $-\omega + 3 + 4\omega - 5\omega$

δ) $\frac{6}{10}x - 1{,}3y + 2{,}5x - \frac{6}{4}y$

ε) $13x - 7 + 3y - x - 2y + 7 - (11x + y)$

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους.

α) $A = 5x - 2(6 - 3x) + 4(2 + x)$ όταν $x = -3$

β) $B = 7 \cdot (\alpha - 2\beta) - 2(3\alpha + 3\beta) + 5$ όταν $\alpha = 7$ και $\beta = -1$

γ) $\Gamma = 19 - 2(\alpha - \beta) - (2\beta - x) - (\alpha + 12)$ όταν $x = 5$ και $\alpha = -6$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = 5(\alpha - 2\beta) - 3(2\alpha - 3\beta) + 7$ όταν $\alpha + \beta = -8$

β) $B = -x + 2(3x - y) - 4(y - 3) + x$ όταν $x - y = \frac{1}{6}$

γ) $\Gamma = 3 - \alpha + (\beta - x) - (y - \alpha) - (\beta - 1)$, όταν $x + y = -11$

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$A = (\beta - \gamma) - \beta(2 + \gamma) - \gamma(\alpha + \beta) + \beta(\gamma - 2)$ αν $\beta = -\frac{1}{2}$ και α, γ αντίστροφοι αριθμοί.

6. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

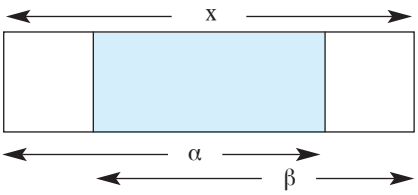
$B = 3x - 4y - (-5x + 7y) + (10 - 9x + 8y)$ όταν $x = -10$ και $y = -\frac{1}{3}$

7. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 40m. Αν είναι x η μια πλευρά του ορθογώνιου, να βρείτε

α) μια αλγεβρική παράσταση που να παριστάνει την άλλη πλευρά του ορθογωνίου

β) μια αλγεβρική παράσταση που παριστάνει το εμβαδό του ορθογωνίου.

8. Να βρείτε μια αλγεβρική παράσταση η οποία να εκφράζει το μήκος του διαγραμμισμένου ορθογωνίου.



1.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

- **Εξίσωση με έναν άγνωστο** ονομάζεται η ισότητα που περιέχει έναν άγνωστο αριθμό x.

π.χ. $3 \cdot x + 4 = 5$, $8(x - 2) + 3 = 5x - 7$, $7x - 1 = 4x + 6$

- **Πρώτο μέλος** της εξίσωσης λέγεται η παράσταση που είναι πριν το "=" ενώ **δεύτερο μέλος** λέγεται η παράσταση που είναι μετά το "="

Στην εξίσωση $\underbrace{7x - 1}_{1^{\circ}\ \text{μέλος}} = \underbrace{4x + 6}_{2^{\circ}\ \text{μέλος}}$

- **Άγνωστοι όροι** της εξίσωσης λέγονται οι όροι που περιέχουν την μεταβλητή x, ενώ **γνωστοί όροι** λέγονται αυτοί που δεν περιέχουν την μεταβλητή x.

Στην εξίσωση $7x - 1 = 4x + 6$ έχουμε:
7x, 4x είναι οι **άγνωστοι όροι**, ενώ
–1, 6 είναι οι **γνωστοί όροι**

- Ο άγνωστος της εξίσωσης x μπορεί να παρασταθεί και με οποιοδήποτε άλλο γράμμα y, ω, t, z...
- **Λύση ή ρίζα** της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που επαληθεύει την εξίσωση.

■ Στην διαδικασία **επίλυσης** μιας εξίσωσης χρησιμοποιούμε τις παρακάτω ιδιότητες πράξεων.

1) Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας, τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

2) Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας, τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

3) Αν πολλαπλασιάσουμε και από τα δύο μέλη μιας ισότητας, με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$

4) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας, με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα.
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha : \gamma = \beta : \gamma$ με $\gamma \neq 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Σε μια εξίσωση μπορούμε να μεταφέρουμε όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο τους.

- Γενικά για να λύσουμε μια εξίσωση κάνουμε τα εξής βήματα:

1ο βήμα: Απαλείφουμε τους παρονομαστές (αν υπάρχουν).
2ο βήμα: Κάνουμε τους σημειωμένους πολλαπλασιασμούς.

3ο βήμα: Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων.
4ο βήμα: Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους (όταν ένας όρος αλλάζει μέλος αλλάζει και πρόσημο).
5ο βήμα: Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
6ο βήμα: Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και τα δύο μέλη (αρκεί να είναι διαφορετικός του μηδέν).

Παρατηρήσεις – Σχόλια

1. Απαλοιφή παρονομαστών ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών τους και κάνουμε τις απλοποιήσεις, οπότε η εξίσωση που προκύπτει δεν έχει παρονομαστές.
2. Μετά την απαλοιφή των παρονομαστών, βάζουμε τους αριθμητές μέσα σε παρενθέσεις.
3. Μια εξίσωση δεν αλλάζει, αν γράψουμε το πρώτο μέλος της δεύτερο και το δεύτερο μέλος πρώτο.

Διερεύνηση της εξίσωσης $\alpha \cdot x = \beta$
1η περίπτωση: Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει τη $x = \frac{\beta}{\alpha}$ λύση
2η περίπτωση: Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη (δεν έχει καμία λύση), διότι για κάθε τιμή του x, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται πάντα με 0, οπότε δεν μπορεί να είναι ίσο με $\beta \neq 0$.
3η περίπτωση: Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$, τότε η εξίσωση επαληθεύται για όλες τις τιμές του x, και λέγεται ταυτότητα (έχει άπειρες λύσεις).

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθεί η εξίσωση: $-7x + 8 = 4 - 3x$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$-7x + 8 = 4 - 3x$

$-7x + 3x = 4 - 8$ (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$-4x = -4$ (κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

$\frac{-4x}{-4} = \frac{-4}{-4}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου)

Άρα $x = 1$

2) Να λυθεί η εξίσωση: $7 \cdot (x + 5) = 2(x - 1) - 3$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά:

$7 \cdot (x + 5) = 2(x - 1) - 3$

$7x + 35 = 2x - 2 - 3$ (κάνουμε τους σημειωμένους πολλαπλασιασμούς)

$7x - 2x = -2 - 3 - 35$ (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$5x = -40$ (κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων)

$\frac{5x}{5} = \frac{-40}{5}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου)

Άρα $x = -8$

3) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{3} - \frac{2y+1}{3} = 7$

Λύση

Έχουμε:

$\frac{y+1}{3} - \frac{2y+1}{3} = 7$ ΕΚΠ $=3$

$3 \cdot \frac{y+1}{3} - 3\frac{2y+1}{3} = 3 \cdot 7$ (κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚΠ = 3)

$(y + 1) - (2y + 1) = 21$

$y + 1 - 2y - 1 = 21$ (απαλοιφή παρενθέσεων)

$y - 2y = 21 - 1 + 1$ (χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους)

$-y = 21$ (αναγωγή ομοίων όρων)

$\frac{-y}{-1} = \frac{21}{-1}$ (διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου)

Άρα $y = -21$

4) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3x-1}{4} - \frac{2x-5}{6} = \frac{5x+1}{12}$

Λύση

Έχουμε:

$\frac{3x-1}{4} - \frac{2x-5}{6} = \frac{5x+1}{12}$ Ε.Κ.Π. $(4,6,12) = 12$

$12 \cdot \frac{3x-1}{4} - 12 \cdot \frac{2x-5}{6} = 12 \cdot \frac{5x+1}{12}$

$3 \cdot (3x - 1) - 2 \cdot (2x - 5) = 1 \cdot (5x + 1)$

$9x - 3 - 4x + 10 = 5x + 5$

$9x - 4x - 5x = 5 + 3 - 10$

$0x = -2$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

5) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3}{5}-\frac{\omega+1}{10}=\frac{5-\omega}{10}$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά: $\frac{3}{5}-\frac{\omega+1}{10}=\frac{5-\omega}{10}$ Ε.Κ.Π. $(5,10)=50$

$$50\cdot\frac{3}{5}-50\frac{\omega+1}{10}=50\cdot\frac{5-\omega}{10}$$

$10 \cdot 3 - 5 \cdot (\omega + 1) = 5 \cdot (5 - \omega)$

$30 - 5\omega - 5 = 25 - 5\omega$

$-5\omega + 5\omega = 25 - 30 + 5$

$0\omega = 0$

Άρα η εξίσωση είναι ταυτότητα, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

6) Να βρείτε την τιμή του αριθμού λ ώστε η εξίσωση $\lambda \cdot (x - 2) + 5 = 2 \cdot (x - \lambda)$ να είναι αδύνατη.

Λύση

Έχουμε:

$\lambda \cdot (x - 2) + 5 = 2 \cdot (x - \lambda)$

$\lambda x - 2\lambda + 5 = 2 \cdot x - 2\lambda$

$\lambda x - 2x = -2\lambda + 2\lambda + 5$

$(\lambda - 2) \cdot x = 5$

Για να είναι η εξίσωση αδύνατη πρέπει ο συντελεστής $\lambda - 2$ του x να είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή πρέπει $\lambda - 2 = 0$ άρα $\lambda = 2$.

7) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η εξίσωση $4x - 3 = \alpha x - \beta$ να είναι ταυτότητα.

Λύση

Έχουμε:

$4x - 3 = \alpha x - \beta$

$4x - \alpha x = 3 - \beta$

$(4 - \alpha)x = 3 - \beta$

Για να είναι η εξίσωση ταυτότητα πρέπει

$4 - \alpha = 0$ και $3 - \beta = 0$

άρα $\alpha = 4$ και $\beta = 3$

8) Να λυθεί η εξίσωση: $(x - 2) \cdot (3x - 5) \cdot (7 + 4x) = 0$

Λύση

- Για να είναι ένα γινόμενο παραγόντων ίσο με το μηδέν, αρκεί ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες να είναι μηδέν.

Δηλαδή: αν $A \cdot B = 0$ τότε $A = 0$ ή $B = 0$

Μπορεί όμως να είναι και οι δύο ίσοι με το μηδέν.

Έχουμε: $(x-2)\cdot(3x-5)\cdot(7+4x)=0$

$x-2=0$ ή $3x-5=0$ ή $7+4x=0$

$\boxed{x=2}$ ή $3x=5$ $\quad$ $4x=-7$

$\frac{3x}{3}=\frac{5}{3}$ $\quad$ $\frac{4x}{4}=\frac{-7}{4}$

$\boxed{x=\frac{5}{3}}$ $\quad$ $\boxed{x=-\frac{7}{4}}$

9) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x + 5 = 3x - 7$

α) Αν $\lambda = 5$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = -6$

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 3$, να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$

γ) Αν $\lambda = +3$, να λύσετε την εξίσωση

Λύση

α) Αν $\lambda = 5$ έχουμε $5x + 5 = 3x - 7$

$$5x - 3x = -7-5$$
$$2x = -12$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-12}{2}$$
$$\boxed{x=-6}$$

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 3$, τότε

$$\lambda\cdot 3 + 5 = 3\cdot 3 - 7$$
$$3\lambda = 9-7-5$$
$$3\lambda = -3$$
$$\frac{3\lambda}{3}=\frac{-3}{3}$$
$$\boxed{\lambda=-1}$$

γ) Αν $\lambda = 3$ έχουμε $3x + 5 = 3x - 7$

$$3x - 3x = -7-5$$
$$0\cdot x = -12$$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

α) $13 + \quad = 25$

β) $7 \cdot \quad = 42$

γ) $3 \cdot \quad + 2 = 23$

δ) $256 - \quad = 187$

ε) $47 - \quad = 52$

στ) $9 + \quad = 4$

2. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

α) Η εξίσωση $5x + 15 = 0$ έχει λύση τον αριθμό 3	Σ	Λ
β) Η εξίσωση $2(x + 1) = 2x + 2$ είναι ταυτότητα	Σ	Λ
γ) Η εξίσωση $3 \cdot (2 - x) = 5 - 3x$ είναι ταυτότητα	Σ	Λ
δ) Η εξίσωση $5x - 7 = 2(2x + 3) + x$ είναι αδύνατη	Σ	Λ
ε) Οι εξισώσεις $7 + x = 2$ και $2 - x = 7$ είναι ισοδύναμες (ισοδύναμες σημαίνει ότι έχουν τις ίδιες λύσεις)	Σ	Λ
στ) Η εξίσωση $\lambda x = 6 + 4x$ είναι αδύνατη για $\lambda = 4$	Σ	Λ

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α) $3 \cdot x = -6$	i) 4
β) $-7 \cdot x = -28$	ii) 5
γ) $\frac{1}{5} \cdot x = -2$	iii) -3
	iv) -2
δ) $4x - 5 = 3x$	v) -10

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5x - 7 = 8 + 2x - 3$

β) $2(x - 3) + 9 = 5x - 6$

γ) $9x - 3(2x - 5) = 21$

δ) $8(x - 4) - 6(2 - x) = 2(6x - 1)$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4(3 - x) - 2(3x - 4) = -(16 - x)$

β) $2(3 - 3y) - 3(1 - y) = y - 1$

γ) $3 - 2(3x + 1) = x - 5 \cdot (5 - 7x)$
δ) $6(\omega - 1) - (3\omega + 11) = -7$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x - \{3 + [x - (x + 3)]\} = 5$
β) $x - [-(3x + 1) - 5] = -2(x + 1)$
γ) $-\{2(x - 4) - 3(x + 1) + [10 - 2(x + 1) - 60]\} = 15(x + 1)$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{3x+2}{3} = \dfrac{4x-5}{2}$

β) $\dfrac{-5(x-1)}{4} = \dfrac{3x-2}{3}$

γ) $\dfrac{7(x+3)-5}{5} = \dfrac{2-8x}{3}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2(3x-2)}{7} = \dfrac{1+3x}{2} - x$

β) $\dfrac{x+3}{2} - (x-5) = \dfrac{2(x+1)}{3}$

γ) $\dfrac{3(x+1)}{4} - \dfrac{x+15}{2} = \dfrac{3x-1}{2}$

δ) $\dfrac{5\cdot(4x-3)}{7} - (3x+2) = \dfrac{2-x}{7} - 20$

ε) $\dfrac{2x-1}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(x+1)}{5} - \dfrac{11}{10}$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{-3(x-1)}{2} + \dfrac{2(1-x)}{3} = \dfrac{5(x-1)}{6}$

β) $\frac{3y-1}{2}+\frac{5}{10}=\frac{y-2}{5}+\frac{2y+5}{2}$

γ) $\frac{(1-\omega)}{4}+\frac{2(\omega-2)}{3}=\frac{\omega+11}{6}$

δ) $\frac{\omega}{4}+\frac{\omega+3}{6}=\frac{5\omega}{12}+\frac{1}{2}$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2}{3}\cdot\left(6-\frac{x}{3}\right)=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{3}+\frac{16}{9}\right)$

β) $\frac{2}{5}\left(3-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\omega}{5}\right)=\frac{\omega+2}{10}$

γ) $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{5}-2\right)-3\right]-5=x-\frac{1}{60}$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{3\cdot(2x-6)}{5}=3+\frac{3}{5}\cdot\frac{x-4}{2}$

β) $\frac{1}{9}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}-1\right)-1\right]=\frac{x}{3}+\frac{40}{81}$

γ) $5-\left(\frac{5x-1}{8}-\frac{x+5}{12}\right)=6-\left(\frac{3x+1}{8}+\frac{2x+1}{6}\right)$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{18}-\frac{x-\frac{1}{2}}{9}=\frac{1}{9}\left(-\frac{x}{3}+\frac{2}{5}\right)$

β) $\dfrac{\dfrac{3+\omega}{2}}{5-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$

γ) $\dfrac{5x-\dfrac{1}{2}}{3+\dfrac{5}{2}}=\dfrac{2-\dfrac{x}{3}}{3-\dfrac{1}{3}}$

δ) $\dfrac{x-\dfrac{2x+3}{9}}{4}-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2x-\dfrac{5(x+3)}{6}}{2}$

10. Για ποιά τιμή του x είναι A = B;

α) $A=\dfrac{2(x-3)}{5}-1$ και $B=\dfrac{3(x-2)}{4}$

β) $A=2x-\dfrac{5x-12}{2}$ και $B=2\left(3-\dfrac{x}{4}\right)$

γ) $A=\dfrac{2}{3}-\dfrac{x}{3}+2x-\dfrac{10}{3}$ και $B=x+2\left(3-\dfrac{x}{3}\right)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $(5x-7)\cdot(3x+12)\cdot(x-2)=0$
β) $(-x+3)\cdot(-2x-13)\cdot(7x+3)=0$
γ) $(x-2)\cdot(x2+5)=0$

12. Δίνεται η εξίσωση
$\lambda\cdot(1-x)+3=2x+5+\lambda$
α) Αν λ = 5, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x=-\dfrac{2}{7}$

β) Αν η εξίσωση έχει λύση x = –3, να αποδείξετε ότι $\lambda=-\dfrac{4}{3}$

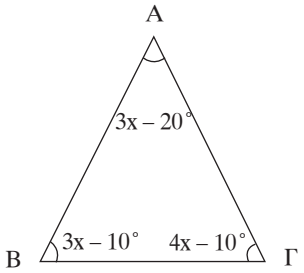
γ) Αν λ = –2, να λύσετε την εξίσωση

13. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η εξίσωση 7x + 5 = αx + β να είναι:
7x + 5 = αx + β να είναι:

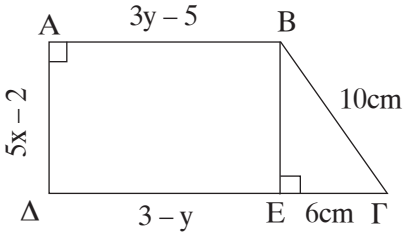
α) ταυτότητα
β) αδύνατη

14. Να βρείτε την τιμή του αριθμού λ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αδύνατες.
α) $(\lambda - 2)x = 9$
β) $5x = 3 - \lambda x$
γ) $2\lambda x + 7 = 2x + 6$
δ) $\dfrac{3\lambda x - 1}{6} = \dfrac{x+3}{2} - 1$

15. Στο διπλανό τρίγωνο να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Πόσες μοίρες είναι σε αυτή την περίπτωση το μέτρο κάθε γωνίας;



16. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \,||\, \Delta\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^0$.
Να υπολογίσετε τους αριθμούς x, y, z.



1.3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΥΠΩΝ

Στα μαθηματικά, τη Φυσική και τη Χημεία βρίσκουμε ισότητες που συνδέουν διάφορα μεγέθη. Αυτές τις ισότητες τις ονομάζουμε τύπους. Ένας τέτοιος τύπος μπορεί να θεωρηθεί σαν εξίσωση και ένα από τα γράμματα που περιέχει θα το θεωρούμε ως άγνωστο της εξίσωσης. Η επίλυση μιας τέτοιας εξίσωσης ονομάζεται **επίλυση τύπου**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $E_\pi = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon$, όπου ρ η ακτίνα της βάσης και υ το ύψος. Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς ρ και ως προς υ. Στη συνέχεια να βρείτε:

α) Την ακτίνα ρ της βάσης, όταν ο κύλινδρος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 75,36cm^2 και ύψος 4cm.
β) Το ύψος υ, όταν ο κύλινδρος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 125,6cm^2 και ακτίνα ρ = 5cm.

Λύση

Έχουμε $E_\pi = 2\pi \cdot \rho \cdot \upsilon$ για να λύσουμε ως προς ρ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το $2\pi \cdot \upsilon$, οπότε $\rho = \dfrac{E_\pi}{2\pi \cdot \upsilon}$

Για να λύσουμε, ως προς υ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το $2\pi \cdot \rho$, οπότε $\upsilon = \dfrac{E_\pi}{2\pi\rho}$

α) Στον τύπο $\rho = \dfrac{E_\pi}{2\pi \cdot \upsilon}$ για $E_\pi = 75{,}36$ και $\upsilon = 4$

έχουμε $\rho = \dfrac{75{,}36}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 4} = \dfrac{75{,}36}{25{,}12} = 3\text{cm}$

β) Στον τύπο $\upsilon = \dfrac{E_\pi}{2\pi \cdot \rho}$ για $E_\pi = 125{,}6$ και $\rho = 5$

έχουμε $\upsilon = \dfrac{125{,}6}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5} = \dfrac{125{,}6}{31{,}4} = 4\text{cm}$

2) Το εμβαδόν ενός τραπεζίου με μικρή βάση β, μεγάλη βάση Β και ύψος υ, δίνεται από τον τύπο $E = \dfrac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$
Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς υ και ως προς β.
Στη συνέχεια να βρείτε:
α) το ύψος του τραπεζίου που έχει εμβαδόν 35cm^2, βάση μεγάλη 8cm και βάση μικρή 6cm.
β) τη μικρή βάση του τραπεζίου που έχει εμβαδόν 80cm^2, βάση μεγάλη 12cm και ύψος 8cm.

Λύση

Έχουμε τον τύπο $E = \dfrac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$

$$2 \cdot E = (B + \beta) \cdot \upsilon \quad (1)$$

Για να λύσουμε ως προς υ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το $B + \beta$, οπότε $\upsilon = \dfrac{2\cdot E}{B+\beta}$

Για να λύσουμε ως προς β η (1) γίνεται
$2 \cdot E = B \cdot \upsilon + \beta \cdot \upsilon$
$2 \cdot E - B \cdot \upsilon = \beta \cdot \upsilon$ και διαιρούμε με το υ

οπότε $\beta = \dfrac{2E - B \cdot \upsilon}{\upsilon}$

α) Στον τύπο $\upsilon = \dfrac{2 \cdot E}{B + \beta}$ για E = 35, B = 8 και β = 6cm έχουμε

$$\upsilon = \frac{2 \cdot 35}{8 + 6} = \frac{70}{14} = 5\text{cm}$$

β) Στον τύπο $\beta = \dfrac{2E - B \cdot \upsilon}{\upsilon}$ για E = 80, B = 12 και υ = 8

έχουμε $\beta = \dfrac{2 \cdot 80 - 12 \cdot 8}{8} = \dfrac{160 - 96}{8} = \dfrac{64}{8} = 8\text{cm}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τον τύπο $E = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2}$, ως προς υ.

2. Να λύσετε τον τύπο $P = \varepsilon \cdot h + \varrho$:
i) ως προς h
ii) ως προς ε

3. Να λύσετε τον τύπο $\upsilon = \upsilon_o + \gamma \cdot t$
i) ως προς t
ii) ως προς γ

4. Να λύσετε τον τύπο $Q = m \cdot c \cdot \theta$, ως προς m.

5. Να λύσετε τον τύπο $S = \upsilon_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} g \cdot t^2$ ως προς υ_o.

6. Να λύσετε τον τύπο $E = 2\pi r(r + h)$, ως προς h.

7. Να λύσετε τον τύπο $\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1) \cdot \omega$, ως προς v.

8. Να λύσετε τον τύπο $T = \dfrac{\kappa \cdot \varepsilon \cdot t}{100}$, ως προς t.

9. Να λύσετε τον τύπο $B + F = m \cdot \frac{\upsilon^2}{r}$

i) ως προς m
ii) ως προς r

10. Να λύσετε τον τύπο $V = V_0(1 + a \cdot \theta)$ ως προς θ.

11. Δίνεται ο τύπος F = 1,8C + 32, όπου F βαθμοί Φαρενάιτ και C βαθμοί Κελσίου. Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς C και να υπολογίσετε το C όταν F = 73,4°.

12. Δίνεται ο τύπος της περιμέτρου ορθογωνίου παραλληλογράμμου Π = 2(x + y), όπου x το μήκος και το y το πλάτος.
Να λύσετε τον τύπο ως προς x και ως προς y.
Στη συνέχεια να βρείτε:
α) Το μήκος x του παραλληλογράμμου που έχει περίμετρο 56cm και πλάτος y = 10cm
β) Το πλάτος y του παραλληλογράμμου που έχει περίμετρο 148cm και μήκος x = 46cm.

1.4 ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια των εξισώσεων κάνουμε τα εξής:

1) Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα, για να καταλάβουμε τι μας δίνει και τι μας ζητάει.
2) Εκφράζουμε με ένα γράμμα, συνήθως το x, το ζητούμενο του προβλήματος.
3) Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.
4) Σχηματίζουμε την εξίσωση του προβλήματος.
5) Λύνουμε την εξίσωση.
6) Εξετάζουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρεθεί ένας αριθμός, που το τριπλάσιο του όταν αυξηθεί κατά 5, δίνει το τετραπλάσιο του αριθμού αυτού ελαττωμένο κατά 2.

Λύση

Ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό x.
Το τριπλάσιο είναι 3x. Αν αυξηθεί κατά 5, είναι 3x + 5.
Το τετραπλάσιο είναι 4x. Αν ελαττωθεί κατά 2, είναι 4x – 2.
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει η εξίσωση:

$$3x + 5 = 4x - 2$$
$$3x - 4x = -2 - 5$$
$$-x = -7$$
$$x = 7$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι το 7.

2) Πριν απο 9 χρόνια ο πατέρας είχε εξαπλάσια ηλικία από την κόρη του. Σήμερα η ηλικία του πατέρα είναι τριπλάσια από την ηλικία της κόρης του. Πόσο χρονών είναι σήμερα ο πατέρας και πόσο η κόρη του;

Λύση

Ονομάζουμε x την ηλικία της κόρης σήμερα. Τότε η ηλικία του πατέρα σήμερα είναι $3 \cdot x$.
Πρίν απο 9 χρόνια η ηλικία της κόρης ήταν x – 9 και του πατέρα 3x – 9.
Έχουμε επομένως την εξίσωση

$$6 \cdot (x - 9) = 3x - 9$$
$$6x - 54 = 3x - 9$$
$$6x - 3x = 54 - 9$$
$$3x = 45$$
$$x = \frac{45}{3}$$
$$x = 15$$

Άρα η κόρη είναι 15 χρονών και ο πατέρας $3 \cdot 15 = 45$ χρονών.

3) Ένας κτηνοτρόφος πούλησε το $\frac{1}{5}$ των ζώων που έχει και 4 ακόμη. Μετά πούλησε το $\frac{1}{2}$ των υπολοίπων και 5 ακόμη και του έμειναν 65 ζώα. Να βρεθεί πόσα ζώα είχε;

Λύση

Ονομάζουμε x τα ζώα που είχε. Την πρώτη φορά πούλησε $\frac{1}{5}x + 4$ και του έμειναν $x - \left(\frac{1}{5}x + 4\right)$

Την δεύτερη φορά πούλησε $\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{1}{5}x+4\right)\right]+5$

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$x-\left(\frac{1}{5}x+4\right)-\left[\frac{1}{2}\left[x-\left(\frac{1}{5}x+4\right)\right]+5\right]=65$$

$$x-\frac{1}{5}x-4-\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{5}x-4\right)+5\right]=65$$

$$x-\frac{1}{5}x-4-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}x-2+5\right)=65$$

$$x-\frac{1}{5}x-4-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x+2-5=65$$

$$x-\frac{1}{5}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}x-7=65$$

$$10x-10\cdot\frac{1}{5}x-10\cdot\frac{1}{2}x+10\frac{1}{10}-10\cdot 7=10\cdot 65$$

$$10x-2x-5x+x-70=650$$

$$4x=720$$

$$x=\frac{720}{4}$$

$$x=180$$

Άρα ο κτηνοτρόφος είχε 180 ζώα.

4) Ο Πέτρος , ο Γιάννης και η Άννα έχουν συνολικά 360 ευρώ. Αν ο Πέτρος έχει διπλάσια χρήματα απο τον Γιάννη, και η Άννα έχει τριπλάσια χρήματα απο τον Γιάννη, να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο καθένας.

Λύση

Ονομάζουμε x τα χρήματα του Γιάννη. Τότε ο Πέτρος έχει 2x και η Άννα 3x. Οπότε

$2x + x + 3x = 360$

$6x = 360$

$$x=\frac{360}{6}$$

$x = 60$

Άρα ο Γιάννης έχει 60 ευρώ

ο Πέτρος έχει $2 \cdot 60 = 120$ ευρώ
και η Άννα έχει $3 \cdot 60 = 180$ ευρώ

5) Ένας εργάτης χρειάζεται 6 ημέρες για να τελειώσει ένα έργο, ενώ ένας άλλος εργάτης χρειάζεται 12 ημέρες για να τελειώσει το ίδιο έργο. Σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το έργο αν δουλέψουν και οι δύο ταυτόχρονα.

Λύση

Ονομάζουμε x τις ημέρες που θα τελειώσουν το έργο αν δουλέψουν και οι δύο. Αφού ο πρώτος εργάτης τελειώνει το έργο σε 6 ημέρες, σε μία μέρα θα κάνει το $\frac{1}{6}$ του έργου και σε x ημέρες τα $\frac{x}{6}$ του έργου.

Ο δεύτερος εργάτης τελειώνει το έργο σε 12 ημέρες, οπότε σε μία μέρα θα κάνει το $\frac{1}{12}$ του έργου και σε x ημέρες τα $\frac{x}{12}$ του έργου

Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}=1$$

$$12\cdot\frac{x}{6}+12\cdot\frac{x}{12}=12\cdot 1$$

$2x + x = 12$
$3x = 12$
$x = 4$

Άρα και οι δύο εργάτες θα τελειώσουν το έργο σε 4 ημέρες.

6) Ο Ανδρέας ξόδεψε για να αγοράσει ένα αυτοκίνητο τα $\frac{2}{5}$ των χρημάτων του και 6000 ευρώ ακόμη, και για να αγοράσει ένα σκάφος το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων του και 3000 ευρώ ακόμη. Αν του έμειναν 5000 ευρώ, να βρεθεί πόσα χρήματα είχε και πόσο αγόρασε το αυτοκίνητο και πόσο το σκάφος.

Λύση

Έστω x τα χρήματα που είχε ο Ανδρέας αρχικά. Τότε τα χρήματα που ξόδεψε για το αυτοκίνητο είναι $\frac{2}{5}x+6.000$ και για το σκάφος $\frac{1}{4}x+3.000$

Έχουμε την εξίσωση

$$\frac{2}{5}x+6000+\frac{1}{4}x+3000+5000=x$$

$$\frac{2x}{5}+\frac{x}{4}+14000=x$$

$$20\cdot\frac{2x}{5}+20\cdot\frac{x}{4}+20\cdot 14000=20\cdot x$$

$$4\cdot 2x+5x+280000=20x$$

$$8x+5x-20x=-280000$$

$$-7x=-280000$$

$$x=\frac{-280000}{-7}$$

$$x=40000$$

Άρα ο Ανδρέας είχε 40000 ευρώ και έδωσε για το αυτοκίνητο $\frac{2}{5}\cdot$ 40000 + 6000 = 16000 + 6000 = 22.000 ευρώ

και για το σκάφος $\frac{1}{4}\cdot$ 40000 + 3000 = 10000 + 3000 = 13.000 ευρώ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Το πενταπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2 είναι ίσο με 47. Ποιά απο τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

Α. 5x + 47 = 2
Β. 2x + 5 = 47
Γ. 5x + 2 = 47
Δ. 5x – 2 = 47

2) Μετά απο 13 χρόνια η ηλικία μου θα είναι διπλάσια απο εκείνη που είχα πέρυσι. Πόσων ετών είμαι σήμερα; Ποιά απο τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

Α. 2(x + 1) = x – 13
Β. x + 13 = 2(x + 1)
Γ. 2x + 13 = x + 2
Δ. x + 13 = 2(x – 1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί ένας αριθμός, του οποίου το πενταπλάσιο, όταν ελαττωθεί κατά 5, γίνεται ίσο με το τετραπλάσιό του αυξημένο κατά 9.

2. Το άθροισμα τριών διαδοχικών περιττών αριθμών είναι 69.
Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

3. Να βρεθεί ένας αριθμός, του οποίου το $\frac{1}{3}$ αυξημένο κατά το $\frac{1}{4}$ του αριθμού είναι 91.

4. Να βρεθούν δύο αριθμοί που διαφέρουν κατά 18, ενώ ο λόγος τους είναι $\frac{2}{5}$.

5. Να βρείτε με ποιο αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό 125 ώστε να έχουμε πηλίκο 17 και υπόλοιπο 6.

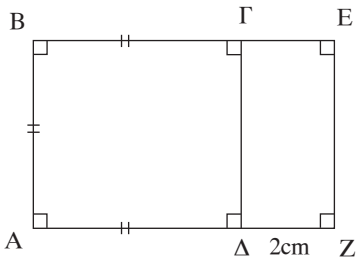
6. Σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 6 μονάδες, ενώ για κάθε ερώτηση που δεν απαντιέται ή δίνεται σ' αυτή λάθος απάντηση, αφαιρούνται 3 μονάδες. Ο Κώστας πήρε στο τεστ 75 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε λάθος;

7. Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν η μία είναι τετραπλάσια της άλλης.

8. Τρεις φίλες έχουν συνολικά 400 €. Η Άννα έχει διπλάσια χρήματα από την Ελίνα και η Ελίνα έχει τριπλάσια χρήματα από την Μαρία. Πόσα χρήματα έχει η καθεμία;

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι κατά 27° μικρότερη των γωνιών της βάσης. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.

10. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου ΑΒΓΔ αν το εμβαδό του είναι κατά $50cm^2$ μικρότερο, από το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΕΖ.



11. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 120cm. Αν το μήκος του ελαττωθεί κατά 10cm ενώ το πλάτος του αυξηθεί κατά 10cm το εμ-

βαδόν του αυξάνεται κατά 100cm^2. Να υπολογιστούν οι αρχικές διαστάσεις του ορθογωνίου.

12. Οι σημερινές ηλικίες ενός πατέρα και του γιού του έχουν άθροισμα 50 χρόνια. Σε 8 χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιού του. Να βρείτε τη σημερινή τους ηλικία.

13. Μια μητέρα είναι σήμερα 48 ετών και η κόρη της είναι 18 ετών. Μετά από πόσα χρόνια η ηλικία της μητέρας θα είναι διπλάσια απο την ηλικία της κόρης.

14. Να βρεθούν οι ηλικίες του Πέτρου και του Γιάννη, αν γνωρίζουμε ότι πριν από 5 χρόνια η ηλικία του Πέτρου ήταν διπλάσια της ηλικίας του Γιάννη, και οτι μετά από 10 χρόνια η ηλικία του Γιάννη θα είναι τα $\frac{5}{7}$ της ηλικίας του Πέτρου.

15. Ένας ορειβάτης για να ανέβει στην κορυφή ενός βουνού και να επιστρέψει, χρειάζεται 13 ώρες. Αν κατά την ανάβαση βαδίζει με ταχύτητα 2,5 Km/h και κατά την κατάβαση με 4 Km/h, υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής.

16. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει απο Θεσσαλονίκη για Αθήνα στις 8 π.μ. με μέση ταχύτητα 80 Km/h. Ύστερα από 1 ώρα ξεκινάει ένα δεύτερο αυτοκίνητο από Θεσσαλονίκη για Αθήνα με μέση ταχύτητα 100 Km/h. Ποιά ώρα θα συναντηθούν και σε πόση απόσταση από την Αθήνα. (Απόσταση Θεσσαλονίκη – Αθήνα περίπου 512 Km).

17. Τρία αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε τα $\frac{2}{5}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 30 € και και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού. Να βρείτε το ποσό που μοιράστηκαν και πόσα πήρε ο καθένας.

18. Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου διαφέρουν κατά 7 cm. Αν η περίμετρος του είναι 66 cm, να βρεθούν οι διαστάσεις του.

19. Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι τριπλάσια από τη μικρή βάση του. Αν το ύψος του τραπεζίου είναι 10 cm και το εμβαδό του είναι 120 cm^2, να βρείτε πόσα cm είναι η κάθε μία από τις βάσεις του τραπεζίου.

20. Ένα ξενοδοχείο έχει 48 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Αν έχει συνολικά 114 κλίνες να βρείτε πόσα δίκλινα και πόσα τρίκλινα δωμάτια έχει το ξενοδοχείο.

21. Ο Σπύρος αγόρασε 12 στιλό και τετράδια και πλήρωσε 30 €. Πόσα στιλό και πόσα τετράδια αγόρασε, αν κάθε στιλό κοστίζει 1,5 € και κάθε τετράδιο 3 €;

22. Σε μια συγκέντρωση οι άντρες ήταν διπλάσιοι απο τις γυναίκες. Όταν έφυγαν 6 άντρες με τις συζύγους τους, έμειναν τριπλάσιοι άντρες από τις γυναίκες. Πόσοι ήταν οι άντρες και πόσες οι γυναίκες στην αρχή της συγκέντρωσης.

23. Μια βρύση αδειάζει μια γεμάτη δεξαμενή σε 8 ώρες, ενώ μια άλλη γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε συγχρόνως τις δύο βρύσες;

24. Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 6 ώρες, μια δεύτερη σε 3 ώρες και μια τρίτη σε 2 ώρες. Να βρείτε σε πόσες ώρες θα γεμίσουν την δεξαμενή αν ανοίξουμε και τις τρεις ταυτόχρονα.

25. Η μητέρα του Μιχάλη είχε χρήματα για να αγοράσει 12 ζευγάρια κάλτσες. Επειδή όμως της έκαναν έκπτωση 50 λεπτά σε κάθε ζευγάρι, αγόρασε 14 ζευγάρια και της έμεινε και 1 €. Να βρείτε πόσο πλήρωσε το κάθε ζευγάρι κάλτσες.

26. Ένας φαρμακοποιός ανάμειξε 5 l οινόπνευμα περιεκτικότητας 80% σε καθαρό οινόπνευμα και 3 l οινόπνευμα περιεκτικότητα 20% σε καθαρό οινόπνευμα. Να βρείτε την περιεκτικότητα του μείγματος σε καθαρό οινόπνευμα.

27. Απο τους μαθητές μιας τάξης το $\frac{1}{4}$ μαθαίνουν Γαλλικά, τα $\frac{5}{8}$ μαθαίνουν Αγγλικά και 3 μαθητές μαθαίνουν Γερμανικά. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

28. Ο Πέτρος και ο Γιάννης παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο Πέτρος κάνει ερωτήσεις στο Γιάννη. Αν ο Γιάννης απαντήσει σωστά του δίνει ο Πέτρος 5 €, ενώ αν απαντήσει λάθος δίνει στον Πέτρο 3 €. Μετά από 16 ερωτήσεις ο Πέτρος και ο Γιάννης έχουν ο καθένας το ίδιο χρηματικό ποσό που είχαν στην αρχή. Να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά ο Γιάννης.

1.5 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

Ανισώσεις α΄ βαθμού με έναν άγνωστο λέμε κάθε ανίσωση που περιέχει μία μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής.

Ιδιότητες ανισοτήτων

1) Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \beta < \beta + \gamma$ και $\alpha - \beta < \beta - \gamma$

Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ και $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

2) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλσιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

3) Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με αντίστροφη φορά.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Επίλυση ανίσωσης

Για να λύσουμε μια ανίσωση ακολουθούμε παρόμοιο τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

- Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών
- Κάνουμε τους σημειωμένους πολλαπλασιασμούς
- Χωρίζουμε γνωστούς απο αγνώστους
- Κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων
- Φτάνουμε στη μορφή $\alpha \cdot x > \beta$ ή $\alpha \cdot x < \beta$

Διερεύνηση της ανίσωσης $\alpha \cdot x > \beta$

Για την ανίσωση $\alpha \cdot x > \beta$ ισχύει:

1) Αν είναι $\alpha > 0$, τότε έχουμε $x > \frac{\beta}{\alpha}$

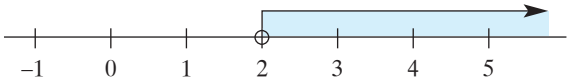
2) Αν είναι $\alpha < 0$, τότε έχουμε $x < \frac{\beta}{\alpha}$

3) Αν είναι $\alpha = 0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0 \cdot x > \beta$, η οποία είναι αδύνατη όταν $\beta > 0$ ή αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x, όταν $\beta < 0$
Ανάλογα συμπεράσματα μπορούμε να διατυπώσουμε για την ανίσωση $\alpha x < \beta$.

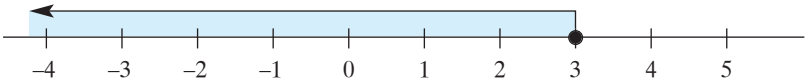
Παρατηρήσεις – Σχόλια

– Επειδή όταν λύνουμε μια ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μια μόνο λύση, αλλά άπειρες, γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.
Δηλαδή στην ανίσωση $3x - x > 4$ έχουμε

$$2x > 4$$
$$x > \frac{4}{2}$$
$$x > 2$$



Το λευκό κυκλάκι πάνω ακριβώς απο το 2 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.
Στην ανίσωση
$5x \leq 9 + 2x$
$5x - 2x \leq 9$
$3x \leq 9$
$x \leq \frac{9}{3}$
$x \leq 3$



Το μαύρο κυκλάκι πάνω ακριβώς από το 3 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λύσετε την ανίσωση $19 - (x + 9) \geq 8(x - 1)$

Λύση

Έχουμε

$19 - (x + 9) \geq 8(x - 1)$

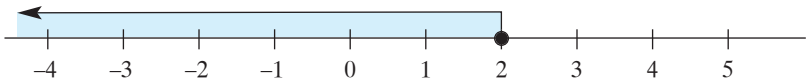
$19 - x - 9 \geq 8x - 8$

$-x - 8x \geq -8 - 19 + 9$

$-9x \geq -18$

$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-18}{-9}$ (Όταν διαιρούμε με αρνητικό αριθμό αλλάζει η φορά της ανίσωσης)

$x \leq 2$



2) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3(x-4)}{10} - \frac{5x-1}{20} \geq \frac{x+5}{6}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{3(x-4)}{10} - \frac{5x-1}{20} \geq \frac{x+5}{6}$

$\frac{3x-12}{10} - \frac{5x-1}{20} \geq \frac{x+5}{6}$ Ε.Κ.Π.$(6,10,20) = 60$

$60 \cdot \frac{3x-12}{10} - 60 \cdot \frac{5x-1}{20} \geq 60 \cdot \frac{x+5}{6}$

$6 \cdot (3x - 12) - 3(5x - 1) \geq 10 \cdot (x + 5)$

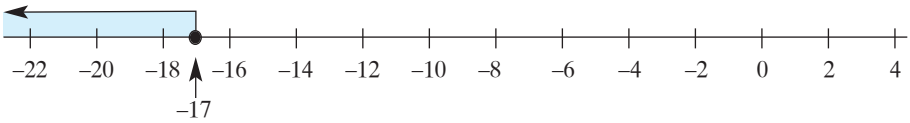
$18x - 72 - 15x + 3 \geq 10x + 50$

$18x - 15x - 10x \geq 50 + 72 - 3$

$-7x \geq 119$

$\frac{-7x}{-7} \leq \frac{119}{-7}$

$x \leq -17$



3) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} < \frac{7}{2} + \frac{x}{3}$

Λύση

Έχουμε: $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} < \frac{7}{2} + \frac{x}{3}$ Ε.Κ.Π.$(2,3,6) = 6$

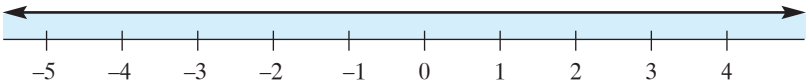
$$6\frac{x}{2}-6\frac{x}{6}<6\frac{7}{2}+6\frac{x}{3}$$

$3x - x < 3 \cdot 7 + 2x$

$3x - x - 2x < 21$

$0 \cdot x < 21$

Η ανίσωση αληθεύει για κάθε τιμή του αριθμού x.



Η παράσταση των λύσεων αυτών είναι όλη η ευθεία.

4) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{2x-1}{3}-\frac{2x-5}{6}>\frac{x+2}{3}$

Λύση

Έχουμε:

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{2x-5}{6}>\frac{x+2}{3} \qquad \text{Ε.Κ.Π.}(3,6)=6$$

$$6\cdot\frac{2x-1}{3}-6\cdot\frac{2x-5}{6}>6\cdot\frac{x+2}{3}$$

$2 \cdot (2x - 1) - (2x - 5) > 2 \cdot (x + 2)$

$4x - 2 - 2x + 5 > 2x + 4$

$4x - 2x - 2x > 4 + 2 - 5$

$0 \cdot x > 1$

Η ανίσωση είναι αδύνατη

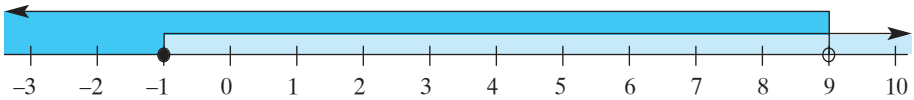
5) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
$2(x - 1) - 3(x + 1) \geq -2(x + 3)$ και $3(x - 3) + 6 < 2(x + 3)$

Λύση

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$2(x - 1) - 3(x + 1) \geq -2(x + 3)$	$3(x - 3) + 6 < 2(x + 3)$
$2x - 2 - 3x - 3 \geq -2x - 6$	$3x - 9 + 6 < 2x + 6$
$2x - 3x + 2x \geq -6 + 2 + 3$	$3x - 2x < 6 - 6 + 9$
$x \geq -1$	$x < 9$

Βρίσκουμε τις κοινές λύσεις με τη βοήθεια του άξονα:



Άρα οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $-1 \le x < 9$

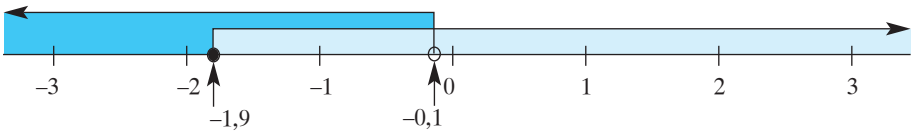
6) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3}{4} \le \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x < \frac{9}{4}$

Λύση

Η ανίσωση $\frac{3}{4} \le \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x < \frac{9}{4}$ αποτελείται απο τις ανισώσεις $\frac{3}{4} \le \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$ και $\frac{2}{3} - \frac{5}{6}x < \frac{9}{4}$ οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα. Βρίσκουμε επομένως τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

$$\frac{3}{4} \le \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x$$
$$12 \cdot \frac{3}{4} \le 12 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{5}{6}x$$
$$3 \cdot 3 \le 4 \cdot 2 - 2 \cdot 5x$$
$$9 \le 8 - 10x$$
$$10x \le 8 - 9$$
$$10x \le -1$$
$$x \le -\frac{1}{10}$$
$$x \le -0{,}1$$

$$\frac{2}{3} - \frac{5}{6}x < \frac{9}{4}$$
$$12 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{5}{6}x < 12 \cdot \frac{9}{4}$$
$$4 \cdot 2 - 2 \cdot 5x < 3 \cdot 9$$
$$8 - 10x < 27$$
$$-10x < 27 - 8$$
$$-10x < 19$$
$$x > \frac{19}{-10}$$
$$x > -1{,}9$$



Άρα οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $-1{,}9 < x \le -0{,}1$

7) Για ποιές τιμές του αριθμού μ, η ανίσωση

$\mu - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 2(x - \mu) + 3$ έχει λύση τον αριθμό $x = 1$;

Λύση

Επειδή η ανίσωση $\mu - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 2(x - \mu) + 3$ έχει λύση του αριθμού $x = 1$, αν βάλουμε όπου x τον αριθμό 1 στην ανίσωση, αυτή πρέπει να επαληθεύεται. Οπότε έχουμε:

$$\mu - \frac{5}{2} \cdot 1 - \frac{3}{2} < 2(1 - \mu) + 3$$
$$\mu - \frac{5}{2} - \frac{3}{2} < 2 \cdot 1 - 2\mu + 3$$

$$2\mu - 2\cdot\frac{5}{2} - 2\cdot\frac{3}{2} < 2\cdot 2 - 2\cdot 2\mu + 2\cdot 3$$

$2\mu - 5 - 3 < 4 - 4\mu + 6$
$2\mu + 4\mu < 4 + 6 + 5 + 3$
$6\mu < 18$
$\mu < 3$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να συμπληρώσετε τα κενά:
α) Αν $x < 5$, τότε $x - 2$ .....
β) Αν $x \geq 7$, τότε $x + 3$ .....
γ) Αν $x \leq -3$, τότε $3x$ .....
δ) Αν $x < 2$, τότε $-5x$ .....
ε) Αν $x \geq 10$, τότε $\frac{x}{5}$ .....
στ) Αν $x < -4$, τότε $\frac{3x}{2}$ .....

2) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):
α) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - 7 > \beta - 7$
β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $3\alpha - 2 < 3\beta - 2$
γ) Αν $\alpha < \beta$ τότε $-5\alpha < -5\beta$
δ) Αν $2\alpha < 0$ τότε $3\alpha < \alpha$
ε) Αν $\alpha > 2$ τότε $\frac{1}{\alpha} < 1$
στ) Η ανίσωση $5x - 7 > 8$ έχει λύση τον αριθμό 3
ζ) Η ανίσωση $x - 30 < x - 29$ είναι αδύνατη
η) Η ανίσωση $x + 99 > x + 100$ είναι αδύνατη
θ) Η ανίσωση $7x - 4 > 8x - 3$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x > 1$

3) Να αντιστοιχίσετε τις ανισώσεις της Στήλης Α με τη σωστή απάντηση που βρίσκεται στη Στήλη Β.

	Στήλη Α	**Στήλη Β**
α.	$0 \cdot x > 3$	i. αδύνατη
β.	$0 \cdot x > -5$	ii. αληθεύει για κάθε x
γ.	$0 \cdot x < 7$	
δ.	$0 \cdot x < -2$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $12x + 7 \geq 15 + 10x$

β) $x + 11 < -7$

γ) $7 - (x - 2) < 2x$

δ) $5\ (x - 3) - 3(x - 1) \leq 0$

ε) $-5x + 2 \leq 3 - x$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $-3(2x - 4) < 4x + 2$

β) $7(y - 1) > 5y - 13$

γ) $5\ (\omega - 2) \leq 3\omega + 2$

δ) $27 - (2x + 7) \geq 7(x - 1)$

ε) $17x - (5x + 3) \leq 4x - 3$

3. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $-2(3x - 6) < 6(2 + x)$

β) $4(x + 1) - 3(2x - 3) \leq 5$

γ) $4(x - 3) - 2(3 - 2x) > 3(x - 1)$

δ) $-2(3 - x) + (x + 5) \geq -4(1 - x)$

ε) $8x - 3(x - 1) \leq 6x - 5$

στ) $5(y + 3) - 4(y + 2) < 3(y + 5) - 5(y + 2)$

ζ) $5 \cdot (3\omega - 5) - 3(\omega - 7) \geq 8 - 2(3\omega + 4)$

4. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $-3\{x - 5[-x - (x + 2)]\} < 15(-x - 3)$

β) $11x - \{(8x + 23) - 2(x - 8)] \geq 5(3x - 7)$

γ) $\dfrac{x-1}{6} - \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{3-2x}{3}$

δ) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x-1}{2} \geq 3$

ε) $x + \dfrac{2x-5}{3} > \dfrac{x}{6} + \dfrac{3}{2}$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:

α) $3x-\frac{5\cdot(2x-1)}{3}\geq\frac{15(x+1)}{4}-2x$

β) $\frac{2(x+15)}{3}-2x<\frac{5(10-x)}{6}-\frac{x+6}{2}+9$

γ) $\omega-\frac{\omega+1}{2}-2-\frac{3-\omega}{4}>0$

δ) $1+\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}+\frac{x+1}{3}\right)>\frac{x+5}{6}$

ε) $\frac{2(x-13)}{3}-\frac{3x+5}{2}\leq\frac{2(x-2)}{7}-5$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{2}\leq x+2-\frac{3(x+1)-7}{10}$

β) $\frac{5x+1}{6}-\frac{3x-1}{2}\geq\frac{5-2x}{3}$

γ) $\frac{x+2}{2}-2x>-\frac{3x-1}{2}$

δ) $\frac{x-3}{20}+\frac{x-1}{5}>\frac{2+x}{4}$

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $x-7<2$ και $5-x<2$

β) $2(x+3)-3(x+1)\geq-2(x-1)$ και $3(x-3)+7<2(x+3)$

γ) $2x+3(x-7)<2(4-x)-1$ και $2(3x-1)+5(3x-8)>3x-24$

δ) $\frac{x-2}{3}+\frac{7}{6}<\frac{x-5}{4}$ και $\frac{3x}{4}-\frac{5}{6}>\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}$

ε) $3x-2<13$ και $2(x-3)>-2$ και $3x\geq5(x-1)-1$

στ) $\frac{2}{3}x-1>-3$ και $\frac{x}{2}+4\geq\frac{2x}{3}-2\left(x+\frac{7}{2}\right)$ και $3(3x-2)-2(1-5x)\leq30$

8. Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:
α) $11 \leq 3x + 2 < 29$
β) $-2 < 3 - 5x < 18$
γ) $9 \leq 8x + 1 \leq 13$

9. Για ποιές τιμές του θετικού ακεραίου αριθμού λ, έχουμε ότι
$A = 5(\lambda - 2) - 30$ είναι αρνητικός;

10. Για ποιές τιμές του αριθμού α, η ανίσωση $7x - 5\alpha + 2 > \alpha(x - 2)$ έχει λύση τον αριθμό $x = 4$;

11. Η μηνιαία κάρτα διαδρομών στις αστικές συγκοινωνίες μιας πόλης κοστίζει 10 ευρώ. Μια απλή διαδρομή κοστίζει 40 λεπτά. Πόσες διαδρομές το μήνα πρέπει να κάνει κάποιος για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας;

12. Ένας φυσικός αριθμός είναι μεταξύ 55 και 65 και όταν διαιρεθεί με 13 αφήνει υπόλοιπο 7. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

13. Η Ελένη όταν ρωτήθηκε πόσα γραμματόσημα έχει απάντησε: αν είχα τα τριπλάσια γραμματόσημα θα είχα πιο πολλά απο 750, αν όμως είχα τα μισά θα είχα λιγότερα απο 126. Πόσα γραμματόσημα έχει η Ελένη;

14. Αν τα μαθήματα της Β΄ τάξης Γυμνασίου είναι δεκατέσσερα, να βρείτε τι βαθμό πρέπει να έχει ένας μαθητής στα Μαθηματικά για να έχει μέσο όρο πάνω απο 18, όταν στα υπόλοιπα μαθήματα έχει ένα 16, τρία 17, τέσσερα 18, τέσσερα 19 και ένα 20.

15. Μια τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή. Δύο γραφεία ταξιδιών κάνουν τις εξής προσφορές:
1ο γραφείο: 100 ευρώ και 0,5 € για κάθε χιλιόμετρο.
2ο γραφείο: 150 ευρώ και 0,3 € για κάθε χιλιόμετρο.
Από πόσα χιλιόμετρα και πάνω συμφέρει το 2ο γραφείο ταξιδιών.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. i) Τι ονομάζεται εξίσωση με έναν άγνωστο;
ii) Τι ονομάζεται λύση ή ρίζα της εξίσωσης;

Β. Σωστό - Λάθος

α. Η εξίσωση $0 \cdot x = 2$ είναι αόριστη	Σ	Λ
β. Η εξίσωση $3(x+2) = 6$ είναι αδύνατη	Σ	Λ
γ. Για $\lambda \neq 2$ η εξίσωση $(\lambda - 2)x = 0$ έχει πάντα ρίζα	Σ	Λ
δ. Η εξίσωση $(\mu + 3)x = \lambda + 5$ για $\mu = -3$ και $\lambda = -5$ είναι αόριστη	Σ	Λ

Θέμα 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{3} = x + 1$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $6(x - 1) > 4x - 8$

γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης.

Θέμα 3

Α. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{2x-1}{3} - \frac{5x-4}{6} < \frac{3x-2}{4} + \frac{7x+6}{12}$

Β. Να βρείτε τις λύσεις της διπλής ανίσωσης: $2x + 2 \leq 6x \leq 3 \cdot (2 - x)$

Θέμα 4

Η γωνία ενός $\hat{B}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι τα $\frac{3}{5}$ της γωνίας $\hat{A}$ και η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι το $\frac{1}{3}$ της γωνίας $\hat{B}$. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Οι ανισώσεις $3x < 6$ και $2x > 6$ έχουν κοινές λύσεις	Σ	Λ
β) Η εξίσωση $x = x$ έχει λύση μόνο $x = 1$	Σ	Λ
γ) Η ανίσωση $5x - 5x < 0$ είναι αδύνατη	Σ	Λ
δ) Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$	Σ	Λ
ε) Αν $5x = 0$, τότε $x = -5$	Σ	Λ

Θέμα 2

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{7(x-3)}{4}-x+\frac{3}{5}(x-2)-5\frac{x-1}{6}+2=0$

Β. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση $\lambda x - 13 = 2x + 7$ είναι αδύνατη;

Θέμα 3

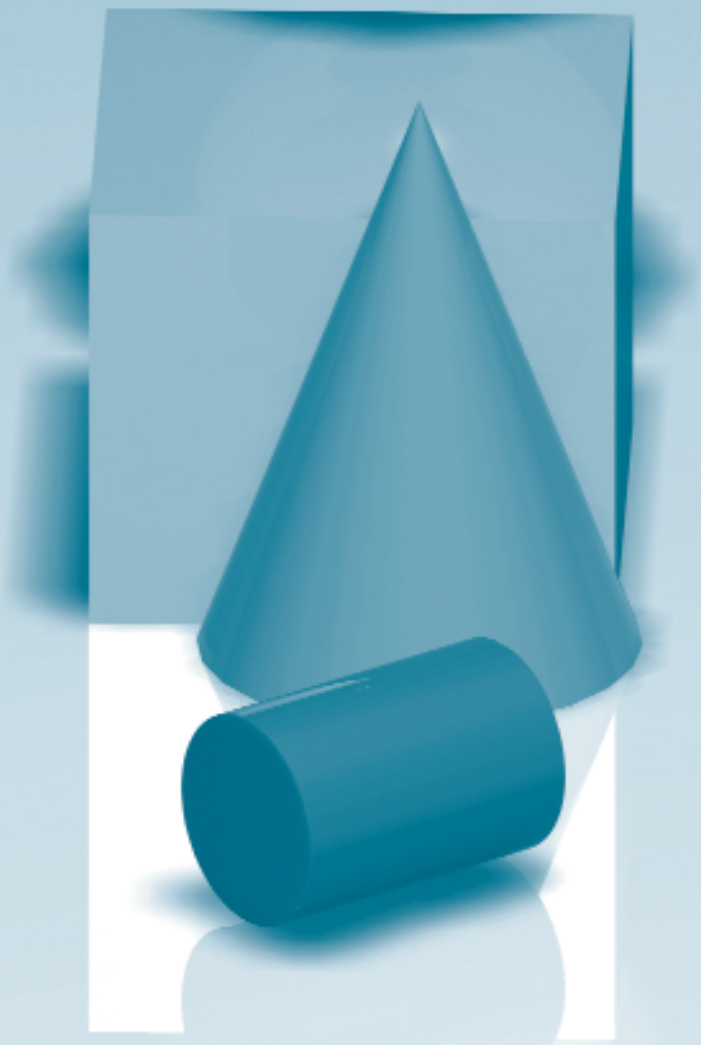
Α. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x+4}{3}-2\geq\frac{x-4}{5}+\frac{3x-1}{15}$

Β. Για ποιές τιμές των λ και μ η ανίσωση $5+\lambda x<10x+\mu$ αληθεύει για κάθε τιμή του x;

Θέμα 4

Σε ένα ηλεκτρονικό παιχνίδι δεξιότητας χειρισμού, κάθε σωστός χειρισμός προσθέτει 20 μονάδες στο σκορ και κάθε λαθεμένος αφαιρεί 10. Ο Πέτρος μετά από 30 χειρισμούς πέτυχε σκορ 480. Πόσους επιτυχείς χειρισμούς είχε;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο



2.1. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΘΕΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Αν έχουμε την εξίσωση $x^2 = 25$, τότε έχουμε λύσεις τους αριθμούς 5 και –5. Τον θετικό αριθμό 5, που όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, δίνει το γινόμενο 25, τον ονομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** του 25 και συμβολίζεται $\sqrt{25}$. Δηλαδή $\sqrt{25} = 5$.

Ορισμός τετραγωνικής ρίζας

Τετραγωνική ρίζα ενός **θετικού** αριθμού **α**, λέγεται ο **θετικός** αριθμός **x**, ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α.
Ο θετικός αριθμός x συμβολίζεται με $\sqrt{a}$, δηλαδή:
$\sqrt{a} = x$ αν $x^2 = α$ όπου $α \geq 0$ και $x \geq 0$.

Ισχύουν:
1) $\sqrt{0} = 0$ επειδή $0^2 = 0$
2) $\sqrt{a} \geq 0$ για κάθε $α \geq 0$
3) αν $α \geq 0$ τότε $\left(\sqrt{a}\right)^2 = α$, δηλαδή $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$,

Παραδείγματα: $\sqrt{49} = 7$, γιατί $7^2 = 49$

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, γιατί $\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\sqrt{3,24} = 1,8$, γιατί $(1,8)^2 = 3,24$

Παρατηρήσεις – Σχόλια

- **Δεν** ορίζεται η **τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού**, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

  Δεν υπάρχει η $\sqrt{-121}$, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα –121.
- Αν δεν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός α είναι θετικός, τότε $\sqrt{a^2} = |a|$.

  Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-6)^2} = -6$.

  Το σωστό είναι $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$.

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

1) Παρατηρούμε ότι:
$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ και $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$

Άρα αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ ισχύει η σχέση

$$\boxed{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}}$$

2) Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}=\frac{7}{6} \quad \text{και} \quad \sqrt{\frac{49}{36}}=\sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2}=\frac{7}{6}$$

Άρα αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ ισχύει η σχέση

$$\boxed{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Δεν ισχύει: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$

Έχουμε $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=$ ενώ $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες $\sqrt{144},\sqrt{36},\sqrt{81}.$

Λύση

Αν $x=\sqrt{144}$ τότε $x^2 = 144$. Ψάχνουμε να βρούμε ένα θετικό αριθμό ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει αποτελέσμα 144. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι $12^2 = 144$. Άρα $\sqrt{144}=12.$

Ομοίως $\sqrt{36}=6$ και $\sqrt{81}=9.$

2) Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{\frac{4}{9}}$, β) $\sqrt{\frac{81}{196}}$, γ) $\sqrt{0,25}$, δ) $\sqrt{0,0025}$

Λύση

α) $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$ διότι $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

β) $\sqrt{\frac{81}{196}}=\frac{9}{14}$ διότι $\left(\frac{9}{14}\right)^2=\frac{81}{196}$

γ) $\sqrt{0,25}=0,5$ διότι $0,5^2=0,25$

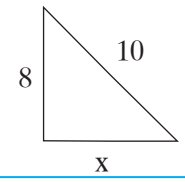
δ) $\sqrt{0,0025}=0,05$ διότι $0,05^2=0,0025$

3) Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε να έχουν νόημα οι παραστάσεις:
$A = \sqrt{x-3}$ $\quad B = \sqrt{3(x-6)-x}$

Λύση

Έχουμε $A = \sqrt{x-3}$
Επειδή στην υπόρριζη ποσότητα μπορούμε να έχουμε μόνο θετικούς αριθμούς ή το μηδέν, πρέπει να ισχύει:
$x - 3 \geq 0$ άρα $x \geq 3$.
Για την $B = \sqrt{3(x-6)-x}$ πρέπει να ισχύει
$3(x-6) - x \geq 0$
$3x - 18 - x \geq 0$
$3x - x \geq 18$
$2x \geq 18$
$x \geq \frac{18}{2}$
$x \geq 9$

4) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την πλευρά x.



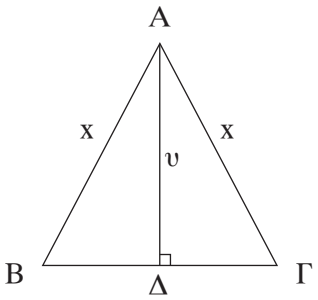
Λύση

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, ισχύει Πυθαγόρειο θεώρημα.
Έτσι έχουμε:
$x^2 + 8^2 = 10^2$
$x^2 + 64 = 100$
$x^2 = 100 - 64$
$x^2 = 36$
$x = \sqrt{36}$
$x = 6$

5) Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) έχει βάση ΒΓ = 6cm και περίμετρο 16cm. Να βρεθεί το ύψος και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Έστω ΑΒ = ΑΓ = x, τότε η περίμετρος του τριγ. είναι ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 16
$x + x + 6 = 16$
$2x = 16 - 6$
$2x = 10$
$x = \frac{10}{2}$
$x = 5cm$



Επειδή το ύψος ΑΔ του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος, έχουμε ΒΔ = ΔΓ = 3cm.
Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΒ (Δ = 90°)

$ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = ΑΒ^2$

$υ^2 + 3^2 = 5^2$

$υ^2 = 5^2 - 3^2$

$υ^2 = 25 - 9$

$υ^2 = 16$

$υ=\sqrt{16}$

υ = 4cm

Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι: $E = \frac{β \cdot υ}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12cm^2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος)

α) $\sqrt{36} = 18$

β) $\sqrt{5} = 25$

γ) $\sqrt{16} = 4$

δ) $\sqrt{-25} = -5$

ε) $\sqrt{100} = 10$

στ) $\sqrt{9} = -3$

ζ) $\sqrt{20+16} = 6$

η) $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

θ) η $\sqrt{x+2}$ έχει νόημα για $x \geq -2$

ι) $\sqrt{64-25} = 8 - 5 = 3$

2. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε αριθμό της στήλης Α, την τετραγωνική του ρίζα που βρίσκεται στην στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
49	12
36	11
169	20
400	15
81	7
121	18
	13
	6
	9

3. Η παράσταση $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ έχει νόημα για

Α: $x \geq 1$ Β: $x \leq 1$ ή $x \geq 3$ Γ: $1 \leq x \leq 3$ Δ: $x \leq 3$

4. Η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει ρίζες
Α: το 3 και το –3 Β: μόνο το 3 Γ: μόνο το –3 Δ: καμία

5. Αν $\alpha > 1$ τότε για τους α, α^2, $\sqrt{\alpha}$ ισχύει:
Α: $\alpha < \sqrt{\alpha} < \alpha^2$ Β: $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$ Γ: $\alpha^2 < \sqrt{\alpha} < \alpha$ Δ: $\alpha^2 < \alpha < \sqrt{\alpha}$

6. Αν α θετικός αριθμός μικρότερος από το 1, για τους α, α^2, $\sqrt{\alpha}$ ισχύει:
Α: $\sqrt{\alpha} < \alpha^2 < \alpha$ Β: $\sqrt{\alpha} > \alpha > \alpha^2$ Γ: $\alpha < \sqrt{\alpha} < \alpha^2$ Δ: $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω τετραγωνικές ρίζες

$\sqrt{36}, \sqrt{0,36}, \sqrt{3600}$

$\sqrt{196}, \sqrt{1,96}, \sqrt{19600}$

$\sqrt{100}, \sqrt{0,01}, \sqrt{0,0001}, \sqrt{10.000}$

$\sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{\frac{49}{36}}, \sqrt{\frac{169}{121}}, \sqrt{\frac{225}{81}}$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $\sqrt{64} + \sqrt{196}$ γ) $\sqrt{(-19)^2} + (\sqrt{19})^2$

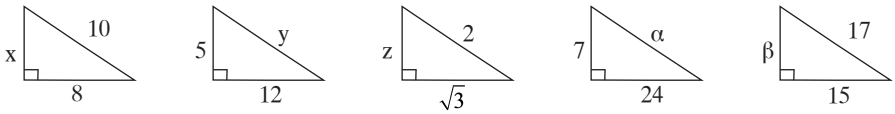
β) $\sqrt{(-5)^2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2}$ δ) $(\sqrt{9})^2 + \sqrt{100}$

3. Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε να έχουν νόημα αριθμού οι παραστάσεις
$A = \sqrt{3x-15}$, $B = \sqrt{2-6x}$, $\Gamma = \sqrt{x-5} + \sqrt{-6x+54}$

4. Να αποδείξετε ότι:
α) $\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}} = 3$ β) $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = 2$

γ) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2} + \sqrt{49}} = 3$

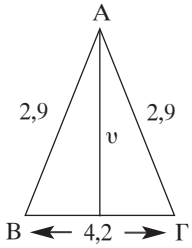
5. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων.



6. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς x που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 36$ β) $x^2 = \frac{49}{25}$ γ) $x^2 = -100$ δ) $x^2 = 169$

7. Να υπολογίσετε το ύψος του ισοσκελούς τριγ. ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.



8. Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ενός ορθογωνίου που έχει διαστάσεις 32 m και 24 m.

9. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) έχει βάση ΒΓ = 16cm και περίμετρο 50cm. Να βρεθεί το ύψος του και το εμβαδόν του.

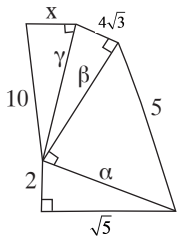
10. Οι διαγώνιες ενός ρόμβου ΑΒΓΔ είναι ΑΓ = 30cm και ΒΔ = 16cm. Να βρεθεί η πλευρά και η περίμετρός του.

11. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (βάσεις ΑΒ ∥ ΓΔ) με ΑΒ = 60cm, ΓΔ = 24cm και ΒΓ = ΑΔ = 30cm. Να βρεθεί το ύψος του και εμβαδόν του.

12. Σε ένα ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ ∥ ΑΔ) είναι $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΒΓ = 17cm και ΑΔ = 7cm. Αν η διαγώνιος ΒΔ = 25cm, να βρεθεί η πλευρά ΓΔ.

13. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού, αν μειωθεί κατά 8 είναι ίσο με το μισό του τετραγώνου του αριθμού αυτού. Ποιός είναι ο αριθμός αυτός;

14. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το μήκος x.



2.2 ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

- **Άρρητος** αριθμός ονομάζεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός. Δηλαδή άρρητος είναι ένας αριθμός όταν δεν μπορεί να γραφεί ως **κλάσμα** της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ και ν να είναι ακέραιοι αριθμοί. ($\nu \neq 0$)

Αυτό σημαίνει ότι ένας άρρητος αριθμός δεν μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός.

- Όλες οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών, που δεν είναι τέλεια τετράγωνα, είναι άρρητοι αριθμοί.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots$ άρρητοι αριθμοί

- Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό $\sqrt{3}$ τότε κάνουμε τα εξής:

Επειδή ψάχνουμε να βρούμε έναν αριθμό x, τέτοιο ώστε $x^2 = 3$ έχουμε:

$$1 = 1^2 < 3 < 2^2 = 4$$
$$2{,}89 = 1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2 = 3{,}24$$
$$2{,}9989 = 1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2 = 3{,}0276$$
$$2{,}999824 = 1{,}732^2 < 3 < 1{,}733^2 = 3{,}003289$$
$$2{,}999824 = 1{,}7320^2 < 3 < 1{,}7321^2 = 3{,}00017041$$

.....

Άρα:

$$1 < \sqrt{3} < 2$$
$$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$
$$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$
$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$$
$$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$$

.....

Οπότε έχουμε:

$\sqrt{3} = 1{,}73$ με προσέγγιση εκατοστού

$\sqrt{3} = 1{,}732$ με προσέγγιση χιλιοστού

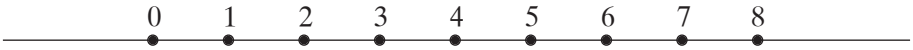
$\sqrt{3} = 1{,}7320$ με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού

Πραγματικοί αριθμοί R

Θα μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που γνωρίζουμε.

- Το σύνολο των **φυσικών αριθμών N**: 0, 1, 2, 3,...

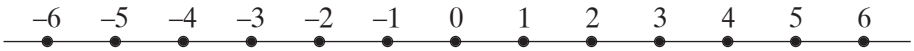
Οι φυσικοί αριθμοί παριστάνονται σε μία ευθεία με σημεία



όπου στην αρχή 0 έχουμε βάλει το μηδέν (0).

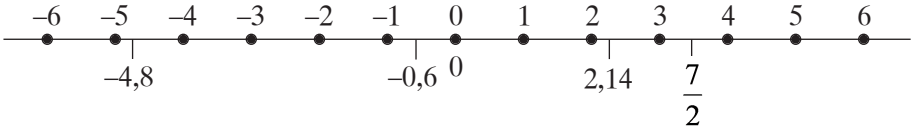
- Το σύνολο των **ακέραιων αριθμών Z**: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...

Οι ακέραιοι αριθμοί παριστάνονται πάλι με σημεία, σε μια ευθεία



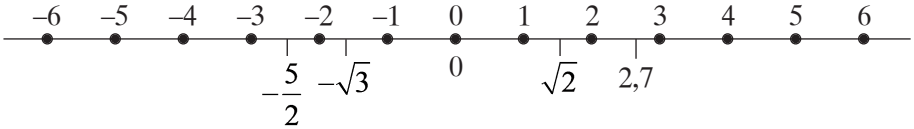
Δεξιά της αρχής 0 τοποθετούμε τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και αριστερά τους αρνητικούς.

- Το σύνολο των **ρητών αριθμών Q**, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ και ν ακέραιοι. ($\nu \neq 0$)



Οι ρητοί αριθμοί είναι σημεία της ευθείας, αλλά δεν γεμίζουν πλήρως την ευθεία.

- Το σύνολο των **πραγματικών αριθμών R**, δηλαδή οι ρητοί και όλοι οι άρρητοι αριθμοί. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία και την ευθεία αυτή την ονομάζουμε ευθεία ή άξονα των πραγματικών αριθμών.



Παρατηρήσεις – σχόλια

- Οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα, αλλά και άλλοι αριθμοί, όπως ο γνωστός από τη μέτρηση του κύκλου αριθμός π.
- Οι ιδιότητες των πράξεων των ρητών αριθμών ισχύουν και στους πραγματικούς αριθμούς.
- Αν έχουμε πράξεις με άρρητους αριθμούς, συνήθως του αντικαθιστούμε με τις ρητές προσεγγίσεις τους.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{21}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

Λύση

Έχουμε:

$4^2 = 16$ και $5^2 = 25$ οπότε $4 < \sqrt{21} < 5$

$4{,}5^2 = 20{,}15$ και $4{,}6^2 = 21{,}16$ οπότε $4{,}5 < \sqrt{21} < 4{,}6$

$4{,}58^2 = 20{,}9764$ και $4{,}59^2 = 21{,}0681$ οπότε $4{,}58 < \sqrt{21} < 4{,}59$

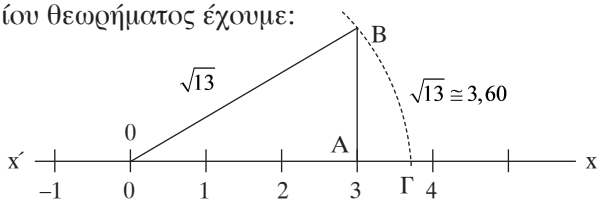
$4{,}582^2 = 20{,}994724$ και $4{,}583^2 = 21{,}003889$ οπότε $4{,}582 < \sqrt{21} < 4{,}583$

Άρα $\sqrt{21} = 4{,}582$ με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων

2) Να βρεθεί το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{13}$.

Λύση

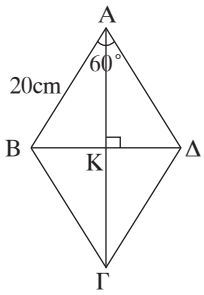
Επειδή $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2$ υψώνουμε κάθετη $AB = 2$ στο σημείο Α που παριστάνει τον αριθμό 3. Οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο, και με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος έχουμε:



$OB^2 = AB^2 + OA^2$
$OB^2 = 2^2 + 3^2$
$OB^2 = 4 + 9$
$OB^2 = 13$
$OB = \sqrt{13}$

Με κέντρο το 0 και ακτίνα $OB = \sqrt{13}$ γράφουμε κύκλο που τέμνει των άξονα x΄x στο σημείο Γ, που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{13}$.

3) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ που έχει $\widehat{A} = 60^\circ$ και πλευρά $AB = 20cm$. Να βρεθεί το εμβαδόν του.



Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο, άρα $BK = K\Delta = 10cm$.
Ισχύει Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγ. ΑΚΒ ($\widehat{K} = 90^\circ$)
$AB^2 = AK^2 + BK^2$
$20^2 = AK^2 + 10^2$
$AK^2 = 400 - 100$
$AK^2 = 300$
$AK = \sqrt{300} \approx 17,32cm$

Έχουμε: $E_{AB\Delta} = \frac{1}{2} \cdot B\Delta \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 17,32 = 173,2cm^2$

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΒΔ είναι ίσα, προκύπτει ότι το εμβαδόν του ρόμβου είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγ. ΑΒΔ, δηλαδή
$E_{AB\Gamma\Delta} = 2 \cdot 173,2 = 346,4cm^2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

α) $2 < \sqrt{2,6} < 3$

β) $2,2 < \sqrt{5} < 2,5$
γ) $3 < \sqrt{7} < 4$
δ) $3 < \sqrt{11} < 4$
ε) $4,79 < \sqrt{23} < 4,80$

2. Να βρείτε ποιοί από τους παρακάτω αριθμούς είναι άρρητοι και ποιοί ρητοί;

$$\sqrt{7}, \sqrt{9}, (\sqrt{3})^2, \sqrt{\frac{9}{25}}, -\sqrt{16}, \sqrt{\frac{72}{2}}, \sqrt{72}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βάλετε σε μια σειρά από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς
α) $\sqrt{3}, 1, \sqrt{8}, \sqrt{7}$
β) $\sqrt{17}, \sqrt{28}, 5, \sqrt{21}, 4$
γ) $2+\sqrt{2}, 3, \sqrt{2}, \sqrt{2}-1$
δ) $\sqrt{5}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$
ε) $\sqrt{2+\sqrt{3}}, \sqrt{3}$

2. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις έως και τρία δεκαδικά ψηφία των αριθμών:
α) $\sqrt{11}$, β) $\sqrt{6}$

3. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{29}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 = 7$, β) $x^2 = -5$, γ) $x^2 = 1$, δ) $x^2 = 8$

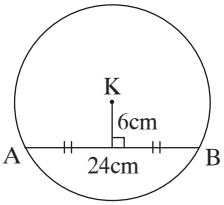
5. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τριγ. έχει υποτείνουσα 8cm. Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος κάθε μίας από τις ίσες κάθετες πλευρές.

6. Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 6cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

7. Να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά 8 cm.

8. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^0$) η κάθετη πλευρά ΑΒ = 4 cm και $\widehat{B} = 45^\circ$. Να βρεθεί το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, με προσέγγιση εκατοστού.

9. Η χορδή ΑΒ του κύκλου είναι 24cm και απέχει από το κέντρο του κύκλου 6 cm. Να βρείτε τη διάμετρο του κύκλου.



10. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ που έχει $\widehat{A} = 60^\circ$ και η πλευρά του ΑΒ = 16cm. Να υπολογίσετε τις διαγώνιες του ΑΓ και ΒΔ καθώς και το εμβαδόν του.

11. Αν το εμβαδό ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι $64\sqrt{3}\text{cm}^2$, να βρεθεί η πλευρά και το ύψος του τριγώνου.

12. Ένα ορθογώνιο τραπέζιο έχει βάσεις 6cm και 9cm και εμβαδόν 45cm^2. Να υπολογίσετε την περίμετρό του με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων.

2.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

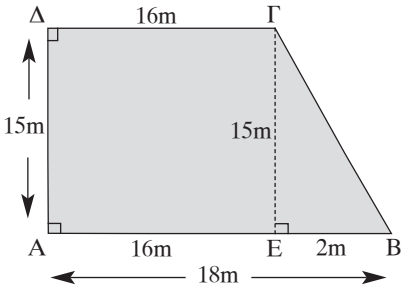
Σε διάφορα προβλήματα της ζωής συναντάμε άρρητους αριθμούς για τους οποίους χρησιμοποιούμε ρητές προσεγγίσεις δύο ή τριών δεκαδικών ψηφίων.

Πρόβλημα 1

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ΑΒΓΔ έχει $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, ΑΒ = 18m, ΓΔ = 16m και ΑΔ = 15m. Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματόπλεγμα, που στοιχίζει 8 ευρώ το μέτρο. Πόσο θα μας στοιχίσει η περίφραξη;

Λύση

Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ορθογώνιο με
ΓΕ = ΑΔ = 15m και
ΕΒ = ΑΒ – ΑΕ = 18 – 16 = 2m.
Απο το Πυθαγώρειο θεώρημα έχουμε:
$ΓΒ^2 = ΓΕ^2 + ΕΒ^2$
$ΓΒ^2 = 15^2 + 2^2$
$ΓΒ^2 = 225 + 4$
$ΓΒ^2 = 229$
$ΓΒ = \sqrt{229} \approx 15{,}13\text{m}$

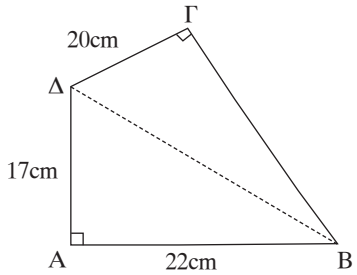


Οπότε η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι: 15 + 18 + 15,13 + 16 = 64,13m
Άρα 64,13 · 8 = 513,04 ευρώ θα στοιχίσει η περίφραξη.

Πρόβλημα 2

Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$, ΑΒ = 22cm, ΓΔ = 20cm και ΑΔ = 17cm. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Λύση



Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο τριγ. ΔΑΒ ($\hat{A} = 90^\circ$):

$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2$
$B\Delta^2 = 22^2 + 17^2$
$B\Delta^2 = 484 + 289$
$B\Delta^2 = 773$
$B\Delta = \sqrt{773} \approx 27{,}8\text{cm}$

Εφαρμόζουμε ξανά Πυθαγόρειο θεώρημα στο τριγ. $B\hat{\Gamma}\Delta$ ($\hat{\Gamma} = 90^0$):

$B\Gamma^2 = B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2$
$B\Gamma^2 = 773 - 20^2$
$B\Gamma^2 = 773 - 400$
$B\Gamma^2 = 373$
$B\Gamma = \sqrt{373} \approx 19{,}31\text{cm}$

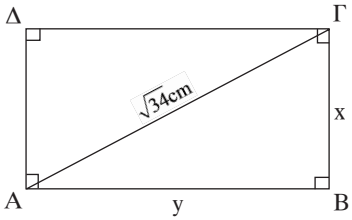
Άρα περίμετρος = 22 + 17 + 20 + 19,31 = 78,31cm
και εμβαδόν = (Εμβ. $\overset{\Delta}{\Delta AB}$) + (Εμβ. $\overset{\Delta}{B\Gamma\Delta}$)

$$= \frac{1}{2}22 \cdot 17 + \frac{1}{2}20 \cdot 19{,}31$$
$$= 187 + 193{,}1$$
$$= 380{,}1\text{cm}^2$$

Πρόβλημα 3

Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η διαγώνιος του $A\Gamma = \sqrt{34}\text{cm}$ και ο λόγος του πλάτους προς το μήκος είναι $\frac{3}{5}$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου

Λύση



Έστω ΒΓ = x και ΑΒ = y

Επειδή $\frac{x}{y}$ ισχύει

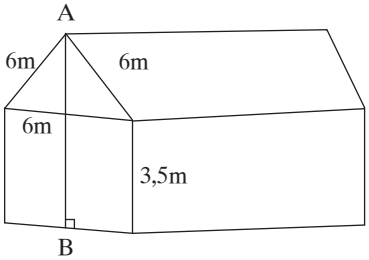
$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow x^2=\frac{9}{25}y^2$$

Απο το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{B}=90^0)$ έχουμε:

$$x^2+y^2=(\sqrt{34})^2 \Leftrightarrow \frac{9}{25}y^2+y^2=34 \Leftrightarrow \frac{34}{25}y^2=34 \Leftrightarrow y^2=25 \Leftrightarrow y=5 \ \ (y>0)$$

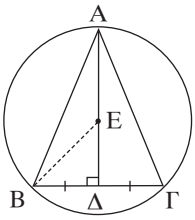
Άρα x = 3cm και y = 5cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



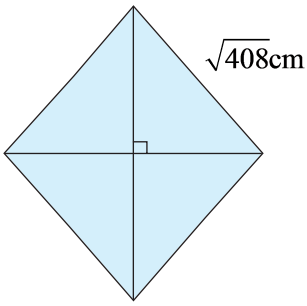
1) Μιά αποθήκη έχει ύψος 3,5m και η σκεπή της έχει σχήμα ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 6m. Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α της σκεπής από το έδαφος, δηλαδή την απόσταση ΑΒ.

2. Δύο πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκος 5cm και 4cm αντίστοιχα. Να βρεθεί η τρίτη πλευρά του, ώστε το τρίγωνο να είναι ορθογώνιο. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις)



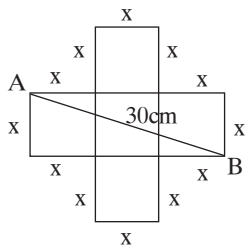
3. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΕ = 20cm και ΕΔ = 16cm. Να βρεθούν οι πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).

4. Η διαγώνιος και η πλευρά ενός τετραγώνου έχουν άθροισμα 12,07cm. Να βρεθεί η περίμετρος και το εμβαδόν του τετραγώνου.

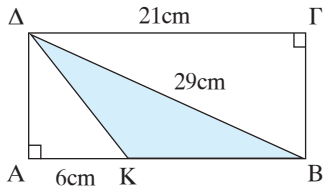


5. Η διπλανή πινακίδα σχήματος ρόμβου, έχει πλευρά $\sqrt{408}$cm και οι διαγώνιες του έχουν λόγο ίσο με $\frac{3}{5}$. Να βρείτε πόσα λίτρα μπογιά θα χρειαστούμε για να βάψουμε 400 πινακίδες (μπρος – πίσω), αν με 1 λίτρο μπογιάς βάφουμε 2,88m^2.

6. Ο σταυρός του διπλανού σχήματος αποτελείται απο πέντε ίσα τετράγωνα. Αν είναι ΑΒ = 30cm, να βρείτε το εμβαδόν τους σχήματος.



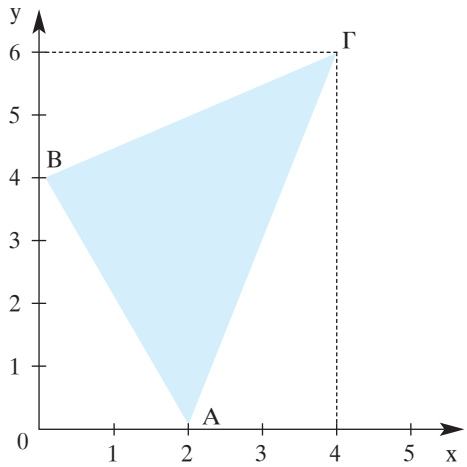
7. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΚΒ.



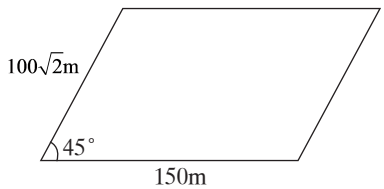
8. Ένα ορθογώνιο τριγ. $A\hat{B}\Gamma$ έχει υποτείνουσα ΒΓ = 45cm και κάθετη πλευρά ΑΓ = 27cm. Να βρείτε το ύψος ΑΔ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ $\parallel$ ΓΔ) είναι $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ και ΓΔ = 20cm. Αν το ύψος του είναι 8cm, να βρεθούν οι άλλες πλευρές του και το εμβαδόν του.

10. Οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ΑΒΓ είναι Α(2,0), Β(0,4) Γ(4,6). Να υπολογίσετε τις πλευρές του και να εξετάσετε αν το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



11. Ένα χωράφι έχει σχήμα παραλληλογράμμου, με μία γωνία των 45° και πλευρές $100\sqrt{2}$m και 150m. Να βρείτε πόσα κιλά σπόρους σιταριού θα αγοράσουμε, για να το σπείρουμε σιτάρι, αν για κάθε στρέμμα χρειαζόμαστε 50 κιλά σπόρους.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. Να δώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός θετικού αριθμού α.

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

i) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = ...$

ii) $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = ...$

Γ.Πότε ένας αριθμός ονομάζεται άρρητος;

Θέμα 2

Να βρεθούν οι τιμές του x ώστε να έχουν νόημα οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{7x - 21}$

β) $B = \sqrt{10(2 - x) + 5x}$

Θέμα 3

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) έχει βάση ΒΓ = 30cm και περίμετρο 64cm. Να βρείτε:

α) το ύψος ΑΔ του τριγώνου

β) το εμβαδόν του τριγώνου

Θέμα 4

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου τραπεζίου ΚΛΜΝ έχει $\widehat{K} = \widehat{N} = 90^0$ ΚΛ = 29m, ΜΝ = 20m και ΚΝ = 12m. Θέλουμε να το περιφράξουμε με συρματόπλεγμα, που στοιχίζει 12 ευρώ το μέτρο. Πόσο θα μας στοιχίσει η περίφραξη;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:

α) Ένας αριθμός x για τον οποίο είναι $x^2 = 49$ είναι ο:

Α. 24,5 Β. –7 Γ. 98 Δ. 9

β) Η τετραγωνική ρίζα του 16 είναι:

Α. 8 Β. –4 Γ. 4 Δ. 32

γ) Στο άξονα των πραγματικών αριθμών δεξιότερα του $\sqrt{23}$

Α. $\sqrt{24}$ Β. 4 Γ. $\sqrt{19}$ Δ. $\sqrt{21}$

δ) Ο αριθμός $\sqrt{13+\sqrt{9}}$ είναι ίσος με:

Α. $\sqrt{22}$ Β. 16 Γ. 4 Δ. 8

ε) Από τους επόμενους αριθμούς, άρρητους είναι ο:

Α. $\sqrt{64}$ Β. 7,63 Γ. $\sqrt{\frac{121}{25}}$ Δ. $\sqrt{5}$

Θέμα 2

Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $(\sqrt{9})^2+\sqrt{(-16)^2}+\sqrt{100}^2$

β) $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

γ) $5(\sqrt{25}^2+\sqrt{25})-\sqrt{(-3)}^2+\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$

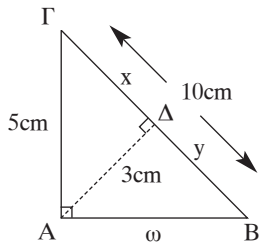
δ) $4\sqrt{7}+2(\sqrt{5}-\sqrt{7})+7\sqrt{5}$

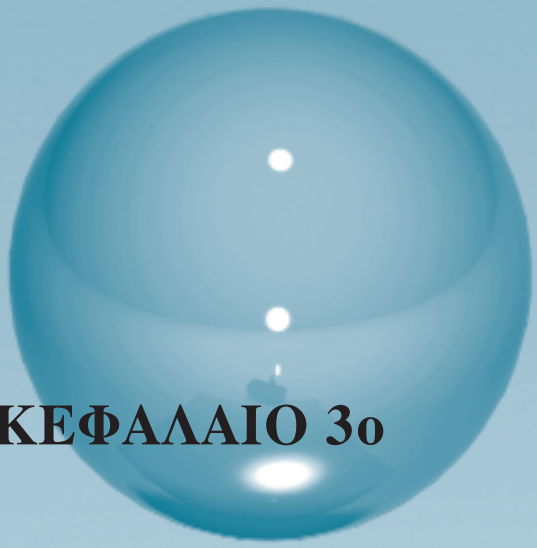
Θέμα 3

Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι δ = 20cm. Να υπολογίσετε την περίμετρο του.

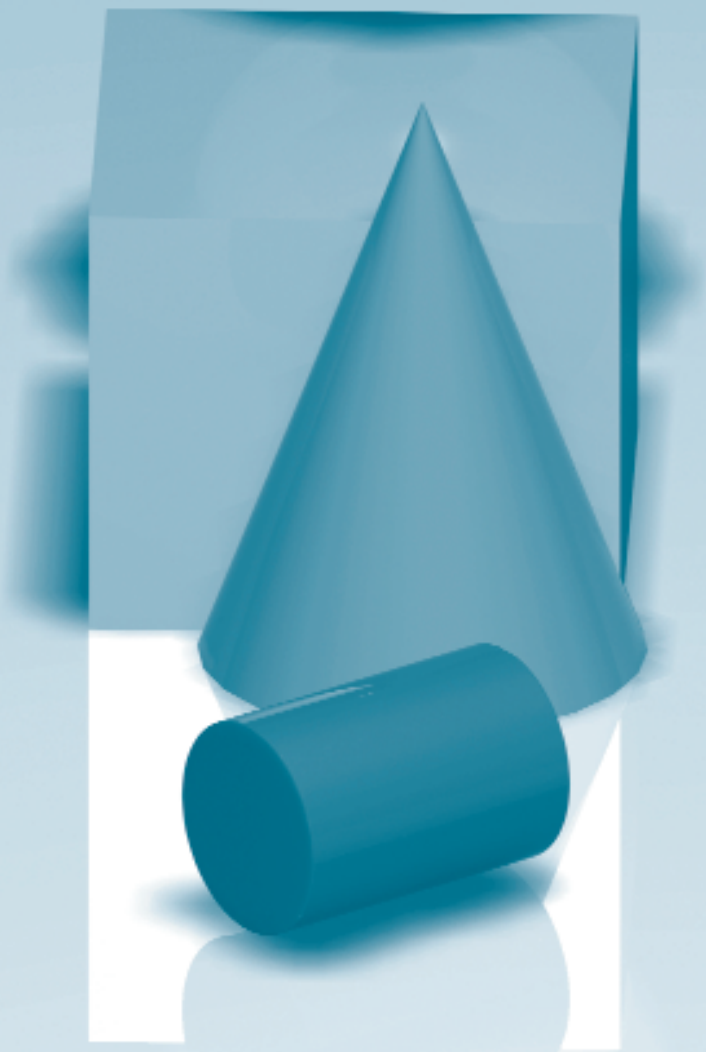
Θέμα 4

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.





ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο



3.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός

Συνάρτηση ονομάζεται η **διαδικασία** (σχέση) με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται **σε μία μόνο τιμή** της μεταβλητής y. Λέμε ότι "η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x".

π.χ.

Ένα κατάστημα ηλεκτρικών ειδών κάνει έκπτωση 20% στις τιμές του. Μια τηλεόραση κοστίζει 800 € χωρίς την έκπτωση. Επειδή γίνεται έκπτωση 20%, θα πληρώσουμε για την τηλεόραση αυτή $800-\frac{20}{100}\cdot 800=800-160=640$ €

Ομοίως για ένα στερεοφωνικό αξίας 500 ευρώ θα πληρώσουμε:

$500-\frac{20}{100}\cdot 500=500-100=400$ ευρώ

Γενικά για ένα προιόν αξίας x ευρώ, θα πληρώσουμε:

$$x-\frac{20}{100}\cdot x=x-0,2x=0,8x$$

Δηλαδή αν y είναι η τιμή με την έκπτωση 20% και x η τιμή χωρίς την έκτωση, τότε η σχέση που συνδέει τις δύο μεταβλητές είναι η: $y = 0,8x$

Λέμε τότε οτι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0,8x$

Για τη συνάρτηση αυτή έχουμε:

Για $x = 800$, $y = 0,8 \cdot 800 = 640$

Για $x = 600$, $y = 0,8 \cdot 600 = 480$

Για $x = 500$, $y = 0,8 \cdot 500 = 400$

Για $x = 300$, $y = 0,8 \cdot 300 = 240$

Για $x = 100$, $y = 0,8 \cdot 100 = 80$

Τα ζεύγη των αντιστοίχων αυτών τιμών τα γράφουμε στον παρακάτω πίνακα

x	800	600	500	300	100
y	640	480	400	240	80

Ο πίνακας αυτός λέγεται **πίνακας τιμών της συνάρτησης** $y = 0,8x$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $y = 3x - 5$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–4	–2	0	2	4
y					

Λύση

Για $x = -4$, $y = 3 \cdot (-4) - 5 = -17$
Για $x = -2$, $y = 3 \cdot (-2) - 5 = -11$
Για $x = 0$, $y = 3 \cdot 0 - 5 = -5$
Για $x = 2$, $y = 3 \cdot 2 - 5 = 1$
Για $x = 4$, $y = 3 \cdot 4 - 5 = 7$
Άρα ο πίνακας τιμών είναι:

x	–4	–2	0	2	4
y	–17	–11	–5	1	7

2) Ένας οινοπαραγωγός υπολόγισε ότι απο 100 κιλά σταφύλια παράγει 40 κιλά κρασί.
α) Πόσα κιλά κρασί θα κάνει από 800 κιλά σταφύλια;
β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε κιλά του κρασιού, που θα κάνει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των σταφυλιών.
γ) Από πόσα κιλά σταφύλια, θα κάνει ο οινοπαραγωγός αυτός 500 κιλά κρασί;

Λύση

α) Απο 100 κιλά σταφύλια, κάνει 40 κιλά κρασί άρα από 800 κιλά σταφύλια θα κάνει $8 \cdot 40 = 320$ κιλά κράσι.
β) Απο x κιλά σταφύλια, θα κάνει $\frac{40}{100} \cdot x$ κιλά κρασί.
Άρα $y = 0{,}4 \cdot x$
γ) Από τη συνάρτηση $y = 0{,}4 \cdot x$, για $y = 500$ έχουμε $500 = 0{,}4 \cdot x$
$x = \frac{500}{0{,}4}$ οπότε $x = 1250$ κιλά σταφύλια.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΕΙΣ

1) Μια φαρμακευτική εταιρεία ανακοίνωσε αύξηση στα προιόντα της κατά 10%. Η σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές των προιόντων y ως συνάρτηση των παλιών τιμών x, είναι:

α) $y = x + 10$ β) $y = 1{,}1x$ γ) $y = x + \frac{10}{100}$ δ) $y = 0{,}1x$

2) Μια αντιπροσωπία αυτοκινήτων κάνει προσφορά σε όλα τα μοντέλα της, έκτωση 4000 ευρώ. Η σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των αυτοκινήτων, ως συνάρτηση των παλιών τιμών x, είναι:
α) $y = x + 4000$ β) $y = 4000x$ γ) $y = 0{,}04x$ δ) $y = x - 4000$

3) Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση x και ύψος y είναι $60cm^2$. Η σχέση που εκφράζει το μήκος του y ως συνάρτηση του x, είναι:

α) $y = \frac{60}{x}$ β) $y = 120 \cdot x$ γ) $y = \frac{120}{x}$ δ) $y = x + 120$

4) Σε ορθογώνιο με αρχικές διαστάσεις 4cm και 5cm, διατηρούμε σταθερό το μήκος 5cm και αυξάνουμε το πλάτος κατά x cm. Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν E ως συνάρτηση του x είναι:

α) $E = 5 \cdot 4 + x$ β) $E = 20 + 4x$ γ) $E = (5 + x) \cdot 4$ δ) $E = 20 + 5x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{3x-1}{2}$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–1	0	1	3	4
y					

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x^2 - 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1	0	1	2
y					

3. Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 - 5x + 6$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–3	–1	0	2	5
y					

4. Το Φ.Π.Α. για τα ηλεκτρικά είδη είναι 19% . Να εκφράσετε τις τιμές y με Φ.Π.Α., ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς Φ.Π.Α.

5. Για να νοικιάσουμε ένα πούλμαν απο ένα ταξιδιωτικό γραφείο για να πάμε μια εκδρομή, μας ζήτησαν 200 ευρώ και 0,5 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y, που θα πληρώσουμε, ως συνάρτηση των χιλιομέτρων x που θα διανύσει το πούλμαν. Στη συνέχεια να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	100	200	300	500
y				

6. Ένα τραπέζιο έχει μεγάλη βάση τριπλάσια της μικρής και το ύψος του είναι διπλάσιο από τη μικρή βάση. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε ως συνάρτηση της μικρής βάσης x.

7. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y.

α) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 50cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x. Στη συνέχεια να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου όταν η μία από αυτές είναι 8cm.

β) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $240cm^2$, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x. Στη συνέχεια να βρείτε τις πλευρές του ορθογωνίου όταν η μία από αυτές είναι 15cm.

8. Ο μισθός ενός υπαλλήλου αυξήθηκε κατά 5%.

α) Να εκφράσετε τον νέο μισθό y του υπαλλήλου, ως συνάρτηση του προηγούμενου μισθού x.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	900		1400	
y		1050		1575

9. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 2\chi - 3$:

x	5		2	
y		–7		9

10. Ένα αεροπλάνο κινείται με ταχύτητα 450 χιλιόμετρα την ώρα.

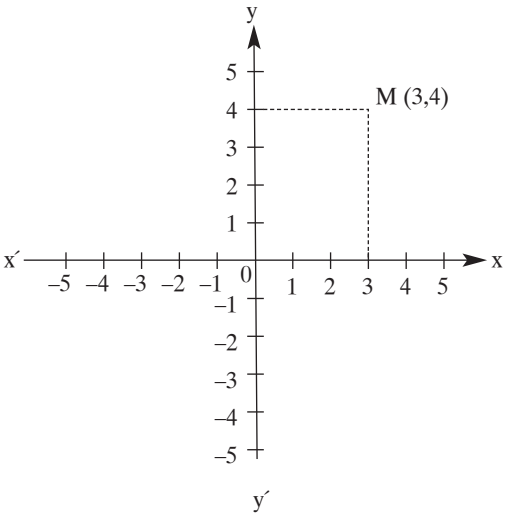
α) Πόση απόσταση θα διανύσει σε 3 ώρες;

β) Να εκφράσετε την απόσταση S (σε χιλιόμετρα) που θα έχει διανύσει το αεροπλάνο ως συνάρτηση του χρόνου t (σε ώρες).

γ) Πόσες ώρες θα χρειαστεί για να διανύσει μια απόσταση 2.250 χιλιομέτρων;

3.2 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έχουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y με κοινή αρχή 0. Από ένα σημείο Μ του επιπέδου φέρνουμε τις κάθετες στους δύο άξονες x΄x και y΄y. Ονομάζουμε **τετμημένη** του σημείου Μ τον αριθμό που αντιστοιχεί στο ίχνος της καθέτου προς τον x΄x και **τεταγμένη** του Μ τον αριθμό που αντιστοιχεί στο ίχνος της καθέτου προς τον y΄y. Δηλαδή στο σημείο Μ αντιστοιχίζουμε το ζεύγος (3,4). Το 3 ονομάζεται **τετμημένη** του σημείου Μ, ενώ το 4 ονομάζεται **τεταγμένη** του Μ. Οι δύο αριθμοί μαζί λέγονται **συντεταγμένες του σημείου Μ** και γράφουμε **Μ (3,4)**.



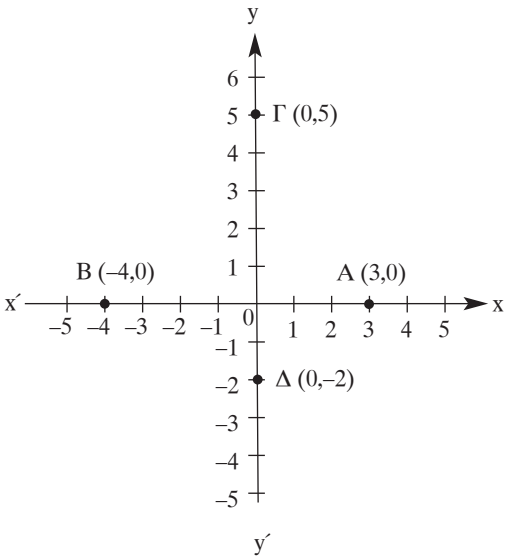
Παρατηρούμε ότι:

- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.

Οι άξονες x΄x και y΄y ονομάζονται **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή πιο απλά **σύστημα αξόνων**.

Παρατηρήσεις – Σχόλια

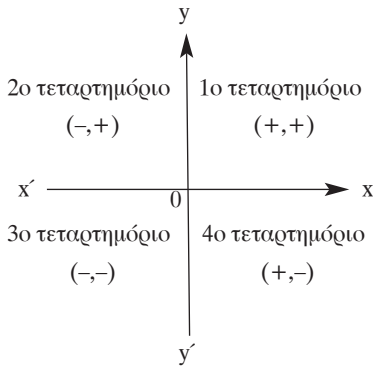
- Όταν οι μονάδες μέτρησης στους άξονες έχουν το ίδιο μήκος, τότε το σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης στους άξονες x΄x και y΄y. Ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι ορθοκανονικό.
- Κάθε σημείο του άξονα **x΄x** έχει τεταγμένη **μηδέν** ενώ κάθε σημείο του άξονα **y΄y** έχει τετμημένη **μηδέν**.



π.χ. σημεία του άξονα x΄x
Α(3,0) και Β(–4,0)

σημεία του άξονα y΄y
Γ(0,5) και Δ(0,–2)

- Το σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 γωνίες, που κάθε μια ονομάζεται **τεταρτημόριο**. Στο παρακάτω σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.



Γραφική παράσταση συνάρτησης

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x, ονομάζεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y).

- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει τη γεωμετρική εικόνα της συνάρτησης αυτής και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη σχέση των μεταβλητών x και y.
- Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης κάνουμε τα εξής:

  1) Κάνουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης
  2) Τοποθετούμε τα διατεταγμένα ζεύγη που ορίζονται από τον πίνακα τιμών σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, οπότε βρίσκουμε τα αντίστοιχα σημεία.
  3) Ενώνουμε τα παραπάνω σημεία με μια γραμμή. Η γραμμή αυτή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Παρατηρήσεις – Σχόλια

- Επειδή σε κάθε συνάρτηση η τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μια μόνο τιμή της μεταβλητής y, στη γραφική της παράσταση δεν υπάρχουν δύο ή περισσότερα σημεία που να έχουν την ίδια τετμημένη. Άρα για να είναι μια γραμμή, γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, δεν πρέπει να υπάρχει κάθετη προς τον οριζόντιο άξονα x΄x που να την τέμνει σε δύο σημεία.
- Όταν η μεταβλητή x παίρνει ακέραιες τιμές, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης αποτελείται από μεμονωμένα σημεία του επιπέδου.

  Όταν η μεταβλητή x παίρνει πραγματικές τιμές, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι μια συνεχής γραμμή.
- Όταν ένα σημείο βρίσκεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη συνάρτηση.

  Όταν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν μια συνάρτηση, τότε το σημείο θα ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

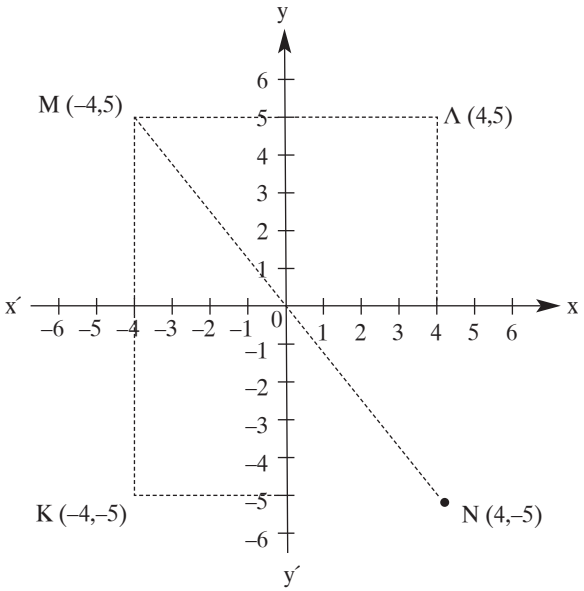
1) Δίνεται το σημείο M(–4,5). Να βρείτε το συμμετρικό του M ως προς:
α) τον άξονα x΄x
β) τον άξονα y΄y
γ) την αρχή 0 των αξόνων.

Λύση

α) Το συμμετρικό του σημείου Μ(–4,5) ως προς τον άξονα x΄x είναι το σημείο Κ(–4, –5)

β) Το συμμετρικό του σημείου Μ(–4,5) ως προς τον άξονα y΄y είναι το σημείο Λ(4,5)

γ) Το συμμετρικό του σημείου Μ(–4,5) ως προς την αρχή 0 των αξόνων είναι το σημείο Ν(4, –5)



Γενικά, το συμμετρικό του σημείου Α(x, y)

- ως προς τον άξονα x΄x είναι το Β(x, –y)
- ως προς τον άξονα y΄y είναι το Γ(–x, y)
- ως προς την αρχή 0 των αξόνων είναι το Δ(–x, –y)

2) Δίνονται τα σημεία Κ(–3, –4) και Λ(9,5). Να υπολογίσετε την απόσταση ΚΛ

Λύση

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ. Το σημείο Μ έχει συντεταγμένες (9, –4). Τότε ΚΜ = 12 και ΛΜ = 9. Απο το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$K\Lambda^2 = KM^2 + \Lambda M^2$

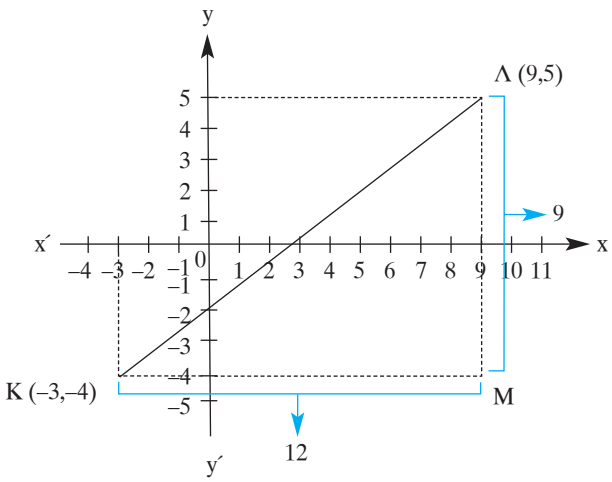
$K\Lambda^2 = 12^2 + 9^2$

$K\Lambda^2 = 144 + 81$

$K\Lambda^2 = 225$

$K\Lambda = \sqrt{225}$

$K\Lambda = 15$



Γενικότερα:
Αν έχουμε δύο σημεία $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ τότε η απόσταση τους υπολογίζεται από τον τύπο:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

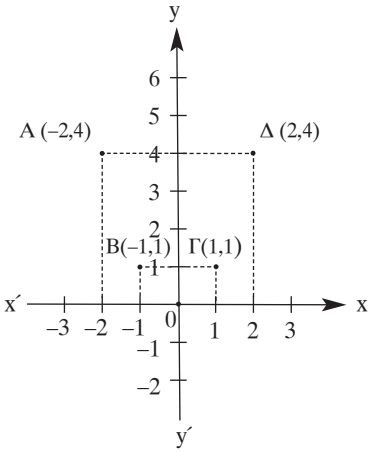
3) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2$ όταν
$-2 \le x \le 2$ και
α) x ακέραιος
β) x πραγματικός

Λύση

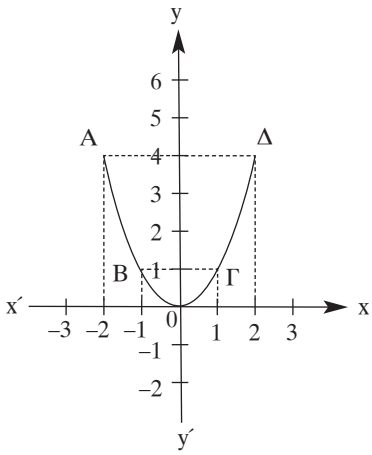
Σχηματίζουμε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = x^2$

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

α) Όταν χ είναι ακέραιος τότε η γραφική παράσταση της $y = x^2$ για $-2 \le x \le 2$ είναι μόνο τα σημεία Α(–2, 4) Β(–1,1) 0(0,0) Γ(1,1) και Δ(2,4).



β) Όταν x είναι πραγματικός τότε η γραφική παράσταση της $y = x^2$ για $-2 \le x \le 2$ είναι η καμπύλη που ενώνει τα σημεία Α, Β, 0, Γ, Δ.



4. Δίνεται η συνάρτηση $y = 3x^2 + \kappa$. Να βρείτε το κ, ώστε το ζεύγος (3,20) να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

Επειδή το ζεύγος (3,20) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x^2 + \kappa$, οι συντεταγμένες του θα την επαληθεύουν. Άρα θα έχουμε:

$20 = 3 \cdot 3^2 + \kappa$

$20 = 3 \cdot 9 + \kappa$

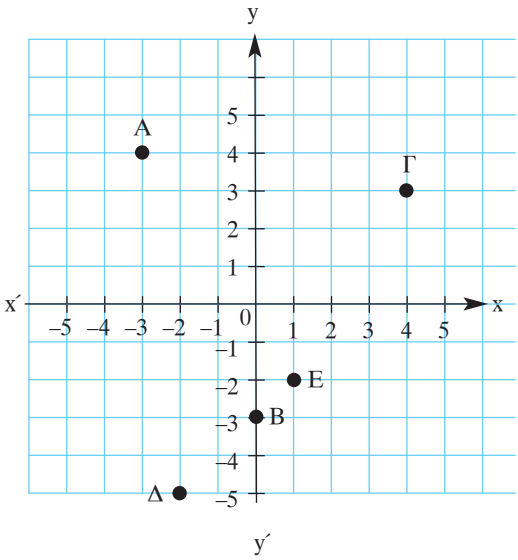
$20 = 27 + \kappa$

$\boxed{\kappa = -7}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σημείο τις συντεταγμένες του:

Σημείο	Συντεταγμένες
Α	(3,4)
Β	(1, –2)
Γ	(–3,0)
Δ	(–3,4)
Ε	(4,3)
	(0, –3)
	(–5, –2)
	(–2, –5)



2) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Σημείο Μ	Συμμετρικό του Μ ως προς τον x΄x	Συμμετρικό του Μ ως προς τον y΄y	Συμμετρικό του Μ ως προς το 0
(3,7)			
(–5,6)			
(–1, –4)			
(8, –10)			

3) Δίνονται τα σημεία Α(–1,5), Β(–3, –1) και Γ(4,1).
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση απο τις παρακάτω:
α) ΑΒ < ΑΓ β) ΑΒ = ΑΓ γ) ΑΒ > ΑΓ δ) ΑΒ = ΒΓ ε) ΑΓ = ΒΓ

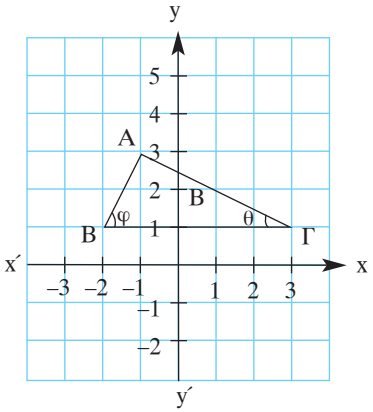
4) Με βάση το παρακάτω σχήμα να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α) Α: $\widehat{A} > 90^0$ Β: $\widehat{A} = 90^0$ Γ: $\widehat{A} < 90^0$

β) Α: $\varepsilon\varphi\theta = 2$ Β: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}$ Γ: $\varepsilon\varphi\theta = 1$

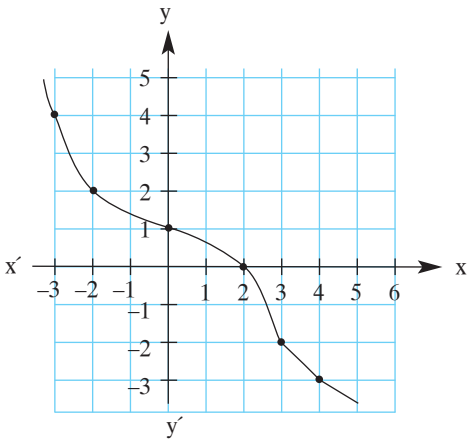
γ) Α: $\varepsilon\varphi\varphi = 1$ Β: $\varepsilon\varphi\varphi = 2$ Γ: $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{2}$

δ) Α: $E_{ΑΒΓ}$ = 5τ.μ. Β: $E_{ΑΒΓ}$ = 10τ.μ. Γ: $E_{ΑΒΓ}$ = 15τ.μ.



5) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α) για x = –3, είναι y =
β) για x = –2, είναι y =
γ) για x = 0, είναι y =
δ) για x = 2, είναι y =
ε) για x = 3, είναι y =
στ) για x = 4, είναι y =



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία:

$A(-4,2)$, $B\left(\frac{3}{2},-1\right)$, $\Gamma(0,2)$, $\Delta\left(-\frac{5}{2},-3\right)$, $E(3,5,-2,7)$, $Z(5,0)$.

2. Δίνονται τα σημεία $A(7,-2)$ και $B\left(-\frac{3}{2},5\right)$

Να βρείτε τις συντεταγμένες των συμμετρικών τους σημείων
α) ως προς τον άξονα x΄x
β) ως προς τον άξονα y΄y
γ) ως προς την αρχή 0 των αξόνων

3. Δίνονται τα σημεία $A(0,-2)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(-4,0)$.
Να βρεθούν:
α) τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ
β) να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο
γ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων $A(5,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(-1,0)$ απο τους άξονες x΄x και y΄y.

5. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:
α) $A(4,-2)$ και $B(1,2)$
β) $\Gamma(5,3)$ και $\Delta(3,-3)$
γ) $E(7,2)$ και $Z(7,-5)$
δ) $K(-3,5)$ και $\Lambda(4,5)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x^2$ με $-2 \le x \le 2$. Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράστασης, όταν:
α) x είναι ακέραιος β) x είναι πραγματικός

7. Δίνεται η συνάρτηση $y = -2x^2 + \lambda$. Να βρείτε το λ, ώστε το ζεύγος $(-3,-15)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

8. Ένα αεροπλάνο Α κινείται με ταχύτητα 400Km/h και κατευθύνεται προς το αεροδρόμιο Β. Η θέση του αεροπλάνου ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Β και μονάδα μέτρησης τα 100Km, είναι $A(3,-4)$. Σε πόση ώρα θα φτάσει στο αεροδρόμιο;

9. Η θερμοκρασία F σε βαθμούς Φαρενάιτ ως συνάρτηση των βαθμών κελσίου C, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Βαθμοί Κελσίου C	0	5	20	30
Βαθμοί Φαρενάιτ F	32	41	68	86

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής
β) Πόσο είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς F, όταν σε βαθμούς C είναι 10°
γ) Πόσο είναι η θερμοκρασία σε βαθμούς C, όταν σε βαθμούς F είναι 77°

10. Το «ιδανικό» βάρος y σε Kg, ενός ενήλικου άνδρα, ως συνάρτηση του ύψους x σε cm φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

(cm) x	170	180	190	200
(Kg) y	63	72	81	90

α) Να κατασκευάσετε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, για $170 \leq x \leq 200$
β) Πόσο είναι το ιδανικό βάρος για ένα άνδρα ύψους 175cm
γ) Να βρείτε το ύψος ενός άνδρα με «ιδανικό» βάρος 76,5Kg.

3.3 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = α \cdot x$ - ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ

Ανάλογα ποσά

- Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.
- Αν δύο ποσά είναι ανάλογα, τότε **ο λόγος των τιμών** του ενός προς τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι **σταθερός**, δηλαδή αν x και y είναι οι αντίστοιχες τιμές, τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός.
- Αν δύο ποσά είναι ανάλογα, τότε οι τιμές y του ενός εκφράζονται ως συνάρτηση των τιμών x του άλλου με την ισότητα $y = α \cdot x$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = α \cdot x$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή 0 των αξόνων.

Η κλίση της ευθείας y = αx

Κλίση της ευθείας y = αx ονομάζεται ο σταθερός λόγος $\frac{y}{x}$ που είναι ίσος με **α**.

Για παράδειγμα, η ευθεία y = 3x έχει κλίση 3, ενώ η ευθεία $y = -\frac{2}{3}x$ έχει κλίση ίση με $-\frac{2}{3}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις ευθείες ε_1: y = 2x και ε_2: y = –3x.

Λύση

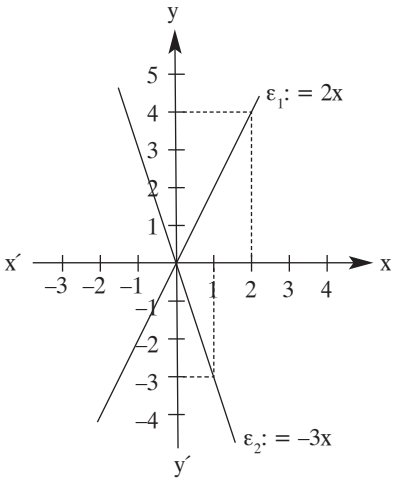
Κάνουμε τον πίνακα τιμών των δύο συναρτήσεων και έχουμε:

ε_1: y = 2x

x	0	2
y	0	4

ε_2: y = –3x

x	0	1
y	0	–3



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΧΟΛΙΑ

Η συνάρτηση y = αx, όταν είναι α > 0 έχει γραφική παράσταση μια ευθεία που βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ όταν είναι α < 0, βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

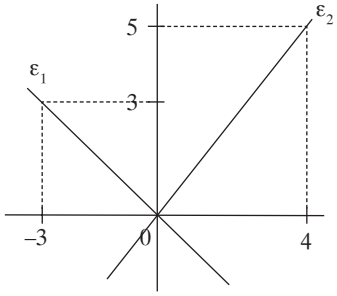
2) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο Α(–3,5).

Λύση

Επειδή το σημείο Α έχει συντεταγμένες x = –3, y = 5 η κλίση της ευθείας θα είναι $\alpha = \frac{y}{x} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$

Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι η $y = -\frac{5}{3}x$.

3) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 που έχουμε στο παρακάτω σχήμα.



Λύση

Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο με συντεταγμένες x = –3, y = 3, οπότε η ε_1 έχει κλίση $\alpha = \frac{3}{-3} = -1$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_1: y = –x.

Η ευθεία ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο με συντεταγμένες x = 4, y = 5, οπότε η ε_2 έχει κλίση $\alpha = \frac{5}{4}$. Άρα η εξίσωση της ευθείας ε_2: $y = \frac{5}{4}x$.

4) Ο φόρος προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α.) για τα ηλεκτρικά είδη είναι 19%.

α) Πόσο είναι ο Φ.Π.Α. για μια τηλεόραση αξίας 500 €; Ποιά είναι η τιμή που θα αγοράσουμε την τηλεόραση με το Φ.Π.Α.;

β) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

γ) Να εκφράσετε τα ποσά y και ω ως συναρτήσεις του x.

Αρχική τιμή x	500	600	800	1000
Φ.Π.Α. y				
Τιμή με Φ.Π.Α. ω				

Λύση

α) Ο Φ.Π.Α. που αναλογεί είναι $500 \cdot \frac{19}{100} = 95$ €.

Άρα η τιμή που θα αγοράσουμε την τηλεόραση με το Φ.Π.Α. είναι 500 + 95 = 595 €.

β)

Αρχική τιμή x	500	600	800	1000
Φ.Π.Α. y	95	114	152	190
Τιμή με Φ.Π.Α. ω	595	714	952	1190

γ) Τα ποσά x και y είναι ανάλογα γιατί:

$$\frac{y}{x}=\frac{95}{500}=\frac{114}{600}=\frac{152}{800}=\frac{190}{1000}=0{,}19$$

Άρα y = 0,19x

Τα ποσά x και ω είναι ανάλογα γιατί:

$$\frac{\omega}{x}=\frac{595}{500}=\frac{714}{600}=\frac{952}{800}=\frac{1190}{1000}=1{,}19$$

Άρα ω = 1,19x

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα των ανάλογων ποσών x και y

x	3	6		12
y	4		12	

β) Ποιός από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του χ;

$A: y=\frac{3}{4}x \quad B: y=4x \quad \Gamma: y=\frac{4}{3}x \quad \Delta: y=3x$

2) Ποιά από τις παρακάτω ευθείες έχει κλίση $\frac{2}{5}$;

$A: y=2x \quad B: y=5x \quad \Gamma: y=\frac{2}{5}x \quad \Delta: y=\frac{2}{5}+x$

3) Ποιά από τις παρακάτω ευθείες διέρχεται από το σημείο Α(–1,3);

$A: y=3x \quad B: y=-x \quad \Gamma: y=-\frac{1}{3}x \quad \Delta: y=-3x$

4) Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α, με τα τεταρτημόρια που βρίσκεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α) $y = -5x$	
β) $y = \frac{1}{3}x$	1. $1^{ο}$ και $3^{ο}$ τεταρτημόριο
γ) $y = \sqrt{2}x$	2. $2^{ο}$ και $4^{ο}$ τεταρτημόριο
δ) $y = -\frac{3}{5}x$	
ε) $y = x$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των ανάλογων ποσών x και y:

x	2	4	6	
y	3			12

β) Να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

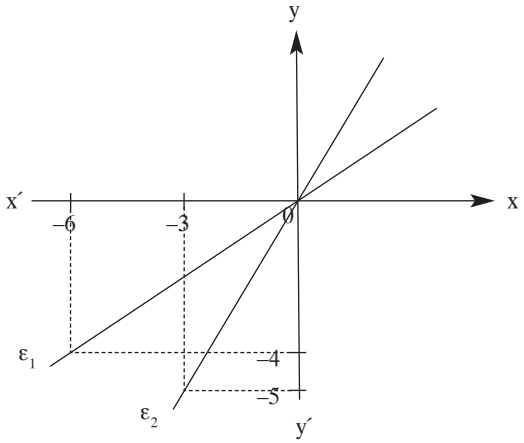
2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
$y = 3x$, $y = -5x$ και $y = -2x$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις ευθείες:
$y = 2x$ και $y = -\frac{1}{2}x$
Τί γωνία σχηματίζουν οι δύο ευθείες;

4. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(–4,6). Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας αυτής.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση $\frac{7}{2}$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 του παρακάτω σχήματος.



7. Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ = 8 μίλια ανα ώρα. Να εκφράσετε το διάστημα S που διανύει το πλοίο ως συνάρτηση του χρόνου t. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση αυτή.

8. Να βρείτε την κλίση μιας ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή 0 των αξόνων και από το σημείο Λ(3, –6).

9. Μια επιχείρηση έκανε αύξηση 5% στις αποδοχές των εργαζομένων της.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες αποδοχές y των εργαζομένων ως συνάρτηση των παλιών τους αποδοχών x.
β) Να βρείτε τις νέες αποδοχές ενός εργαζομένου που είχε μισθό 850 ευρώ.
γ) Να βρείτε τις παλιές αποδοχές ενός εργαζομένου που παίρνει τώρα 945 ευρώ.

10. Αν το λάδι κοστίζει 5 ευρώ το λίτρο.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει την αξία y του λαδιού ως συνάρτηση της ποσότητας x σε λίτρα.
β) Απο τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε την αξία 10,5 λίτρων λαδιού.
γ) Απο τη γραφική παράσταση να εκτιμήσετε την ποσότητα σε λίτρα του λαδιού, αξίας 45 ευρώ.

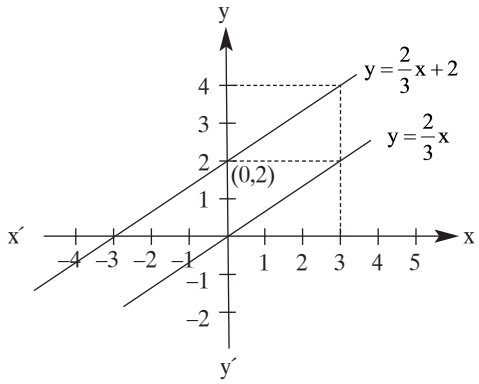
11. Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(\sqrt{3},3)$.
α) Να βρείτε τη συνάρτηση που έχει ως γραφική παράσταση την ευθεία αυτή.
β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα Ox.

3.4 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ y = αx + β

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = αx + β**, όπου x πραγματικός αριθμός και $\beta \neq 0$, είναι μια ευθεία **παράλληλη** προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = αx**, που τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,β).

Παράδειγμα:

Η ευθεία $y = \frac{2}{3}x + 2$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{2}{3}x$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο (0,2)



- Ο αριθμός **α** λέγεται **κλίση της ευθείας** y = αx + β. Οπότε η κλίση της ευθείας $y = \frac{2}{3}x + 2$ είναι ίση με $\frac{2}{3}$.
- Κάθε εξίσωση της μορφής αx + βy = γ, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ παριστάνει ευθεία.

– Αν $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ η εξίσωση αx + βy = γ γίνεται

$$\beta y = -\alpha x + \gamma$$

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta}$$

που παριστάνει ευθεία με κλίση $-\frac{\alpha}{\beta}$.

– Αν α = 0 και $\beta \neq 0$ η εξίσωση αx + βy = γ γίνεται 0x + βy = γ ή $y = \frac{\gamma}{\beta}$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

– Αν $\alpha \neq 0$ και β = 0 η εξίσωση αx + βy = γ γίνεται αx + 0y = γ ή $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ που παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y.

- Η ευθεία y = 0 παριστάνει τον άξονα x΄x.
  Η ευθεία χ = 0 παριστάνει τον άξονα y΄y.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα x΄x, θέτουμε $y = 0$ και υπολογίζουμε την τετμημένη x.
Για να βρούμε το σημείο στο οποίο η ευθεία $\alpha x + \beta y = \gamma$, με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ τέμνει τον άξονα y΄y, θέτουμε $x = 0$ και υπολογίζουμε την τεταγμένη y.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -3x + 1$ και $y = -3x - 2$, όπου x πραγματικός αριθμός.
Τι παρατηρείτε:

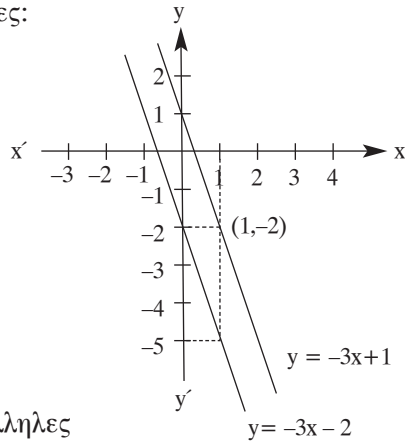
Λύση

Κάνουμε πίνακα τιμών για τις δυο ευθείες:
Για την $y = -3x + 1$ έχουμε

x	0	1
y	1	–2

Για την $y = -3x - 2$ έχουμε

x	0	1
y	–2	–5



Παρατηρούμε ότι οι ευθείες είναι παράλληλες

2) Δίνεται η εξίσωση $5x + 3y = 15$ όπου x, y πραγματικά αριθμοί.
α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες.
β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
γ) Να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες.

Λύση

α) Για να βρούμε σε ποιό σημείο η ευθεία τέμνει τον άξονα x΄x, θέτουμε $y = 0$, οπότε έχουμε:
$5x + 3 \cdot 0 = 15$ ή $5x = 15$ ή $x = 3$
Άρα τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(3,0).
Για να βρούμε σε ποιό σημείο η ευθεία τέμνει τον άξονα y΄y, θέτουμε $x = 0$,

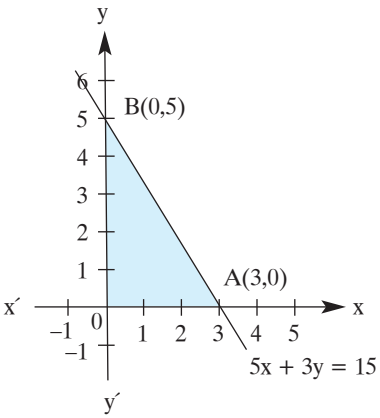
οπότε έχουμε:
$5 \cdot 0 + 3 \cdot y = 15$ ή $3 \cdot y = 15$ ή $y = 5$
Άρα τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο B(0,5).

β) Για να βρούμε την κλίση της ευθείας αυτής, εκφράζουμε το y ως συνάρτηση του x, οπότε έχουμε:
$5x + 3y = 15$
$3y = 15 - 5x$
$y = 5 - \frac{5}{3}x$ ή $y = -\frac{5}{3}x + 5$

Άρα η κλίση της ευθείας είναι $-\frac{5}{3}$.

γ) Τοποθετούμε τα σημεία A(3,0) και B(0,5) σε σύστημα αξόνων και τα ενώνουμε για να σχηματίσουμε τη γραφική παράσταση της $5x + 3y = 15$.

$E_{\overset{\triangle}{AOB}} = \frac{1}{2}(OA) \cdot (OB) = \frac{1}{2} 3 \cdot 5 = \frac{15}{2}$ τ.μ.



3) Ένα δοχείο περιέχει απεσταγμένο νερό. Με μια μικρή αντλία αδειάζουμε σιγά – σιγά το δοχείο. Ο όγκος V(m^3) του νερού στο δοχείο ως συνάρτηση του χρόνου t(min) δίνεται από τη σχέση $V = 36 - 0{,}2t$ όπου t ο χρόνος που πέρασε από τη στιγμή που άρχισε να λειτουργεί η αντλία.
α) Να βρείτε τον όγκο του νερού στη δεξαμενή τη στιγμή που άρχισε να λειτουργεί η αντλία.
β) Μετά από πόσο χρόνο το δοχείο θα έχει αδειάσει;
γ) Να παραστήσετε γραφικά τον όγκο V ως συνάρτηση του χρόνου t.

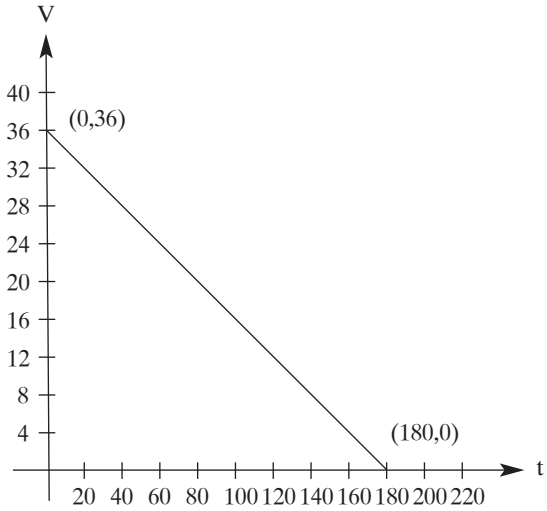
Λύση

α) Για $t = 0$ η ισότητα $V = 36 - 0{,}2t$ δίνει $V = 36m^3$.
β) Το δοχείο θα έχει αδειάσει όταν γίνει $V = 0$, οπότε
$36 - 0{,}2t = 0$
$36 = 0{,}2t$

$$t = \frac{36}{0,2}$$

t = 180min ή 3 ώρες

γ) Οι δυνατές τιμές του χρόνου t είναι $0 \le t \le 180$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης V = 36 – 0,2t είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία (0,36) και (180,0).



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Η ευθεία y = – 7x είναι παράλληλη προς την:
Α: y = x – 7 Β: y = –7 + x Γ: y = 7x – 3 Δ: y = –7x + 3
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

2) Η ευθεία με εξίσωση y = 2x – 6 τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο:
Α: (6,0) Β: (3,0) Γ: (–6,0) Δ: (2,0)

3) Η ευθεία με εξίσωση $y = -\frac{2}{3}x + 7$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο:

Α: (0,7) $B: \left(0, -\frac{2}{3}\right)$ $\Gamma: \left(-\frac{2}{3}, 7\right)$ Δ: (7,0)

4) Μια ευθεία ε τέμνει τους άξονες στα σημεία (–2,0) και (0,3).
Η εξίσωσή της είναι:
Α: 3x – 2y = 6 Β: 2x – 3y = 6 Γ: –3x + 2y = 12 Δ: 3x – 2y = –6
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

5) Η ευθεία με εξίσωση x – 3y = 6
α) έχει κλίση:

Α: 3 Β: $\frac{1}{3}$ Γ: –3 Δ: $-\frac{1}{3}$

β) τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο:
Α: (3, 0) Β: (–2, 0) Γ: (6, 0) Δ: (1, 0)
γ) τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο:
Α: (0, –2) Β: (0, –3) Γ: (0, 6) Δ: (0, –1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις ευθείες με εξισώσεις:
ε_1: $y = 2x$, ε_2: $y = 2x + 3$, ε_3: $y = 2x - 2$

2. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $y = -5x + 3$, όταν:
α) ο x είναι πραγματικός αριθμός
β) $x \leq 0$
γ) $-3 \leq x \leq 3$

3. Δίνονται οι ευθείες $y = (5\lambda - 2)x + 3$ και $y = (\lambda + 2)x - 9$
Να προσδιορίσετε το λ, ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση $-\frac{3}{5}$ και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 7.

5. Δίνονται τα σημεία Α(–2, 1) και Β(2,4)
α) Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ
β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $-3x + 4y = 10$ διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

6. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες, η ευθεία με εξίσωση $4x - 3y = 12$. Στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες.

7. α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $2x + y = 4$.
β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας αυτής.
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες.

8. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΚΛΜΝ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = -1$, $y = 3$, $x = -5$ και $x = 2$.

α) Ποιές είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Κ,Λ,Μ,Ν.
β) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΚΜ του ορθογωνίου ΚΛΜΝ.

9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(–3, 1) και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x – 7$.

10. Ένας εμπορικός αντιπρόσωπος έχει μηνιαίο μισθό 800 ευρώ και 5% επί της αξίας των πωλήσεων που πραγματοποιεί.
α) Να εκφράσετε τις μηνιαίες αποδοχές y του αντιπροσώπου ως συνάρτηση των πωλήσεων x που κάνει.
β) Ποιά είναι η αξία του εμπορεύματος που πρέπει να πουλήσει, για να φτάσουν οι αποδοχές του τα 1200 ευρώ;
γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

11. Ένα ξενοδοχείο δυναμικότητας 100 κλινών έχει κατά μέσο όρο καθημερινά έξοδα 1200 ευρώ. Αν 80 ευρώ κοστίζει η διανυκτέρευση:
α) Να εκφράσετε το ημερήσιο κέρδος y ως συνάρτηση του αριθμού των πελατών x.
β) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη συνάρτηση αυτή.

12. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει απο την πόλη Α για να πάει στην πόλη Β. Η απόσταση (Km) του αυτοκινήτου από την πόλη Β δίνεται από τη σχέση $S = 600 – 80t$, όπου t ο χρόνος σε ώρες, που πέρασε απο τη στιγμή που ξεκίνησε από την πόλη Α.
α) Να βρείτε την απόσταση των δύο πόλεων Α και Β.
β) Μετά από πόσες ώρες το αυτοκίνητο θα φτάσει στην πόλη Β.
γ) Να παραστήσετε γραφικά την απόσταση S ως συνάρτηση του χρόνου t.

13. Δίνεται η συνάρτηση $y = (3α + 1)x + 2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(2, – 2).
α) Να υπολογίσετε το α.
β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

14. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = (2λ + 1)x + 3μ – 2$.
Αν γνωρίζουμε ότι είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = –5x + 7$ και περνάει από το σημείο Β(–1, 6), να βρείτε τους αριθμούς λ και μ.

3.5 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{\alpha}{x}$ - Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

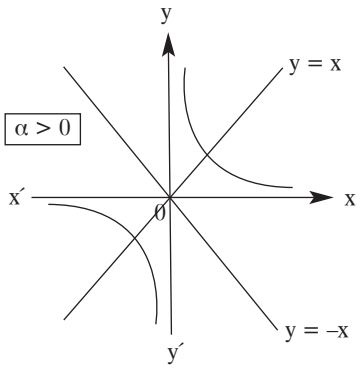
Ποσά αντιστρόφως ανάλογα

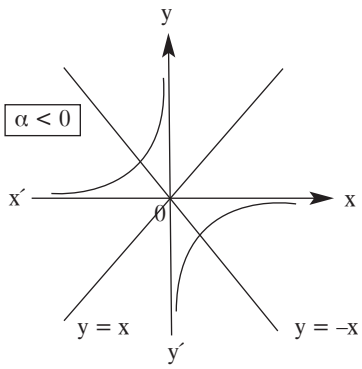
- Δύο ποσά λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.
- Αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το **γινόμενο** των αντίστοιχων τιμών τους είναι **σταθερό**.
- Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y, τότε το y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο $y = \frac{\alpha}{x}$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου $\alpha \neq 0$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους** που βρίσκονται:
  - Στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha > 0$.
  - Στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $\alpha < 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ

Η υπερβολή έχει:

1) **κέντρο συμμετρίας** στην αρχή 0 των αξόνων
2) **άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$
3) **ασύμπτωτες** τους άξονες x΄x και y΄y, δηλαδή οι κλάδοι μιας υπερβολής όσο και να προεκτείνονται δεν τέμνουν τους άξονες x΄x και y΄y.





ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές:

$y = \frac{8}{x}$ και $y = -\frac{8}{x}$, $x \neq 0$.

Λύση

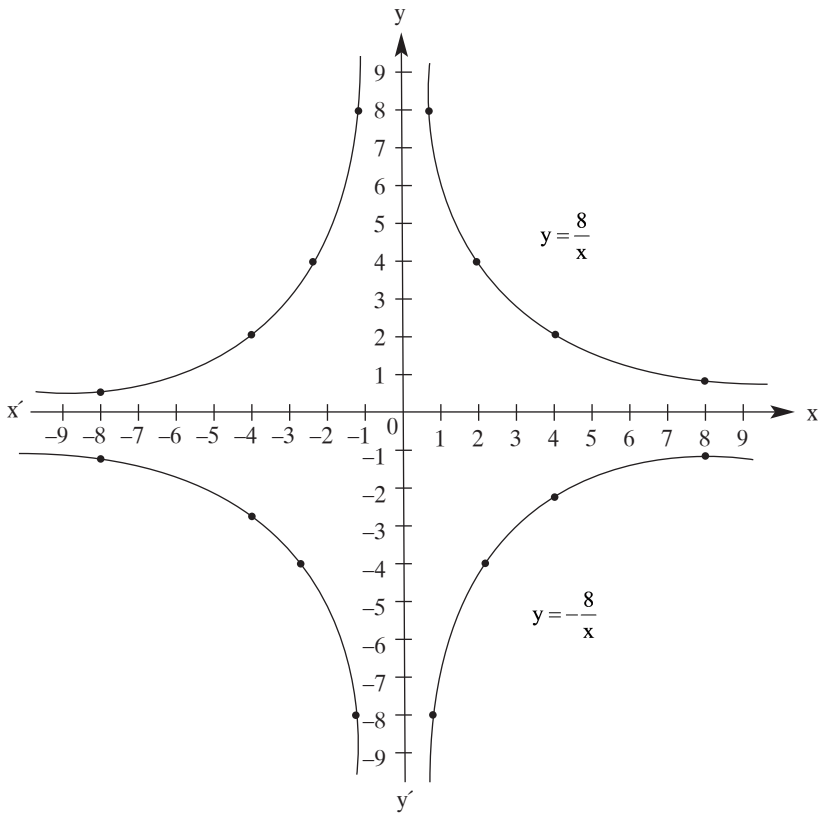
Κάνουμε τους πίνακες τιμών:

Για $y = \frac{8}{x}$

x	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
y	–1	–2	–4	–8	8	4	2	1

Για $y = -\frac{8}{x}$

x	–8	–4	–2	–1	1	2	4	8
y	1	2	4	8	–8	–4	–2	–1



2) Ένας πεζός με ταχύτητα 5 Km\h για να διανύσει μια ορισμένη απόσταση χρειάζεται 12 ώρες. Να βρεθεί πόσο χρόνο χρειάζεται ένας ποδηλάτης με ταχύτητα 25 Km\h περισσότερο από τον πεζό για να διανύσει την ίδια απόσταση.

Λύση

Ο ποδηλάτης έχει ταχύτητα 25 + 5 = 30 Km\h.
Επειδή τα ποσά ταχύτητα και χρόνος που χρειάζεται για να διανύσουμε μια συγκεκριμένη απόσταση είναι αντιστρόφως ανάλογα έχουμε:

Ταχύτητα (Km)	5	30
Χρόνος (h)	12	x

οπότε $5 \cdot 12 = 30 \cdot x$
$60 = 30 \cdot x$
$x = 2$ ώρες
Άρα ο ποδηλάτης χρειάζεται 2 ώρες για να διανύσει την απόσταση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα:

α)

x	2	3	8
y	6	4	1,5

β)

x	3	6	10
y	50	25	16

γ)

x	–3	2	–1
y	2	–3	6

γ)

x	1	2	3
y	5	5/2	5/3

2) Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της $y = -\frac{5}{x}$ βρίσκεται στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο Σ Λ

β) Η γραφική παράσταση της $y = \frac{7}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$ Σ Λ

γ) Η γραφική παράσταση της $y = -\frac{3}{x}$ βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο Σ Λ

δ) Η γραφική παράσταση της $y = \frac{2}{x}$ διέρχεται απο το σημείο Α(2,2) Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα
α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

x	–6	–3	–1	1	3	6
y			–3			

β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης που συνδέει τα x και y.

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y=\frac{10}{x}$ και $y=-\frac{10}{x}$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y=-\frac{2}{x}$ $\quad y=-\frac{4}{x}$ $\quad y=-\frac{12}{x}$

4. Δίνεται η συνάρτηση $y=\frac{2\lambda-5}{x}$, $x\neq 0$

α) Να βρείτε το λ αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$.

β) Να κάνετε τη γραφικιή της παράσταση.

5. 12 εργάτες κάνουν ένα έργο σε 20 ημέρες. Ύστερα από 5 ημέρες από τότε που άρχισε το έργο αποχώρησαν 2 εργάτες. Να βρεθεί σε πόσες ημέρες θα τελειώσουν το έργο οι υπόλοιποι εργάτες.

6. Μια στρατιωτική μονάδα είχε 150 στρατιώτες και τρόφιμα για 10 ημέρες. Έπειτα από 4 ημέρες, μερικοί στρατιώτες έφυγαν με μετάθεση και οι υπόλοιποι με τα τρόφιμα που είχαν απομείνει πέρασαν 9 ημέρες. Πόσοι στρατιώτες πήραν μετάθεση;

7. Ένα τρίγωνο έχει εμβαδόν $120cm^2$.
α) να εκφράσετε τη βάση α του τριγώνου σε σχέση με το αντίστοιχο σε αυτή ύψος
β) να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

8. Ένας εργάτης τελειώνει ένα έργο σε 48 ώρες.

α) Να εκφράσετε τον χρόνο y που απαιτείται για να τελειώσει το έργο ως συνάρτηση του αριθμού x των εργατών που το εκτελούν.

β) Σε πόσο χρόνο ολοκληρώνεται το έργο, αν δουλεύουν 4 εργάτες;

γ) Πόσοι εργάτες χρειάζονται, για να ολοκληρωθεί το έργο σε 6 ώρες;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α) Τι ονομάζεται συνάρτηση;
β) Τι ονομάζεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Θέμα2

Δίνεται η συνάρτηση $y = 5x^2 - 7$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	0			–4	
y		13	–2		118

Θέμα 3

Δίνονται τα σημεία Α(–1,3) και Β(7,9). Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $y = -\frac{1}{2}x^2 + \lambda$. Να βρείτε το λ ώστε το ζεύγος (2, –2) να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Στη συνέχεια να κάνετε τη γραφική της παράστασης για $-4 \le x \le 4$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα;
β) Τι ονομάζεται κλίση της ευθείας $y = \alpha x$;

Θέμα 2

Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(–3,15). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας αυτής.

Θέμα 3

Δίνεται η εξίσωση $7x - 3y = -21$ όπου x, y πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε:
α) τα σημεία στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες
β) την κλίση της ευθείας
γ) το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες x΄x και y΄y.

Θέμα 4

Ένα έργο συμφωνήθηκε να τελειώσει σε 25 μέρες. Αν 6 εργάτες τελείωσαν

το $\frac{1}{2}$ του έργου σε 10 μέρες, πόσοι εργάτες πρέπει να χρησιμοποιηθούν, για να τελειώσει το υπόλοιπο έργο στην καθορισμένοι προθεσμία;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

Θέμα 1

Α. Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ με x πραγματικό αριθμό και $\alpha \neq 0$;
Β. Πότε δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα;

Θέμα 2

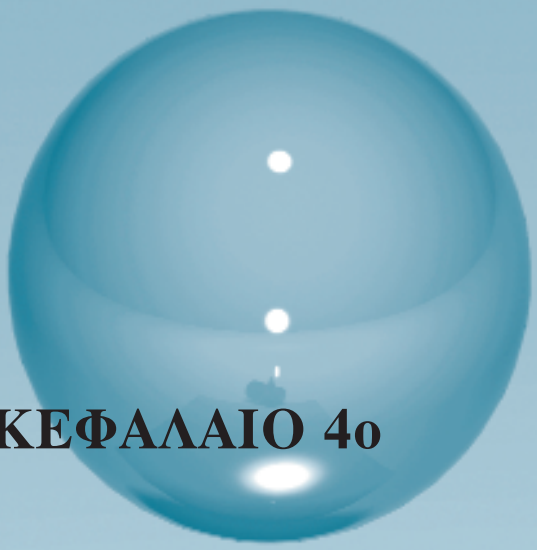
Μια βιομηχανία έκανε αύξηση 8% στις τιμές των προιόντων της.
α) Να βρείτε τη σχέση που εκφράζει τις νέες τιμές y των προιόντων ως συνάρτηση των παλιών τιμών x.
β) Να βρείτε τη νέα τιμή ενός προιόντος που είχε αρχική τιμή 120 €.
γ) Να βρείτε την παλιά τιμή ενός προιόντος, αν τώρα κοστίζει 216 €.

Θέμα 3

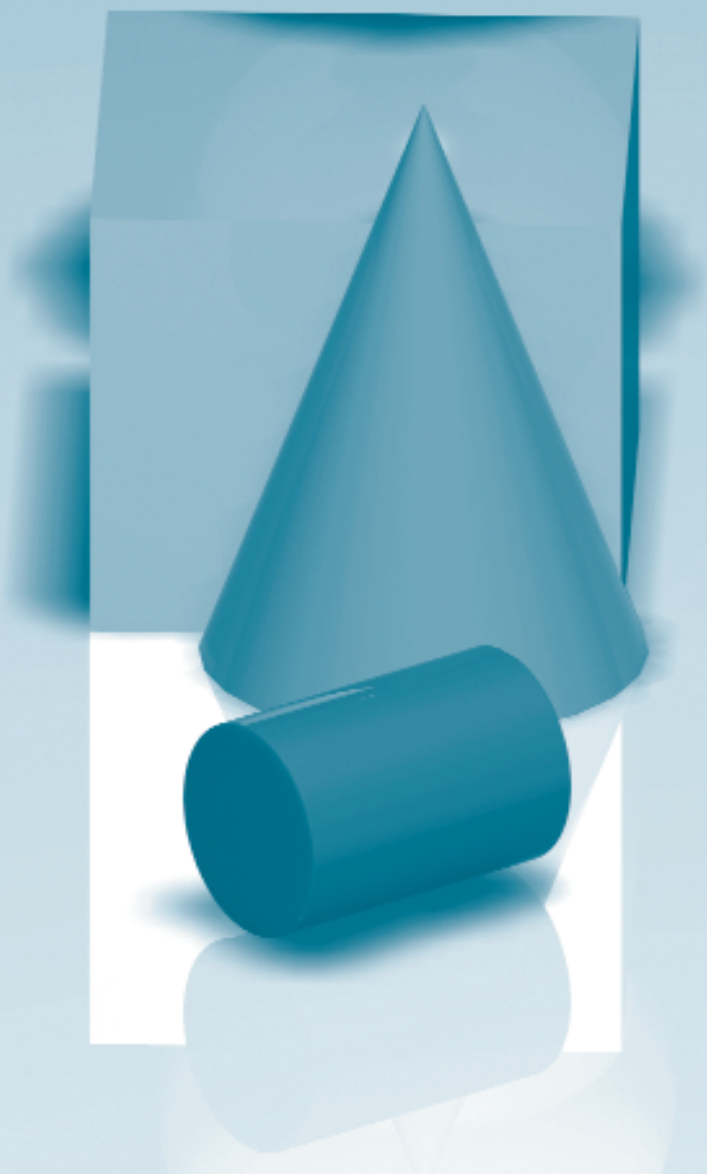
Μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(\sqrt{3},1)$.
Να βρείτε:
α) τη συνάρτηση που έχει ως γραφική παράσταση την ευθεία αυτή
β) τη γωνία που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τον άξονα Ox.

Θέμα 4

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(0,3) και B(3, –12).



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο



4.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ: ΠΛΗΘΥΣΜΟΣ - ΔΕΙΓΜΑ

Ορισμός

Πληθυσμός ονομάζεται ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτητιστικό τους. Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τα στοιχεία ενός πληθυσμού, ονομάζεται **μεταβλητή**.

Δείγμα λέγεται το μέρος του πληθυσμού που εξετάζεται και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εξέταση κάθε ατόμου του δείγματος λέγονται **στατιστικά δεδομένα ή παρατηρήσεις**. Για να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα κατά την εξέταση ενός δείγματος, θα πρέπει το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού**.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σ' ένα γυμνάσιο θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση των μαθητών της Β΄ γυμνασίου στα μαθηματικά. Πήραμε από το τμήμα B_2 τις επόμενες βαθμολογίες 10 μαθητών: 15, 11, 10, 10, 14, 16, 19, 18, 13, 17.
Να βρείτε:
α) Ποιός είναι ο πληθυσμός;
β) Ποιό είναι το δείγμα;
γ) Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;

Λύση

α) Ο πληθυσμός είναι οι μαθητές της Β΄ γυμνασίου
β) Το δείγμα είναι οι 10 μαθητές του τμήματος B_2
γ) Το δείγμα αυτό δεν είναι αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού, γιατί πήραμε μαθητές μόνο από ένα τμήμα και όχι από όλα τα τμήματα της Β΄ γυμνασίου.

2) Για να εκτιμήσουμε τις ποδοσφαιρικές προτιμήσεις των μαθητών γυμνασίου, ρωτήσαμε 500 μαθητές απο γυμνάσια και λύκεια της Αττικής και είχαμε τα ακόλουθα ποσοστά:
Ολυμπιακός 30%, ΠΑΟ 25%, ΑΕΚ 25%, ΠΑΟΚ 10% και ΑΛΛΗ ΟΜΑΔΑ 10%.

α) Ποιός είναι ο πληθυσμός και ποιό το δείγμα; Είναι το δείγμα αντιπροσωπευτικό;
β) Να βρείτε πόσοι από τους μαθητές του δείγματος είναι Ολυμπιακός, ΠΑΟ, ΑΕΚ, ΠΑΟΚ.

Λύση

α) Ο πληθυσμός είναι όλοι οι μαθητές γυμνασίου, ενώ το δείγμα είναι οι 500 μαθητές που ρωτήσαμε. Το δείγμα δεν είναι αντιπροσωπευτικό, γιατί ρωτήσαμε μαθητές από την Αττική και όχι από όλη τη χώρα.

β) Ολυμπιακός είναι $500 \cdot \frac{30}{100} = 150$ μαθητές

ΠΑΟ είναι $500 \cdot \frac{25}{100} = 125$ μαθητές

ΑΕΚ είναι $500 \cdot \frac{25}{100} = 125$ μαθητές

ΠΑΟΚ είναι $500 \cdot \frac{10}{100} = 50$ μαθητές

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Για να εκτιμήσουμε το βάρος των 200 μαθητών της τρίτης τάξης ενός Λυκείου της Θεσσαλονίκης, ρωτήσαμε 15 μαθητές και πήραμε τα παρακάτω βάρη σε κιλά: 67, 72, 71, 69, 70, 87, 75, 77, 68, 82, 85, 73, 77, 80, 82.

1. Ο πληθυσμός της ερεύνας είναι:
α) Όλοι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου.
β) Οι 200 μαθητές του Λυκείου της Θεσ/νίκης.
γ) Οι 15 μαθητές που ρωτήσαμε το βάρος τους.
δ) 1Όλοι οι μαθητές Γ΄ Λυκείου των σχολείων της Θεσ/νίκης.

2. Το δείγμα της έρευνας είναι:
α) Οι 200 μαθητές του Λυκείου.
β) Όλοι οι μαθητές Γ΄ Λυκείου των σχολείων της Θεσ/νίκης.
γ) Οι 15 μαθητές που ρωτήσαμε το βάρος τους.
δ) Όλοι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

3. Το μέγεθος του δείγματος:
α) Οι περίπου 60.000 μαθητές της Γ΄ Λυκείου.
β) Οι 200 μαθητές του Λυκείου.
γ) Η διαφορά του μικρότερου βάρους απο το μεγαλύτερο βάρος, δηλαδή 87 – 67 = 20.
δ) Οι 15 μαθητές που ρωτήσαμε.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε χωρίς μολύβι και χαρτί:
α) το 65% του 200
β) το 50% του 90
γ) το 100% του 167
δ) το 25% του 72
ε) το 10% του 80

2. Να υπολογίσετε:
α) το 5% του 70
β) το 20% του 120
γ) το 35% του 160
δ) το 65% του 320
ε) το 15% του 3000

3. Το 35 είναι το 20% του αριθμού:
α) 70 β) 700 γ) 175 δ) 140

4. Το 55% του αριθμού 300 είναι:
α) 110 β) 165 γ) 220 δ) 550

5. Σε μια έρευνα που έγινε σε 500 άτομα οι 200 ήταν άνδρες. Τι ποσοστό του δείγματος είναι άνδρες και τι ποσοστό είναι γυναίκες;

6. Σε μια δημοσκόπηση που έγινε για τις επερχόμενες βουλευτικές εκλογές, 270 άτομα απάντησαν ότι προτιμούν το κόμμα "Α" , 405 άτομα το κόμμα "Β", και 225 το κόμμα "Γ".
Ποιά είναι τα ποσοστά του κάθε κόμματος σ' αυτή τη δημοσκόπηση;

7. Σε έναν αθλητικό σύλλογο με τμήματα ποδοσφαίρου μπάσκετ και βόλευ είναι εγγεγραμμένα 350 αγόρια και 150 κορίτσια. Στο τμήμα μπάσκετ είναι εγγεγραμμένα 175 παιδιά.
α) Ποιό είναι το ποσοστό των αγοριών σ' αυτόν τον αθλητικό σύλλογο;
β) Ποιό είναι το ποσοστό των παιδιών που παίζουν μπάσκετ;

8. Ένας φοιτητής θέλει να βρει για μια εργασία του το μέσο όρο του ποσού για το οποίο ασφαλίζονται οι πολίτες της χώρας μας. Για να το υπολογίσει, βρήκε πρόσβαση στα αρχεία μιας ασφαλιστικής εταιρείας και πήρε τα ποσά των ασφαλιζομένων τα τελευταία 20 χρόνια. Είναι σωστό το αποτέλεσμα που θα βγάλει; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας)

9. Για να βρει ο Δημήτρης ποιές εκπομπές στη τηλεόραση έχουν τη μεγαλύτερη ακροαματικότητα, ρώτησε τους 200 μαθητές του σχολείου του ποιές εκπομπές παρακολουθούν. Ποιός είναι ο πληθυσμός της έρευνας και ποιό το δείγμα; Είναι το δείγμα αξιόπιστο;

4.2 ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Διαγράμματα

Διαγράμματα λέγονται οι εικόνες που παρουσιάζουν με σύντομο και εύκολο τρόπο ένα σύνολο αριθμητικών δεδομένων ή πληροφοριών. Με τα διαγράμματα μπορούμε να αντιληφθούμε σύντομα ένα θέμα, χωρίς όμως να μπούμε σε λεπτομέρειες.
Τα είδη **διαγραμμάτων** είναι:

1) Τα **εικονογράμματα**, στα οποία χρησιμοποιούμε την εικόνα ενός αντικειμένου για να δείξουμε πόσες φορές αυτό παρουσιάζεται στην έρευνά μας. Σε ένα τέτοιο διάγραμμα πρέπει να υπάρχει ο τίτλος που μας κατατοπίζει για το είδος και τη μεταβλητή της έρευνας, η κλίμακα που δείχνει τον αριθμό των αντικειμένων που παριστάνει η εικόνα, καθώς και ο τίτλος κάθε στήλης ή γραμμής.

Παράδειγμα

Αριθμός αγελάδων στην Ελλάδα

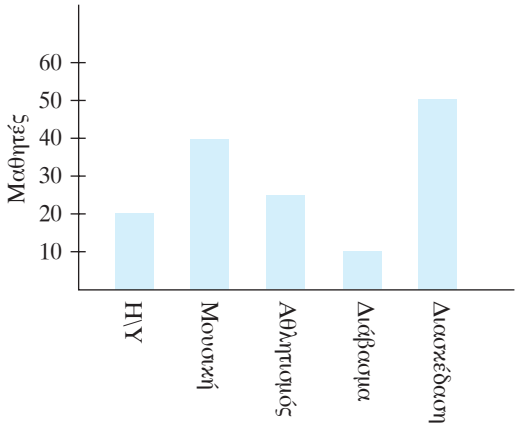
1990	
1995	
2000	
2005	


= 5000 αγελάδες

2) Τα **ραβδογράμματα**, στα οποία χρησιμοποιούμε ορθογώνια για να δείξουμε το πλήθος της κάθε μεταβλητής. Σε ένα ραβδόγραμμα πρέπει να υπάρχουν ο τίτλος του που μας κατατοπίζει για το είδος της έρευνας και οι τίτλοι των αξόνων. Τα ραβδογράμμα, γενικά, σχεδιάζονται εύκολα και είναι πιο ακριβή από τα εικονογράμματα.

Παράδειγμα

Απασχόληση μαθητών στον ελεύθερο χρόνο τους

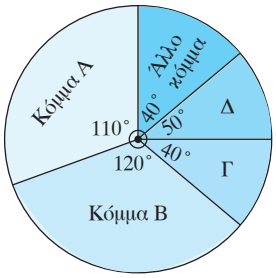


3) Τα **κυκλικά διαγράμματα**, στα οποία το δείγμα παριστάνεται με έναν κυκλικό δίσκο και οι τιμές της μεταβλητής με κυκλικούς τομείς διαφορετικού χρώματος. Για να υπολογίσουμε τη γωνία κάθε κυκλικού τομέα χρησιμοποιούμε τον εξής τύπο:

$$\theta = \frac{(\text{Συχνότητα της μεταβλητής})}{(\text{Μέγεθος δείγματος})} \cdot 360^\circ$$

Παράδειγμα

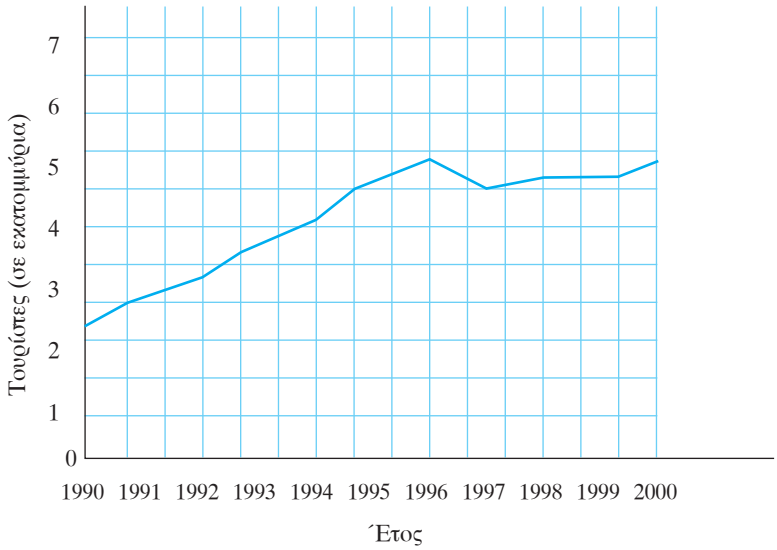
Κόμμα που προτιμούν οι ψηφοφόροι



4) Τα **χρονογράμματα**, τα οποία είναι διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε τη χρονική εξέλιξη ενός φαινομένου.

Παράδειγμα

Τουριστική κίνηση στην Ελλάδα



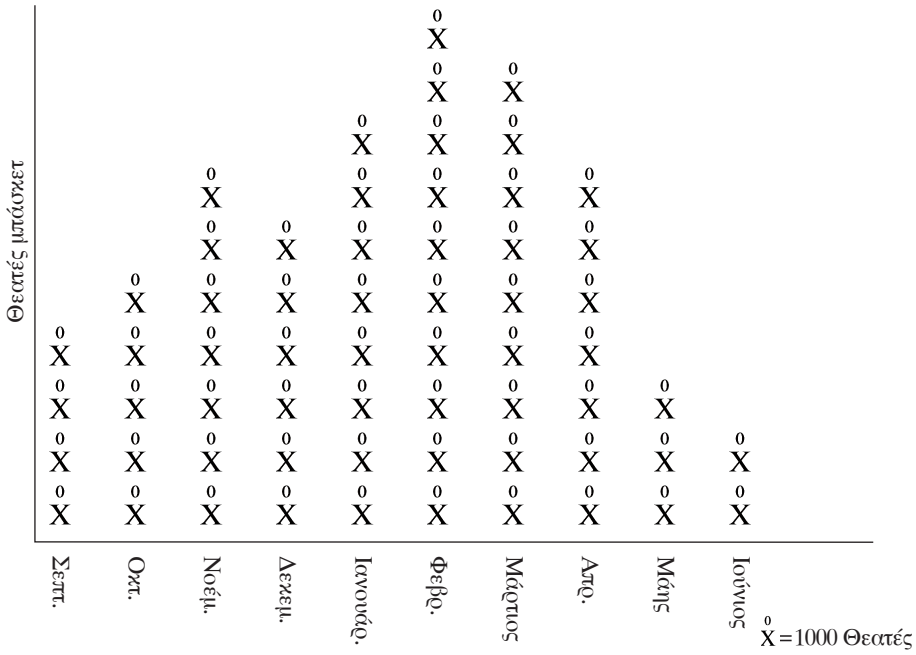
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ο αριθμός των θεατών που παρακολούθησαν τους αγώνες μπάσκετ σ' ένα γήπεδο ανά μήνα ήταν:

Σεπτ.	Οκτ.	Νοέμ.	Δεκ.	Ιαν.	Φεβρ.	Μάρτ.	Απρ.	Μάης	Ιούνιος
4000	5000	7000	6000	8000	10.000	9000	7000	3000	2000

Να σχεδιάσετε ένα εικονόγραμμα χρησιμοποιώντας κλίμακα $\overset{0}{X} = 1000$ θεάτες

Λύση



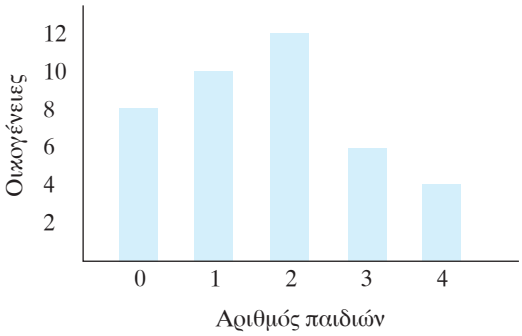
2) Σε μια έρευνα που έγινε σε δείγμα 40 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών που έχουν, προέκυψαν τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα.

Αριθμός παιδιών	**Οικογένειες**
0	8
1	10
2	12
3	6
4	4

Να κατασκευάσετε:
α) ραβδόγραμμα
β) κυκλικό διάγραμμα

Λύση

α)



β) Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες

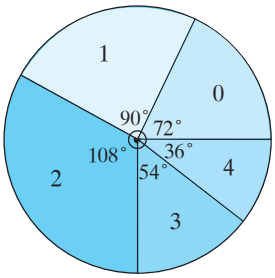
Για 0 παιδί έχουμε $\theta = \frac{8}{40} \cdot 360^0 = 72^0$

Για 1 παιδί έχουμε $\theta = \frac{10}{40} \cdot 360^0 = 90^0$

Για 2 παιδιά έχουμε $\theta = \frac{12}{40} \cdot 360^0 = 108^0$

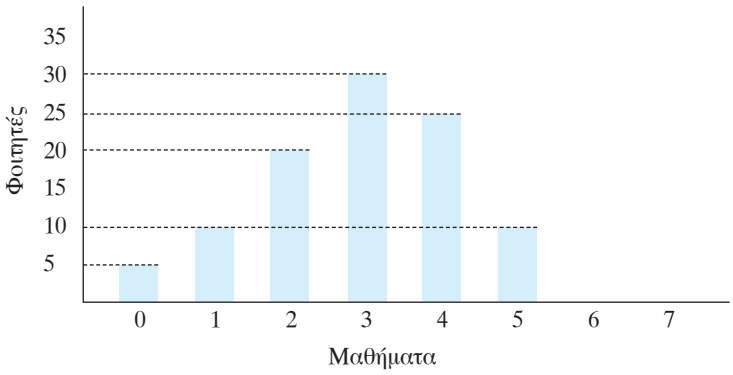
Για 3 παιδιά έχουμε $\theta = \frac{6}{40} \cdot 360^0 = 54^0$

Για 4 παιδιά έχουμε $\theta = \frac{4}{40^0} \cdot 360^0 = 36^0$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ρωτήσαμε μερικούς φοιτητές πόσα μαθήματα πέρασαν στην τελευταία εξεταστική περίοδο. Οι απαντήσεις του φαίνονται στο παρακάτω ραβδόγραμμα.



α) Το πλήθος των φοιτητών ήταν
Α. 50 Β. 80 Γ. 100 Δ. 10
β) Πόσοι φοιτητές πέρασαν 2 μαθήματα;
Α. 2 Β. 20 Γ. 40 Δ. 4
γ) Πόσοι φοιτητές πέρασαν το πολύ 3 μαθήματα;
Α. 30 Β. 55 Γ. 35 Δ. 65
δ) Πόσοι φοιτητές πέρασαν τουλάχιστον 3 μαθήματα;
Α. 65 Β. 30 Γ. 35 Δ. 25
ε) Πόσοι φοιτητές πέρασαν 6 μαθήματα;
Α. 10 Β. 0 Γ. 5 Δ. 100
στ) Οι φοιτητές που πέρασαν τουλάχιστον 5 μαθήματα αποτελούν ποσοστό;
Α. 10% Β. 90% Γ. 20% Δ. 100%

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Το παρακάτω εικονόγραμμα μας πληροφορεί για τον αριθμό των αυτοκινήτων που πούλησε μια αντιπροσωπεία αυτοκινήτων τα έτη 2002, 2003, 2004, 2005 και 2006.
(🚗 = 1.000 αυτοκίνητα)

α) Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα πουλήθηκαν και τα 5 έτη.
β) Να υπολογίσετε το ποσοστό των συνολικών πωλήσεων που αντιστοιχούν στις πωλήσεις του έτους 2005.
γ) Να μετατρέψετε το παραπάνω εικονόγραμμα σε χρονόγραμμα.

2. Ο πατέρας του Πέτρου διαθέτει το μισθό του ως εξής. Για ενοίκιο 20%, για φαγητό 35%, για ρούχα 30% και για διασκέδαση 15%.
α) Να κάνετε το αντίστοιχο κυκλικό διάγραμμα.
β) Να βρείτε πόσα χρήματα ξοδεύει για ρούχα, αν ο μισθός του είναι 1500 ευρώ.

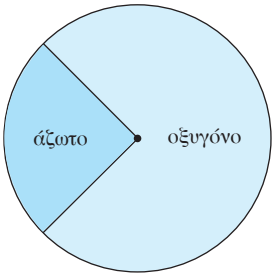
3. Για να κατασκευάσουμε ένα γλυκό χρησιμοποιούμε 250g αλεύρι, 150g ζάχαρι, 100g βούτυρο, 180g σοκολάτα και 40g άλλα υλικά. Να παραστήσετε τα δεδομένα με ραβδόγραμμα και με κυκλικό διάγραμμα.

4. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τον αριθμό των αυτοκινήτων σε μια οικογένεια.

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	6
1	32
2	10
3	2
Σύνολο	50

α) Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 1 αυτοκίνητο;
β) Πόσες οικογένειες έχουν 2 αυτοκίνητα;
γ) Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα;
δ) Τι ποσοστό οικογενειών έχουν 1 αυτοκίνητο;
ε) Να κάνετε ραβδόγραμμα.
στ) Να κάνετε κυκλικό διάγραμμα.

5. Ο αέρας αποτελείται από οξυγόνο και άζωτο σε αναλογία 1 : 3 περίπου. Να βρείτε τις γωνίες των κυκλικών τομέων του διπλανού κυκλικού διαγράμματος.



4.3 ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Οι επιβάτες 40 αυτοκινήτων ιδιωτικής χρήσης στο κέντρο της Θεσ/νίκης, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

1	1	3	2	2	1	4	1	1	4
3	1	1	2	1	2	3	1	2	1
2	2	3	1	2	1	1	5	4	3
2	1	1	3	1	2	1	1	1	1

Τα δεδομένα αυτά, έτσι όπως είναι τοποθετημένα, δεν μας βοηθούν ώστε να έχουμε μια σαφή εικόνα της έρευνας. Γι' αυτό το λόγο τοποθετούμε τα πα-

ραπάνω δεδομένα σε ένα πίνακα, που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

Αριθμός επιβατών (τιμές)	Διαλογή	Συχνότητες (αυτοκίνητα)	Σχετικές Συχν. %
1	卌 卌 卌 卌	20	50
2	卌 卌	10	25
3	卌 |	6	15
4	|||	3	7,5
5	|	1	2,5
Σύνολο		40	100

- **Συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται ο **φυσικός αριθμός** που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή αυτή στο δείγμα μας.

– Η συχνότητα μιας τιμής είναι ένας φυσικός αριθμός μικρότερος ή ίσος από το φυσικό αριθμό που δηλώνει το μέγεθος του δείγματος.

- **Σχετική συχνότητα** μιας τιμής ονομάζεται το πηλίκο της συχνότητάς της προς το πλήθος του δείγματος.

– Για να βρούμε τη σχετική συχνότητα μιας τιμής διαιρούμε τη συχνότητα της τιμής αυτής με το πλήθος όλων των παρατηρήσεων.

Έπειτα εκφράζουμε τις σχετικές συχνότητες σε ποσοστά επί τοις %.

– Η σχετική συχνότητα είναι πάντοτε αριθμός μικρότερος ή ίσος του 1.

– Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 100.

(όταν εκφράζονται σε ποσοστό επι τοις %)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Κάναμε μια έρευνα για τον αριθμό των τερμάτων που έβαλε μια ομάδα στους αγώνες που έδωσε και τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

Αριθμός τερμάτων	0	1	2	3	4	5
Αριθμός αγώνων	4	5	5	3	2	1

α) Το συνολικό πλήθος των αγώνων που έδωσε η ομάδα είναι:

Α. 6 Β. 20 Γ. 15 Δ. 5

β) Η συχνότητα της τιμής 2 είναι:

Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 20

γ) Η σχετική συχνότητα των αγώνων που η ομάδα έβαλε 4 τέρματα είναι:

Α. $\frac{4}{20}$ Β. $\frac{20}{2}$ Γ. $\frac{2}{20}$ Δ. $\frac{100}{4}$

δ) Η σχετική συχνότητα των αγώνων που η ομάδα έβαλε τουλάχιστον 2 τέρματα ως ποσοστό επί τοις εκατό είναι:

Α. $\frac{6}{100}\cdot 20$ Β. $\frac{5}{20}\cdot 100$ Γ. $\frac{8}{20}\cdot 100$ Δ. $\frac{11}{20}\cdot 100$

ε) Η επίκεντρη γωνία, του κυκλικού διαγράμματος, που αντιστοιχεί στους αγώνες που η ομάδα έβαλε 1 τέρμα είναι:

Α. $\frac{9}{12}\cdot 360^0$ Β. $\frac{5}{20}\cdot 360^0$ Γ. $\frac{5}{360^0}\cdot 20$ Δ. $\frac{1}{20}\cdot 360^0$

2) Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των ψήφων και το ποσοστό 5 κομμάτων σ' ένα εκλογικο τμήμα:

κόμμα	**ψήφοι**	**Σχετική συχν. (%)**
Α	40	25
Β		10
Γ	32	
Δ	48	
Ε		
Σύνολο		

Μπορείτε να βρείτε τα στοιχεία που λείπουν;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Αριθμός ένδειξης ενός ζαριού

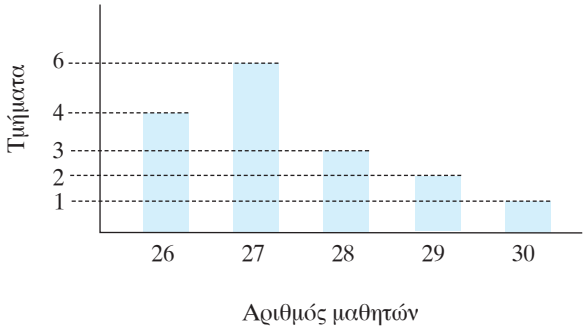
Αριθμός	**Συχνότητα**	**Σχετική συχν. (%)**
1		10
2	4	20
3	6	
4		25
5	2	
6		
Σύνολο		

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Ανεξεταστέοι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου

Μάθημα	**Συχνότητα**	**Σχετική συχν. (%)**
Αρχαία Ελληνικά	6	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	8	
Μαθηματικά	10	25
Ιστορία	8	
Γεωγραφία		
Σύνολο		

3. Το παραπάνω ραβδόγραμμα δείχνει τον αριθμό των μαθητών στα 16 τμήματα ενός Γυμνασίου.



α) Να κάνετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Πόσα τμήματα έχουν τουλάχιστον 28 μαθητές;
γ) Πόσα τμήματα έχουν το πολύ 28 μαθητές;

4. Ένα δείγμα 20 μαθητών της Β΄ Γυμνασίου εξετάστηκε ως προς τις ώρες που παρακολουθεί τηλεόραση το Σαββατοκύριακο. Από την εξέταση αυτή προέκυψαν τα παρακάτω δεδομένα:

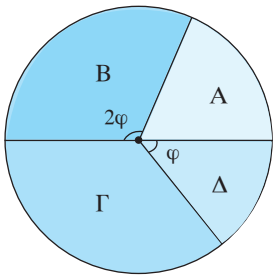
3	3	2	1	5	3	4	4	5	4
3	2	6	4	0	4	1	5	2	2

α) Να κάνετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετ. συχνοτήτων.
β) Να κάνετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που βλέπουν το πολύ 3 ώρες τηλεόραση το Σαββατοκύριακο.

δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που βλέπουν τουλάχιστον 5 ώρες τηλεόραση το Σαββατοκύριακο.

5. Σε ένα δείγμα 50 πτυχιούχων του Μαθηματικού τμήματος βρέθηκαν 30 με βαθμό «καλώς», 15 με βαθμό «Λίαν καλώς» και 5 με βαθμό «Άριστα».
α) Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να κάνετε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να παρασταθούν τα δεδομένα με κυκλικό διάγραμμα.

6. Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα φαίνονται τα αποτελέσματα των εκλογών, για την ανάδειξη του Προέδρου ενός συλλόγου. Έλαβαν μέρος 200 μέλη του συλλόγου. Από τους τέσσερις υποψήφιους Α, Β, Γ, Δ ο υποψήφιος Α συγκέντρωσε 40 ψήφους. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στον υποψήφιο Γ είναι 126°. Να γίνει πίνακας συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.



7. Στο διπλανό πίνακα συχνοτήτων δίνεται η κατανομή του αριθμού των παιδιών 50 οικογενειών. Να βρείτε τον αριθμό και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν:

α) τουλάχιστον 2 παιδιά
β) λιγότερα απο 3 παιδιά
γ) ακριβώς 1 παιδί
δ) απο 2 εως 3 παιδιά

Αριθμός παιδιών	**Συχνότητα**
0	12
1	10
2	18
3	
4	3

4.4 ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Σε μια έρευνα για το ύψος των μαθητών ενός Γυμνασίου πήραμε τιμές απο 140cm εώς 190cm. Παρατηρούμε ότι οι τιμές της μεταβλητής «ύψος μαθητή» μεταβάλλονται στο διάστημα από 140cm εώς 190cm. Το **εύρος** της μεταβλητής είναι η διαφορά 190 – 140 = 50cm.
Χωρίζουμε το διάστημα στο οποίο ανήκουν οι παρατηρήσεις, δηλαδή το 50, σε υποδιαστήματα που λέγονται **κλάσεις**. Στον παρακάτω πίνακα το χωρί-

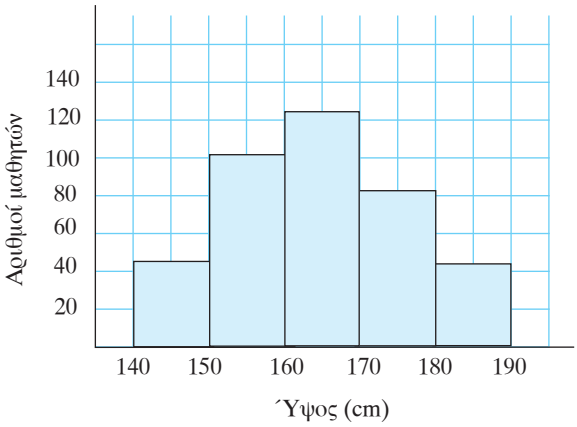
σαμε σε 5 κλάσεις με **πλάτος** $\frac{50}{5} = 10\text{cm}$. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ομαδοποίηση παρατηρήσεων**.

Ύψος (cm)	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
140 – 150	45	11,25
150 – 160	104	26
160 – 170	125	31,25
170 – 180	82	20,5
180 – 190	44	11
Σύνολο	400	100

Παρατηρήσεις – Σχόλια

- Οι κλάσεις έχουν το ίδιο πλάτος.
- Το ημιάθροισμα των άκρων μιας κλάσης λέγεται **κέντρο της κλάσης**.

Για να κάνουμε γραφική παρουσίαση ομαδοποιημένων παρατηρήσεων χρησιμοποιούμε το **ιστόγραμμα**, που αποτελείται από συνεχόμενα ορθογώνια, τα οποία έχουν ύψος ίσο με τη συχνότητα ή τη σχετική συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σ' ένα τεστ πήραν μέρος 50 μαθητές προκειμένου ο καθένας να απαντήσει σε 200 ερωτήσεις. Η βαθμολογία είναι 1 ή 0, ανάλογα αν ο μαθητής απαντάει ή όχι στην ερώτηση. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα της βαθμολογίας.

Βαθμοί	Μαθητές
60 – 80	3
80 – 100	10
100 – 120	13
120 – 140	15
140 – 160	7
160 – 180	2
Σύνολο	50

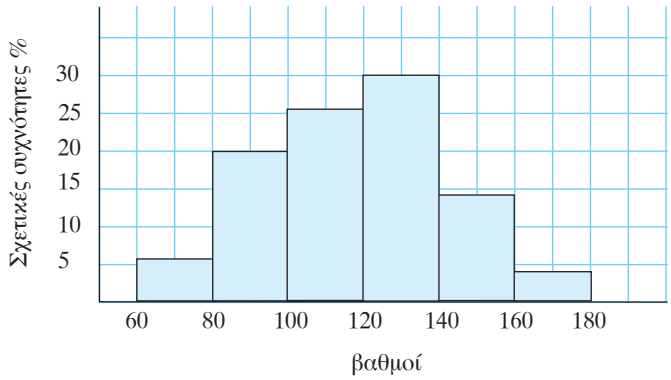
α) Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
β) Αν η βάση για να περάσει ένας μαθητής επιτυχώς το τεστ είναι το 100, τι ποσοστό των μαθητών πέρασε επιτυχώς το τεστ;

Λύση

α) Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την στήλη των σχετικών συχνοτήτων. Τις σχετικές συχνότητες τις βρίσκουμε από τον τύπο:

$$\text{σχετική συχνότητα} = \frac{\text{συχνότητα κλάσης}}{\text{πλήθος δείγματος}}$$

Βαθμοί	Συχνότητες (μαθητές)	Σχετικές συχν. (%)
60 – 80	3	6
80 – 100	10	20
100 – 120	13	26
120 – 140	15	30
140 – 160	7	14
160 – 180	2	4
Σύνολο	50	100



β) Το τεστ πέρασαν επιτυχώς: 13 + 15 + 7 + 2 = 37 μαθητές δηλαδή ποσοστό $\frac{37}{50} = 0,74$ ή 74%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Δίνονται τα ομαδοποιημένα δεδομένα του παρακάτω πίνακα.

1. Το πλάτος της κάθε κλάσης είναι:
Α. 5 Β. 20 Γ. 4 Δ. 10
2. Το κέντρο της κλάσης 12 – 16 είναι:
Α. 5 Β. 14 Γ. 28 Δ. 4
3. Η συχνότητα της κλάσης 8 – 12 είναι:
Α. 10 Β. 7 Γ. 6 Δ. 8
4. Η σχετική συχνότητα της κλάσης 12 – 16 είναι:
Α. 20% Β. 6% Γ. 14% Δ. 30%

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

Κλάσεις	Συχνότητα
0 – 4	5
4 – 8	7
8 – 12	8
12 – 16	6
16 – 20	4

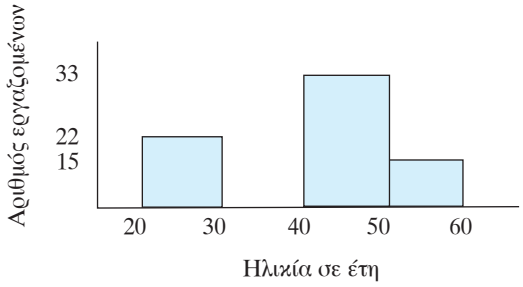
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι βαθμοί που πήραν 40 μαθητές σ' ένα διαγώνισμα

18	16	13	6	10	12	11	10	8	7
11	15	12	4	18	13	18	4	10	15
12	7	3	10	8	14	18	6	18	16
18	7	14	14	11	3	12	14	11	7

α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
γ) Να γίνει ιστόγραμμα συχνοτήτων.

2. Στο παρακάτω ιστόγραμμα δίνονται οι ηλικίες 100 υπαλλήλων μιας εταιρείας. Τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα σε τέσσερις κλάσης ίσου πλάτους. Το ορθογώνιο της κλάσης 30 – 40 δεν είναι συμπληρωμένο.



α) Να συμπληρώσετε το ιστόγραμμα.
β) Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
γ) Τί ποσοστό των υπαλλήλων έχει ηλικία πάνω απο 40 έτη.

3. Σε ένα δείγμα 20 μπαταριών ελέγχθηκε η διάρκεια ζωής τους σε ώρες και τα αποτελέσματα ήταν:

62	60	55	61	58	64	69	68	66	60
50	67	57	53	69	68	59	54	62	63

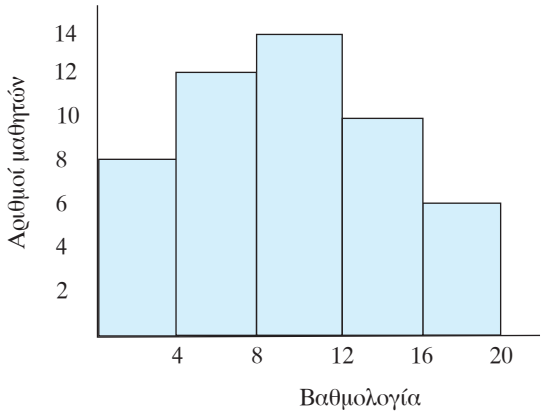
α) Να κάνετε ομαδοποίηση σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους.
β) Να κάνετε ιστόγραμμα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

4. Απο μία έρευνα που έγινε σε 200 μαθητές για τα χρήματα που ξοδεύουν σε ένα μήνα, βρέθηκαν τα αποτελέσματα που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ποσό (ευρώ)	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200
σχετ. συχνότητα %	15%	43%	32%	10%

α) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων
β) Πόσοι μαθητές ξοδεύουν πάνω από 100 ευρώ;
γ) Πόσοι μαθητές ξοδεύουν το πολύ 150 ευρώ;

5. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών μιας τάξης στα μαθηματικά.
α) Πόσοι είναι οι μαθητές;
β) Τι ποσοστό μαθητών πήρε πάνω απο 16;
γ) Τι ποσοστό μαθητών πήρε κάτω από τη βάση:



4.5 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ - ΔΙΑΜΕΣΟΣ

Μέση τιμή

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{Άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{Πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Παρατηρήσεις – σχόλια

– Η μέση τιμή μπορεί να είναι αριθμός που δεν ανήκει στα δεδομένα της έρευνας.

Παράδειγμα

Για τις παρατηρήσεις 5, 4, 4, 6, 7 έχουμε

$$\text{μέση τιμή} = \frac{5+4+4+6+7}{5} = \frac{26}{5} = 5,2$$

Μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής

Για να βρούμε τη **μέση τιμή** μιας **ομαδοποιημένης κατανομής** κάνουμε τα εξής:

1) Βρίσκουμε τα κέντρα των κλάσεων.
2) Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάση αυτής.
3) Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
4) Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.

Διάμεσος

1) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός (μονός) αριθμός, παίρνουμε ως **διάμεσο** τη **μεσαία παρατήρηση**.

Παράδειγμα

Στις παρατηρήσεις 17, 15, 18, 14, 16 για να βρούμε τη διάμεσο, τοποθετούμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά 14, 15, $\boxed{16,}$ 17, 18 και παίρνουμε τη μεσαία παρατήρηση, δηλαδή το 16.

2) Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος (ζυγός) αριθμός, παίρνουμε ως **διάμεσο** το **μέσο όρο** των **δύο μεσαίων παρατηρήσεων**.

Παράδειγμα

Στις παρατηρήσεις 17, 15, 18, 14, 16, 20 για να βρούμε τη διάμεσο, τοποθετούμε τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά και παίρνουμε το μέσο όρο των δύο μεσαίων παρατηρήσεων 14, 15, $\boxed{16, 17}$ 18, 20

δηλαδή η διάμεσος είναι $\frac{16+17}{2}=\frac{33}{2}=16,5$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Τα ύψη σε cm 10 μαθητών είναι 167, 174, 170, 167, 165, 174, 166, 171, 169, 172. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

Λύση

Η μέση τιμή είναι:

$$\frac{167+174+170+167+165+174+166+171+169+172}{10}=\frac{1695}{10}=169,5\text{cm}$$

Για να βρούμε τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.
165, 166, 167, 167, 169, 170, 171, 172, 174, 174
Το πλήθος τους είναι 10 (άρτιος). Διαγράφοντας τις ακραίες παρατηρήσεις ανά δύο:
~~165~~, ~~166~~, ~~167~~, ~~167~~, $\boxed{169, 170,}$ ~~171~~, ~~172~~, ~~174~~, ~~174~~
περισσεύουν δύο παρατηρήσεις: η 5η (169) και η 7η (170).
Άρα η διάμεσος είναι ο μέσος όρος αυτών των δύο παρατηρήσεων

$$\frac{169+170}{2}=\frac{339}{2}=169,5\text{cm}.$$

2) Ο διπλανός πίνακας δείχνει τον αριθμό των παιδιών που έχουν 20 οικογένειες

α) Πόσα παιδιά έχουν συνολικά και οι 20 οικογένειες.
β) Ποιός είναι ο μέσος όρος των παιδιών;

Αρ. παιδιών	Οικογένειες
0	2
1	7
2	6
3	4
4	1
Σύνολο	20

Λύση

α) Συνολικά οι 20 οικογένειες έχουν:
$0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 7 + 12 + 12 + 4 = 35$ παιδιά
β) Ο μέσος όρος των παιδιών είναι:

$$\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1}{20} = \frac{35}{20} = 1,75 \text{ παιδιά.}$$

3) Η μέση ηλικία 16 αγοριών και 14 κοριτσιών μιας τάξης είναι 15,18 χρόνια. Εάν η μέση ηλικία των αγοριών είναι 15,6 χρόνια, να βρείτε τη μέση ηλικία των κοριτσιών.

Λύση

Το άθροισμα των ηλικιών και των 30 μαθητών είναι: $30 \cdot 15,18 = 455,4$ χρόνια.
Το άθροισμα των ηλικιών των 16 αγοριών είναι: $16 \cdot 15,6 = 249,6$ χρόνια.
Επομένως το συνολικό άθροισμα των ηλικιών των 14 κοριτσιών είναι:
$455,4 - 249,6 = 205,8$ χρόνια.
Άρα η μέση ηλικία των 14 κοριτσιών είναι: $\frac{205,8}{14} = 14,7$ χρόνια.

4) Η μέση τιμή 9 αριθμών είναι ίση με 4. Ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε σ' αυτούς ώστε η νέα μέση τιμή να γίνει ίση με 5;

Λύση

Έστω x ο αριθμός που πρέπει να προσθέσουμε στους 9 αριθμούς ώστε η μέση τιμή να γίνει ίση με 5. Τότε έχουμε:

$$\frac{9 \cdot 4 + x}{10} = 5$$

$36 + x = 50$
$x = 50 - 36$
$\boxed{x = 14}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Το άθροισμα 40 παρατηρήσεων είναι 240. Η μέση τιμή είναι:

Α. 60 Β. 56 Γ. 6 Δ. $\frac{1}{6}$

2) Η μέση τιμή 10 παρατηρήσεων είναι 56,7. Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι:
Α. 5,67 Β. 567 Γ. 5670 Δ. 0,567

3) Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά μεγέθους και λείπει η 3η κατά σειρά παρατήρηση 22, 23, ..., 27, 27, 30.
α) Αν η διάμεσος είναι 26, η παρατήρηση που λείπει είναι:
Α. 25 Β. 26 Γ. 24 Δ. 23
β) Αν η διάμεσος είναι 27 η παρατήρηση που λείπει είναι:
Α. 25 Β. 26 Γ. 27 Δ. 28
γ) Αν η διάμεσος είναι 25 η παρατήρηση που λείπει είναι:
Α. 25 Β. 26 Γ. 24 Δ. 23

4) Η μέση τιμή μιας κατανομής είναι 5 και το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι 120. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:
Α. 24 Β. 120 Γ. 5 Δ. 600

5) Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων αν συμβολίσουμε με $α_i$ το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος τότε το $α_i$ ισούται με:
Α. $360^o \cdot v_i$ Β. $360^o \cdot fi$ Γ. $90^o \cdot fi$ Δ. $180^o \cdot v_i$ Ε. $180^o \cdot fi$
(Με vi συμβολίζουμε τη συχνότητα και με fi τη σχετική συχνότητα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστει η μέση τιμή των παρατηρήσεων κάθε γραμμής.
α) 5, 5, 5, 7, 7, 7
β) 11, 12, 13, 14, 15
γ) –5, –3, –1, 0, 1, 3, 5
δ) 16, 18, 14, 18, 16, 14

2. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων κάθε γραμμής.
α) –4, –5, 6, 8, 2, –3, 0, 4, 3, –7, 5, 3
β) 0, 1, 2, 50, 98, 99, 100
γ) 7, 8, 9, 11, 14, 15, 19, 22
δ) –11, –9, –4, –3, 0, 3, 4, 5, 9

3. Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι 3, 4, 5, 6, 11. Να βρείτε τους άλλους δύο αριθμούς αν γνωρίζετε οτι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.

4. Τα ύψη 8 αθλητών μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης είναι (σε cm):
172, 175, 183, 177, 190, 193, 189, 195

α) Να βρείτε το μέσο ύψος των αθλητών.

β) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών της ομάδας.

γ) Αν φύγει ο αθλητής με ύψος 195cm και έρθει ένας αθλητής με ύψος 198cm, να βρείτε ποιό είναι το νέο μέσο ύψος της ομάδας.

5. Ο διπλανός πίνακας δίνει τον αριθμό των επισκέψεων 40 μαθητών σε διάφορα μουσεία της χώρας κατά τη διάρκεια ενός έτους. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Επισκέψεις	**Αρ. Μαθητών**
0 – 2	8
2 – 4	12
4 – 6	10
6 – 8	6
8 – 10	4

6. Σε ένα τμήμα Β΄ Γυμνασίου με 30 μαθητές η μέση βαθμολογία είναι 16,2. Αν η μέση βαθμολογία των 14 αγοριών είναι 15,8, να βρείτε τη μέση βαθμολογία των κοριτσιών.

7. Ο μέσος μηνιαίος μισθός ν εργαζομένων σε μια επιχείρηση είναι 1200 €. Αν προσληφθούν άλλοι 5 εργαζόμενοι με μέσο μηνιαίο μισθό 1000 €, τότε ο μέσος μισθός όλων των εργαζομένων γίνεται 1150 €. Να βρείτε το ν.

8. Οι αριθμοί $4x$, $2x-1$, 8, $y-1$, $y-2$, $6x-1$, 21, $7x+1$, $2y-1$ έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά μεγέθους και έχουν μέση τιμή και διάμεσο 14. Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

9. Στον πίνακα δίνονται οι ηλικίες των 50 εργαζομένων μιας επιχείρησης.

43	29	34	43	22	25	39	37	57	46
35	23	33	37	54	26	36	48	27	30
30	41	36	22	33	44	20	35	47	24
31	24	59	38	21	38	54	27	45	20
36	31	52	23	48	32	41	24	33	38

α) Να κάνετε ομαδοποίηση σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους (20 – 30, 30 – 40, 40 – 50, 50 – 60) και να συμπληρώσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.

β) Να βρείτε τη μέση ηλικία των εργαζομένων της επιχείρησης.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α) Τι ονομάζεται πληθυσμός και τι μεταβλητή;
β) Ποιά είδη διαγραμμάτων γνωρίζετε;

Θέμα 2

Ένα γυμνάσιο έχει 240 παιδιά, 105 αγόρια και 135 κορίτσια. Στη Β΄ γυμνασίου είναι 80 παιδιά.
α) Ποιό είναι το ποσοστό των κοριτσιών σ' αυτό το γυμνάσιο;
β) Ποιό είναι το ποσοστό των παιδιών της Β΄ γυμνασίου;

Θέμα 3

Οι βάθμοι του πρώτου τριμήνου στα μαθηματικά, 20 μαθητών της Β΄ γυμνασίου είναι:

15	19	17	15	16	13	17	19	20	17
13	14	18	18	16	15	17	16	19	20

α) Να κάνετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων.
β) Να κάνετε ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
γ) Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που πήραν το πολύ 16.
δ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν τουλάχιστον 17.

Θέμα 4

Τα ύψη 10 μαθητών της Β΄ γυμνασίου είναι (σε cm) 168, 172, 180, 170, 175, 183, 175, 177, 169, 171.
α) Να βρείτε το μέσο ύψος των μαθητών.
β) Να βρείτε τη διάμεσο των υψών των μαθητών.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Τι ονομάζεται μέση τιμή;
β) Πως υπολογίζουμε τη διάμεσο ενός δείγματος;

Θέμα 2

Η μέση ηλικία 30 εργαζομένων είναι 42 έτη. Ένας εργαζόμενος 58 ετών συνταξιοδοτήθηκε και στη θέση του ήρθε ένας άλλος 28 ετών. Να βρείτε τη νέα μέση τιμή.

Θέμα 3

Ο διπλανός πίνακας δίνει τον αριθμό των ταινιών που παρακολούθησαν στο σινεμά 50 μαθητές, κατά τη διάρκεια ενός έτους.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή

β) Να βρείτε πόσοι μαθητές παρακολουθήσουν τουλάχιστον 5 ταινίες.

Ταινίες	Μαθητές
0 – 2	5
2 – 4	20
4 – 6	12
6 – 8	9
8 – 10	4

Θέμα 4

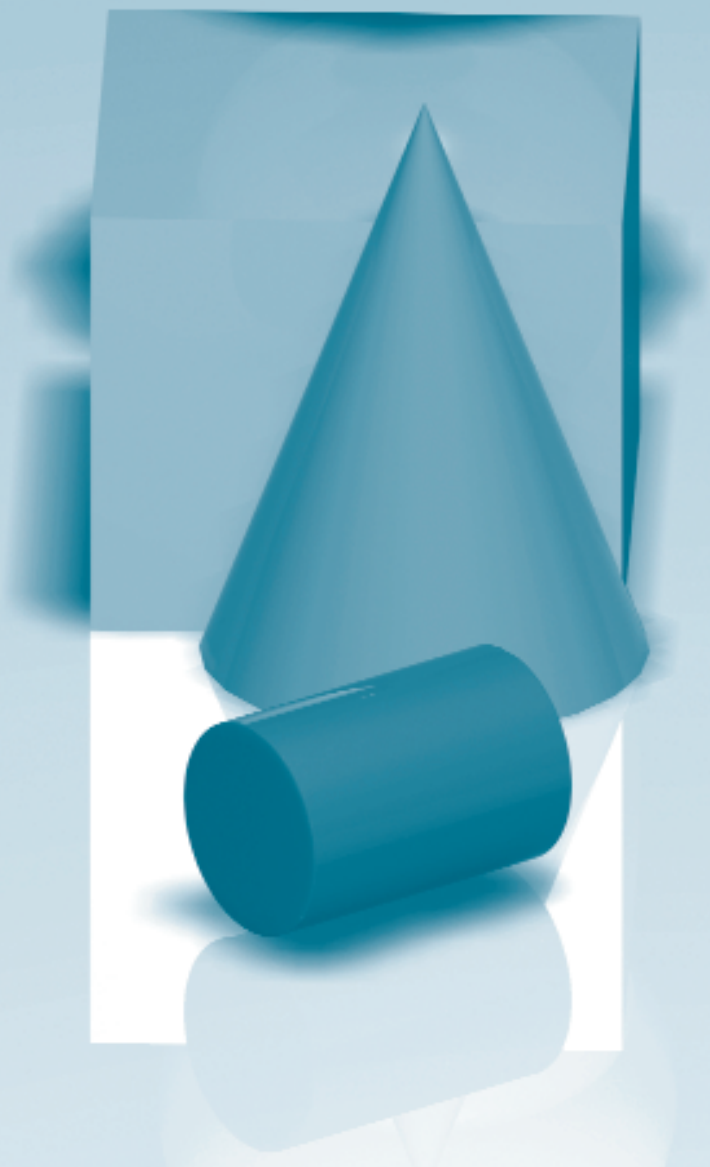
Ο διπλανός πίνακας αναφέρεται στα ύψη 50 μαθητών σε εκατοστά. Αν ισχύει ότι η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της πρώτης κλάσης, και η σχετική συχνότητα της πρώτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της $4^{ης}$ κλάσης, τότε:

α) Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες και τις συχνότητες.

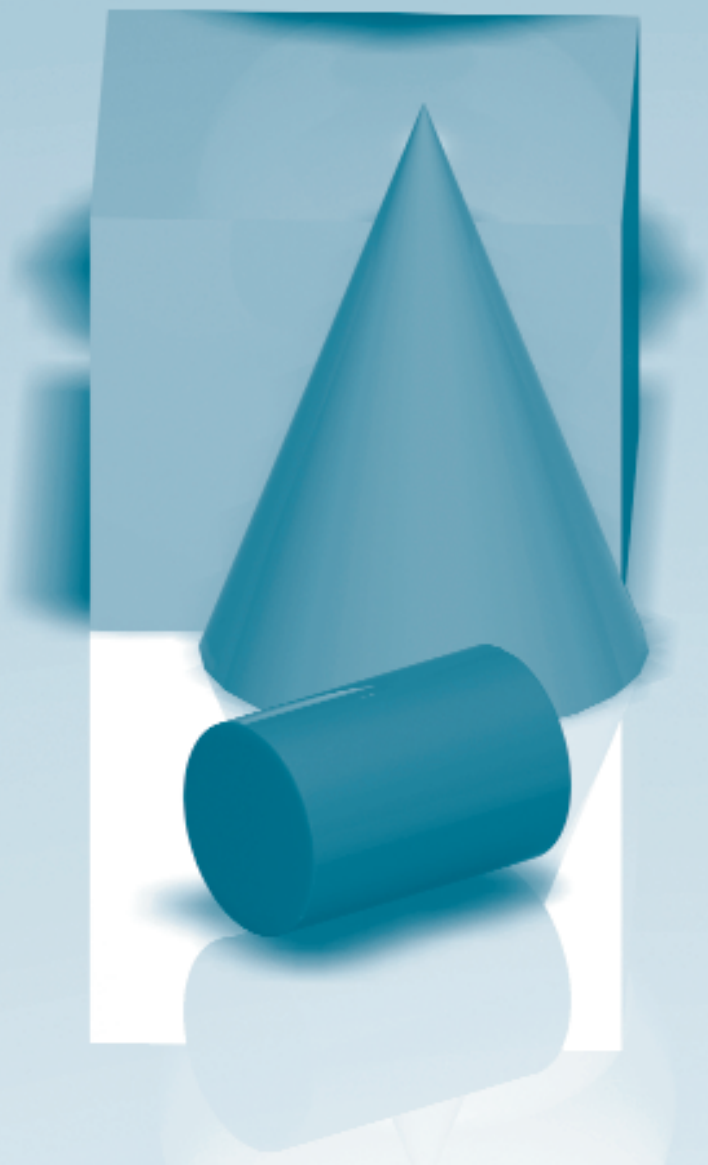
β) Να υπολογίσετε το μέσο ύψος των μαθητών.

Κλάσεις	Σχετική συχνότητα
164 – 170	f_1
170 – 176	f_2
176 – 182	0,3
182 – 188	f_4
Σύνολο	1

ΜΕΡΟΣ Β΄



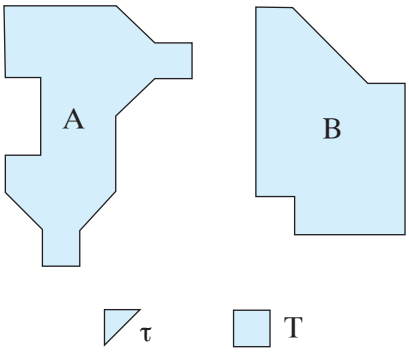
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο



1.1 ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Στο παρακάτω σχήμα γραμμοσκιάσαμε τα δύο κομμάτια Α και Β του επιπέδου.

Αν διαλέξουμε ως **μονάδα μέτρησης** το **τρίγωνο τ**, παρατηρούμε ότι τόσο το Α όσο και το Β αποτελούνται από 38 τρίγωνα ίδια με το τ. Λέμε ότι το **εμβαδόν** των Α και Β είναι 38 με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο τ και γράφουμε:
Εμβ. Α = 38τ και Εμβ. Β = 38τ
Αν τώρα διαλέξουμε για **μονάδα εμβαδού** το **τετράγωνο Τ**, τότε τα κομμάτια Α και Β θα έχουν εμβαδόν 19 τετράγωνα, και γράφουμε:
Εμβ. Α = 19Τ και Εμβ. Β = 19Τ



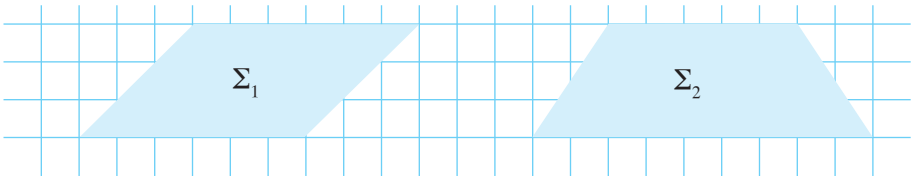
Παρατηρήσεις – Σχόλια

1. Βλέπουμε ότι οι δύο αυτές επιφάνειες, παρόλο που είναι διαφορετικές, καταλαμβάνουν την ίδια έκταση στο επίπεδο, δηλαδή έχουν το ίδιο εμβαδό.

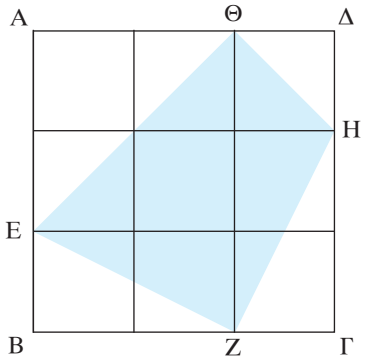
2. Το **εμβαδόν** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας **θετικός αριθμός**, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης που θα χρησιμοποιήσουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

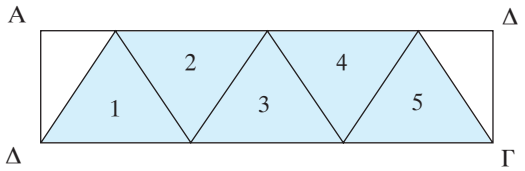
1. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων Σ_1 και Σ_2, με μονάδα μέτρησης το ένα α)  β)  γ) 



2. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών του τετραγώνου ΑΒΓΔ προς το εμβαδό του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ.



3. Αν τα πέντε σημειωμένα τρίγωνα είναι ισόπλευρα, στην ταινία, βρείτε το λόγο του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ προς το άθροισμα των εμβαδών των ισόπλευρων τριγώνων.



1.2 ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Οι κυριότερες μονάδες εμβαδού

Βασική μονάδα μέτρησης επιφανειών είναι το **τετραγωνικό μέτρο (1m²)**, που είναι ένα τετράγωνο με πλευρά 1m.

- **Υποδιαιρέσεις** του τετραγωνικού μέτρου είναι:

– Το **τετραγωνικο δεκατόμετρο ή τετραγωνική παλάμη (1dm²)**:
$1m^2 = 100dm^2$ ή $1dm^2 = 0,01m^2$

– Το **τετραγωνικό εκατοστόμετρο ή τετραγωνικός πόντος (1cm²)**:
$1m^2 = 100dm^2 = 10.000cm^2$ ή $1cm^2 = 0.01dm^2 = 0.0001m^2$

– Το **τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (1mm²)**:
$1m^2 = 100dm^2 = 10.000cm^2 = 1.000.000mm^2$ ή
$1mm^2 = 0,01cm^2 = 0,0001dm^2 = 0,000001m^2$

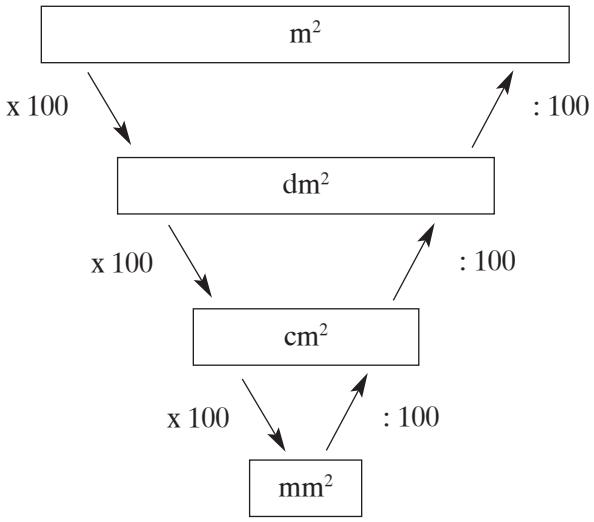
- **Πολλαπλάσια** του τετραγωνικού μέτρου

– Το **τετραγωνικό δεκάμετρο (1dam²)** : $1dam^2 = 100m^2$
– Το **τετραγωνικό εκατόμετρο (1hm²)** : $1hm^2 = 10.000m^2$
– Το **τετραγωνικό χιλιόμετρο (1Km²)** : $1Km^2 = 1.000.000m^2$
– Το **στρέμμα** : 1 στρέμμα = $1.000m^2$

Το στρέμμα χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση των εμβαδών οικοπέδων και κτημάτων.

$$1m^2 = 100dm^2 = 10.000cm^2 = 1.000.000mm^2$$
$$1dm^2 = 100cm^2 = 10.000mm^2$$
$$1cm^2 = 100mm^2$$

Το παρακάτω διάγραμμα μας βοηθά στη μετατροπή του τετραγωνικού μέτρου σε υποδιαιρέσεις του και αντίστροφα.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

m²	dm²	cm²	mm²
372			
	236		
		5819	
			235.754

Λύση

Με τη βοήθεια του διαγράμματος μετατροπής μονάδων εμβαδού έχουμε:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
372	37200	3720000	372000000
2,36	236	23600	2360000
0,5819	58,19	5819	581900
0,235754	23,5754	2357,54	235.754

2) Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τα παρακάτω εμβαδά:
α) $4,3m^2$ $70cm^2$ $5,6dm^2$ $8,3cm^2$
β) $3,7mm^2$ $2,1dm^2$ $1,9m^2$ $5,2cm^2$
γ) $83,5cm^2$ $8,3dm^2$ $0,83m^2$ $8356mm^2$

Λύση

Μετατρέπουμε τα εμβαδά στην ίδια μονάδα μέτρησης
α) $4,3m^2$ $70cm^2$ $5,6dm^2$ $8,3cm^2$
$43000cm^2$ $70cm^2$ $560cm^2$ $8,3cm^2$
οπότε έχουμε:
$8,3cm^2 < 70cm^2 < 560cm^2 < 43000cm^2$

β) $3,7mm^2$ $2,1dm^2$ $1,9m^2$ $5,2cm^2$
$3,7mm^2$ $21000mm^2$ $1900000mm^2$ $520mm^2$
οπότε έχουμε:
$3,7mm^2 < 520mm^2 < 21000mm^2 < 1900000mm^2$

γ) $83,5cm^2$ $8,3dm^2$ $0,83m^2$ $8356mm^2$
$83,5cm^2$ $830cm^2$ $8300cm^2$ $83,56cm^2$
οπότε έχουμε:
$83,5cm^2 < 83,56cm^2 < 830cm^2 < 8300cm^2$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

	Α	Β	Γ	Δ
1. $4,5cm^2 =$	$45mm^2$	$450mm^2$	$45000mm^2$	$4500000mm^2$
2. $5,1m^2 =$	$510cm^2$	$51000cm^2$	$0,051cm^2$	$0,00051cm^2$
3. $3,9mm^2 =$	$0,0039dm^2$	$0,039dm^2$	$0,00039dm^2$	$390dm^2$
4. $7,2dm^2 =$	$0,0000072m^2$	$720m^2$	$0,00072m^2$	$0,072m^2$

2) Να συμπληρωθούν τα κενά:

1. 2,7Km^2 = ... m^2 = ... στρέμματα
2. 46m^2 = ... dm^2 = ... cm^2 = ... mm^2
3. 528dm^2 = ... m^2 = ... στρέμματα
4. 7903mm^2 = ... cm^2 = ... dm^2 = ... m^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
25m^2, 2,16Km^2, 143dm^2, 5779mm^2, 712m^2.

2. Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:
498cm^2, 111dm^2, 12,7Km^2, 13534mm^2, 607dm^2.

3. Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
456m^2, 82,7dm^2, 0,571cm^2, 0,0025m^2.

4. Να μετατρέψετε σε Km^2 τα παρακάτω μεγέθη:
914m^2, 4832dm^2, 17075m^2, 103 στρέμματα.

5. Να μετατρέψετε σε στρέμματα τα παρακάτω μεγέθη:
72564m^2, 3,4Km^2, 137920dm^2, 45m^2.

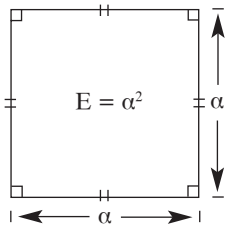
6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
98,3			
	756		
		32103	
			738.019

1.3 ΕΜΒΑΔΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

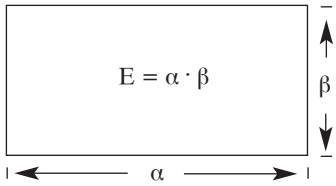
- **Εμβαδόν τετραγώνου**

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α ισούται με α^2



- **Εμβαδόν ορθογωνίου**

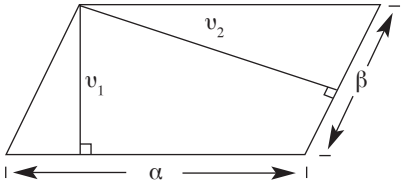
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές α, β ισούται με $\alpha \cdot \beta$



- **Εμβαδόν παραλληλογράμμου**

Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

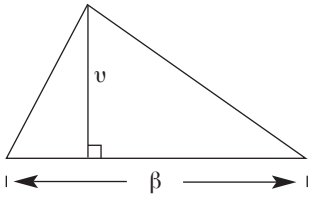
$E = \alpha \cdot \upsilon_1 = \beta \cdot \upsilon_2$



- **Εμβαδόν τυχαίου τριγώνου**

Το εμβαδόν ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου μιας βάσης του με το αντίστοιχο ύψος.

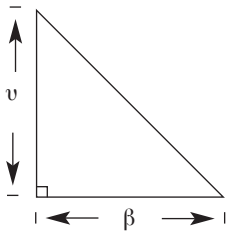
$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$$



- **Εμβαδόν ορθογωνίου τριγώνου**

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το μισό του γινομένου των δύο κάθετων πλευρών του.

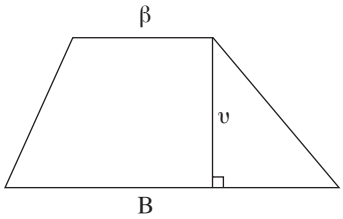
$$E = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$$



- **Εμβαδόν τραπεζίου**

Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του με το ύψος του.

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2}$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμου έχει πλάτος 8cm και περίμετρο 46cm. Να βρείτε το μήκος του και το εμβαδόν του.

Λύση

Από τον τύπο: Περίμετρος = 2 · (μήκος) + 2 · (πλάτος) έχουμε:
$46 = 2 \cdot \mu + 2 \cdot 8$
$46 = 2 \cdot \mu + 16$
$46 - 16 = 2 \cdot \mu$
$2\mu = 30$
$\mu = 15\text{cm}$
Εμβαδόν = (μήκος) · (πλάτος) = $15 \cdot 8 = 120\text{cm}^2$

2) Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 23m και εμβαδόν 391m^2. Να βρείτε το πλάτος του και την περίμετρό του.

Λύση

Απο τον τύπο Ε = (μήκος) · (πλάτος) έχουμε $391 = 23 \cdot \pi$

$\pi = \dfrac{391}{23}$ άρα $\pi = 17\text{m}$

Περίμετρος = $2 \cdot 23 + 2 \cdot 17 = 46 + 34 = 80\text{m}$

3) Το δάπεδο ενός δωματίου σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 6m μήκος και 5m πλάτος, πρόκειται να στρωθεί με σανίδια σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 10cm πλάτος και 25cm μήκος.
α) Να βρείτε πόσα πλακάκια θα χρειαστούν.
β) Πόσα χρήματα θα χρειαστούν αν κάθε σανίδι κοστίζει 0,3 €;

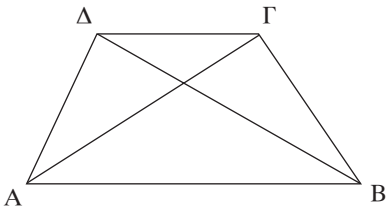
Λύση

α) Το εμβαδόν του δαπέδου του δωματίου είναι: $E\delta = 6 \cdot 5 = 30\text{m}^2$
Το εμβαδόν σε κάθε σανίδι είναι: $E_\sigma = 25 \cdot 10 = 250\text{cm}^2 = 0{,}025\text{m}^2$
Οπότε

$\dfrac{E\delta}{E\sigma} = \dfrac{30}{0{,}025} = 1200$ σανίδια θα χρειαστούν.

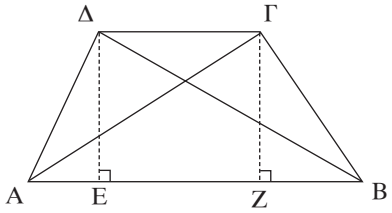
β) $1200 \cdot 0{,}3 = 360$ € συνολικό κόστος

4) Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) φέρνουμε τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ έχουν ίδιο εμβαδόν.



Λύση

Φέρνουμε το ύψη ΔΕ και ΓΖ. Τότε το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν:



$$(E_{A\overset{\Delta}{B}\Gamma}) = \frac{AB \cdot \Gamma Z}{2}$$

Το τρίγωνο ΑΒΔ έχει εμβαδόν

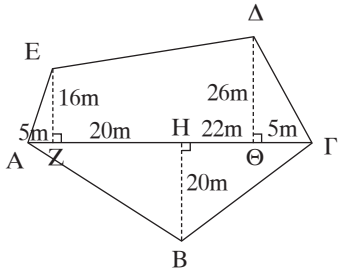
$$(E_{A\overset{\Delta}{B}\Delta}) = \frac{AB \cdot \Delta E}{2}$$

Τα ύψη ΓΖ και ΔΕ είναι ίσα, επειδή ΑΒ || ΓΔ. Άρα: $(E_{A\overset{\Delta}{B}\Gamma}) = (E_{A\overset{\Delta}{B}\Delta})$.

5) Ένα χωράφι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, πωλείται προς 15.000 € το στρέμμα. Ποιά είναι η αξία του χωραφιού;

Λύση

Παρατηρούμε ότι το χωράφι αποτελείται από τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΔΘΓ, ΑΒΓ και από το τραπέζιο ΔΘΖΕ.
Το εμβαδόν του ΑΖΕ είναι:



$$(AZE) = \frac{5 \cdot 16}{2} = 40m^2$$

Το εμβαδόν του $\Delta\overset{\Delta}{\Theta}\Gamma$ είναι: $(\Delta\Theta\Gamma) = \frac{5 \cdot 26}{2} = 65m^2$

Το εμβαδόν του $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{A\Gamma \cdot BH}{2} = \frac{52 \cdot 20}{2} = 520^2$

Το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΘΖΕ είναι: $(\Delta\Theta ZE) = \frac{(\Delta\Theta + EZ) \cdot Z\Theta}{2}$

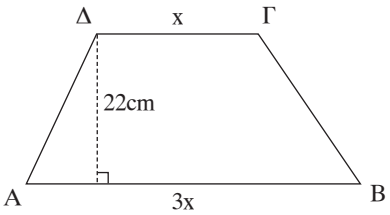
οπότε $(\Delta\Theta Z E) = \dfrac{(26+16)\cdot 42}{2} = 882\text{m}^2$

Άρα το εμβαδόν του χωραφιού είναι:
$40 + 65 + 520 + 882 = 1.507\text{m}^2$ ή 1,507 στρέμματα
Επομένως η αξία του χωραφιού είναι:
$1{,}507 \cdot 15.000 = 22.605$ €.

6) Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι τριπλάσια από τη μικρή βάση και το ύψος του είναι 22cm. Αν το εμβαδό του τραπεζίου είναι ίσο με το εμβαδό ενός τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος του τραπεζίου, να υπολογίσετε τις βάσεις του.

Λύση

Το τετράγωνο έχει εμβαδό:
$E_{\text{τραπ.}} = 22^2 = 484\text{cm}^2$
Άρα και το εμβαδό του τραπεζίου είναι 484cm^2. Έστω ότι η μικρή βάση του τραπεζίου είναι x cm, τότε η μεγάλη βάση θα είναι 3x cm, οπότε έχουμε



$$E_{\text{τραπ.}} = \frac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$$

$$484 = \frac{(3x+x)\cdot 22}{2} \text{ ή } 484 = (3x + x)\cdot 11 \text{ ή}$$

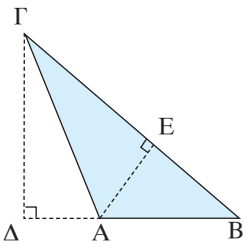
$484 = 4 \cdot x \cdot 11$ ή $484 = 44 \cdot x$ ή $x = 484 : 44$
$x = 11\text{cm}$

Άρα η μικρή βάση είναι 11cm και η μεγάλη βάση είναι $3 \cdot 11 = 33$cm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

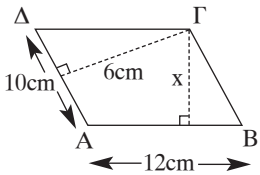
Α	Β	Γ
10	20	40
8	4	16

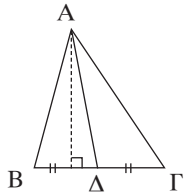


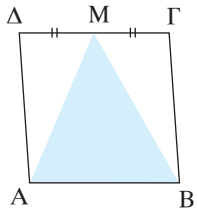
1. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:
(ΑΒ = 5cm, ΒΓ = 10cm, ΑΕ = 4cm)

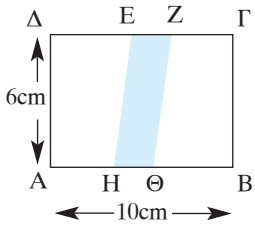
2. Το ύψος ΓΔ είναι:

3. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι:	30	72	60
4. Το ύψος x που αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ είναι:	6	5	10
5. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ είναι $8cm^2$ και Δ είναι το μέσο της ΒΓ, τότε το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι:	16	4	32
6. Το διπλανό παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν $32cm^2$ και το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΒ είναι:	64	16	8
7. Αν Ε, Θ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ, το εμβαδόν του ΕΖΘΗ είναι:	10	3	6
8. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΔΕΗ είναι:	54	30	27







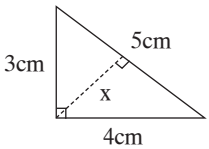


2) Να επιλέξετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ).

1. Κάθε διάμεσος ενός τριγώνου το χωρίζει σε δύο τρίγωνα με ίσα εμβαδά. Σ Λ

2. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές 6cm και 8cm, είναι $48cm^2$. Σ Λ

3. Το ύψος x που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του διπλανού ορθογωνίου τριγώνου είναι 2,4cm. Σ Λ



4. Αν διπλασιάσουμε τη βάση ενός παραλληλογράμμου τότε το εμβαδόν του διπλασιάζεται. Σ Λ

5. Αν διπλασιάσουμε τις βάσεις και το ύψος ενός τραπεζίου, τότε το εμβαδόν του διπλασιάζεται. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι $144cm^2$, να υπολογίσετε την περίμετρό του.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 162m και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

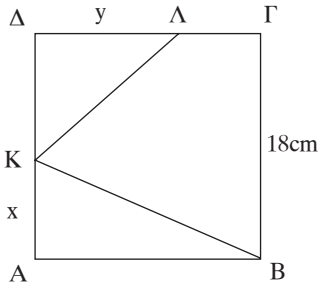
3. Ένα βιβλίο έχει 127 φύλλα, που το καθένα έχει διαστάσεις 16cm και 25cm. Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια χαρτιού έχει όλο το βιβλίο.

4. Ένα θερμοκήπιο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 46m και πλάτος 20m. Θέλουμε να βάλουμε λίπασμα και ξέρουμε ότι χρειάζονται 300g για κάθε $1m^2$. Πόσα κιλά λίπασμα θα χρειαστούμε και πόσο θα μας κοστίσει, αν 1 κιλό κοστίζει 2 €;

5. Ένα παραλληλόγραμμο έχει το ίδιο εμβαδόν και την ίδια περίμετρο με ένα ορθογώνιο που έχει διαστάσεις 8cm και 7cm. Αν η μία πλευρά του παραλληλογράμμου είναι 10cm να υπολογίσετε την άλλη πλευρά του και τα ύψη του παραλληλογράμμου.

6. Η μεγάλη βάση ενός τραπεζίου είναι διπλάσια απο τη μικρή βάση. Αν το εμβαδόν του είναι $36cm^2$ και το ύψος του 6cm, να υπολογίσετε τις βάσεις του.

7. Το διπλανό τετράγωνο το χωρίσαμε, έτσι ώστε:

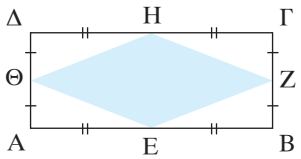


$$E_{(ΑΚΒ)} = \frac{1}{2} E_{(ΑΒΓΔ)} \text{ και}$$

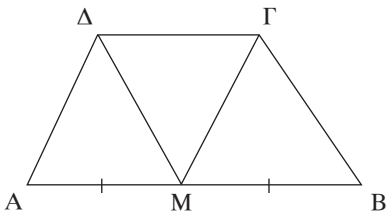
$$E_{(ΔΚΛ)} = \frac{1}{6} E_{(ΑΒΓΔ)}$$

Να υπολογίσετε τα x και y, καθώς και το εμβαδόν του ΒΓΛΚ.

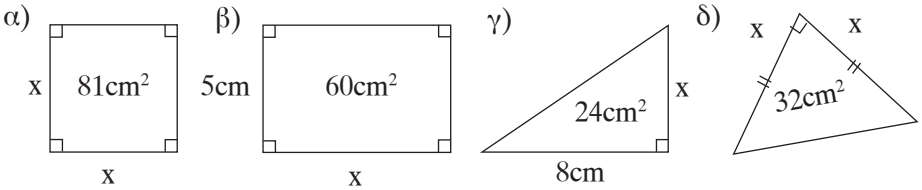
8. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις 32cm και 18cm. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των πλευρών του, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ.



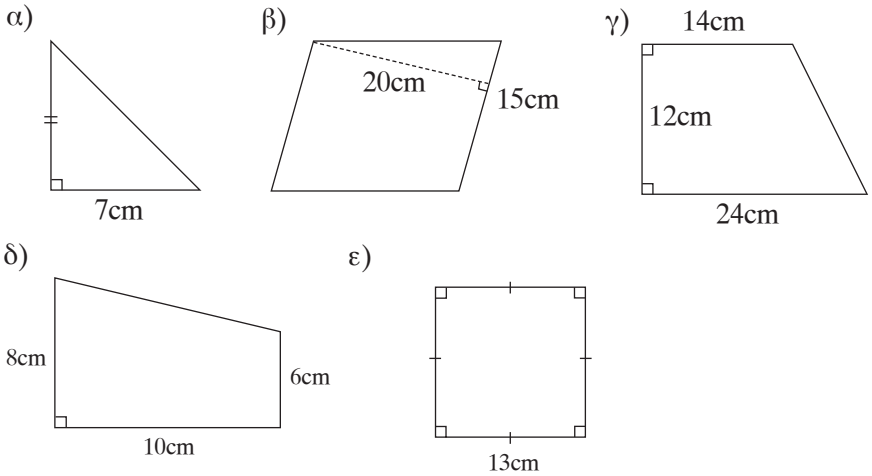
9. Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ || ΓΔ) η βάση ΓΔ είναι το μισό της βάσης ΑΒ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ:
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΜΒΓ έχουν ίσα εμβαδά.
β) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του τριγώνου ΜΔΓ είναι το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του τραπεζίου ΑΒΓΔ.



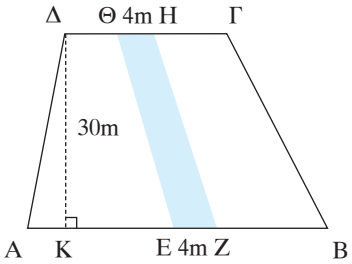
10. Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



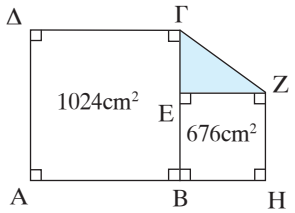
11. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων.



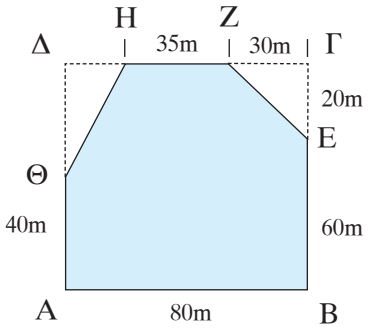
12. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ με (ΑΒ || ΓΔ) με ΑΒ = 40m, ΓΔ = 25m και ύψος ΔΚ = 30m. Ένας καινούργιος δρόμος αποκόπτει τη λωρίδα ΕΖΗΘ. Πόσα τετραγωνικά μέτρα απομένουν;



13. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΖΓ.
(Τα ΑΒΓΔ και ΒΗΖΕ είναι τετράγωνα).

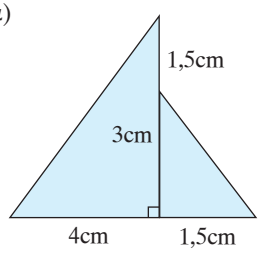


14. Το διπλανό σχήμα είναι το σχέδιο ενός χωραφιού το οποίο πωλείται προς 12.000 € το στρέμμα. Να βρεθεί η αξία του χωραφιού.
(ΑΒΓΔ τετράγωνο)

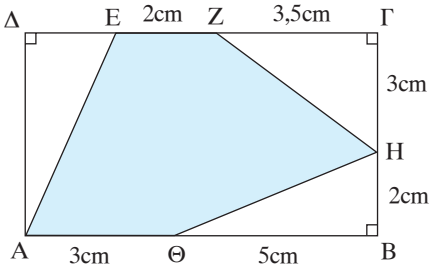


15. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων σχημάτων.

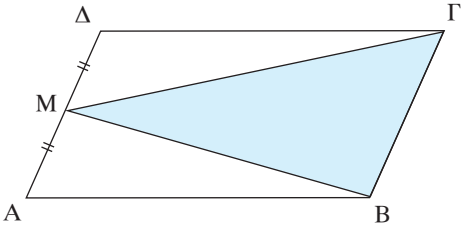
α)



β)



16. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΔ. Να δείξετε ότι: $E_{B\hat{M}\Gamma} = E_{A\hat{M}B} + E_{\Delta\hat{M}\Gamma}$

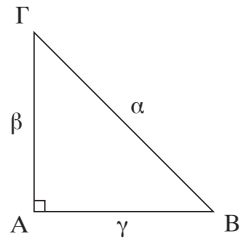


1.4 ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

- **Πυθαγόρειο Θεώρημα**:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

Ισχύει: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $α^2 = β^2 + γ^2$



- Απο το **Πυθαγόρειο θεώρημα** μπορούμε να πούμε ότι:

Το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας, ελαττωμένο κατά το τετράγωνο της άλλης κάθετης πλευράς.

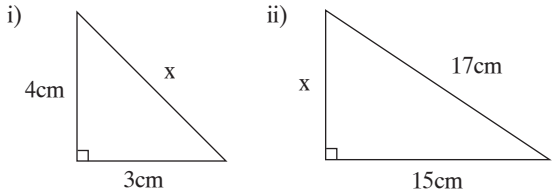
Ισχύει: $β^2 = α^2 – γ^2$ και $γ^2 = α^2 – β^2$

- Το **αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος**:

Όταν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογίσετε το x στα διπλανά σχήματα.



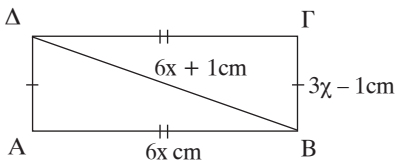
Λύση

Απο το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

i) $x^2 = 3^2 + 4^2$
$x^2 = 9 + 16$
$x^2 = 25$
$x = 5cm$

ii) $17^2 = 15^2 + x^2$
$289 = 225 + x^2$
$x^2 = 289 – 225$
$x^2 = 64$
$x = 8cm$

2) Στο διπλανό σχήμα, το παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 34cm.
α) Να βρείτε τις πλευρές του και τη διαγώνιο του ΒΔ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι:

$2 \cdot 6x + 2(3x - 1) = 12x + 6x - 2 = 18x - 2$

Οπότε $18x - 2 = 34$

$18x = 36$

$x = 2$

Άρα $AB = \Delta\Gamma = 12cm$, $B\Gamma = A\Delta = 5cm$ και $B\Delta = 13cm$

β) Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$B\Delta^2 = 13^2 = 169$

$AB^2 + A\Delta^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

άρα το $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ (Αντίστροφο Πυθαγορείου)

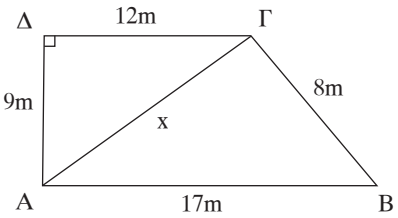
Οπότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και $E_{AB\Gamma\Delta} = AB \cdot A\Delta = 12 \cdot 5 = 60cm^2$.

3) Στο διπλάνο σχήμα, το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει $AB = 17m$, $B\Gamma = 8m$, $\Gamma\Delta = 12m$, $\Delta A = 9m$ και $\hat{\Delta} = 90^\circ$

α) Να υπολογίσετε το x.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγ. ΑΔΓ:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 9^2 + 12^2$ ή $A\Gamma^2 = 81 + 144$

$A\Gamma^2 = 225$ ή $A\Gamma = 15m$

Άρα $x = 15m$.

β) Έχουμε $AB^2 = 17^2 = 289$

$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289$

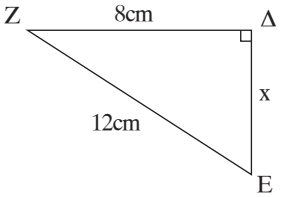
Άρα το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ.

γ) $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AB\Gamma} + E_{A\Delta\Gamma} = \frac{1}{2}\, 15 \cdot 8 + \frac{1}{2}\, 9 \cdot 12 = 60 + 54 = 114m^2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

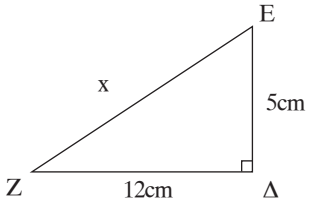
1) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, ώστε τα τρίγωνα να είναι ορθογώνια στο Δ.

1.



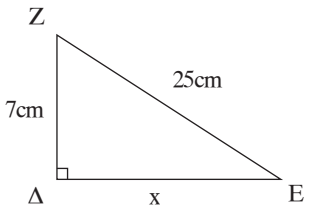
	Α	Β	Γ	Δ
x =	5cm	6cm	8cm	9cm

2.



	Α	Β	Γ	Δ
x =	13cm	17cm	8cm	9cm

3.



x =	26cm	10cm	12cm	24cm

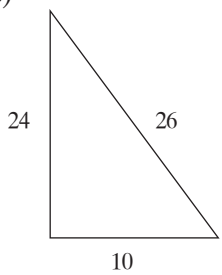
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ "ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ"

1. Αν διπλασιάσουμε τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε το τρίγωνο που προκύπτει είναι πάλι ορθογώνιο. Σ Λ
2. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$. Σ Λ
3. Αν για το τρίγωνο ΚΛΜ ισχύει $ΚΛ^2 = ΚΜ^2 + ΛΜ^2$, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Μ. Σ Λ
4. Αν σε ένα τρίγωνο η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών του ισούται με το τετράγωνο της τρίτης πλευράς, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Σ Λ
5. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $β^2 = 4γ^2$ και $α^2 = 3γ^2$, τότε $\hat{B} = 90^0$ Σ Λ

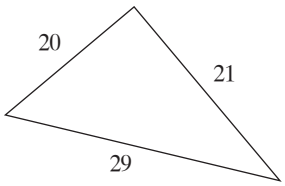
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

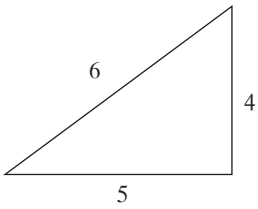
α)



β)



γ)

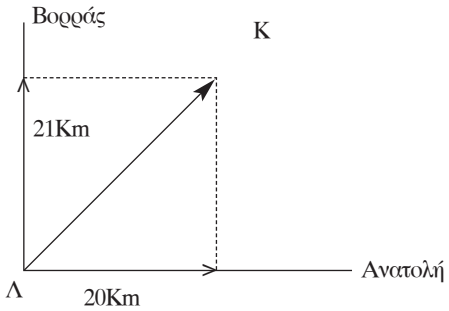


2. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι η διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλογράμμου με μήκος 12cm και πλάτος 9cm. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραγώνου.

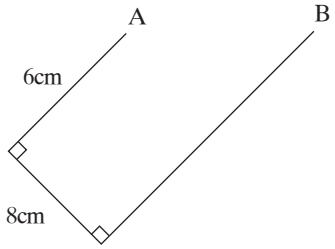
3. Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς 8cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

4. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ρόμβου με διαγώνιες 80m και 60m.
Να βρείτε:
α) την περίμετρο και το εμβαδόν του οικοπέδου
β) πόσο κοστίζει να περιφράξουμε το οικόπεδο, όταν το 1 μέτρο περίφραξης κοστίζει 15 ευρώ.

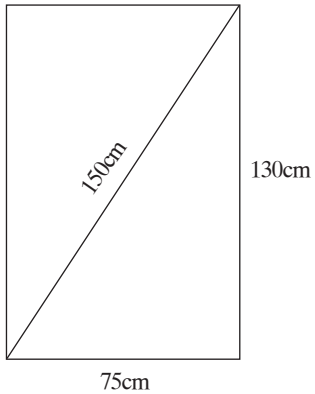
5. Ένα πλοίο ξεκίνησε από το λιμάνι Λ και ταξίδεψε 21Km βόρεια και 20Km ανατολικά, φτάνοντας στο σημείο Κ. Πόσο απέχει από το σημείο Λ;



6. Ένα σύρμα μήκους 35cm λυγίζεται και φτιάχνεται το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ.

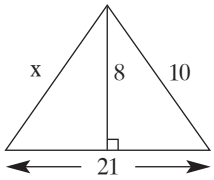


7. Ένας ξυλουργός πήρε μέτρα για να φτιάξει το ξύλινο πλαίσιο ενός παραθύρου. Εκτός από το μήκος και το πλάτος του ορθογωνίου μέτρησε και τη διαγώνιο του προκειμένου να είναι σίγουρος ότι η κατασκευή του θα είναι τέλειο ορθογώνιο. Τι λέτε καλά έκανε ή μήπως ήταν περιττή αυτή η μέτρηση.

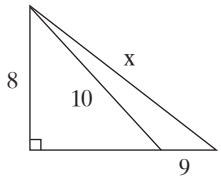


8. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά x στα παρακάτω σχήματα.

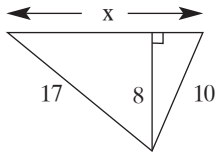
α)



β)

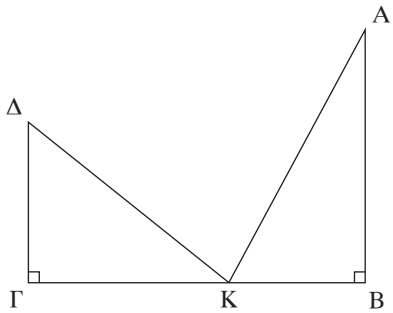


γ)



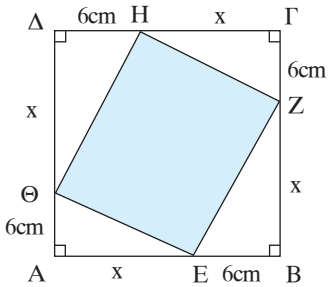
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με βάση 48cm και περίμετρος 128cm.
α) Να βρεθεί καθεμία από τις ίσες πλευρές του.
β) Να βρεθεί το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του τριγώνου.
γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του.
δ) Να βρεθεί το ύψος που αντιστοιχεί σε μια από τις δύο ίσες πλευρές του.

10. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 9cm, ΒΓ = 8cm και ΔΓ = 7cm.
Αν ΑΚ = ΚΔ, να υπολογίσετε το ΒΚ.



11. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ η διαγώνιος ΚΜ = 10cm και η πλευρά ΚΛ = 8cm. Αν Ε είναι το μέσο της ΛΜ, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την ΚΕ.

12. Να υπολογίσετε το x στο διπλανό σχήμα, αν γνωρίζετε ότι το εμβαδόν του ΕΖΗΘ είναι 136cm^2. Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. Ποιές είναι οι κυριότερες μονάδες εμβαδού (υποδιαιρέσεις - πολλαπλάσια).

Β. Να γράψετε τους τύπους εμβαδού ορθογωνίου, παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

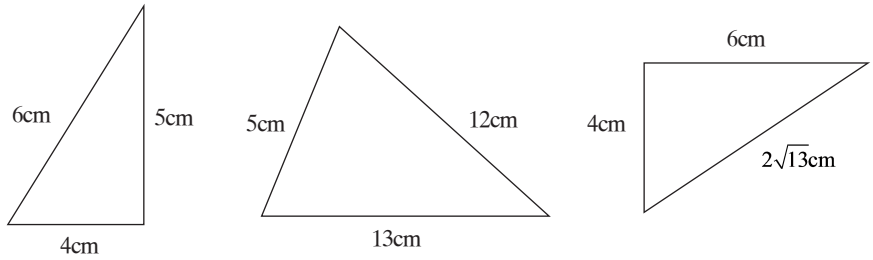
Θέμα 2

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλάτος 14cm και περίμετρο 68cm. Να βρείτε το μήκος του και το εμβαδόν του.

Θέμα 3

Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.

α) β) γ)



Θέμα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με βάση 24cm και περίμετρο 56cm.

α) Να βρείτε καθεμία από τις ίσες πλευρές του.

β) Να βρείτε το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του τριγώνου.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του.

δ) Να βρείτε το ύψος που αντιστοιχεί σε μία από τις δύο ίσες πλευρές του.

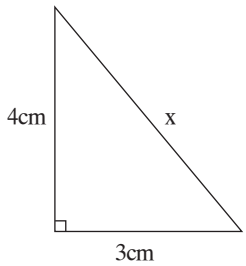
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

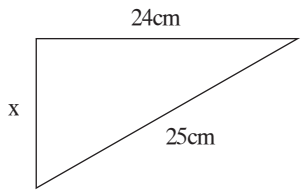
Α. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Β. Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

α)



β)



Θέμα 2

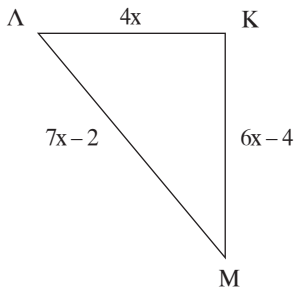
Σε ένα παραλληλόγραμμο η μία πλευρά του είναι 15cm, η περίμετρός του είναι 54cm και το εμβαδόν του είναι 300cm^2. Να υπολογίσετε τα ύψη του παραλληλογράμμου.

Θέμα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΚΛΜ έχει περίμετρο 96cm.

α) Να βρείτε το x.

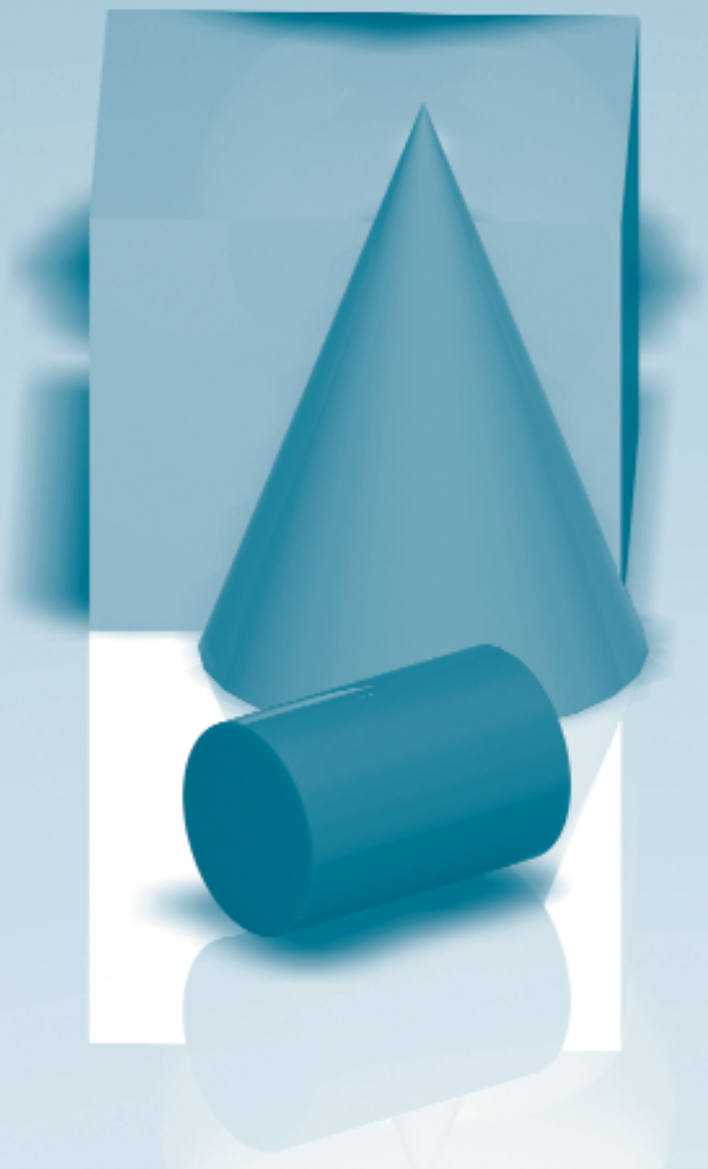
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



Θέμα 4

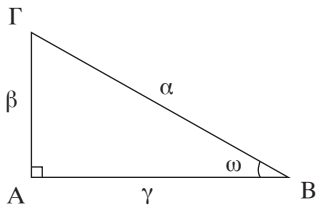
Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) έχει βάσεις ΑΒ = 10cm, ΓΔ =26cm και ΑΔ = ΒΓ = 17cm. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο



2.1 ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.



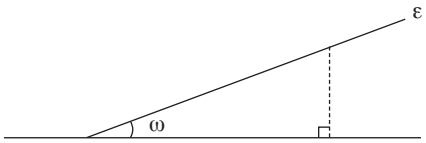
$$\text{εφω} = \frac{\textbf{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

δηλαδή $\text{εφω} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ ή $\text{εφω} = \dfrac{\beta}{\gamma}$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1) **Κλίση μιας ευθείας** ε ως προς μια άλλη οριζόντια ευθεία ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{\omega}$ που σχηματίζει η ευθεία ε με την οριζόντια ευθεία.

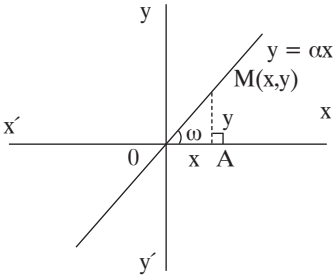
$$\textbf{κλίση της ε} = \text{εφ}\hat{\omega}$$



2) **Η κλίση ενός δρόμου** (μιας ευθείας) εκφράζεται με μορφή ποσοστού. Δηλαδή όταν λέμε ότι η κλίση ενός δρόμου (μιας ευθείας) είναι 8%, εννοούμε ότι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ο δρόμος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\dfrac{8}{100} = 0,08$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε 100m οριζόντιας απόστασης, ανεβαίνουμε σε ύψος 8m.

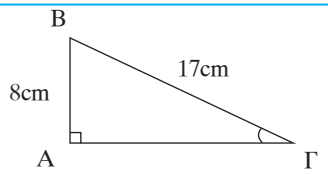
3) **Η κλίση της ευθείας με εξίσωση y = αx** είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω, που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x και είναι ίση με α.
Δηλαδή **εφω = α**

Έχουμε $\text{εφω} = \dfrac{\text{ΜΑ}}{\text{ΟΑ}} = \dfrac{y}{x} = \alpha$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = 17cm και ΑΒ = 8cm. Να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



Λύση

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$17^2 = 8^2 + ΑΓ^2$

$289 = 64 + ΑΓ^2$

$ΑΓ^2 = 289 - 64$

$ΑΓ^2 = 225$

ΑΓ = 15cm

Οπότε $εφ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{15}{8}$ και $εφ\hat{\Gamma} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{8}{15}$

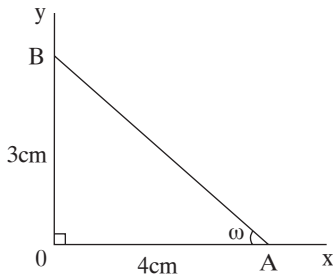
2) Να κατασκευάσετε μια γωνία ω τέτοια, ώστε η εφαπτομένη της να είναι $\frac{3}{4}$, δηλαδή εφω = $\frac{3}{4}$.

Λύση

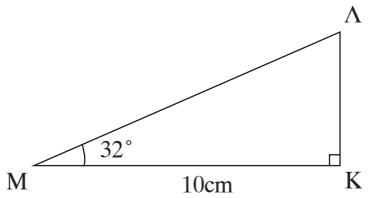
Για να κατασκευάσουμε μια γωνία ω με εφω = $\frac{3}{4}$, σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στην πλευρά Ox παίρνουμε τμήμα OA = 4cm και στην πλευρά Oy παίρνουμε τμήμα OB = 3cm.

Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε:

εφω = $\frac{OB}{OA} = \frac{3}{4}$.



3) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ΚΛ.



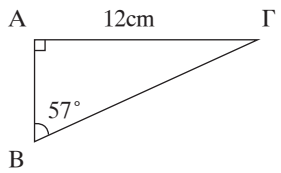
Λύση

Έχουμε $εφ\hat{M} = \frac{ΚΛ}{ΜΚ}$ οπότε

$$\varepsilon\varphi 32^0 = \frac{\text{ΚΛ}}{10} \quad \text{ή} \quad \text{ΚΛ} = 10 \cdot \varepsilon\varphi 32^0 \quad (\varepsilon\varphi 32^0 = 0{,}625)$$

ΚΛ = 10 · 0,625 ή ΚΛ = 6,25cm.

4) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ.



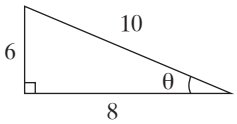
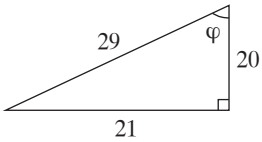
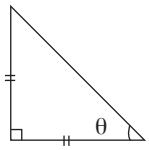
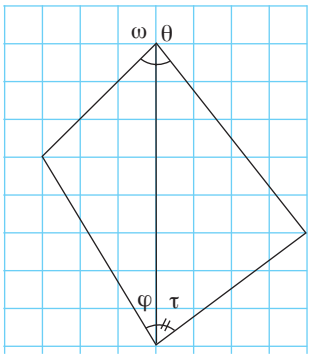
Λύση

Έχουμε $\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ οπότε $\text{ΑΒ} \cdot \varepsilon\varphi\hat{B} = \text{ΑΓ}$ ή

$$\text{ΑΒ} = \frac{\text{ΑΓ}}{\varepsilon\varphi\hat{B}} \quad \text{ή} \quad \text{ΑΒ} = \frac{12}{\varepsilon\varphi 57^0} \quad \text{ή} \quad \text{ΑΒ} = \frac{12}{1{,}54} \quad \text{ή ΑΒ} \cong 7{,}8\text{cm}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

		Α	Β	Γ	Δ
1. 	$\varepsilon\varphi\theta =$	$\frac{8}{10}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{10}{6}$
2. 	$\varepsilon\varphi\varphi =$	$\frac{20}{29}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{29}{21}$	$\frac{21}{20}$
3. 	$\varepsilon\varphi\theta =$	1	0	-1	$\frac{1}{2}$
4. 	$\varepsilon\varphi\omega =$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
5.	$\varepsilon\varphi\omega =$	$\frac{4}{5}$	2	1	$\frac{5}{4}$
6.	$\varepsilon\varphi\omega =$	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{5}$
7.	$\varepsilon\varphi\tau =$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$

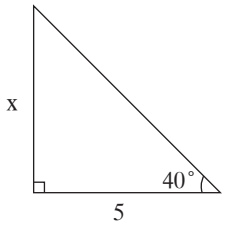
2) Ερωτήσεις "Σωστό - λάθος"

1. Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδέν. Σ Λ
2. Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι αριθμός πάντοτε δεκαδικός. Σ Λ
3. Η εφ $45^\circ = 1$. Σ Λ
4. Η κλίση ενός δρόμου είναι η γωνία ω που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο. Σ Λ

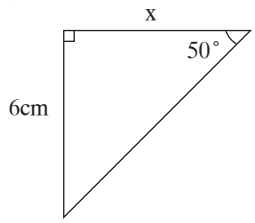
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το x:

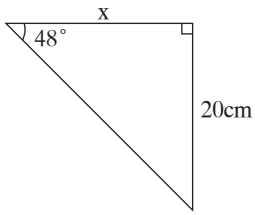
α)



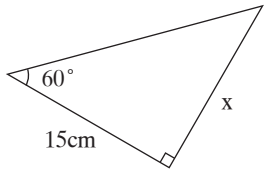
β)



γ)

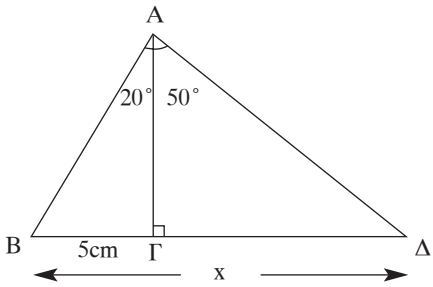


δ)

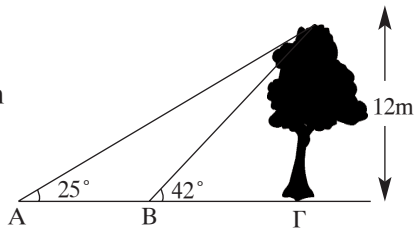


2. Να κατασκευάσετε μια γωνία ω με εφω $= \frac{3}{5}$.

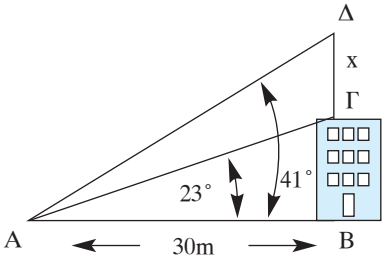
3. Να υπολογίσετε το x στο παραπάνω σχήμα.



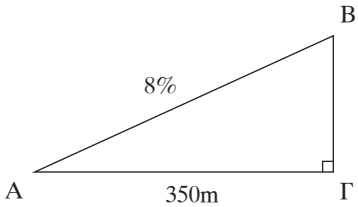
4. Δύο άνθρωποι βρίσκονται στις θέσεις Α και Β και βλέπουν το δέντο ύψους 12m με γωνίες 25° και 42° αντίστοιχα. Να βρείτε την απόστασή τους ΑΒ.



5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ύψος x της κεραίας.

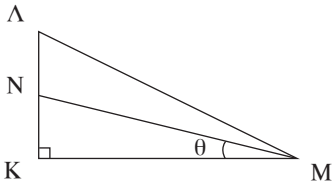


6. Η κλίση του δρόμου ΑΒ είναι 8%. Αν η απόσταση ΑΓ είναι 350m να υπολογίσετε το μήκος του ΒΓ.



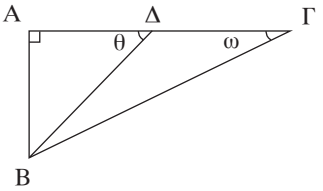
7. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90^0)$ η γωνία $\widehat{\Gamma} = 64^0$. Αν το ύψος ΑΔ που φέρνουμε από την κορυφή Α προς την υποτείνουσα ΒΓ είναι 4cm, να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

8. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΚΛΜ $(\widehat{K} = 90^0)$ έχουμε $\varepsilon\varphi\widehat{M} = 2\varepsilon\varphi\theta$. Να αποδείξετε ότι σημείο Ν είναι το μέσο του ΚΛ.



9. Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η διαγώνιος ΑΓ σχηματίζει με την πλευρά ΑΒ γωνία $\widehat{\omega} = 42^0$, και η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 19cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

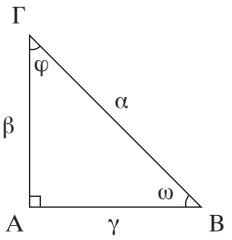
10. Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ = ΔΓ.
Να βρείτε τη σχέση που συνδέει την εφω με την εφθ.



2.2 ΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

- **Ημίτονο οξείας γωνίας**

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του τριγώνου.



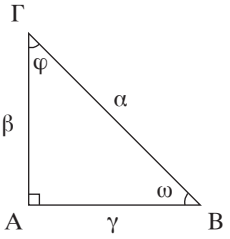
$$\text{ημω} = \frac{\textbf{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\textbf{υποτείνουσα}}$$

Έχουμε $\text{ημω} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ ή $\text{ημω} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\text{ημφ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ ή $\text{ημφ} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

- **Συνημίτονο οξείας γωνίας**

Συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα του τριγώνου.



$$\textbf{συνω} = \frac{\textbf{προσκείμενη κάθετη πλευρα}}{\textbf{υποτείνουσα}}$$

Έχουμε $\text{συνω} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$ ή $\text{συνω} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

$\text{συνφ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$ ή $\text{συνφ} = \dfrac{\beta}{\alpha}$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

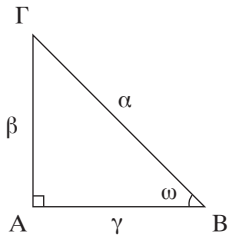
1) Επειδή σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές είναι μικρότερες από την υποτείνουσα, ισχύουν ότι:

$$\mathbf{0 < ημω < 1} \text{ και } \mathbf{0 < συνω < 1}$$

για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

2) Ισχύει η σχέση $\boxed{εφω = \frac{ημω}{συνω}}$ για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

Απόδειξη



Έχουμε $\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{β}{α}}{\frac{γ}{α}} = \frac{β \cdot \cancel{α}}{γ \cdot \cancel{α}} = \frac{β}{γ} = εφω$

3) Ισχύει η σχέση $\boxed{ημ^2ω + συν^2ω = 1}$ για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

Απόδειξη

Έχουμε $ημ^2ω + συν^2ω = \left(\frac{β}{α}\right)^2 + \left(\frac{γ}{α}\right)^2 = \frac{β^2}{α^2} + \frac{γ^2}{α^2} = \frac{β^2 + γ^2}{α^2} = \frac{α^2}{α^2} = 1$

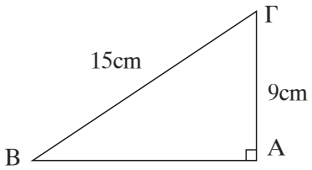
($β^2 + γ^2 = α^2$ απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα).

4) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ $(\hat{Α} = 90^0)$ ισχύει:

$ημ\hat{Β} = συν\hat{Γ}$ και $ημ\hat{Γ} = συν\hat{Β}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α} = 90^0)$, να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.



Λύση

Πρέπει αν υπολογίσουμε πρώτα το ΑΒ. Απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$15^2 = ΑΒ^2 + 9^2$

$225 = AB^2 + 81$
$AB^2 = 225 - 81$
$AB^2 = 144$
$AB = \sqrt{144} = 12cm$

Οπότε $ημ\hat{B} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, $συν\hat{B} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$ημ\hat{Γ} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $συν\hat{Γ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

2) Αν για μια οξεία ω ισχύει $ημω = \frac{3}{5}$, να υπολογίσετε το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας ω.

Λύση

Απο τη σχέση $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + συν^2ω = 1$$

$$\frac{9}{25} + συν^2ω = 1$$

$$συν^2ω = 1 - \frac{9}{25}$$

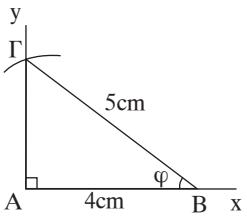
$$συν^2ω = \frac{16}{25} \quad ή \quad συνω = \sqrt{\frac{16}{25}} \quad ή \quad συνω = \frac{4}{5}$$

Οπότε $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{4 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{4}$

3) Να κατασκευάσετε μια οξεία γωνία φ, με $συνφ = \frac{4}{5}$

Λύση

Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{A}y$ και στην πλευρά Ax παίρνουμε τμήμα AB = 4cm. Με κέντρο το B και ακτίνα 5cm, γράφουμε κύκλο που τέμνει την Ay στο Γ.

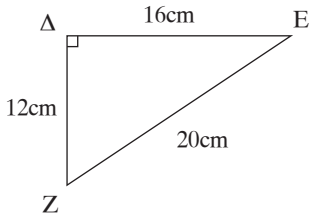


Οπότε στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\text{συν}\hat{B} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4}{5}$

Άρα η ζητούμενη γωνία φ είναι η γωνία $\hat{B}$ του $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ είναι:



α) $\text{ημ}\hat{Z} =$

Α. $\frac{12}{20}$ Β. $\frac{16}{20}$ Γ. $\frac{12}{16}$ Δ. $\frac{16}{12}$

β) $\text{συν}\hat{Z} =$

Α. $\frac{3}{4}$ Β. $\frac{4}{5}$ Γ. $\frac{3}{5}$ Δ. $\frac{5}{4}$

γ) $\text{ημ}\hat{E} =$

Α. $\frac{3}{5}$ Β. $\frac{4}{5}$ Γ. $\frac{5}{4}$ Δ. $\frac{3}{4}$

δ) $\text{συν}\hat{E} =$

Α. $\frac{12}{16}$ Β. $\frac{12}{20}$ Γ. $\frac{16}{12}$ Δ. $\frac{16}{20}$

2) Αν $\text{ημω} = \frac{5}{13}$ και $\text{συνω} = \frac{12}{13}$, τότε εφω =

Α. $\frac{12}{5}$ Β. $\frac{13}{5}$ Γ. $\frac{5}{12}$ Δ. $\frac{13}{12}$

3) Να βάλετε ένα x στο τετραγωνάκι που βρίσκεται δίπλα από τους αριθμούς που δεν μπορούν να εκφράζουν το ημίτονο ή το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας:

α) $\frac{6}{10}$ ☐ ε) 1,01 ☐

β) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ στ) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ☐

γ) $\frac{1}{2}$ ☐ ζ) $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ☐

δ) $\frac{5}{4}$ ☐ η) $\frac{7}{5}$ ☐

4) Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) της παρακάτω σχέσεις:

α) Αν $συνω = \frac{8}{17}$, τότε $ημω = \frac{15}{17}$ Σ Λ

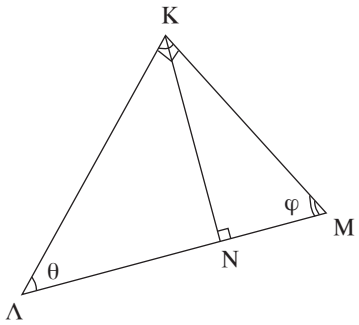
β) Αν $ημω = \frac{3}{5}$ και $συνω = \frac{4}{5}$, τότε $εφω = \frac{4}{3}$ Σ Λ

γ) $ημθ = \frac{ΚΝ}{ΚΛ}$ Σ Λ

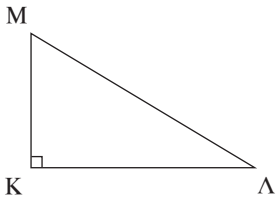
δ) $ημθ = \frac{ΚΛ}{ΛΜ}$ Σ Λ

ε) $συνφ = \frac{ΚΛ}{ΛΜ}$ Σ Λ

στ) $συνφ = \frac{ΝΜ}{ΚΝ}$ Σ Λ



5) Με βάση το διπλανό τρίγωνο να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:
α) $ημ^2Μ + ... = 1$
β) $συν^2Μ + συν^2Λ = ...$



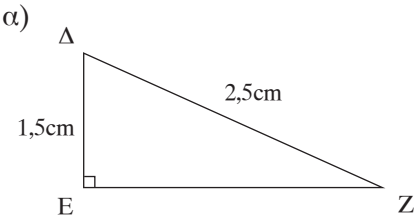
γ) ημΛ = ____
δ) συνΛ = ____

ε) $\frac{\text{ημΜ}}{\text{συνΜ}} = ...$

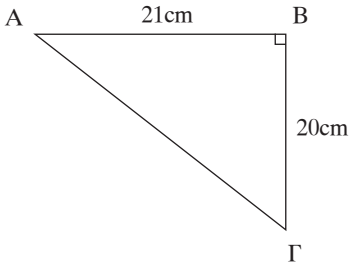
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξείων γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

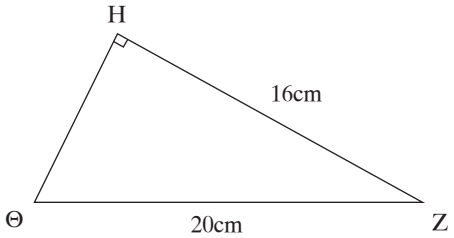
α)



β)



γ)



2. Για μια οξεία γωνία ω ισχύει ότι $\text{συνω} = \frac{5}{13}$. Να υπολογίσετε το ημω και την εφω.

3. Για μια οξεία γωνία ω ισχύει ότι $\text{ημω} = \frac{8}{17}$. Να υπολογίσετε το συνω και την εφω.

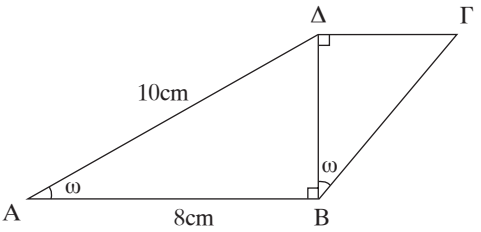
4. Να αποδείξετε ότι για κάθε οξεία γωνία ω, ισχύει:
α) 5 – 3 ημω > 2
β) 7ημω + 4 συνω < 11
γ) 6 +3 συνω < 9
δ) 2ημω + 3συνω + 5 < 10

5. Στο διπλανό σχήμα είναι:

$\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{B}\Gamma = \hat{\omega}$,

ΑΒ = 8cm, και ΑΔ = 10cm.

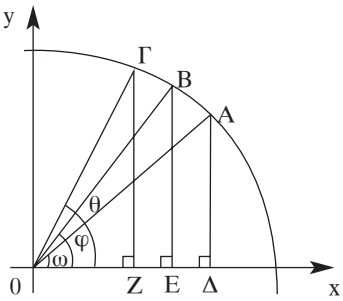
Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου ΒΔΓ.



6. Αν στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι υ το ύψος που φέρνουμε από την κορυφή Α προς την πλευρά ΒΓ, να αποδείξετε ότι $E = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu\hat{B}$.

2.3 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΗΜΙΤΟΝΟΥ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

- Έστω μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$. Με κέντρο το 0 και ακτίνα ρ γράφουμε έναν κύκλο και έστω Α, Β, Γ τυχαία σημεία πάνω στον κύκλο. Σχηματίζουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ και ΟΓΖ, που έχουν ίσες υποτείνουσες ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ρ και θεωρούμε τρεις γωνίες ω < φ < θ.



Έχουμε ότι ΑΔ < ΒΕ < ΓΖ, οπότε αν διαιρέσεουμε με ρ παίρνουμε

$\frac{A\Delta}{\rho} < \frac{BE}{\rho} < \frac{\Gamma Z}{\rho}$ δηλαδή ημω < ημφ < ημθ.

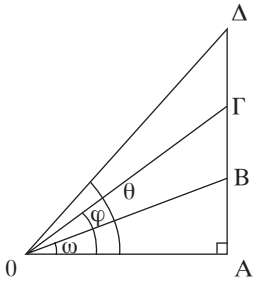
Άρα, **όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία, αυξάνεται και το ημίτονό της**.

Παρατηρούμε ότι ΟΔ > ΟΕ > ΟΖ, οπότε αν διαιρέσουμε με ρ παίρνουμε

$\frac{O\Delta}{\rho} > \frac{OE}{\rho} > \frac{OZ}{\rho}$ δηλαδή συνω > συνφ > συνθ.

Άρα, **όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία, ελαττώνεται το συνημίτονό της**.

- Στο διπλανό σχήμα έχουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΑΔ με σταθερή τη μία κάθετη πλευρά ΟΑ. Παρατηρούμε ότι ΑΒ < ΑΓ < ΑΔ, οπότε αν διαιρέσουμε με ΟΑ έχουμε



$$\frac{ΑΒ}{ΟΑ} < \frac{ΑΓ}{ΟΑ} < \frac{ΑΔ}{ΟΑ} \quad \text{δηλαδή}$$

εφω < εφφ < εφθ

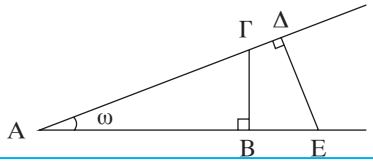
Άρα, **όταν αυξάνεται μια οξεία γωνία, αυξάνεται και η εφαπτομένη της**.

Παρατηρήσεις - Σχόλια

Αν δύο οξείς γωνιές έχουν ίσα ημίτονα ή ίσα συνημίτονα ή ίσες εφαπτόμενες, τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό σχήμα είναι:
ΑΓ = 5cm, ΒΓ = 3cm και ΑΕ = 12cm.
Να υπολογίσετε την απόσταση ΔΕ.



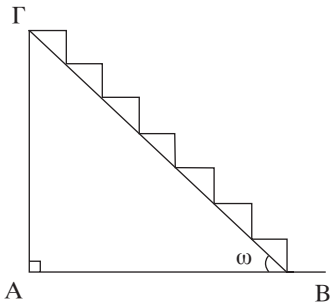
Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγ. ΑΒΓ έχουμε $ημω = \frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ και στο ορθογώνιο τρίγ. ΑΔΕ έχουμε $ημω = \frac{ΔΕ}{ΑΕ}$

Άρα ισχύει $\frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΑΕ}$ ή $\frac{3}{5} = \frac{ΔΕ}{12}$ ή 5 · ΔΕ = 3 · 12 ή 5 · ΔΕ = 36 ή

$$ΔΕ = \frac{36}{5} = 7,2\text{cm}$$

2) Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η σκάλα με το δάπεδο είναι $συν\hat{ω} = 0,4$.
Αν η απόσταση της βάσης της σκάλας από τον τοίχο είναι ΑΒ = 1,4cm, να βρεθεί το μήκος της σκάλας ΒΓ.

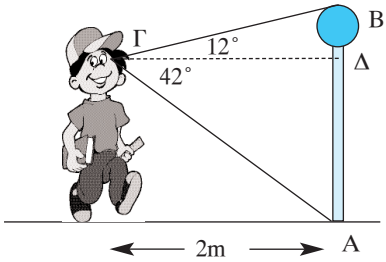


Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγ. ΑΒΓ έχουμε:

$$\text{συν}\hat{\omega} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} \quad \text{ή} \quad 0,4 = \frac{1,4}{\text{ΒΓ}} \quad \text{ή} \quad \text{ΒΓ} = \frac{1,4}{0,4} \quad \text{ή} \quad \text{ΒΓ} = 3,5\text{m}.$$

3) Ένας άνθρωπος βλέπει την κορυφή του φανοστάτη ΑΒ υπο γωνία 12°, ενώ βλέπει τη βάση του υπο γωνία 42°.
Αν η απόσταση του ανθρώπου από τον φανοστάτη είναι 2m, να υπολογίσετε το ύψος του φανοστάτη ΑΒ.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγ. ΓΔΒ έχουμε $\varepsilon\varphi 12^0 = \frac{\Delta B}{\Gamma\Delta}$

Από τους πίνακες των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε εφ12° = 0,212

Άρα $0,212 = \frac{B\Delta}{2}$ επειδή ΓΔ = 2m οπότε ΒΔ = 2 · 0,212 = 0,424m

Στο ορθογώνιο τρίγ. ΓΔΑ έχουμε $\varepsilon\varphi 42^0 = \frac{\Delta A}{\Gamma\Delta}$

Από τους πίνακες των τριγωνομετρικών αριθμών έχουμε εφ42° = 0,9

Άρα $0,9 = \frac{\Delta A}{2}$ ή ΔΑ = 2 · 0,9 = 1,8m

Άρα το ύψος του φανοστάτη είναι ΑΒ = ΔΑ + ΔΒ = 1,8 + 0,424 = 2,24m.

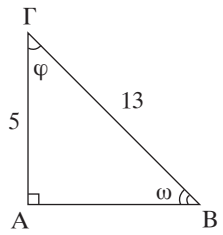
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λανθασμένο).

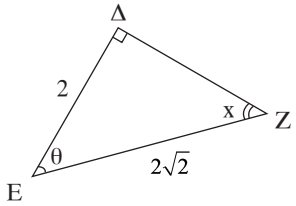
α) ημ 65° < ημ 42°	Σ	Λ
β) ημ 18° < ημ 72°	Σ	Λ
γ) συν 23° < συν 20°	Σ	Λ
δ) εφ 56° < εφ 55°	Σ	Λ
ε) συν 42° < συν 67°	Σ	Λ
στ) εφ 81° < εφ 85°	Σ	Λ

2) Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις που αφορούν τις γωνίες των παρακάτω ορθογωνίων τριγώνων.

α) Α: $\omega < \varphi$ Β: $\omega > \varphi$ Γ: $\omega = \varphi$



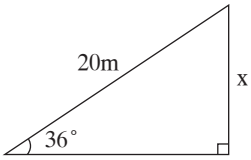
β) Α: $\theta < x$ Β: $\theta = x$ Γ: $\theta > x$



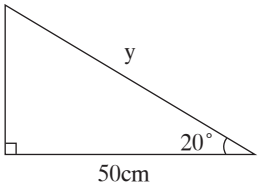
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα x, y, ω, z στα παρακάτω τρίγωνα:

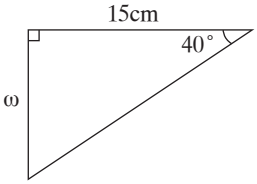
α)



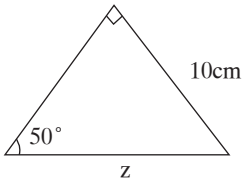
β)



γ)



δ)



2. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς.

α) συν 73° συν 45° συν 11° συν 81° συν 34°

β) ημ 24° ημ 7° ημ 78° ημ 59° ημ 62°

γ) εφ 83° εφ 5° εφ 18° εφ 49° εφ 50°

3. Αν ω είναι οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

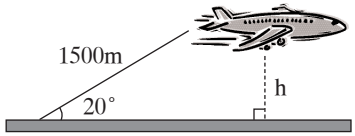
α) $\text{συν}\hat{\omega} \cdot \text{εφ}\hat{\omega} = \text{ημ}\hat{\omega}$

β) $\eta\mu\hat{\omega} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\omega} \cdot \varepsilon\varphi\hat{\omega} + \eta\mu\hat{\omega} \cdot \sigma\upsilon\nu\hat{\omega} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\hat{\omega}} = 1$

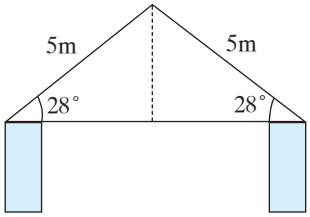
γ) $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \varepsilon\varphi^2\omega + \eta\mu^2\omega = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$

δ) $(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega)\,(1 + \varepsilon\varphi^2\omega) = \varepsilon\varphi^2\omega$

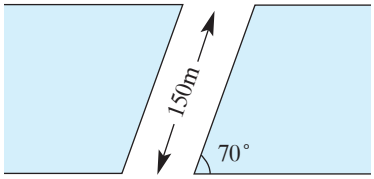
4. Ένα αεροπλάνο ανεβαίνει υπο γωνία 20° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Σε τι ύψος θα έχει φτάσει όταν θα έχει διανύσει μήκος 1500m;



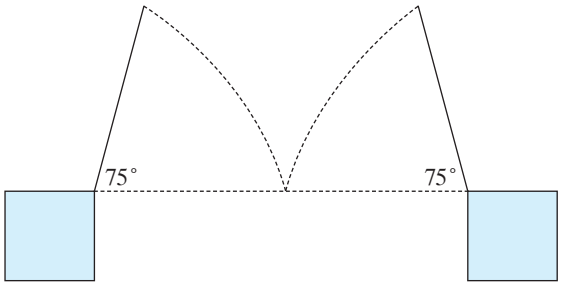
5. Στο διπλανό σχήμα είναι μια κεραμοσκεπή από ένα κιόσκι. Να βρείτε πόσο είναι το πλάτος από το κιόσκι.



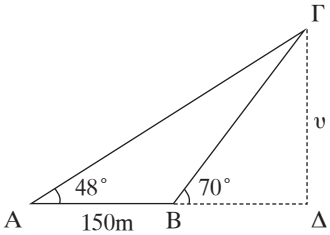
6. Μια γέφυρα που ενώνει τις όχθες ενός ποταμού έχει μήκος 150m και σχηματίζει γωνία 70° με τις όχθες, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ποιό είναι το πλάτος του ποταμού;



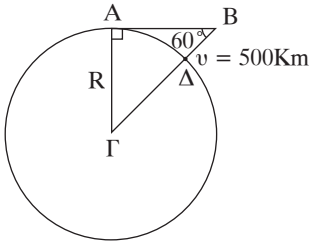
7. Μια πόρτα ενός γκαράζ έχει δύο φύλλα που το καθένα έχει μήκος 1,5m και όταν ανοίγουν σχηματίζουν γωνία 75°. Ποιό είναι το πλάτος του ανοίγματος που δημιουργούν τα δύο φύλλα όταν είναι ανοικτά;



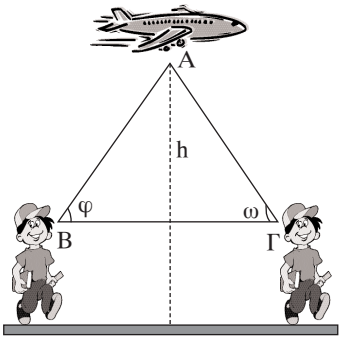
8. Ένας τοπογράφος έκανε τις παρακάτω μετρήσεις σε ένα τριγωνικό αγροτεμάχιο ΑΒΓ που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το ύψος υ και το εμβαδόν του αγροτεμαχίου.



9. Ένας δορυφόρος Β απέχει από την επιφάνεια της Γης απόσταση υ = 500Km. Αν η γωνία $A\hat{B}\Gamma = 68^0$ και ΓΑ η ακτίνα της Γης, να υπολογίσετε την ακτίνα της Γης ΑΓ = R.



10. Δύο παρατηρητές Β και Γ βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο απέχουν δε μεταξύ τους 1000m και μετρούν την ίδια χρονική στιγμή μ' ένα γωνιόμετρο τις γωνίες φ και ω με τις οποίες βλέπουν το αεροπλάνο Α, $\hat{\phi} = 68^0$ και $\hat{\omega} = 80^0$. Να βρεθεί το ύψος h που βρίσκεται το αεροπλάνο, αν τα γωνιόμετρα βρίσκονται σε ύψος 1,6m.

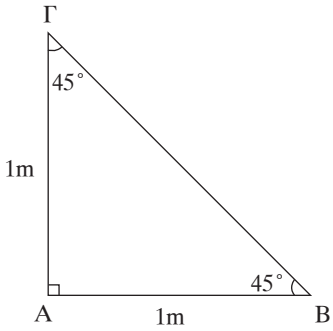


2.4 ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 30°, 45°, 60°

- **Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 45°**

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = 1m. Επειδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές έχουμε

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{90^0}{2} = 45^0$$



Απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$B\Gamma^2 = 1^2 + 1^2$

$B\Gamma^2 = 2$

$B\Gamma = \sqrt{2}cm$

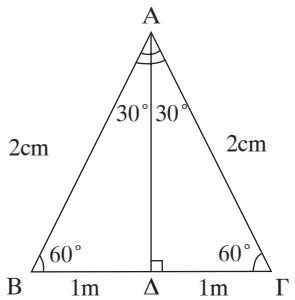
Άρα $\eta\mu 45^0 = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varepsilon\varphi 45^0 = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{1} = 1$

- **Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° και 60°**

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ = 2cm, οπότε όλες οι γωνίες του είναι ίσες με 60°. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ που είναι ταυτόχρονα διάμεσος και διχοτόμος. Άρα ΒΔ = ΔΓ = 1cm και $B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma = 30^0$. Απο το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:



$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή $2^2 = A\Delta^2 + 1^2$ ή $A\Delta^2 = 4 - 1$

$A\Delta^2 = 3$ ή $A\Delta = \sqrt{3}cm$

Άρα $\eta\mu 30^0 = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varepsilon\varphi 30^0 = \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

και $\eta\mu 60^0 = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{συν}60^0 = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{εφ}60^0 = \frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΔ}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	30°	**45°**	**60°**
ημίτονο	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφαπτομένη	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $\text{συν}^2 45^\circ + \text{συν}60^\circ = 1$.

Λύση

Ξέρουμε ότι $\text{συν}45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\text{συν}60^0 = \frac{1}{2}$. Οπότε έχουμε:

$$\text{συν}^2 45^0 + \text{συν}60^0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$A = 2\text{συν}45^\circ - 3\text{εφ}45^\circ + 4\text{ημ}30^\circ + 6\text{ημ}45^\circ - 3\text{εφ}30^\circ$

Λύση

$$A = 2\text{συν}45^\circ - 3\text{εφ}45^\circ + 4\text{ημ}30^\circ + 6\text{ημ}45^\circ - 3\text{εφ}30^\circ$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot 1 + 4\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \sqrt{2} - 3 + 2 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = 4\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1.$$

3) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) είναι $\hat{\Gamma} = 30^0$. Να δείξετε ότι $AB = \frac{B\Gamma}{2}$.

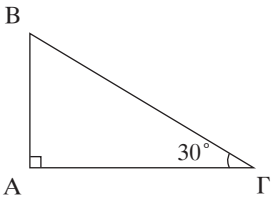
Λύση

Έχουμε $ημΓ = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή

$ημ30^0 = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή

$\frac{1}{2} = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή $2AB = B\Gamma$

$AB = \frac{B\Gamma}{2}$



4) Να βρείτε για ποιές τιμές της οξείας γωνίας x ενός ορθογωνίου τριγώνου έχει νόημα αριθμού η παράσταση

$A = \sqrt{2ημx - \sqrt{3}}$

Λύση

Η παράσταση $A = \sqrt{2ημx - \sqrt{3}}$ έχει νόημα αριθμού όταν:

$2ημx - \sqrt{3} \geq 0$

$2ημx \geq \sqrt{3}$

$ημx \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$ημx \geq ημ60^0$

Άρα $x \geq 60^\circ$, αφού όσο αυξάνει η γωνία, αυξάνει και το ημίτονό της.

5) Αν x είναι μια οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, να προσδιορίσετε τη γωνία x, αν είναι γνωστό ότι ικανοποιεί τη σχέση. $2συν^2x - συνx = 0$

Λύση

$2συν^2x - συνx = 0$

$συνx\,(2συνx - 1) = 0$

$συνx = 0$ ή $2συν - 1 = 0$

αδύνατη $2συνx = 1$

γιατί συνx >0 και $\text{συν}x = \frac{1}{2}$

για κάθε οξεία γωνία x Άρα x = 60° γιατί $\text{συν}60^0 = \frac{1}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη).

α) 2ημ60° =ημ45° Σ Λ

β) 2ημ30° – 1 =0 Σ Λ

γ) 3εφ30° =εφ60° Σ Λ

δ) $\text{συν}45^0 = \sqrt{2}\text{ημ}30^0$ Σ Λ

ε) $3\text{ημ}45^0 = \sqrt{2}$ Σ Λ

στ) $2\text{συν}30^0 - \sqrt{3} = 0$ Σ Λ

2) Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση:

α) Αν $\text{ημ}\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε η γωνία ω ισούται με:

Α. 30° Β. 60° Γ. 45° Δ. 90°

β) Αν $\text{συν}\omega = \frac{1}{2}$, τότε η γωνία ω ισούται με:

Α. 60° Β. 30° Γ. 90° Δ. 45°

γ) Αν $\text{εφ}\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, τότε η γωνία ω ισούται με:

Α. 90° Β. 45° Γ. 60° Δ. 30°

δ) Αν $\text{ημ}\omega = \text{συν}\omega$, όπου ω οξεία γωνία, τότε:

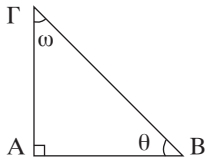
Α. 60° Β. 30° Γ. 45° Δ. 90°

3) Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

α) Αν $\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, όπου θ και ω οι γωνίες του παρακάτω σχήματος, τότε:

Α. $ημω = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Β. $ημω = \frac{1}{2}$

Γ. $ημω = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ. $ημω = 0$



β) Α. $ημθ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Β. $ημθ = \frac{1}{2}$ Γ. $ημθ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Δ. $ημθ = 0$

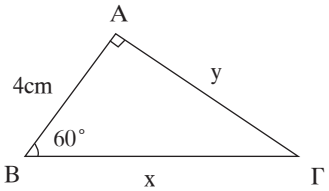
γ) Α. $εφθ = 1$ Β. $εφθ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $εφθ = \sqrt{3}$ Δ. $εφθ = 0$

δ) Α. $εφω = 1$ Β. $εφω = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $εφω = \sqrt{3}$ Δ. $εφω = 0$

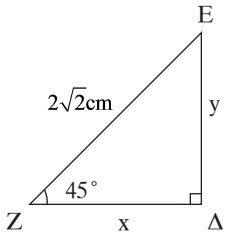
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα x και y στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

α)



β)



2. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

α) $συν60° = συν^2 30° - ημ^2 30°$

β) $ημ60° = 2ημ30° \cdot συν30°$

γ) $εφ^3 45° = εφ30° \cdot εφ60°$

δ) $ημ30° - εφ45° = -συν60°$

ε) $συν60° + 2ημ^2 30° = 1$

στ) $συν^2 45° + 2ημ^2 60° = 2$

3. Αν ισχύει η σχέση $ημ^2 45° + εφ^2 30° = x \cdot ημ45° \cdot συν45° \cdot εφ60°$, να βρείτε την τιμή του x.

4. Να βρείτε για ποιές τιμές της οξείας γωνίας x ενός ορθογωνίου τριγώνου έχουν νόημα αριθμού οι παραστάσεις.

α) $A = \sqrt{2ημx - \sqrt{2}}$

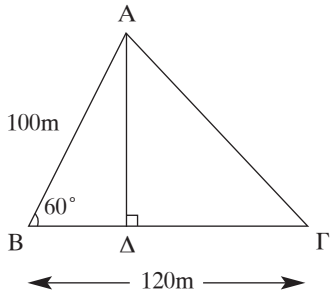
β) $B = \sqrt{2συνx - 1}$

5. Αν x είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, να προσδιορίσετε τη γωνία x, αν είναι γνωστό ότι ικανοποιεί τις σχέσεις:

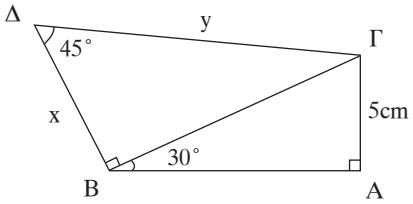
α) $2\eta\mu^2 x - \sqrt{3}\eta\mu x = 0$

β) $\varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi x = 0$

6. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού αγροτεμαχίου ΑΒΓ.

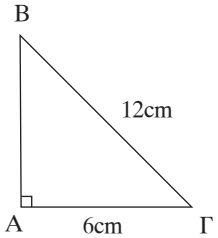


7. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x και y.



8. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$, έχει $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} = 60^0$ και υποτείνουσα ΒΓ = 6cm. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ.

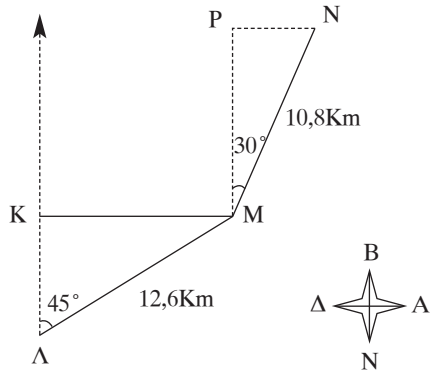
9. Να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά ΑΒ και τις γωνίες $\hat{B}, \hat{\Gamma}$, στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.



10. Το τελεφερίκ ενός χιονοδρομικού κέντρου, αναχωρεί από υψόμετρο 1.500m και φτάνει σε υψόμετρο 2.400m. Κινείται με ταχύτητα 3m\s. Το συρματόσχοινο του τελεφερίκ σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία 30°. Να βρεθεί πόσα λεπτά διαρκεί η διαδρομή.

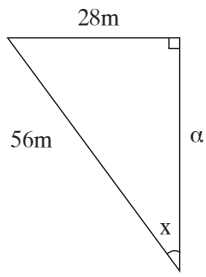
11. Το παρακάτω σχήμα δείχνει την πορεία ΛΜΝ ενός πλοίου, που ξεκίνησε από το λιμάνι Λ.
Να υπολογίσετε:

α) Πόσα Km βόρεια του λιμανιού Λ ήταν στη θέση Ν.
β) Πόσα Km ανατολικά του λιμανιού Λ ήταν στη θέση Ν.

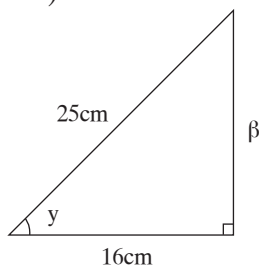


12. Να βρείτε τις γωνίες x, y στα πάρακάτω σχήματα και μετά υπολογίστε τα μήκη α και β.

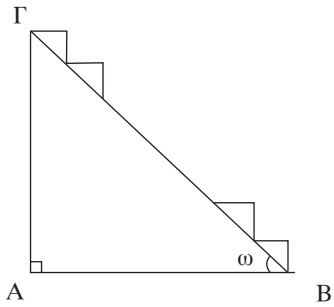
i)



ii)



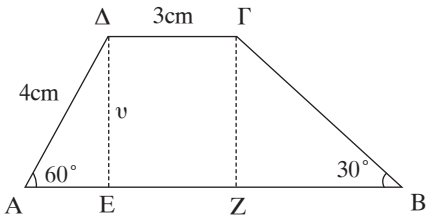
13. Ο Πέτρος παρατηρώντας την σκάλα του σπιτιού του, διαπίστωσε ότι αποτελείται από 14 σκαλοπάτια που το καθένα έχει ύψος 18cm και πλάτος 30cm. Να υπολογίσετε:
α) Το ύψος ΑΓ της σκάλας του σπιτιού.
β) Την απόσταση ΑΒ της αρχής της σκάλας από το σπίτι.
γ) Την κλίση της σκάλας και τη γωνία ω.



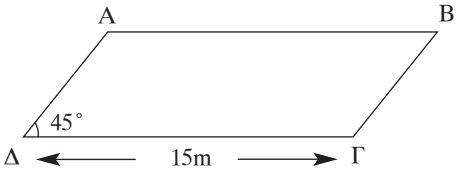
14. Να βρείτε το εμβαδό παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ = 20cm, ΒΓ = 30cm και γωνία $\widehat{B} = 30^0$.

15. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Αν $\widehat{B} = 30^0$ και το ύψος ΑΔ = 5cm, να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου.

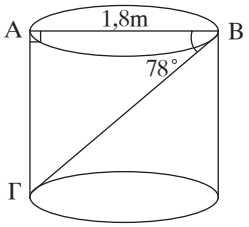
16. Το τετράπλευρο του διπλανού σχήματος είναι τραπέζιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



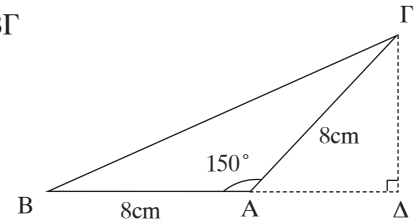
17. Το διπλανό παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 42m και $\widehat{\Delta} = 45^0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



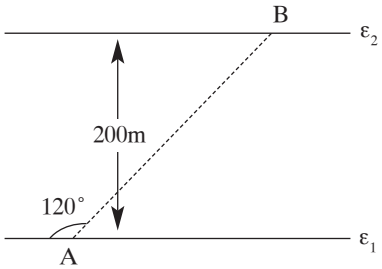
18. Να υπολογίσετε το βάθος του διπλανού κυλινδρικού πηγαδιού. (ΑΒ = 1,8m, $A\widehat{B}\Gamma = 78^0$)



19. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 8 cm και $\widehat{A} = 150^0$. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν του ΑΒΓ
β) την περίμετρο του ΑΒΓ.



20. Ένας βαρκάρης ξεκίνησε από το σημείο Α της όχθης ε_1 του ποταμού για να φτάσει στην απέναντι όχθη ε_2. Το ρεύμα του ποταμού παρέσυρε τη βάρκα, και έτσι έφτασε απέναντι στο σημείο Β. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.



2.5 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Μονόμετρα μεγέθη

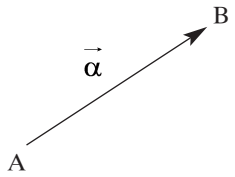
Μονόμετρο μέγεθος λέγεται κάθε μέγεθος που καθορίζεται μόνο με την αριθμητική τιμή του.
Τέτοια μεγέθη είναι η θερμοκρασία, το μήκος, ο χρόνος κ.α.

Διανυσματικά μεγέθη

Διανυσματικό μέγεθος λέγεται κάθε μέγεθος που για να καθοριστεί χρειάζεται εκτός της αριθμητικής τιμής του, η διεύθυνση και η φορά του.
Τέτοια μεγέθη είναι η ταχύτητα ενός κινητού, η δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα, το βάρος ενός σώματος κ.α.
Η παράσταση ενός διανυσματικού μεγέθους γίνεται με το διάνυσμα.

Διάνυσμα

Διάνυσμα λέγεται ένα ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο το ένα άκρο καθορίζεται ως αρχή του και το άλλο ως πέρας του διανύσματος.
Ένα διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας το Β το σχεδιάζουμε όπως στο διπλανό σχήμα και το συμβολίζουμε με $\overrightarrow{AB}$. Μπορούμε ακόμα να συμβολίζουμε ένα διάνυσμα με ένα μικρό γράμμα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{x}$... κ.λ.π.



Χαρακτηριστικά ενός διανύσματος

- Ένα διάνυσμα χαρακτηρίζεται από:

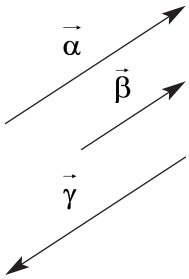
Τη **διεύθυνσή** του, που είναι η ευθεία που ορίζουν τα άκρα Α και Β του διανύσματος ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση, γράφουμε

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ενώ όταν δεν έχουν την ίδια διεύθυνση, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

- Τη **φορά** του που καθορίζεται από την κίνηση από την αρχή Α προς το πέρας Β.

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ στο διπλανό σχήμα έχουν την ίδια φορά ενώ το $\vec{\gamma}$ έχει αντίθετη φορά με το $\vec{\alpha}$ και το $\vec{\beta}$ και γράφουμε

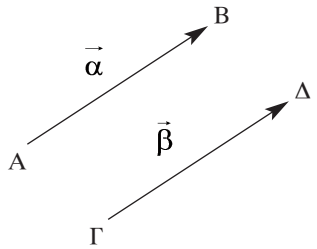
$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \downarrow\uparrow \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \downarrow\uparrow \vec{\gamma}$



- Το **μέτρο** του που είναι μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και το συμβολίζουμε με $|\overrightarrow{AB}|$. Το μέτρο είναι πάντοτε ένας αριθμός θετικός ή μηδέν.

Ίσα διανύσματα

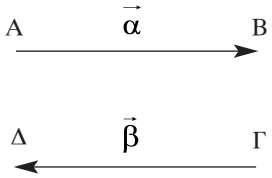
Δύο διανυσματα τα οποία έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα λέγονται ίσα.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ η } \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

Αντίθετα διανύσματα

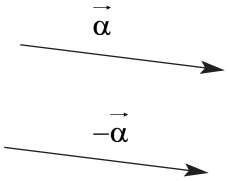
Δύο διανύσματα τα οποία έχουν ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά λέγονται αντίθετα.



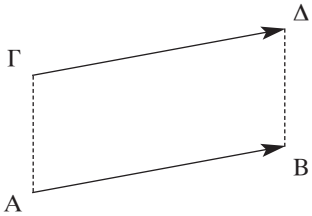
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ η } \vec{\alpha} = -\vec{\beta}$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

1) Το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι το $-\vec{\alpha}$ και ισχύει $|\vec{\alpha}| = |-\vec{\alpha}|$



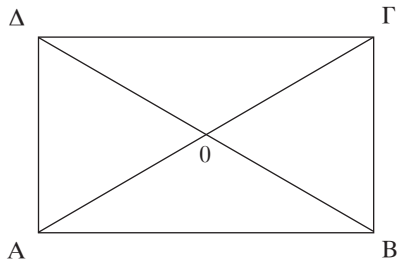
2) Η ισότητα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ γεωμετρικά μας λέει ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, διότι ΑΒ || ΓΔ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του διπλανού σχήματος, ποιό από τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΒΑ}, \overrightarrow{ΔΓ}, \overrightarrow{ΓΒ}, \overrightarrow{ΑΟ}, \overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΔΟ}, \overrightarrow{ΒΟ}, \overrightarrow{ΑΓ}, \overrightarrow{ΒΓ}$

α) έχουν ίσα μέτρα;
β) είναι ίσα;
γ) είναι αντίθετα;



Λύση

α) Ξέρουμε ότι στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, οι διαγώνιες του είναι ίσες και διχοτομούνται.
Άρα:

$|\overrightarrow{ΑΔ}| = |\overrightarrow{ΒΓ}| = |\overrightarrow{ΓΒ}|$

$|\overrightarrow{ΒΑ}| = |\overrightarrow{ΔΓ}|$

$|\overrightarrow{ΑΓ}| = |\overrightarrow{ΒΔ}|$

$|\overrightarrow{ΑΟ}| = |\overrightarrow{ΟΓ}| = |\overrightarrow{ΔΟ}| = |\overrightarrow{ΒΟ}|$

β) Ίσα είναι τα διανύσματα:

$\overrightarrow{ΑΔ} = \overrightarrow{ΒΓ}, \quad \overrightarrow{ΑΟ} = \overrightarrow{ΟΓ}$

γ) Αντίθετα είναι τα διανύσματα:

$\overrightarrow{ΑΔ} = -\overrightarrow{ΓΒ}, \ \overrightarrow{ΒΓ} = -\overrightarrow{ΓΒ}, \ \overrightarrow{ΒΑ} = -\overrightarrow{ΔΓ}, \ \overrightarrow{ΔΟ} = -\overrightarrow{ΒΟ}.$

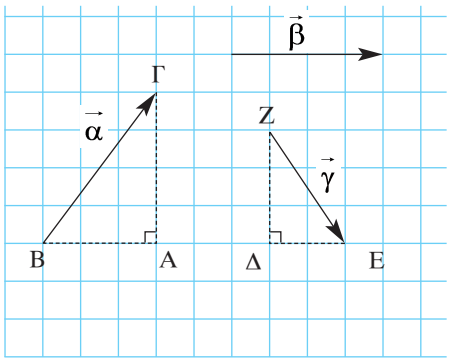
2) Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ του σχήματος.

Λύση

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90^0)$
έχουμε: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$
$ΒΓ^2 = 9 + 16$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή
$ΒΓ = \sqrt{25}$ ή $ΒΓ = 5$

Άρα $|\vec{\alpha}| = 5$

Από το σχήμα έχουμε: $|\vec{\beta}| = 4$



Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta EZ\ (\hat{\Delta} = 90^0)$ έχουμε: $ZE^2 = Z\Delta^2 + \Delta E^2$

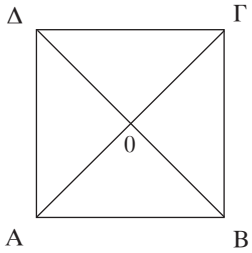
$ZE^2 = 3^2 + 2^2$ ή $ZE^2 = 9 + 4$ ή $ZE^2 = 13$

$ZE = \sqrt{13}$

Άρα $|\vec{\gamma}| = \sqrt{13}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Το διπλανό σχήμα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Ποιές από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές;



α) $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$

β) $|\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Delta}|$

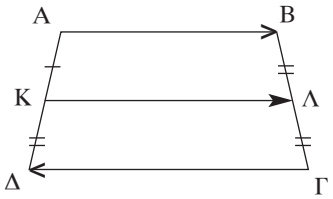
γ) $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BA}$

δ) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{\Gamma O}$

ε) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{O\Delta}$

στ) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

2) Στο διπλανό σχήμα ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και τα Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:



α) $\overrightarrow{AB}//...$

β) $\overrightarrow{KA} = ...$

γ) $\overrightarrow{\Lambda\Gamma} = -...$

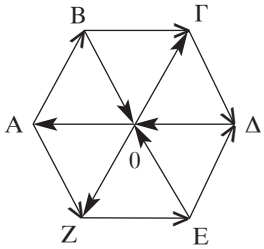
δ) $\overrightarrow{K\Lambda} \downarrow\uparrow ...$

ε) $\overrightarrow{\Delta K} = -...$

στ) $|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| = ...$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Στο διπλανό κανονικό εξάγωνο να γράψετε διανύσματα που:
α) είναι ίσα
β) είναι παράλληλα
γ) είναι αντίθετα
δ) έχουν ίσα μέτρα.



2. Απο τα διανύσματα που είναι σημειωμένα στο παραλληλεπίπεδο, το οποίο έχει βάσεις τετράγωνα, να βρείτε εκείνα που:

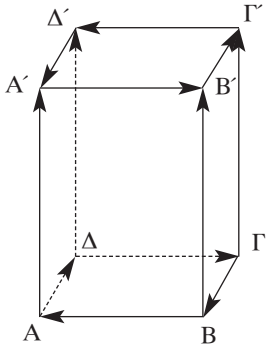
α) έχουν ίδιο μήκος με το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΔ}$

β) έχουν ίδια διεύθυνση με το $\overrightarrow{ΑΔ}$

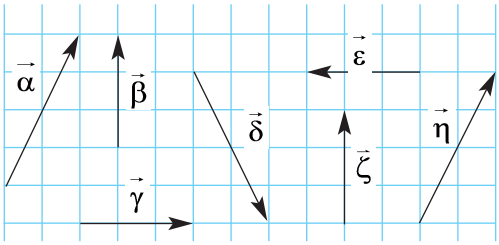
γ) έχουν ίδια φορά με το $\overrightarrow{ΑΔ}$

δ) είναι ίσα με το $\overrightarrow{Α΄Β΄}$

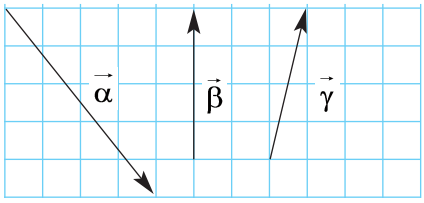
ε) είναι αντίθετα με το $\overrightarrow{Α΄Β΄}$



3. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε:
α) ίσα διανύσματα
β) αντίθετα διανύσματα
γ) διανύσματα με ίσα μέτρα.



4. Να βρείτε το μέτρο των διανυσμάτων $\vec{α}, \vec{β}$ και $\vec{γ}$ του διπλανού σχήματος.



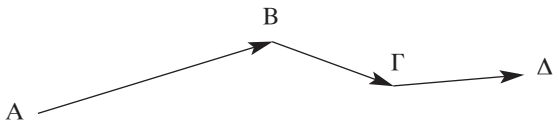
5. Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ να σχεδιάσετε με αρχή το Β, ένα διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΕ}$ αντίθετο του $\overrightarrow{ΓΑ}$ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{ΕΓ}$. Να απο δείξετε ότι $\overrightarrow{ΕΓ} = -\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΕΓ} = \overrightarrow{ΓΔ}$

6. Δίνονται τρία σημεία Α, Β, Γ τα οποία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία.
α) Πόσα διανύσματα σχηματίζουμε με αρχή το Α;
β) Πόσα διανύσματα σχηματίζουμε με τα σημεία αυτά;

2.6 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαδοχικά διανύσματα

Δύο ή περισσότερα διανύσματα λέγονται **διαδοχικά διανύσματα** όταν το πέρας καθενος διανύσματος είναι η αρχή του επομένου.



Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ του παραπάνω σχήματος λέγονται διαδοχικά.

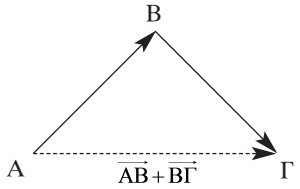
Άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων

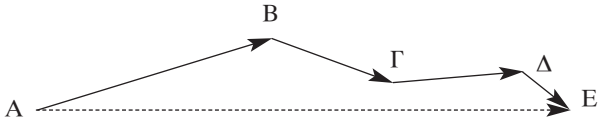
Άθροισμα των **διαδοχικών διανυσμάτων** $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ ονομάζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$

και γράφεται $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$

Το ίδιο ισχύει και για περισσότερα από δύο διαδοχικά διανύσματα, δηλαδή

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}$

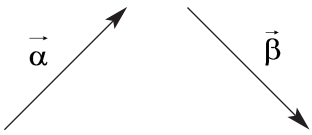


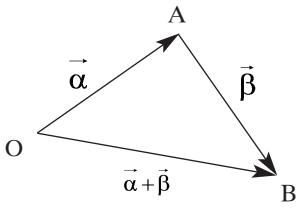


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{AE}$$

Άθροισμα μη διαδοχικών διανυσμάτων

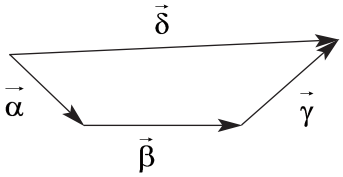
Για να προσθέσουμε δύο **μη διαδοχικά** διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, οπότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$



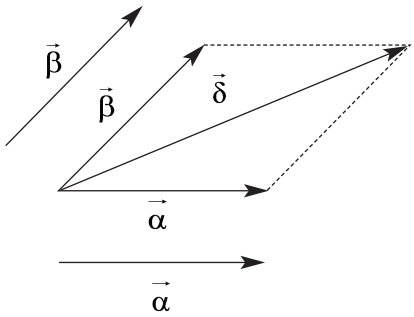


Παρατηρήσεις - Σχόλια

1) Το άθροισμα των διαδοχικών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.



2) Ένας άλλος τρόπος για να προσθέσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Η διαγώνιος $\vec{\delta}$ του παραλληλογράμμου είναι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

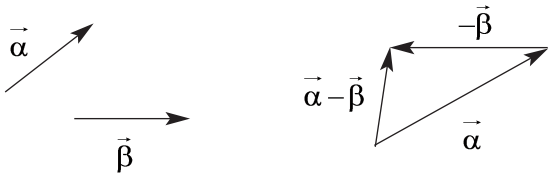


3) Ένα διάνυσμα του οποίου τα άκρα (η αρχή και το πέρας) συμπίπτουν λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** και συμβολίζεται με $\vec{o}$.
Το μηδενικό διάνυσμα παριστάνει ένα σημείο, δεν έχει συγκεκριμένη διεύθυνση και φορά, και το μέτρο του είναι 0, δηλαδή $|\vec{o}|=0$.

Αφαίρεση διανυσμάτων

Διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συμβολίζει με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και ορίζεται ως το άθροισμα του $\vec{\alpha}$ με το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{\beta}$.

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$



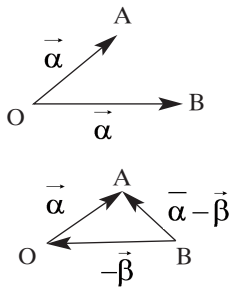
Διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή

Έστω τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ με κοινή αρχή το 0.

Έχουμε $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=$

$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$

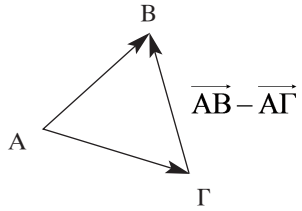
διότι $-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}$



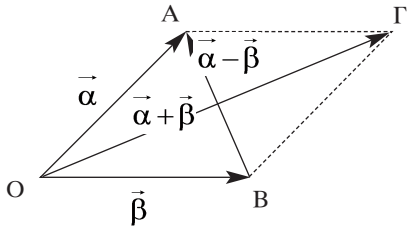
Παρατηρήσεις - Σχόλια

1) Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ όπου τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν κοινή αρχή, είναι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που έχει αρχή το πέρας του δεύτερου διανύσματος και πέρας το πέρας του πρώτου διανύσματος.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$



2) Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε:



3) Το άθροισμα δύο αντίθετων διανυσμάτων είναι το μηδενικό διάνυσμα

$\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

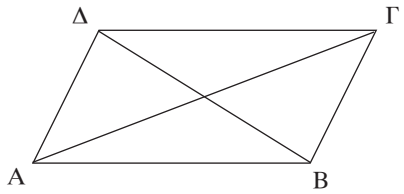
1) Στο διπλανό παραλληλόγραμμο να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}$

β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$

δ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$



Λύση

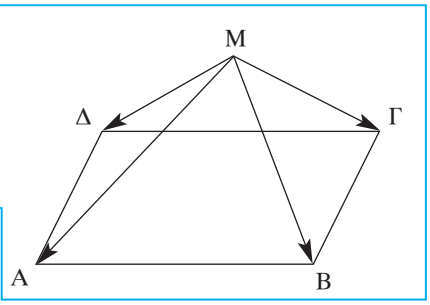
α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$

β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$ ί τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα διανύσματα

γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

δ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{AB}$

2) Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα τυχάιο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}$



Λύση

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{M\Gamma}$

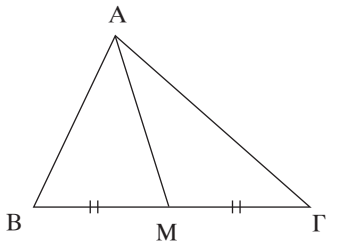
$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}$

Έχουμε $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

οπότε $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{M\Gamma}-\overrightarrow{M\Delta}$ ή

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που ισχύει.

3) Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ είναι διάμεσος. Να αποδείξετε ότι: $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$



Λύση

Έχουμε $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AM}$

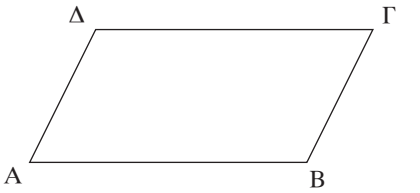
$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma M})$

$=\overrightarrow{AB}+\cancel{\overrightarrow{BM}}+\overrightarrow{A\Gamma}+\cancel{\overrightarrow{\Gamma M}}$ ($\overrightarrow{BM}$ και $\overrightarrow{\Gamma M}$ αντίθετα διανύσματα)

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες.



α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=...$

β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}=...$

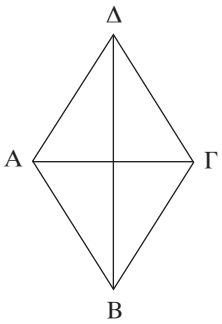
γ) $\overrightarrow{AB}-...=\vec{0}$

δ) $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Gamma B}=...$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}=...$

στ) $\overrightarrow{\Gamma...}-\overrightarrow{\Gamma...}=\overrightarrow{B\Delta}$

2) Δίνεται ότι το διπλανό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη).



α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ Σ Λ

β) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Σ Λ

γ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Delta}$ Σ Λ

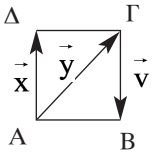
δ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Delta}$ Σ Λ

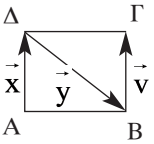
ε) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{\Delta\Gamma}|$ Σ Λ

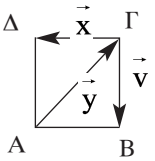
στ) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$ Σ Λ

3) Να αντιστοιχίσετε το άθροισμα $\vec{x}+\vec{y}+\vec{v}$ του κάθε σχήματος της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β.
Τα σχήματα ΑΒΓΔ είναι τετράγωνα.

Στήλη Α

1.


2.


3.


Στήλη Β

α. $\vec{O}$

β. $\overrightarrow{\Gamma A}$

γ. $\vec{y}$

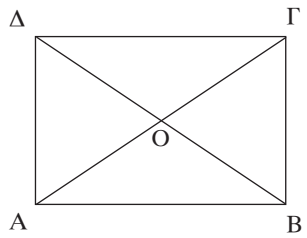
δ. $\overrightarrow{A\Gamma}$

4) Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντο 0.
Να συμπληρώσετε τις φράσεις:

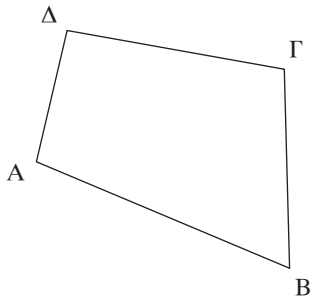
α) Τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{ΓO}$ είναι.....

β) Τα διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{ΔO}$ είναι.....

γ) Τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΔ}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι.....



5) Δίνεται το τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



Α: $\overrightarrow{AΔ}+\overrightarrow{AΓ}=\overrightarrow{BΔ}+\overrightarrow{BΓ}$

Β: $\overrightarrow{BΓ}+\overrightarrow{AΔ}=\overrightarrow{AΓ}+\overrightarrow{BΔ}$

Γ: $\overrightarrow{AΔ}-\overrightarrow{AΓ}=\overrightarrow{BΓ}-\overrightarrow{BΔ}$

Δ: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AΓ}=\overrightarrow{ΓΔ}-\overrightarrow{BΓ}$

Ε: $\overrightarrow{AΔ}=\overrightarrow{AΓ}+\overrightarrow{BΓ}+\overrightarrow{BΔ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται τα διανύσματα του παρακάτω σχήματος.
Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.

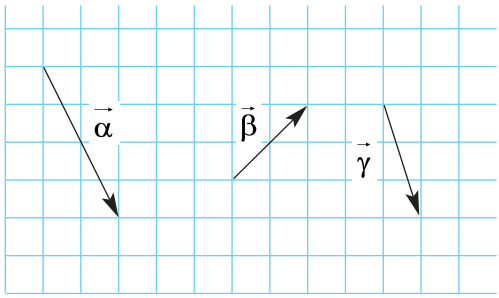
α) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

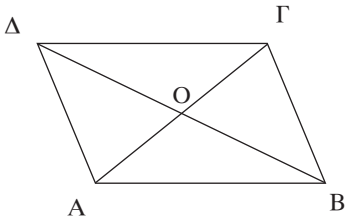
γ) $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

δ) $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

ε) $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}$



2. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος το Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να βρείτε τα διανύσματα:



α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}$

β) $\overrightarrow{OΓ}-\overrightarrow{OB}$

γ) $\overrightarrow{AΔ}-\overrightarrow{AB}$

δ) $\overrightarrow{ΔO}-\overrightarrow{ΓB}$

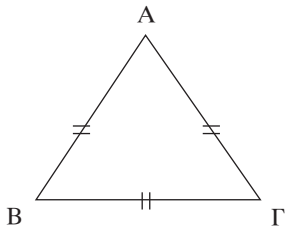
3. Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $ΜΔ = ΑΜ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{ΑΒ} = \overrightarrow{ΓΔ}$

β) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ} = \overrightarrow{ΑΔ}$

γ) $\overrightarrow{ΑΜ} = \dfrac{\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΑΓ}}{2}$

4. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ να βρείτε:

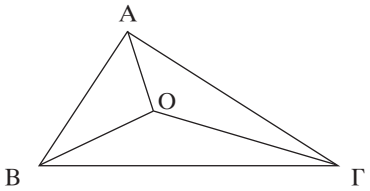


α) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΒ}$

β) $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΑΓ}$

γ) $\overrightarrow{ΓΑ} - \overrightarrow{ΓΒ}$

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ, παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο εσωτερικό του. Να αποδείξετε:

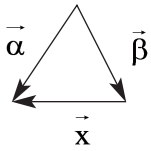


α) $\overrightarrow{ΒΓ} + (\overrightarrow{ΟΒ} - \overrightarrow{ΟΑ}) = -\overrightarrow{ΓΑ}$

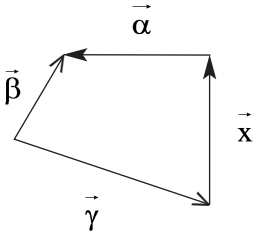
β) $(\overrightarrow{ΟΓ} - \overrightarrow{ΟΑ}) - \overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΟΒ} = \overrightarrow{ΟΓ}$

6. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

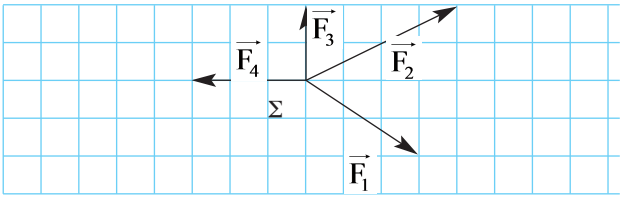
α)



β)



7. Οι δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ και $\vec{F_4}$ ασκούνται στο σώμα Σ. Να σχεδιάσετε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ.



8. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Μ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
$2\overrightarrow{M\Lambda}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$

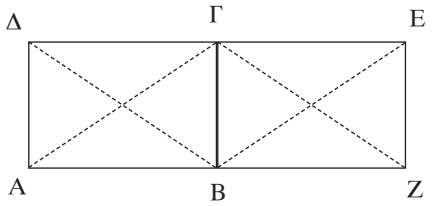
10. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε: (ΑΒΓΔ, ΒΔΕΓ ορθογώνια).

α) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{ZE}$

β) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{EB}$

γ) $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZE}$

δ) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BA}$



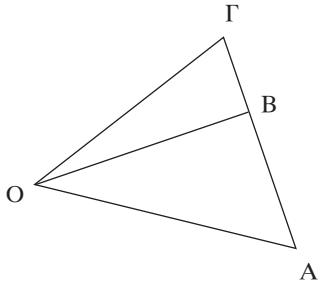
11. Σε ένα σώμα Σ ασκείται μια οριζόντια δύναμη 15Ν και κατακόρυφα το βάρος του 20Ν.
α) Να σχεδιάσετε τις δύο δυνάμεις.
β) Να σχεδιάσετε την διεύθυνση της δύναμης που ασκείται συνολικά στο σώμα.
γ) Να βρείτε το μέτρο της δύναμης αυτής.

12. Στο διπλανό σχήμα είναι $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{B\Gamma}$
Να δείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

β) $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}$

γ) $3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{O\Gamma}$



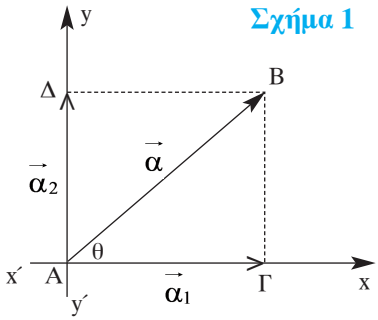
2.7 ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΥΟ ΚΑΘΕΤΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΙΣ

Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες κάνουμε τα εξής:
Σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, με άξονες x΄x και y΄y και κέντρο το σημείο Α (την αρχή Α του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$). Απο το πέρας Β φέρ-

νουμε δύο κάθετες, τη ΒΓ κάθετη στον x΄x και τη ΒΔ κάθετη στον y΄y. Τότε το ΑΓΒΔ είναι ορθογώνιο και ισχύει:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta}$ με $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\alpha}_1$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}_2$

Τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\alpha}_2$ ονομάζονται συνιστώσες του $\vec{\alpha}$.



Σχήμα 1

Μέτρα συνιστωσών

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον οριζόντιο άξονα x΄x, τότε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: (σχήμα 1).

$$\text{συν}\theta = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{ή} \quad \text{συν}\theta = \frac{|\vec{\alpha}_1|}{|\vec{\alpha}|} \quad \text{οπότε} \quad |\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}| \cdot \text{συν}\theta$$

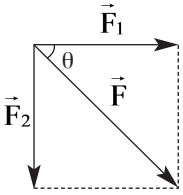
και

$$\text{ημ}\theta = \frac{B\Gamma}{AB} \quad \text{ή} \quad \text{ημ}\theta = \frac{|\overrightarrow{\Gamma B}|}{|\vec{\alpha}|} \quad \text{ή} \quad \text{ημ}\theta = \frac{|\vec{\alpha}_2|}{|\vec{\alpha}|} \quad (\overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Delta} = \vec{\alpha}_2)$$

οπότε $|\vec{\alpha}_2| = |\vec{\alpha}| \cdot \text{ημ}\theta$

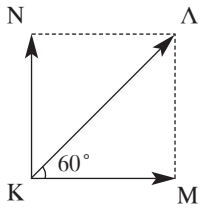
Γενικότερα, αν $\vec{F}$ είναι μια δύναμη και $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι οι δύο κάθετες συνιστώσες της $\vec{F}$ τότε για τα μέτρα των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ισχύει ότι:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \text{συν}\theta \quad \text{και} \quad |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \text{ημ}\theta$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μέτρα $|\overrightarrow{KM}|$ και $|\overrightarrow{KN}|$ όταν $|\overrightarrow{K\Lambda}| = 8$.



Λύση

Έχουμε ότι $|\overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{K\Lambda}| \cdot \text{συν}60^0$

$$\left|\overrightarrow{KM}\right| = 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{KM}\right| = 4$$

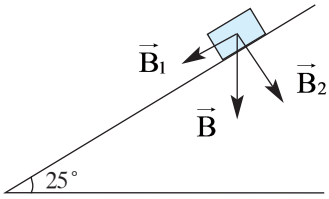
και

$$\left|\overrightarrow{KN}\right| = \left|\overrightarrow{K\Lambda}\right| \cdot \eta\mu 60^0$$

$$\left|\overrightarrow{KN}\right| = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left|\overrightarrow{KN}\right| = 4\sqrt{3}$$

2) Ένα κιβώτιο βάρους 200N βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης 25°. Το διάνυσμα $\vec{B}$ του βάρους του αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες η $\vec{B}_1$ είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και η $\vec{B}_2$ κάθετη στο κεκλιμένο επίπεδο. (Το $\vec{B}_1$ σχηματίζει με το $\vec{B}$ γωνία 65°). Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$.



Λύση

Έχουμε $\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu 65^0$ ή $\left|\vec{B}_1\right| = 200 \cdot 0,423$ ή

$$\left|\vec{B}_1\right| = 84,6N$$

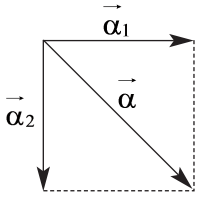
και

$$\left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}\right| \eta\mu 65^0 \text{ ή } \left|\vec{B}_2\right| = 200 \cdot 0,906 \text{ ή}$$

$$\left|\vec{B}_2\right| = 181,2N$$

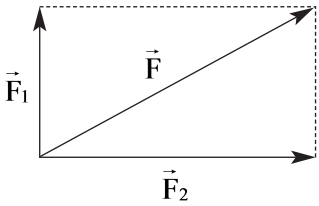
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με μέτρο $\left|\vec{\alpha}\right| = 10$ αναλύεται σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\alpha}_2$. Αν $\left|\vec{\alpha}_2\right| = 6$ τότε το μέτρο $\left|\vec{\alpha}_1\right|$ είναι:



Α: 5 Β: 4 Γ: 8 Δ: 6
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

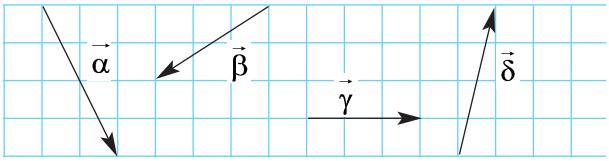
2) Μια δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο κάθετες μεταξύ του συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με μέτρα 8N και 15N αντίστοιχα. Τότε το $|\vec{F}|$ είναι:



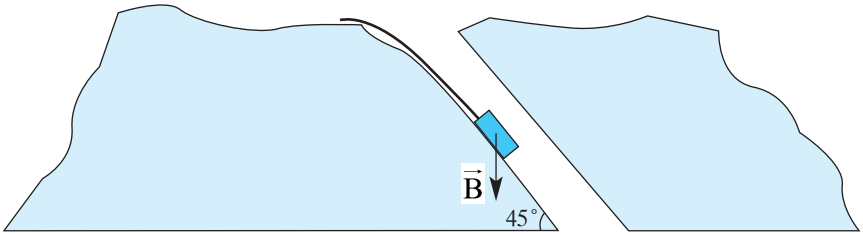
Α: 17 Β: 7 Γ: 23 Δ: 13

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

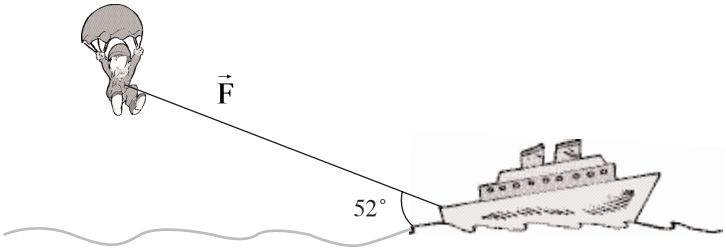
1. Να αναλύσετε τα παρακάτω διανύσματα σε άθροισμα δύο κάθετων συνιστωσών.



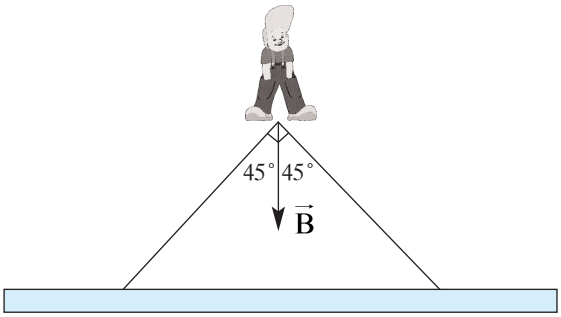
2. Σε μία σήραγγα ενός ορυχείου το βαγόνι μεταφοράς υλικού σύρεται σε ράγες που σχηματίζουν με το οριζόντιο έδαφος γωνία 45°. Το βαγόνι ζυγίζει 3000N γεμάτο. Να βρείτε πόση δύναμη ασκεί το συρματόσκοινο στο βαγόνι για να κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα πάνω.



3. Ένα ταχύπλοο έλκει ένα άνθρωπο δεμένο με αλεξίπτωτο με δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 2000N. Αν η γωνία που σχηματίζει το σκοινί με την επιφάνεια της θάλασσας είναι 52°, να υπολογίσετε τις κάθετες συνιστώσες της δύναμης $\vec{F}$.



4. Ένας ελαιοχρωματιστής για να βάψει το ταβάνι ενός σπιτιού ανέβηκε σε μία ξύλινη σκάλα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το βάρος του ελαιοχρωματιστή είναι 500N, να βρείτε ποιό είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται κάθε πλευρά της σκάλας από το βάρος του ελαιοχρωματιστή.



5. Ένα κομμάτι πάγου βάρους 320N γλυστράει πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης 35°. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης που το κάνει και κινείται.

Θέμα 1

α) Πως ορίζονται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;

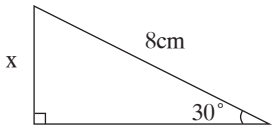
β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ(\widehat{A} = 90^0)$ ισχύει η ισότητα:

$ημ^2B + συν^2B = 1$

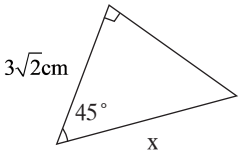
Θέμα 2

Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

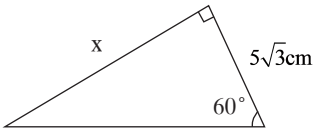
α)



β)

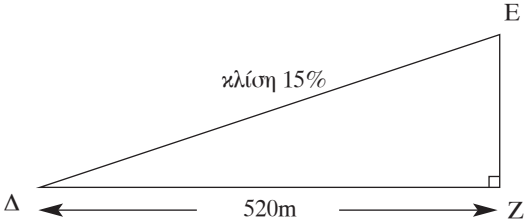


γ)



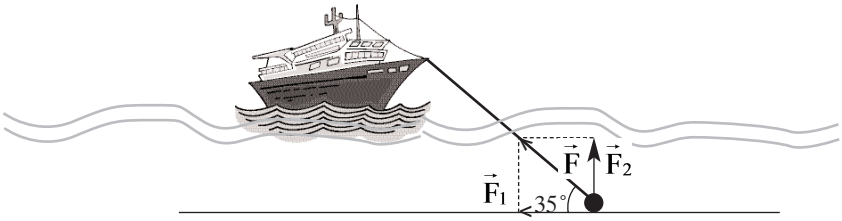
Θέμα 3

Αν η κλίση του δρόμου ΔΕ, στο παρακάτω σχήμα, είναι 15% να υπολογιστεί πόσα μέτρα είναι ψηλότερα το σημείο Ε από το σημείο Ζ.



Θέμα 4

Ένα πλοίο έχει ρίξει την άγκυρά του όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η δύναμη που ασκεί το πλοίο στην άγκυρα είναι $\vec{F} = 70.000N$, να βρείτε τις δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου;

β) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$ ισχύει η ισότητα:

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{\eta\mu\hat{\Gamma}}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}$$

γ) Να βάλετε το κατάλληλο σύμβολο (=, >, <) στις παρακάτω σχέσεις:

i) εφ 37° ..... εφ 43°

ii) εφ 56° ..... εφ 16°

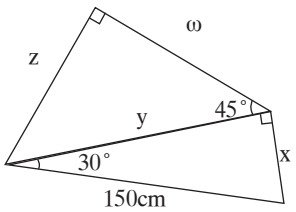
iii) συν 17° ..... συν 52°

iv) ημ 89° ..... ημ 1°

v) ημ 40° ..... συν 50°

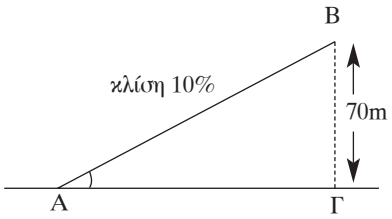
Θέμα 2

Να υπολογίσετε τα x, y, z και ω στο παρακάτω σχήμα:



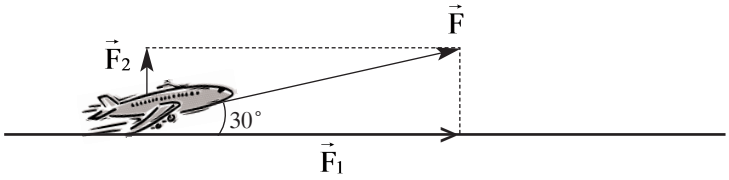
Θέμα 3

Η κλίση ενός ανηφορικού δρόμου ΑΒ είναι 10%. Αν το σημείο Β είναι ψηλότερο από το σημείο Α κατά 70m, να βρείτε τα μήκη ΑΓ και ΑΒ.



Θέμα 4

Σε ένα αεροπλάνο τη στιγμή της απογείωσης από το έδαφος, οι κινητήρες του ασκούν δύναμη $\vec{F} = 300.000N$ με γωνία κλίσης ως προς τον διάδρομο απογείωσης 30°. Να βρείτε τις δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

Θέμα 1

Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	30°	45°	60°
ημίτονο			
συνημίτονο			
εφαπτομένη			

Θέμα 2

Αν ισχύει $5ημB - 4 = 0$, όπου $\hat{B}$ μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) να υπολογίσετε $συν\hat{B}$ και την $εφ\hat{B}$.

Θέμα 3

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα ρ = 5cm. Από ένα σημείο Μ εκτός του κύκλου φέρνουμε την εφαπτομένη ΜΑ = 12cm.

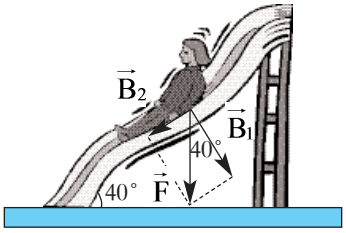
α) Να υπολογίσετε την απόσταση ΜΟ.

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{M}O$ και $A\hat{O}M$.

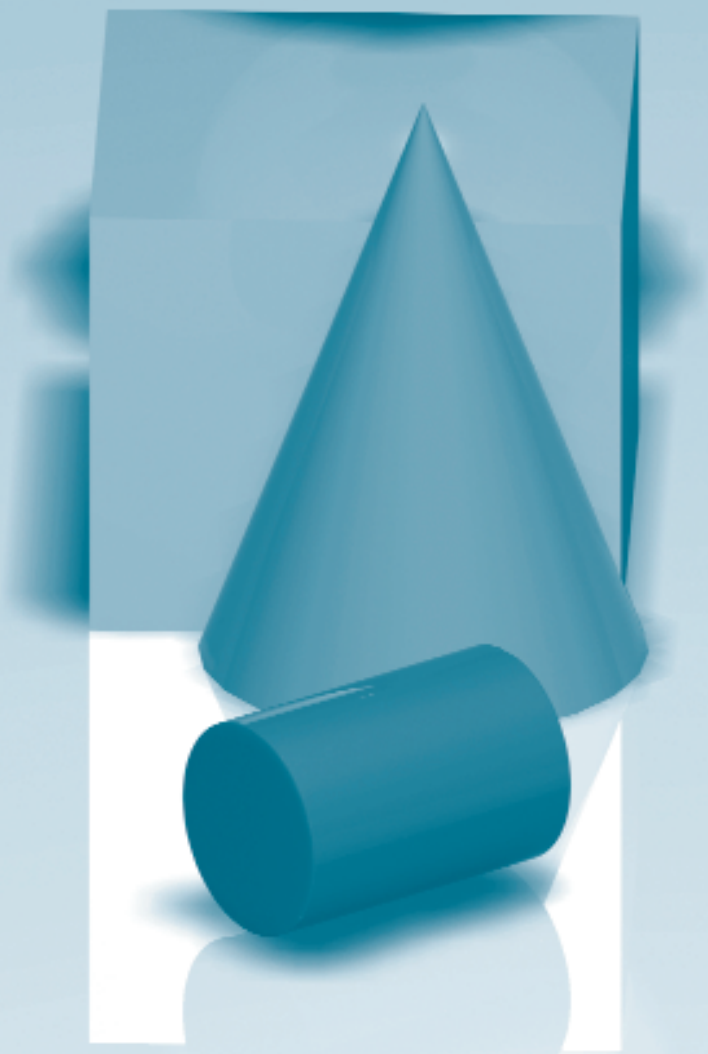
γ) Να βρείτε ένα σημείο Β του κύκλου έτσι ώστε $A\hat{O}B = 60^0$.

Θέμα 4

Η Άννα κάνει τσουλήθρα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν το βάρος της Άννας είναι 250N, να βρείτε τις δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{B}_1$ και $\vec{B}_2$.



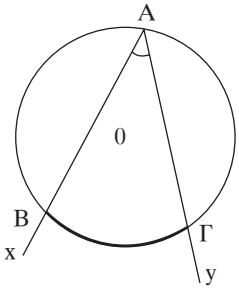
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο



3.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Εγγεγραμμένη γωνία στον κώνο (Ο,ρ) λέγεται η γωνία $x\hat{A}y$, που έχει την κορυφή της στον κύκλο και οι πλευρές της Αχ και Ay τέμνουν τον κύκλο.

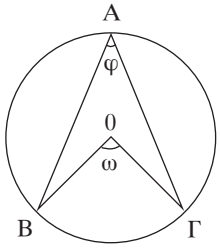
Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ του κύκλου (Ο,ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της εγγεγραμμένης γωνίας. Ακόμα, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ **βαίνει** στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.



Σχέση επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας

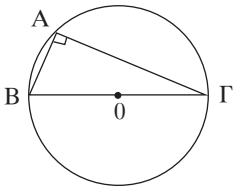
Κάθε **εγγεγραμμένη** γωνία ισούται με το **μισό** της **επίκεντρης** που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο. Δηλαδή

$\hat{\phi} = \frac{\hat{\omega}}{2}$ ή $\hat{\omega} = 2\hat{\phi}$

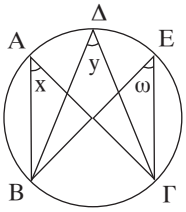


Παρατηρήσεις- Σχόλια

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή
Ισχύει $B\hat{A}\Gamma = 90^0$



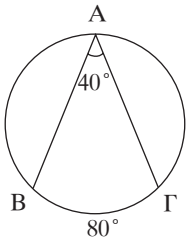
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες.
Ισχύει $\hat{x} = \hat{y} = \hat{\omega}$



- Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες είναι ίσες, τότε και τα τόξα στα οποία βαίνουν είναι ίσα.

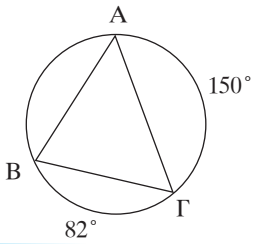
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της

Έχουμε $B\hat{A}\Gamma = \frac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \frac{80^0}{2} = 40^0$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

Επειδή η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma} = 82^0$

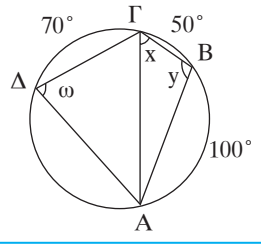
έχουμε: $B\hat{A}\Gamma = \frac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \frac{82^0}{2} = 41^0$

Ακόμα η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma} = 150^0$

οπότε $A\hat{B}\Gamma = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{150^0}{2} = 75^0$

Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, ισχύει
$A\hat{\Gamma}B = 180^\circ - (75^\circ + 41^\circ) = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

2) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ και $\hat{\omega}$ στο διπλανό σχήμα.



Λύση

Επειδή $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A} = 360^0$ έχουμε

$100^\circ + 50^\circ + 70^\circ + \overset{\frown}{\Delta A} = 360^\circ$

$220^\circ + \overset{\frown}{\Delta A} = 360^\circ$

$\overset{\frown}{\Delta A} = 140^\circ$

Άρα $\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{100^0}{2} = 50^0$ ως εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$,

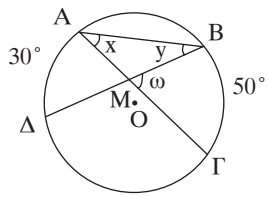
$\hat{y} = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta A}}{2} = \frac{\overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A}}{2} = \frac{70^0 + 140^0}{2} = \frac{210^0}{2} = 105^0$ ως εγγεγραμμένη

που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta A}$,

και $\hat{\omega} = \frac{\overset{\frown}{AB\Gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \frac{100^0 + 50^0}{2} = \frac{150^0}{2} = 75^0$ ως εγγεγραμμένη

που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB\Gamma}$.

3) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ και $\hat{\omega}$.



Λύση

Έχουμε $\hat{x} = \frac{50^0}{2} = 25^0$ και $\hat{y} = \frac{30^0}{2} = 15^0$

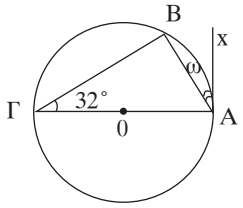
Από το τρίγωνο ΑΒΜ έχουμε: ΑΒΜ $= 180° - (25° + 15°) = 180° - 40° = 140°$

Επειδή $A\hat{B}M + \hat{\omega} = 180^0$ ισχύει

$\hat{\omega} = 180^0 - 140^0$

$\hat{\omega} = 40^0$

4) Στο διπλανό σχήμα η ημιευθεία Αx είναι εφαπτομένη του κύκλου. Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}x = \omega$.



Λύση

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθή, γιατί είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.

Οπότε από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\hat{A}\Gamma = 180° - (90° + 32°) = 180° - 122° = 58°$

Επειδή η εφαπτομένη Αχ είναι κάθετη στην ακτίνα ΟΑ, έχουμε:

$B\hat{A}\Gamma + \hat{\omega} = 90°$

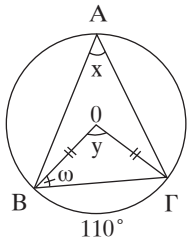
$58° + \hat{\omega} = 90°$

$\hat{\omega} = 90° - 58°$

$\hat{\omega} = 32°$

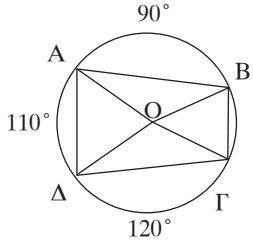
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Στα παρακάτω να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, με βάση το διπλανό σχήμα.



α) Το μέτρο της γωνίας x είναι:
Α: 110° Β: 60° Γ: 55° Δ: 220°
β) Το μέτρο της γωνίας y είναι:
Α: 55° Β: 110° Γ: 220° Δ: 50°
γ) Το μέτρο της γωνίας ω είναι:
Α: 35° Β: 55° Γ: 45° Δ: 25°

2) Στα παρακάτω να επιλέξετε τη σωστή απάντηση, με βάση το διπλανό σχήμα.



α) Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{ΒΓ}$ είναι:
Α: 30° Β: 40° Γ: 50° Δ: 60°
β) Το μέτρο της γωνίας $Γ\hat{Ο}Δ$ είναι:
Α: 120° Β: 60° Γ: 240° Δ: 110°
γ) Το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Β}Γ$ είναι:
Α: 230° Β: 110° Γ: 115° Δ: 100°
δ) Το μέτρο της γωνίας $Α\hat{Δ}Γ$ είναι:
Α: 90° Β: 130° Γ: 40° Δ: 65°

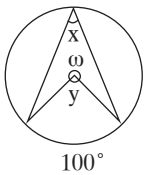
3) Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου είναι διπλάσια από την αντίστοιχη επίκεντρη που βαίνει στο ίδιο τόξο. Σ Λ
β) Η εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι 90°. Σ Λ
γ) Δύο κάθετες διάμετροι του κύκλου χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα. Σ Λ
δ) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα με ίσα μέτρα, είναι ίσες. Σ Λ

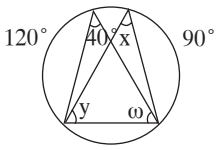
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω στα παρακάτω σχήματα.

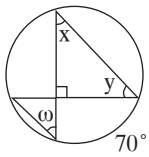
α)



β)

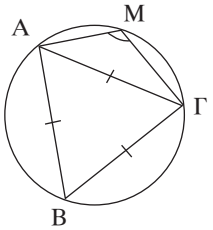


γ)

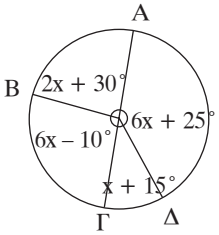


2. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$.

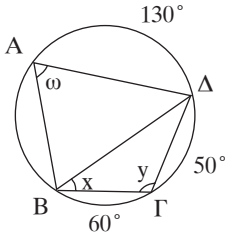
Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\text{Γ}$.



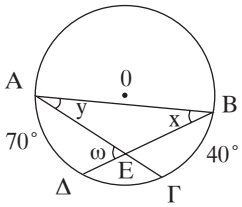
3. Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}, \overset{\frown}{\text{ΒΓ}}, \overset{\frown}{\text{ΓΔ}}, \overset{\frown}{\text{ΔΑ}}$.



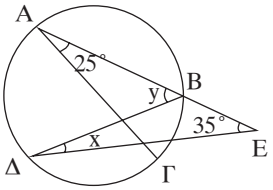
4. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ και $\hat{\omega}$ στο διπλανό σχήμα.



5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x, y και ω.

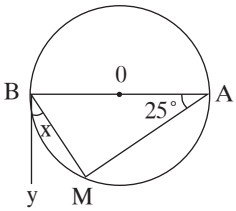


6. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x και y.

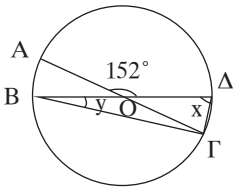


7. Σε κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}} = 150^\circ$, $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}} = 70^\circ$ και $\overset{\frown}{\text{ΓΔ}} = 80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

8. Στο διπλανό σχήμα η ημιευθεία By είναι εφαπτομένη του κύκλου.
Να υπολογίσετε τη γωνία $\text{Μ}\widehat{\text{Β}}\text{y} = \text{x}$.



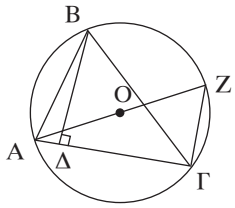
9. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{x}$ και $\hat{y}$ στο διπλανό σχήμα.



10. Σε έναν κύκλο να πάρετε δύο διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 76^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 124^\circ$ και τη διχοτόμο της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

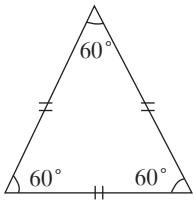
11. Σε έναν κύκλο να πάρετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα $\hat{A}+\hat{\Gamma}$ και $\hat{B}+\hat{\Delta}$ των απέναντι γωνιών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τι παρατηρείτε;

12. Στο διπλανό σχήμα, το ΒΔ είναι ύψος του τριγώνου και η ΑΟΖ είναι διάμετρος του κύκλου. Να δείξετε ότι ΓΖ || ΒΔ.

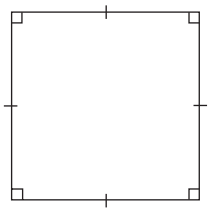


3.2 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

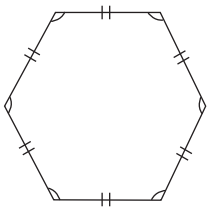
- Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες.
  Παραδείγματα κανονικών πολυγώνων.



Ισόπλευρο τρίγωνο



Τετράγωνο



Κανονικό εξάγωνο

- **Κατασκευή κανονικών πολυγώνων**
  Για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές (κανονικό ν – γωνο) κάνουμε τα εξής βήματα:

1ο βήμα: Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^0}{v}$

2ο βήμα: Σχηματίζουμε διαδοχικά ν επίκεντρες γωνίες ίσες με τη γωνία $\hat{\omega}$, οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε ν τόξα.

3ο βήμα: Ενώνουμε με διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα τα άκρα των τόξων.

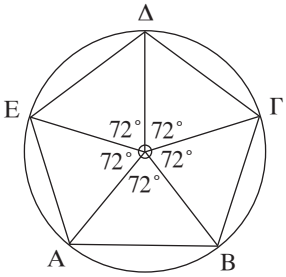
Παράδειγμα

Για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πεντάγωνο κάνουμε τα εξής:

Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^0}{5} = 72^0$

Σχηματίζουμε στον κύκλο (Ο,ρ) διαδοχικά πέντε επίκεντρες γωνίες ίσες με 72° η καθεμία, δηλαδή $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}E = E\hat{O}A = 72^0$

Ενώνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και σχηματίζουμε το κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ.



Ο κύκλος (Ο,ρ) που περνά από τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου λέγεται περιγεγραμμένος κύκλος του πολυγώνου ή λέμε ότι το πολύγωνο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο,ρ).

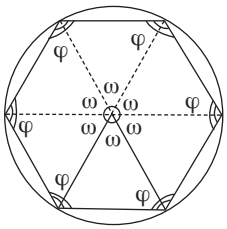
Κεντρική γωνία και γωνία κανονικού πολυγώνου

- Καθεμία από τις ίσες επίκεντρες γωνίες $\hat{\omega}$ με τις οποίες χωρίζουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα λέγεται **κεντρική γωνία** του κανονικού ν – γώνου και ισχύει:

$$\hat{\omega} = \frac{360^0}{v} \quad \text{ή} \quad v = \frac{360^0}{\hat{\omega}}$$

- Καθεμία από τις ίσες γωνίες του ν – γώνου λέγεται **γωνία του πολύγωνου** και συμβολίζεται με $\hat{\phi}$. Ισχύει:

$$\hat{\phi} = 180^0 - \frac{360^0}{v} \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 180^0 - \hat{\omega}$$



Άρα οι γωνίες $\hat{\omega}$ και $\hat{\phi}$ είναι παραπληρωματικές

$$\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^0.$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τη γωνία και την κεντρική γωνία του κανονικού οκταγώνου.

Λύση

Για τη γωνία φ του κανονικού οκταγώνου έχουμε:

$$\hat{\phi} = 180^0 - \frac{360^0}{8} = 180^0 - 45^0 = 135^0.$$

Οπότε για την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ του κανονικού οκταγώνου έχουμε:

$$\hat{\omega} = 180^0 - \hat{\phi} = 180^0 - 135^0 = 45^0$$

2) Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 144°.

Λύση

Ισχύει: $\hat{\phi} = 180^0 - \frac{360^0}{v}$ οπότε

$$144^0 = 180^0 - \frac{360^0}{v} \quad \text{ή} \quad \frac{360^0}{v} = 180^0 - 144^0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{360^0}{v} = 36^0 \quad \text{ή} \quad v = \frac{360^0}{36^0} \quad \text{ή} \quad v = 10.$$

Άρα το κανονικό δεκάγωνο έχει γωνία φ = 144°.

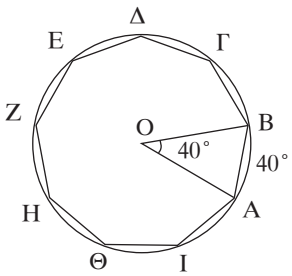
3) Να κατασκευάσετε ένα κανονικό εννιάγωνο.

Λύση

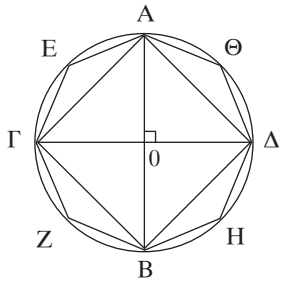
Υπολογίζουμε τη γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^0}{9} = 40^0$

Γράφουμε κύκλο (Ο,ρ) και σχηματίζουμε μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 40^0$.

Σχεδιάζουμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$ και φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.



4) Να σχεδιάσετε σε ένα κύκλο ένα τετράγωνο και ένα κανονικό οκτάγωνο.



Λύση

Η κεντρική γωνία του τετραγώνου είναι

$\hat{\omega} = \frac{360^0}{4} = 90^0$, οπότε σχεδιάζουμε

δύο κάθετες διαμέτρους ΑΒ και ΓΔ και τα άκρα τους είναι οι κορυφές του τετραγώνου ΑΓΒΔ. Επειδή η κεντρική γωνία του οκταγώνου είναι $\hat{\omega} = \frac{360^0}{8} = 45^0$, παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των τόξων $\widehat{ΑΓ}, \widehat{ΓΒ}, \widehat{ΒΔ}$ και $\widehat{ΑΔ}$ αντίστοιχα και τότε το ΑΕΓΖΒΗΔΘΑ είναι κανονικό οκτάγωνο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Η κεντρική γωνία κανονικού δεκαγώνου είναι:
Α. 30° Β. 72° Γ. 10° Δ. 36°

2. Η γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι:
Α. 30° Β. 36° Γ. 150° Δ. 120°

3. Η κεντρική γωνία κανονικού δεκαπενταγώνου είναι:
Α. 24° Β. 15° Γ. 156° Δ. 30°

4. Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 12°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:
Α. 15 Β. 6 Γ. 30 Δ. 60

5. Ένα κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 60°. Το πλήθος των πλευρών του είναι:
Α. 6 Β. 3 Γ. 9 Δ. 12

6. Ένα κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία 45°. η γωνία του πολύγωνου είναι:
Α. 135° Β. 90° Γ. 45° Δ. 55°

7. Ένα κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 108°. Η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι:
Α. 42° Β. 92° Γ. 72° Δ. 108°

8. Ένα κανονικό πολύγωνο έχει γωνία 90°. Η κεντρική γωνία του πολυγώνου είναι:
Α. 110° Β. 45° Γ. 70° Δ. 90°

9. Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

α) Υπάρχει κανονικό πολύγωνο που να έχει οξεία γωνία. Σ Λ
β) Στο κανονικό εξάγωνο η πλευρά του είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Σ Λ
γ) Ο ρόμβος είναι κανονικό πολύγωνο. Σ Λ
δ) Η κεντρική γωνία του κανονικού εξαγώνου είναι διπλάσια από την κεντρική γωνία του κανονικού τριγώνου. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	**Γωνία πολυγώνου**	**Κεντρική γωνία**
4		
5		
8		
12		

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Γωνία κανονικού πολυγώνου	**Κεντρική γωνία**
120°	
	20°
108°	
	40°

3. Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι πενταπλάσια της κεντρικής του γωνίας. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

4. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι τα $\frac{2}{5}$ της ορθής. Να βρείτε τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

5. Να κατασκευάσετε κανονικό δεκάγωνο.

6. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο:

α) με κεντρική γωνία $\hat{\omega} = 22^0$

β) με γωνία $\hat{\phi} = 140^0$

7. Να σχεδιάσετε σε ένα κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

8. Να αποδείξετε ότι κάθε διαγώνιος ενός κανονικού πεντάγωνου είναι παράλληλη προς μία πλευρά του.

9. Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και ΑΚ η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΑΚ είναι κάθετες.

3.3 ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

Ο λόγος του μήκους L ενός κύκλου (ο,ρ) προς τη διάμετρο του δ είναι σταθερός και συμβολίζεται με το Ελληνικό γράμμα π.

Δηλαδή $\frac{L}{\delta} = \pi$.

Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή είναι ένας δεκαδικός με άπειρα δεκαδικά ψηφία. Στις ασκήσεις θα παίρνουμε για τον π την προσεγγιστική τιμή 3,14.

Από τη σχέση $\frac{L}{\delta} = \pi$. έχουμε $L = \pi \cdot \delta$ ή $L = 2\pi\rho$

Άρα:

Μήκος κύκλου: $L = 2\pi\rho$ ή $L=\pi \cdot \delta$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

- Το μήκος ενός κύκλου ονομάζεται και περίμετρος του κύκλου

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 15,7 cm, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

Λύση

Έχουμε: $L=2\pi \cdot \rho$

$$15{,}7 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho \quad \text{ή} \quad 15{,}7 = 6{,}28 \cdot \rho \quad \text{ή} \quad \rho = \frac{15{,}7}{6{,}28} \quad \text{ή} \quad \rho = 2{,}5 \text{ cm.}$$

2) Σε ένα ποδήλατο οι τροχοί του έχουν ακτίνα 30cm. Να υπολογίσετε πόσες στροφές θα κάνουν οι τροχοί του αν διανύσει μια απόσταση 942 m.

Λύση

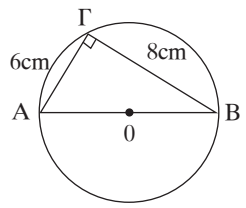
Οι τροχοί του ποδήλατου σε κάθε στροφή καλύπτουν απόσταση

$$L = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188{,}4\text{cm} = 1{,}884\text{m}$$

Άρα για να διανύσει την απόσταση των 942 m πρέπει να κάνουν

$$942 : 1{,}884 = 500 \text{ στροφές}$$

3) Στο διπλανό σχήμα το ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και ΓΑ=6cm και ΓΒ=8cm.
Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου.



Λύση

Η εγγεγραμμένη γωνία $A\overset{\Delta}{\Gamma}B$ βαίνει σε ημικύκλιο, οπότε είναι $A\hat{\Gamma}B = 90^\circ$ και το τρίγωνο ΑΓΒ είναι ορθογώνιο.
Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$

$AB^2 = 6^2 + 8^2$

$AB^2 = 36 + 64$

$AB^2 = 100$

$AB = \sqrt{100} = 10\text{cm}$, δηλαδή $\delta = 10\text{cm}$.

Άρα το μήκος του κύκλου είναι:

$L = \delta \cdot \pi = 10 \cdot 3{,}14 = 31{,}4$ cm.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ	6 cm		8 cm	
Μήκος κύκλου L		5,024m		113,04m

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος).

α) το μήκος του κύκλου είναι $L = \pi \cdot \rho$ Σ Λ

β) αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου (Ο,ρ) τότε το μήκος του διπλασιάζεται Σ Λ

γ) αν το μήκος ενός κύκλου είναι π cm, τότε η ακτίνα του είναι 2cm. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το μήκος κύκλου με διάμετρο 18cm.

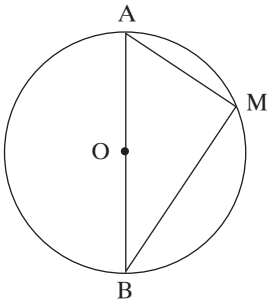
2. Αν το μήκος ενός κύκλου είναι 81,64 cm, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

3. Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν διαφορά 26cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν οι ακτίνες των κύκλων.

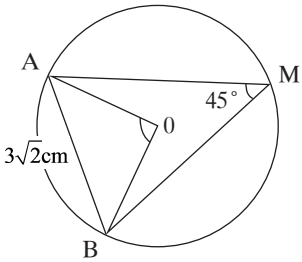
4. Οι διάμετροι δύο κύκλων έχουν διαφορά κατά 8cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν:
α) οι ακτίνες τους
β) οι περίμετροί τους.

5. Οι τροχοί ενός αυτοκινήτου έχουν διάμετρο 68cm και έκαναν 3.500 στροφές. Να υπολογίσετε πόση απόσταση διάνυσε το αυτοκίνητο.

6. Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος ΜΑ = 12cm και ΜΒ = 16cm.
Να βρείτε το μήκος του κύκλου.



7. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, αν $AB = 3\sqrt{2}$cm.



8. Ο ωροδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 1,2 cm και ο λεπτοδείκτης 2 cm. Να βρείτε το διάστημα που διανύει το άκρο κάθε δείκτη σε 24 ώρες.

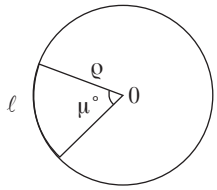
9. Ένα κινητό κινείται σε ένα κύκλο διαμέτρου 70m. Να υπολογίσετε πόσες στροφές θα κάνει σε δύο ώρες αν κινείται μα ταχύτητα 110 Km/h.

3.4 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Το **μήκος L** ενός τόξου μ° ενός κύκλου με ακτίνα ρ ισούται:

$$\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu^0}{360^0} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\ell = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0}}$$

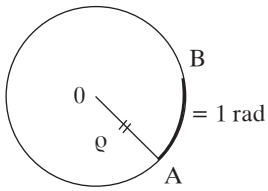


Ακτίνιο ή rad

Το **ακτίνιο ή rad** είναι μονάδα μέτρησης τόξων ενός κύκλου και ισούται με το τόξο που έχει το ίδιο μήκος με την ακτίνα του κύκλου.

Στο διπλανό σχήμα το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ είναι ρ, όσο και η ακτίνα του κύκλου.

Λέμε τότε ότι το τόξο $\widehat{AB}$ είναι 1 rad.



Αν ένας κύκλος μετρηθεί σε rad, τότε το μήκος του είναι 2π rad. Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με $\boxed{L = \alpha \cdot \rho}$

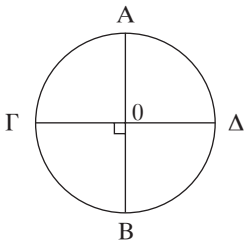
Σχέση μοιρών και ακτινίων

Αν ένα τόξο είναι μ° και συγχρόνως α rad, τότε ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{\mu^0}{180^0} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

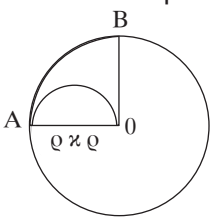
Παρατηρήσεις - Σχόλια

- Αν σε ένα κύκλο πάρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΒ ⊥ ΓΔ, τότε ο κύκλος χωρίζεται σε τέσσερα ίσα τόξα που το καθένα έχει μέτρο 90° ή $\frac{\pi}{2}$ rad, και ονομάζεται **τεταρτοκύκλιο**.



- Δύο τόξα με ίσα μήκη είναι ίσα, όταν ανήκουν στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.

Στο διπλανό σχήμα τα τόξα $\overset{\frown}{AO}$ και $\overset{\frown}{AB}$ έχουν το ίδιο μήκος



$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi \cdot (2\rho) \cdot 90^0}{180^0} = \pi \cdot \rho \text{ και}$$

$$L_{\overset{\frown}{AO}} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot 180^0}{180^0} = \pi \cdot \rho$$ παρόλα αυτά δεν είναι ίσα αφού ανήκουν σε κύκλους με διαφορετικές ακτίνες.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ένας κύκλος έχει μήκος 100,48cm. Μα βρείτε το μήκος τόξου 45°.

Λύση

Το μήκος του κύκλου είναι L = 2π · ρ οπότε
100,48 = 2 · 3,14 · π ή 100,48 = 6,28 · ρ ή $\rho = \frac{100,48}{6,28}$ ή ρ = 16 cm.
Άρα το μήκος τόξου 45° είναι:

$$L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0} = \frac{3,14 \cdot 16 \cdot 45^0}{180^0} = 12,56\text{cm}$$

2) Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα:

Ακτίνα ρ	6cm	10cm	
Τόξο σε μοίρες	60°	90°	30°
Μήκος τόξου			6,28cm

Λύση

Στην πρώτη στήλη έχουμε: $L = \frac{3,14 \cdot 6 \cdot 60^0}{180^0} = 6,28\text{cm}$

Στη δεύτερη στήλη έχουμε: $L = \frac{3,14 \cdot 10 \cdot 90^0}{180^0} = 15,7\text{cm}$

Στην τρίτη στήλη έχουμε: $L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180^0}$ οπότε

$$6,28=\frac{3,14\cdot\rho\cdot 30^0}{180^0} \quad \text{ή} \quad 6,28=\frac{3,14\cdot\rho}{6} \quad \text{ή} \quad 3,14\rho=6\cdot 6,28$$

$$3,14\rho=37,68 \quad \text{ή} \quad \rho=\frac{37,68}{3,14} \quad \text{ή} \quad \rho=12\text{cm}$$

Άρα

Ακτίνα ρ	6cm	10cm	12cm
Τόξο σε μοίρες	60°	90°	30°
Μήκος τόξου	6,28cm	15,7cm	6,28cm

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να αντιστοιχήσετε τα μέτρα των τόξων της στήλης Α από μοίρες σε ακτίνια της στήλης Β.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
30° •	• $\frac{2\pi}{3}$
60° •	• $\frac{3\pi}{4}$
90° •	• $\frac{4\pi}{3}$
120° •	• $\frac{\pi}{6}$
135° •	• $\frac{\pi}{2}$
150° •	• $\frac{\pi}{3}$
240° •	• $\frac{5\pi}{6}$

2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) αν το μήκος ενός τόξου μ° είναι ίσο με το $\frac{1}{6}$ του μήκους του κύκλου στον οποίο ανήκει, τότε:

Α: μ= 45° Β: μ=60° Γ: μ=90° Δ: μ=30°

β) Αν το μήκος ενός τόξου μ° είναι L, τότε το τόξο 2μ° έχει μήκος:

Α: $\frac{L}{2}$ Β: L Γ: 2L Δ: 4L

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Τόξο σε μοίρες	45°		75°			330°
Τόξο σε ακτίνια		π/12		4π/15	5π/4	

2. Σε έναν κύκλο με μήκος 50,24cm να βρείτε:

α) την ακτίνα του

β) το μήκος τόξου 90°.

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

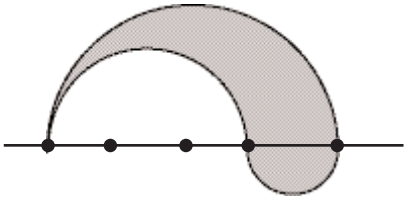
Ακτίνα ρ	4cm	5m	
Τόξο σε μοίρες μ°	30°		270°
Τόξο σε ακτίνια α		π/4	
Μήκος τόξου L			6πcm

4. Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 30cm.

5. Ένα τόξο 40° έχει μήκος 8,37m. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.

6. Να βρείτε το μήκος ενός τόξου 50°, που βρίσκεται στον κύκλο με διάμετρο που είναι η λύση της εξίσωσης $6(\chi - 2) + 3 = 4x - 1$.

7. Να βρείτε την περίμετρο του παρακάτω σχήματος



ΑΒ = 4cm
ΒΓ = 2cm

8. Ο ωροδείκτης ενός ρολογιού έχει μήκος 5cm και ο λεπτοδείκτης 8cm. Να βρείτε το συνολικό διάστημα που διανύουν οι άκρες των δεικτών από τι 3μμ. έως τις 6μμ.

3.5 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

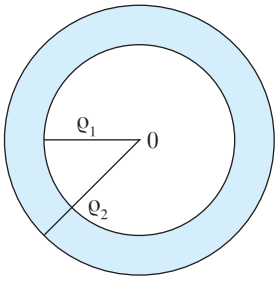
Το **εμβαδόν κυκλικού δίσκου** ή το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ, ισούται με

$$\boxed{E = \pi \cdot \rho^2}$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

Κυκλικός δακτύλιος λέγεται το μέρος του επίπεδου που περικλείεται από δύο ομόκεντρους κύκλους, που έχουν διαφορετικές ακτίνες. **Το εμβαδόν του δακτυλίου** ισούται με $E_{κ.δ.} = \pi \cdot \rho_2^2 - \pi \cdot \rho_1^2$ ή

$$\boxed{E_{κ.δ.} = \pi \cdot \left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)}$$



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ένα σύρμα έχει μήκος 94,2cm και το λυγίζουμε ώστε να σχηματιστεί κύκλος. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Από τον τύπο του μήκους κύκλου $L = 2\pi\rho$ έχουμε

$94{,}2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho$ ή $94{,}2 = 6{,}28 \cdot \rho$ ή $\rho = \dfrac{94{,}2}{6{,}28}$ ή $\rho = 15$cm

Άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι $E = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 15^2 = 3{,}14 \cdot 225 = 706{,}5cm^2$.

2) Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι $50{,}24cm^2$. Να βρείτε την ακτίνα του και το μήκος του κύκλου.

Λύση

Από τον τύπο του εμβαδού κύκλου έχουμε:

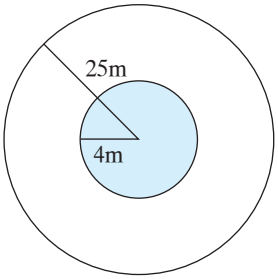
$E = \pi \cdot \rho^2$ ή $50{,}24 = 3{,}14 \cdot \rho^2$ ή $\rho^2 = \dfrac{50{,}24}{3{,}14}$ ή $\rho^2 = 16$

$P = \sqrt{16}$ ή $\rho = 4cm$.

Οπότε για το μήκος του κύκλου έχουμε:

$L = 2\pi \cdot \rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12cm$.

3) Μια κυκλική πλατεία έχει διάμετρο 50m. στο κέντρο της υπάρχει νησίδα πράσινου με ακτίνα 4m. Να υπολογίσετε πόσα m^2 είναι ελεύθερα για να περπατήσουν οι άνθρωποι.



Λύση

Το μέρος που μένει ελεύθερο είναι κυκλικός δακτύλιος με $\rho_1 = 4m$ και $\delta_2 = 50m$ ή $\rho_{2=25m}$

Οπότε $E_{κ.δ.} = \pi\left(\rho_2^2 - \rho_1^2\right)$

$E_{κ.δ.} = 3{,}14 \cdot (25^2 - 4^2)$

$E_{κ.δ.} = 3{,}14 \cdot (225 - 16) = 3{,}14 \cdot 209 = 656{,}26m^2$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Ακτίνα ρ κύκλου	2cm		
Μήκος L κύκλου		25,12cm	
Εμβαδόν Ε κύκλου			$153{,}86cm^2$

2) Έστω Ε το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα ρ. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα του κύκλου, τότε το εμβαδόν γίνεται:

Α: 2Ε Β: 4Ε Γ: 8Ε Δ: Ε
Να κυκλώσετε την σωστή απάντηση.

3) Αν το μήκος ενός κύκλου είναι L, τότε το εμβαδόν του είναι:

Α: $E = \frac{L^2}{4\pi}$ Β: $E = \frac{L^2}{2\pi}$ Γ: $E = \frac{2}{4\pi}$ Δ: $E = \frac{L}{2\pi}$

Να κυκλώσετε την σωστή απάντηση.

4) Ένας κύκλος έχει διάμετρο 4 cm, τότε ισχύει:
Α: $E = 2 \cdot L$ Β: $E = 4L$ Γ: $E = L$ Δ: $E = \frac{L}{2}$
Να κυκλώσετε την σωστή απάντηση.

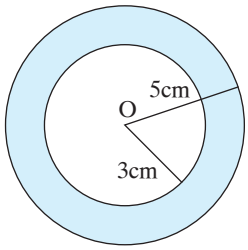
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το μήκος ενός κύκλου που έχει εμβαδόν 1256 cm^2.

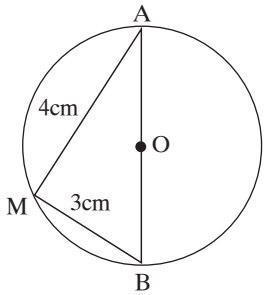
2. Υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κύκλου που έχει μήκος 81,64m.

3. Ένας κύκλος (Ο,ρ) έχει ακτίνα ρ = 3 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει οκταπλάσια επιφάνεια από τον κύκλο (Ο,ρ).

4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου. (ΜΑ=4 cm και ΜΒ= 3 cm)

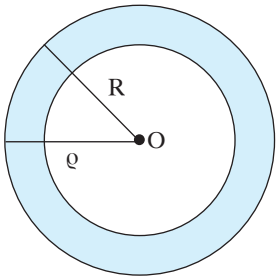


6. Ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει εμβαδόν 32cm^2. Να βρείτε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.

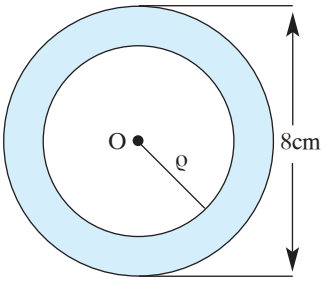
7. Ένας κύκλος είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο με πλευρά 16cm. Να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.

8. Ένας κύκλος με εμβαδόν 615,44cm^2 είναι εγγεγραμμένος σε τετράγωνο. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετράγωνου.

9. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δακτυλίου ισούται με το εμβαδόν του μικρού κύκλου. Αν η ακτίνα του μικρού κύκλου είναι $\rho = 5 \cdot \sqrt{2}$cm, να βρεθεί η ακτίνα R του μικρού κύκλου.

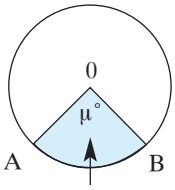


10. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του μικρού κύκλου αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του δακτυλίου.



3.6 ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

Κυκλικός τομέας είναι το μέρος ενός κυκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και τις ακτίνες OA και OB που καταλήγουν στα άκρα του τόξου.



Κυκλικός τομέας

Το εμβαδόν $E_{κ.τ.}$ κυκλικού τομέα γωνίας μ° κύκλου ακτίνας ρ είναι:

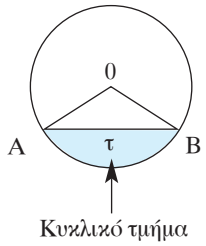
$$E_{κ.τ.} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0}$$

Αν το τόξο είναι μετρημένο σε ακτίνια α rad τότε είναι:

$$E_{κ.τ.} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \rho^2$$

Κυκλικό τμήμα

Κυκλικό τμήμα είναι το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και την αντίστοιχη χορδή του ΑΒ.
Για να βρούμε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος τ, αφαιρούμε από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{AB}$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ



$E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = E_{\text{κυκλικού τομέα}} - E_{\text{τριγώνου}}$ ή

$\tau = E_{(O\overset{\frown}{AB})} - E_{(O\hat{A}B)}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Σε έναν κύκλο που έχει μήκος 94,2 cm, να βρείτε να βρείτε το εμβαδόν κυκλικού τομέα γωνίας 120°.

Λύση

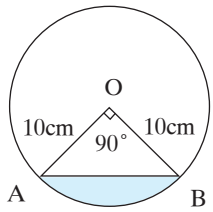
Από τον τύπο του μήκους κύκλου έχουμε:
$L = 2\pi \cdot \rho$ ή $94{,}2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho$ ή $94{,}2 = 6{,}28 \cdot \rho$ ή

$$\rho = \frac{94{,}2}{6{,}28} \quad \text{ή} \quad \rho = 15\text{cm}$$

Οπότε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι:

$$E_{\text{κ.τ.}} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0} = \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 120^0}{360^0} = 235{,}5\text{cm}^2.$$

2) Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περικλείεται από το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ και τη χορδή ΑΒ.



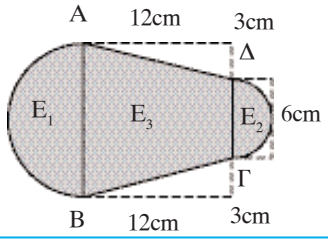
Λύση

Έχουμε: $E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = E_{\text{κυκλικού τομέα}} - E_{O\hat{A}B}$

$$= \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0} - \frac{OA \cdot OB}{2}$$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 90^0}{360^0} - \frac{10 \cdot 10}{2}$$
$$= 78{,}5 - 50$$
$$= 28{,}5\text{cm}^2$$

3) Χωρίο του διπλανού σχήματος αποτελείται από δύο ημικύκλια και ένα ισοσκελές τραπέζιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.



Λύση

Επειδή ΑΒ = 12 cm, η ακτίνα του ημικύκλιου E_1 είναι 6 cm οπότε

$$E_1 = \frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 180^0}{360^0} = 56{,}52\text{cm}^2$$

Ακόμα ΓΔ = 6cm, άρα η ακτίνα του ημικυκλίου E_2 είναι 3cm οπότε

$$E_2 = \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 180^0}{360^0} = 14{,}13\text{cm}^2$$

Το εμβαδόν του τραπεζίου E_3 ισούται με

$$E_3 = \frac{(B+\beta) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(12+6) \cdot 12}{2} = 18 \cdot 6 = 108\text{cm}^2$$

Άρα $E_{\text{γραμμοσκιασμένου}} = E_1 + E_2 + E_3 = 56{,}52 + 14{,}13 + 108 = 178{,}65\ \text{cm}^2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Η διάμετρος ενός κύκλου είναι 16cm. Ένας κυκλικός τομέας γωνίας 45° έχει εμβαδόν:
Α: 8π (cm²) Β: 16π (cm²) Γ: 24π (cm²) Δ: 32π (cm²)
Να κύκλώσετε τη σωστή απάντηση.

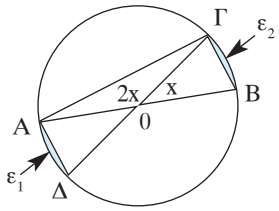
2) Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα είναι 4,71cm² και η ακτίνα του κύκλου είναι 3cm, τότε η γωνία μ° είναι:
Α: 90° Β: 45° Γ: 60° Δ: 120°
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

3) Αν διπλασιάσουμε τη γωνία μ° ενός κυκλικού τομέα, τότε το εμβαδόν του Ε γίνεται:

Α: 4Ε Β: $\frac{E}{2}$ Γ: Ε Δ: 2Ε

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

4) Με βάση το διπλανό σχήμα να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες.



α) $E_{(O\widehat{A\Delta})} - E_{(O\widehat{\Gamma B})}$ Σ Λ

β) $E_{(O\widehat{A\Delta})} - E_{(O\widehat{A\Gamma})}$ Σ Λ

γ) $E_{(O\widehat{A\Gamma})} - E_{(O\widehat{A\Delta})}$ Σ Λ

δ) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ Σ Λ

ε) $E_{(O\hat{A}\Delta)} - E_{(O\hat{A}\Gamma)}$ Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ένας κυκλικός τομέας έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{1}{10}$ του εμβαδού του κύκλου. Να βρείτε τη γωνία του κυκλικού τομέα.

2. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα 120° είναι 84,78cm². Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου και την ακτίνα του αντίστοιχου τόξου.

3. Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 1519,76cm². Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας 72°.

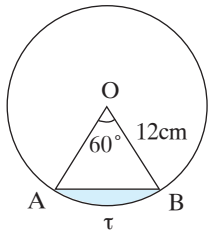
4. Το μήκος ενός τόξου 30° ενός κύκλου είναι $L_{\widehat{AB}} = \frac{2\pi}{3}$cm. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού τομέα.

5. Σε έναν κύκλο με ακτίνα 12 cm να πάρετε ένα τόξο $\widehat{AB} = 60°$. Να υπολογίσετε:

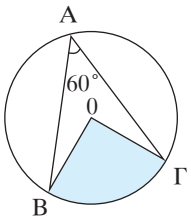
α) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\widehat{AB}$

β) Το εμβαδόν του τριγώνου $O\hat{A}B$

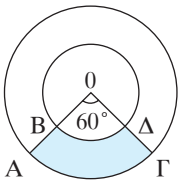
γ) Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος τ.



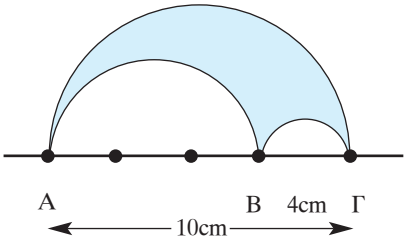
6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε κύκλο (Ο,10cm) και εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma = 60^\circ$. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{B\Gamma}$.



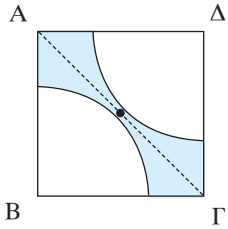
7. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες $\rho_1 = 5cm$ και $\rho_2 = 12cm$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του χωρίου ΑΒΔΓ.



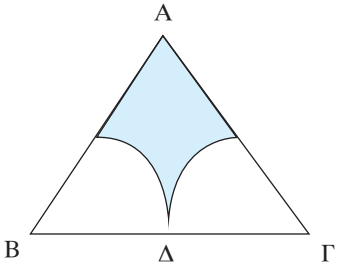
8. Να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος.(ΑΓ = 10cm, ΒΓ = 4cm).



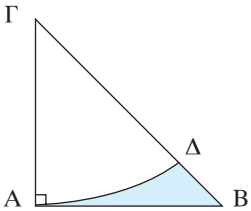
9. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του σχήματος εάν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $5\sqrt{2}$cm.



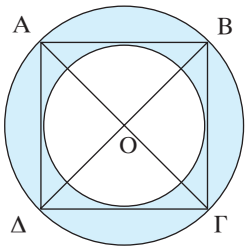
10. Υπολογίσετε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του σχήματος, εάν γνωρίζετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 cm.



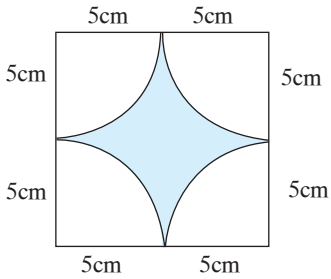
11. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΒ = ΑΓ = 6 cm. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



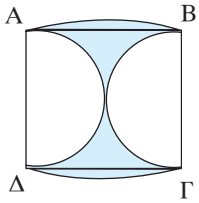
12. Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο και περιγεγραμμένο σε δύο ομόκεντρους κύκλους όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η πλευρά του τετράγωνου είναι $\alpha = 10\sqrt{2}\text{cm}$, να υπολογίσετε:
α) Τις ακτίνες των δύο κύκλων.
β) Το εμβαδόν των δύο κύκλων.
γ) Το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζουν οι δύο κύκλοι.



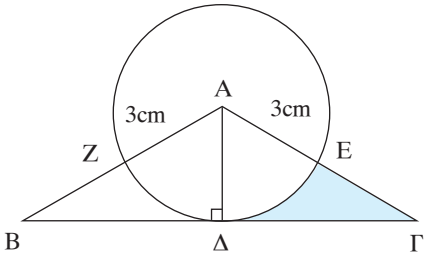
13. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.



14. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος εάν γνωρίζετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm.



15. Στο ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\widehat{\text{Α}} = 120^\circ$, το ΑΔ είναι ύψος του και ΑΕ = 3 cm. Με κέντρο το Α και ρ = ΑΔ γράφουμε κύκλο.
α) Να υπολογίσετε το μήκος του ΔΓ.
β) Αν $\text{ΒΓ} = 6\sqrt{3}\text{cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου. $(\sqrt{3} = 1,7)$.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α) Ποια γωνία ονομάζεται εγγεγραμένη;

β) Ποια σχέση συνδέει μια εγγεγραμμένη και μια επίκεντρη γωνία, που βαίνουν στο ίδιο τόξο;

γ) Να κάνετε την αντιστοίχηση στα τόξα και τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες:

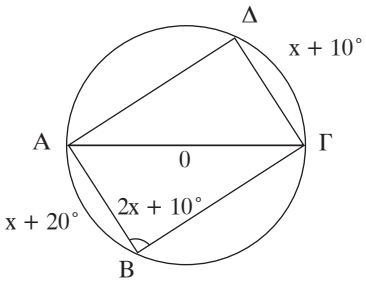
Τόξο	**Επίκεντρη γωνία**
Ημικύκλιο	90°
Τεταρτοκύκλιο	360°
Κύκλος	180°
$\frac{1}{8}$ του κύκλου	60°
	45°

Θέμα 2

Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

$(A\hat{B}\Gamma = 2x + 10^0, \widehat{\Delta\Gamma} = x + 10^0,$

$\widehat{AB} = x + 20^0)$

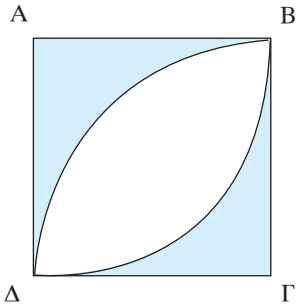


Θέμα 3

Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 62,8 cm. Το ίδιο ισχύει και για το μήκος ενός κύκλου. Ποιο από τα δύο σχήματα έχει μεγαλύτερο εμβαδόν;

Θέμα 4

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς 12cm. Να υπολογίσετε να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

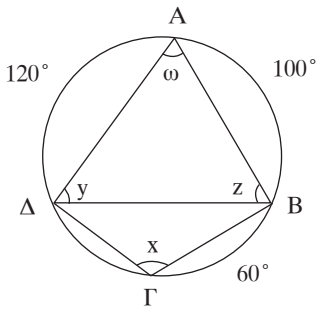
α) Πιο πολύγωνο ονομάζεται κανονικό;

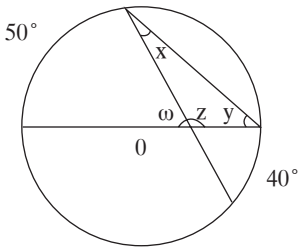
β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	3		6	
γωνία κανονικού πολυγώνου				140°
κεντρική γωνία κανονικού πολυγώνου		72°		

Θέμα 2

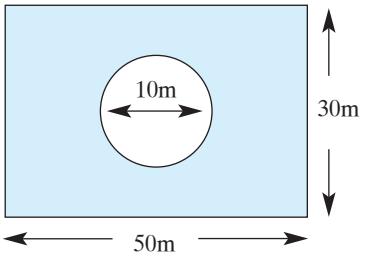
Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, z και ω στα παρακάτω σχήματα:





Θέμα 3

Η επιφάνει που φαίνεται στο διπλανό σχήμα θα σπαρθεί με σπόρους εκτός του κυκλικού δίσκου. Πόσα κιλά σπόροι απαιτούνται, αν για κάθε $10m^2$ χρειαζόμαστε 1 κιλό;



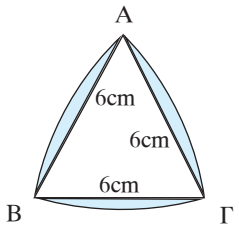
Θέμα 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α= 6 cm. Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα 6 cm σχηματίζουμε τα τόξα $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma}$. όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

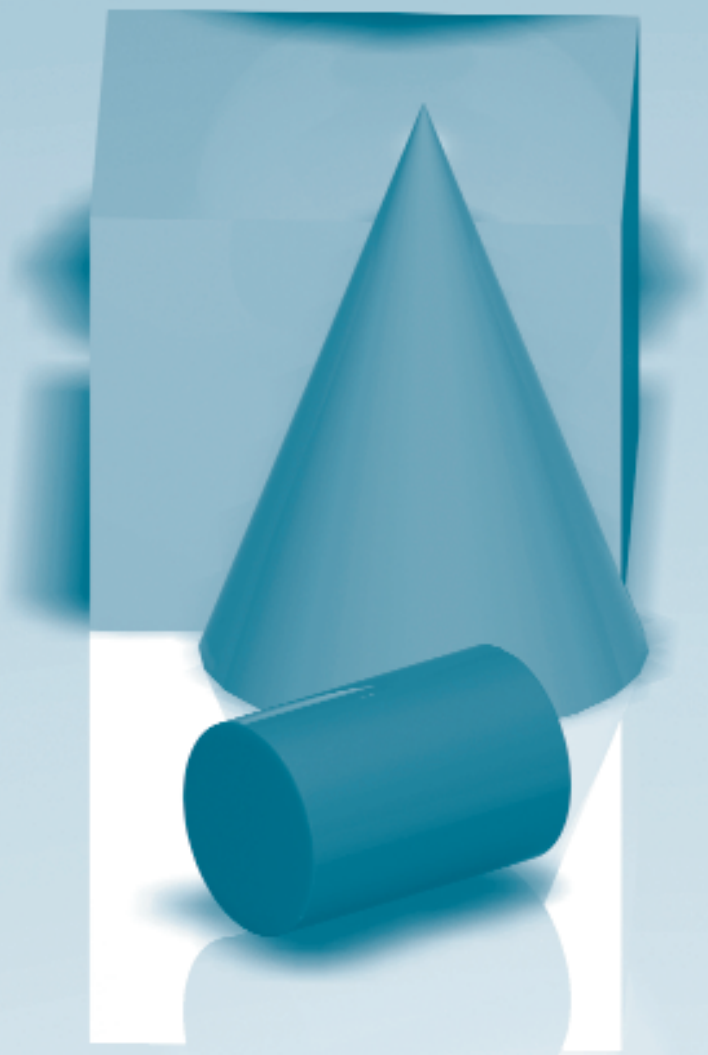
α) Να υπολογίσετε το μήκος των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma}$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



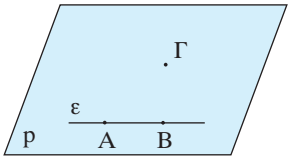
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο



4.1 ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

- Η επιφάνεια του μαυροπίνακα, ενός τραπεζιού, ενός λείου πατώματος μας δίνουν την αίσθηση του **επιπέδου**. Το **επίπεδο** επεκτείνεται απεριόριστα και για να το παραστήσουμε σχεδιάζουμε ένα παραλληλόγραμμο που το ονομάζουμε με ένα από τα μικρά του αγγλικού αλφαβήτου (p, q, r).

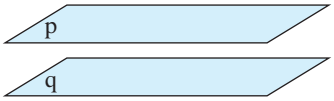
- Όπως ξέρουμε από δύο σημεία Α και Β διέρχεται μοναδική ευθεία ε. Αν θεωρήσουμε ένα τρίτο σημείο Γ που δεν ανήκει στη ευθεία ε, τότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ ορίζουν ένα επίπεδο p.



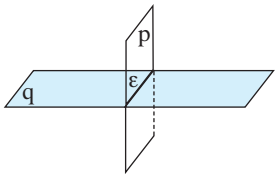
Από τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, διέρχεται μόνο ένα επίπεδο.

- **<u>Σχετικές θέσεις δύο επιπέδων</u>**

– Δύο επίπεδα λέγονται **παράλληλα** όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



– Όταν δύο επίπεδα **τέμνονται**, τότε όλα τα κοινά σημεία τους βρίσκονται σε μια ευθεία που λέγεται **τομή** των δύο επιπέδων.

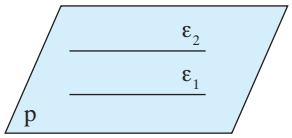


Οι δυνατές θέσεις δύο διαφορετικών επιπέδων είναι:
- **Να είναι παράλληλα .**
- **Να τέμνονται κατά μία ευθεία.**

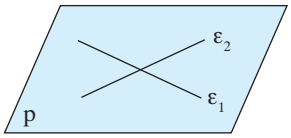
- **<u>Σχετικές θέσεις δύο ευθειών στο χώρο</u>**

Όταν έχουμε δύο διαφορετικές ευθείες $ε_1$ και $ε_2$, οι μόνες δυνατές θέσεις που μπορούν να έχουν είναι:

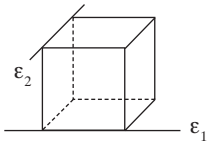
– Να είναι **παράλληλες**, δηλαδή να ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



– Να **τέμνονται**, δηλαδή να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

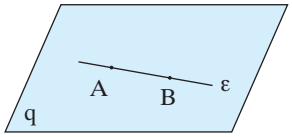


– Να είναι **ασύμβατες**, δηλαδή να ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα και να μην έχουν κανένα κοινό σημείο. Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες.

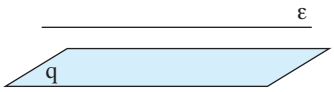


- **<u>Σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου</u>**
  Όταν έχουμε μία ευθεία ε και ένα επίπεδο q, οι δυνατές θέσεις είναι:

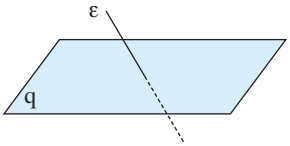
– Η ευθεία να **περιέχεται** στο επίπεδο, δηλαδή όλα τα σημεία της ευθείας ε στο ανήκουν επίπεδο q.



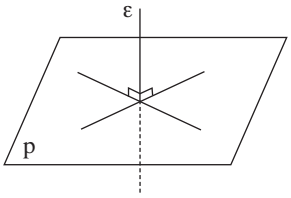
– Η ευθεία να είναι **παράλληλη** στο επίπεδο, δηλαδή να μην έχει κανένα κοινό σημείο με το επίπεδο q.



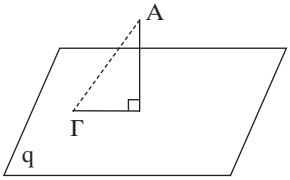
– Η ευθεία να **τέμνει** το επίπεδο σε ένα σημείο, που ονομάζεται **ίχνος** της ευθείας ε στο επίπεδο q.



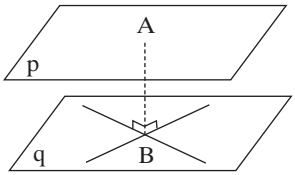
- **<u>Ευθεία κάθετη σε επίπεδο</u>**
  Μια ευθεία είναι **κάθετη** σε ένα επίπεδο, όταν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του που διέρχονται από το ίχνος της.



- **<u>Απόσταση σημείου από επίπεδο</u>**
  Απόσταση ενός σημείου Α από ένα επίπεδο q, ονομάζεται το **κάθετο** ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, που φέρουμε από το Α στο επίπεδο q. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.

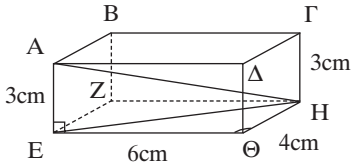


- **<u>Απόσταση παράλληλων επιπέδων</u>**
  Απόσταση των παράλληλων επιπέδων p και q, ονομάζεται η απόσταση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου p από το επίπεδο q.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΑΗ.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΘΗ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε

$EH^2 = E\Theta^2 + \Theta H^2$

$EH^2 = 6^2 + 4^2$

$EH^2 = 36 + 16$

$EH^2 = 52$

$EH = \sqrt{52}cm$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα, οπότε

$AH^2=AE^2+EH^2$

$AH^2=3^2+(\sqrt{52})^2$

$AH^2=9+52$

$AH2=61$

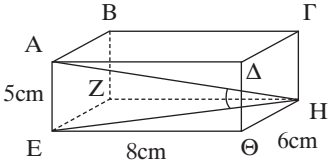
$AH=\sqrt{61}cm$

2) Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογιστεί:

α) το ΕΗ

β) το ΑΗ

γ) η γωνία $E\hat{H}A$



Λύση

α) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΘΗ, έχουμε:

$EH^2 = E\Theta^2 + \Theta H^2$ ή $EH^2 = 8^2 + 6^2$ ή $EH^2 = 64 + 36$

$EH^2 = 100$ ή $EH= \sqrt{100}$ ή $EH = 10cm$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ έχουμε:

$AH^2 = AE^2 + EH^2$ ή $AH^2 = 5^2 + 10^2$ ή $AH^2 = 25 + 100$

$AH^2=125$ ή $AH= \sqrt{125} \cong 11,18$ cm.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΗ έχουμε:

$$\varepsilon\varphi\, A\hat{H}E = \frac{AE}{EH} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες έχουμε ότι $A\hat{H}E \cong 27^0$.

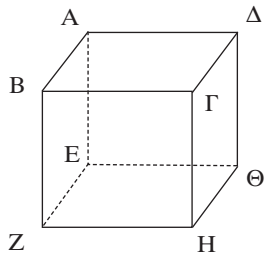
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

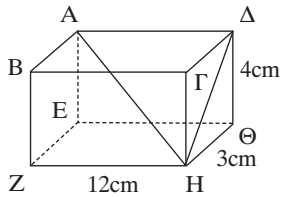
1) Από τρία διαφορετικά σημεία που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία διέρχεται μόνο ένα επίπεδο. Σ Λ
2) Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχονται δύο μόνο επίπεδα. Σ Λ
3) Υπάρχει περίπτωση μία ευθεία και ένα επίπεδο να έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία. Σ Λ
4) Μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, αν είναι κάθετη σε δύο ευθείες του επιπέδου, που διέρχονται από το ίχνος της. Σ Λ
5) Απόσταση δύο παραλλήλων επιπέδων ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματοςπου έχει τα άκρα του στα δύο επίπεδα. Σ Λ
6) Δύο ευθείες που βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα είναι παράλληλες. Σ Λ
7) Δύο ευθείες που είναι κάθετες προς μία ευθεία ενός επιπέδου p, είναι μεταξύ τους παράλληλες. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

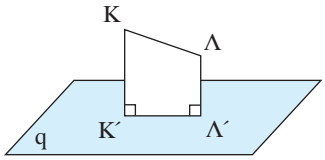
1. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να βρείτε ευθείες που είναι:
α) παράλληλες στην ΑΒ
β) κάθετες στη ΔΓ
γ) ασύμβατες με τη ΑΕ.



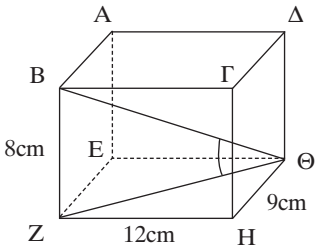
2. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε το ΔΗ και το ΑΗ.



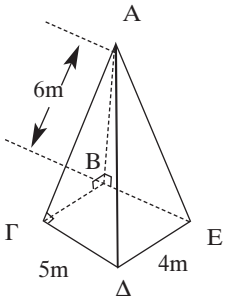
3. Οι αποστάσεις των σημείων Κ, Λ από το επίπεδο q είναι ΚΚ΄=17 cm και ΛΛ΄=12cm. Αν Κ΄Λ΄=12 cm, να υπολογίσετε το ΚΛ.



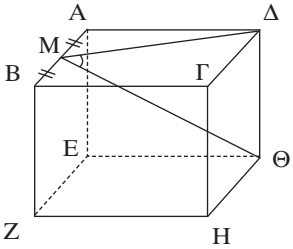
4. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε:
α) το ΖΘ
β) το ΒΘ
γ) τη γωνία $Z\widehat{\Theta}B$.



5. Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα μέρος από την οροφή ενός κτιρίου.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι κάθετο στο επίπεδο ΒΓΔΕ.
Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΑΔ, και ΑΕ.



6. Στο διπλανό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο να υπολογίσετε τη γωνία $B\widehat{M}Z$, αν Μ είναι το μέσο του ΑΔ.
(ΑΒ = 18cm, ΒΖ = 10cm, ΑΔ = 28cm)

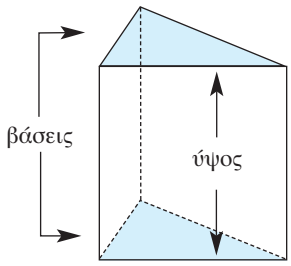


4.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

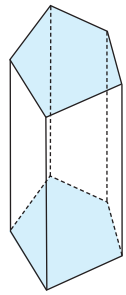
- **Ορθό πρίσμα** ονομάζεται το στερεό που έχει δύο έδρες παράλληλες, που είναι ίσα πολύγωνα, και τις άλλες έδρες ορθογώνια παραλληλόγραμμα και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**. Οι δύο παράλληλες έδρες του λέγονται **βάσεις** του πρίσματος,
  Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την παράπλευρη επιφάνεια του

πρίσματος. Τα ύψος μιας παράπλευρης έδρας ή αλλιώς η **απόσταση** των δύο βάσεων, λέγεται **ύψος του πρίσματος**.
Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.
Αν οι βάσεις του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο κ.ο.κ. τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ.

Τριγωνικό πρίσμα



Πενταγωνικό πρίσμα



Εμβαδόν επιφάνειας πρίσματος

- Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος.

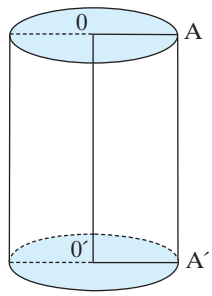
$$E_{\pi} = (\text{περίμετρος βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

- Το ολικό εμβαδόν ενός πρίσματος είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας και των εμβαδών των δύο βάσεων.

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$$

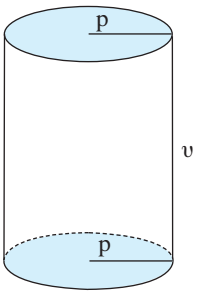
Κύλινδρος

Ένας **κύλινδρος** μπορεί να προκύψει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου ΟΟΆΆ΄ γύρω από μια πλευρά του, την ΟΟ΄. Οι κυκλικοί δίσκοι που δημιουργούνται από την περιστροφή των ΟΑ και Ο΄Α΄ λέγονται **βάσεις του κυλίνδρου**. Η περιστροφή της ΑΆ δημιουργεί την **κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου**. Η πλευρά ΑΆ λέγεται **γενέτειρα** του κυλίνδρου και ισούται με το **ύψος** του, δηλαδή την απόσταση των δύο βάσεων.



Εμβαδόν επιφάνειας κυλίνδρου

Αν ρ είναι η ακτίνα των βάσεων και υ το ύψος του κυλίνδρου, τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου είναι:



$$\boxed{\mathbf{E_{\pi} = 2\pi\rho \cdot \upsilon}}$$

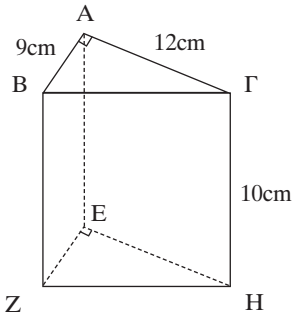
Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι:

$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$ ή

$$\boxed{\mathbf{E_{ολ} = 2\pi\rho \cdot \upsilon = 2\pi\rho^2}}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του διπλανού τριγωνικού πρίσματος ΑΒΓΕΖΗ, όταν ΑΒ=9 cm, ΑΓ=12cm και το ύψος του είναι ίσο με 10cm.



Λύση

Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90^0)$ και έχουμε:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$B\Gamma^2 = 9^2 + 12^2$

$B\Gamma^2 = 81 + 144$

$B\Gamma^2 = 225$

$B\Gamma = 15$ cm

Οπότε: E_{π} = (περίμετρος βάσης) · (ύψος)

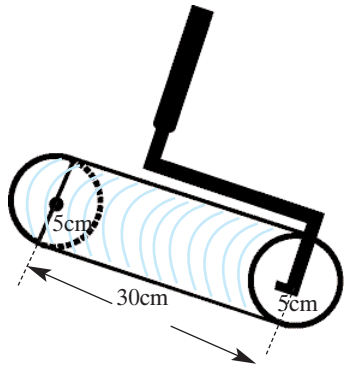
$E_{\pi} = (9+12+15) \cdot 10$

$E_{\pi} = 36 \cdot 10 = 360$ cm^2

και

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 360 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 12}{2} = 360 + 108 = 468 \text{ cm}^2.$$

2) Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα κυλινδρικό ρολό βαψίματος. Να βρείτε πόση επιφάνεια βάφει σε μια πλήρη περιστροφή και πόσες περιστροφές τουλάχιστον θα κάνει για να βάψει ένα τοίχο με διαστάσεις 5m και 3m.



Λύση

Σε μια πλήρη περιστροφή το ρολό βάφει επιφάνεια όση είναι η παράπλευρη επιφάνειά του, οπότε:

$$E_{\pi} = 2\pi\rho \cdot \upsilon = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 30 = 942\text{cm}^2 = 0{,}0942\text{m}^2$$

Η επιφάνεια του τοίχου είναι: $E = 5 \cdot 3 = 15\text{m}^2$

Άρα οι περιστροφές τουλάχιστον που θα κάνει για να βάψει τον τοίχο είναι: $15 : 0{,}0942 \cong 159$ στροφές.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1) Ένα πρίσμα με βάση τρίγωνο έχει:

α) Α: 5 έδρες Β: 6 έδρες Γ: 7 έδρες

β) Α: 8 κορυφές Β: 6 κορυφές Γ: 9 κορυφές

γ) Α: 12 ακμές Β: 9 ακμές Γ: 6 ακμές

2) Σε ένα ορθό πρίσμα η βάση του είναι ορθογώνιο με μήκος 8cm και πλάτος 5cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 9cm, τότε:

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 117cm^2 Β: 162cm^2 Γ: 234cm^2

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 314cm^2 Β: 242cm^2 Γ: 157cm^2

3) Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 10cm και ύψος 10cm.

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 314cm^2 Β: 942cm^2 Γ: 628cm^2

β) Το ολικό εμβαδόν του είναι:

Α: 1256cm^2 Β: 628cm^2 Γ: 1884cm^2

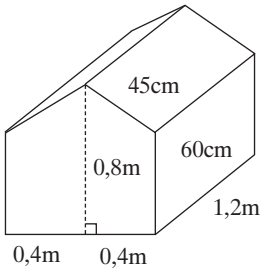
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε την ολική επιφάνεια ενός κιβωτίου σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου που έχει διαστάσεις μήκος 80cm, πλάτος 40cm και ύψος 30cm.

2. Μια πισίνα έχει διαστάσεις 25m μήκος, 15m πλάτος και 2,5m ύψος. Να βρείτε:
α) Την εσωτερική επιφάνεια της πισίνας
β) Πόσα τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 25cm χρειαζόμαστε για να την επενδύσουμε εσωτερικά και πόσο θα μας κοστίσει αν κάθε πλακάκι στοιχίζει 0,30€.

3. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο είναι $E_{\pi}=192cm^2$ και το ύψος του είναι 8cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος.

4. Το σπιτάκι ενός σκύλου είναι κατασκευασμένο από ξύλο (μαζί με το δάπεδο) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πόσο κοστίζει η κατασκευή του, αν το $1m^2$ ξύλο κοστίζει 15€.



5. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου που έχει ύψος 16cm και ακτίνα βάσης 8cm.

6. Το μήκος της βάσης κυλίνδρου είναι 50,24cm και το ύψος του είναι 20cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

7. Να υπολογίσετε πόσο πρέπει να πληρώσουμε, για να βάψουμε εξωτερικά 50 σωλήνες, που έχουν ο καθένας μήκος 1,50m και εξωτερική διάμετρο 0,20m εάν για το βάψιμο πληρώσουμε 3€ το $1m^2$.

8. Να βρεθεί το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας και το ολικό εμβαδόν ενός κυλίνδρου, όταν:
α) Έχει ακτίνα βάσης 4m και ύψος 3m.
β) Έχει περίμετρο βάσης 37,68cm και ύψος 12cm.
γ) Έχει εμβαδόν βάσης 78,5 cm^2 και ύψος 10cm.

9. Θέλουμε να κατασκευάσουμε 1000 κυλινδρικά βαρέλια με ύψος 1,2m και διάμετρο 80cm. Πόσο θα μας κοστίσει, αν έχουμε κατά το κόψιμο της λαμαρίνας απώλεια 10% και το $1m^2$ λαμαρίνας κοστίζει 1,5€;

10. Μια μηχανή που "κουρεύει" το χόρτο έχει κυλινδρικό σχήμα με διάμετρο βάσης 30cm και ύψος 60cm.

α) Να βρείτε πόση επιφάνεια χόρτου κουρεύει σε μια πλήρη περιστροφή.

β) Έχουμε ένα κήπο με διαστάσεις 10m και 18m. Να βρείτε πόσες περιστροφές τουλάχιστον θα κάνει για να κουρέψει το χόρτο του κήπου.

4.3 ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

Αν έχουμε ένα στερεό σώμα και ένα κύβο με ακμή μήκους μία μονάδα, τότε ο θετικός αριθμός που δηλώνει πόσες φορές ο κύβος ή μέρος του κύβου χωράει στο στερεό σώμα λέγεται **όγκος του σώματος**.

Μονάδες μέτρησης όγκου

Η κυριότερη μονάδα μέτρησης όγκου είναι το **κυβικό μέτρο (m^3)**, που είναι ο κύβος με ακμή 1m.

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

	Ονομασία	**Σύμβολο**	**Σχέση με το κυβικό μέτρο**
	Κυβικό μέτρο	m^3	
Υποδιαιρέσεις του κυβικού μέτρου	Κυβικό δεκατόμετρο	dm^3	$1dm^3 = 0,001m^3$
	Κυβικό εκατοστόμετρο	cm^3	$1cm^3 = 0,000001m^3$
	Κυβικό χιλιοστόμετρο	mm^3	$1mm^3 = 0,000000001m^3$

Τον όγκο των υγρών συνηθίζουμε να τον μετράμε με το **λίτρο ℓ** ($1L=1dm^3$) και το **χιλιοστόλιτρο mℓ** ($1ml=1cm^3$).

Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

- Ο **όγκος** ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος.

V= (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος)

- Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος.

$V_κ$ = (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος) ή $V=π \cdot ρ^2 \cdot υ$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου με διάμετρο βάσης 8cm και ύψος 12cm.

Λύση

Επειδή η διάμετρος της βάσης είναι δ = 8cm, η ακτίνα είναι ρ = 4cm.
Έχουμε:

$$V=πρ^2 \cdot υ = 3,14 \cdot 4^2 \cdot 12 = 602,88cm^3.$$

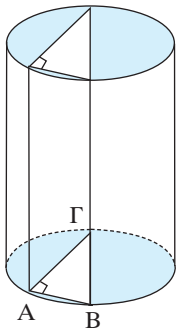
2) Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου με περίμετρο βάσης 87,92 cm και ύψος 10cm.

Λύση

Από τον τύπο L = 2πρ έχουμε
$87,92 = 2 \cdot 3,14 \cdot ρ$ ή $87,92 = 6,28 \cdot ρ$ ή $ρ = \frac{87,92}{6,28} = 14cm.$
Οπότε

$$V = πρ^2 \cdot υ = 3.14 \cdot 14^2 \cdot 10 = 6.154,4cm^3.$$

3) Ένα πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$ με ΑΒ = 6cm, ΑΓ = 8cm και είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο με ύψος 20cm. Να βρείτε:
α) την ακτίνα βάσης του κυλίνδρου
β) τον όγκο του κυλίνδρου
γ) τον όγκο του πρίσματος
δ) τον όγκο που βρίσκεται έξω από το πρίσμα και μέσα στον κύλινδρο.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^0)$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $ΒΓ^2 = 6^2 + 8^2$ ή $ΒΓ^2 = 36 + 64$
$ΒΓ^2 = 100$ ή $ΒΓ = \sqrt{100}$ ή ΒΓ = 10cm.

Επειδή η γωνία $\hat{A} = 90^0$ είναι εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου, βαίνει σε

ημικύκλιο, δηλαδή η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου. Οπότε δ=ΒΓ=10 άρα ρ=5cm.

β) Ο όγκος κυλίνδρου ισούται με:

$$V_{\kappa} = \pi \cdot \rho^2 \cdot \upsilon = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 20 = 1570\ cm^3.$$

γ) Ο όγκος του πρίσματος ισούται με:

$$V = (\text{εμβαδόν βάσης}) \cdot (\text{ύψος})$$

$$V = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 20 = 480 cm^3$$

δ) Ο όγκος που βρίσκεται έξω από το πρίσμα και μέσα στον κύλινδρο ισούται με:

$$V = 1570 - 480 = 1090 cm^3.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, που αναφέρεται στο εμβαδόν βάσης, στο ύψος και στον όγκο πρίσματος.

Εμβαδόν βάσης	$25cm^2$	$16cm^2$	
Ύψος	4cm		50cm
Όγκος		$144cm^3$	$160dm^3$

2) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, που αναφέρεται στο εμβαδόν βάσης, στο ύψος και στον όγκο κυλίνδρου.

Εμβαδόν βάσης	$25\pi\ cm^2$	$49\pi\ cm^2$	
Ύψος	8cm		4cm
Όγκος		$294\pi\ cm^3$	$314cm^3$

3) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη).

α) Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός κυλίνδρου τότε ο όγκος του διπλασιάζεται Σ Λ

β) Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα της βάσης ενός κυλίνδρου τότε ο όγκος τριπλασιάζεται Σ Λ

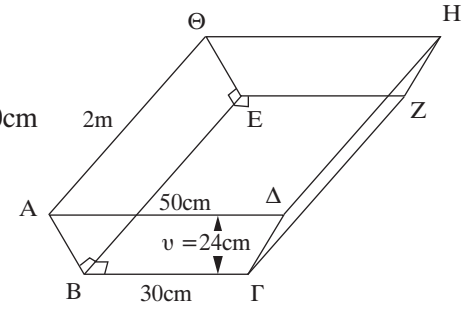
γ) Ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = 2\pi\rho \cdot \upsilon$ Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται πρίσμα με βάση τετράγωνο. Αν γνωρίζετε ότι το ύψος του είναι πενταπλάσιο από την πλευρά του τετραγώνου και ο όγκος του είναι $135cm^3$, να υπολογίσετε:
α) την πλευρά του τετραγώνου
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

2. Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 12cm και ΑΓ = 16cm έχει ύψος ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:
α) την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος
γ) τον όγκο του πρίσματος.

3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα μεταλλικό δοχείο που βάζουμε την τροφή των ζώων. Οι διαστάσεις του είναι ΑΘ = 2m, υ = 24cm, ΑΔ = 50cm και ΒΓ = 30cm. Να υπολογίσετε:
α) τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ
β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
γ) τον όγκο του.



4. Δίνεται τριγωνικό πρίσμα με βάση ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ = 5cm) και το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσο με 4cm. Αν το ύψος του πρίσματος είναι 15cm, να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
β) τον όγκο του.

5. Να βρείτε τον όγκο κυλίνδρου ο οποίος έχει:
α) ακτίνα βάσης 30 cm και ύψος 0,8m
β) περίμετρο βάσης 942mm και ύψος 0,4m.

6. Η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου έχει εμβαδόν $452,16cm^2$ και το ύψος του είναι 24cm. Να βρείτε τον όγκο του.

7. Μια μοτοσυκλέτα έχει δικύλινδρη μηχανή. Η εσωτερική διάμετρος κάθε

κυλίνδρου είναι 70mm και το ύψος του κάθε κυλίνδρου είναι 100mm. Να βρείτε τον κυβισμό της μοτοσυκλέτας, δηλαδή τον όγκο των δύο κυλίνδρων μαζί.

8. Να βρείτε τον όγκο ενός κυλίνδρου, αν η ακτίνα της βάσης του είναι διπλάσια του ύψους του και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του ισούται με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας 10cm.

9. Ένα πηγάδι κυλινδρικού σχήματος έχει βάθος 8m. Να υπολογίσετε τον όγκο της λιθοδομής του, αν η εσωτερική διάμετρος του πηγαδιού είναι 3m και το πάχος του 2,5dm.

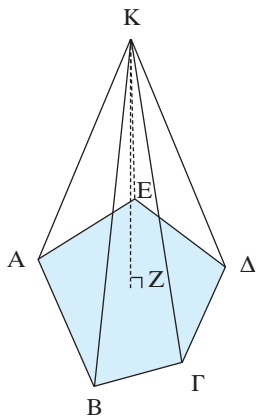
4.4 ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

- **Πυραμίδα** λέγεται το **στερεό**, που μία έδρα του είναι πολύγωνο και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή.

Τα στοιχεία της πυραμίδας

Στο διπλανό σχήμα έχουμε μια πυραμίδα με μία έδρα το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ.

- Το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ ονομάζεται βάση της πυραμίδας.
- Τα τρίγωνα ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΕ και ΚΕΑ ονομάζονται παράπλευρες έδρες της πυραμίδας.
- Κορυφή της πυραμίδας ονομάζεται το κοινό σημείο Κ των παράπλευρων εδρών.
- Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΖ ονομάζεται ύψος της πυραμίδας και είναι η απόσταση της κορυφής από τη βάση.
- Μια πυραμίδα που έχει ως βάση ένα τρίγωνο, λέγεται τριγωνική πυραμίδα και επειδή έχει τέσσερις τριγωνικές έδρες, τη λέμε και τετράεδρο.



- Τετραπλευρική, πενταγωνική κτλ. Λέγεται η πυραμίδα που έχει βάση τετράπλευρο, πεντάγωνο κτλ.

Κανονική πυραμίδα

Κανονική λέγεται μια **πυραμίδα** που η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο, οπότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται **απόστημα της κανονικής πυραμίδας**.

Εμβαδόν επιφάνειας κανονικής πυραμίδας

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής πυραμίδας ισούται με:

$$E_{\pi} = \frac{1}{2}\,(\textbf{περίμετρος βάσης}) \cdot (\textbf{απόστημα})$$

Οπότε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας μιας πυραμίδας είναι

$$E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$$

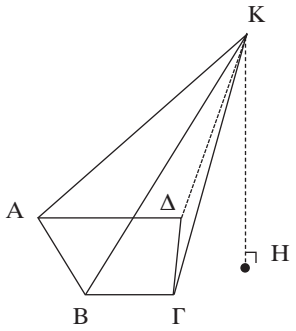
Όγκος πυραμίδας

Ο **όγκος** της πυραμίδας ισούται με:

$$V = \frac{1}{3}\,(\textbf{Εμβαδόν βάσης}) \cdot (\textbf{ύψος})$$

Παρατηρήσεις - Σχόλια

Το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας, δηλαδή έξω από τη βάση της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

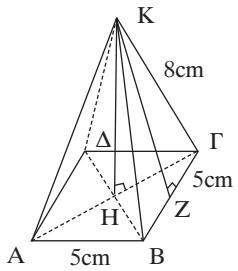
1) Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση κανονικό οκτάγωνο με πλευρά 8cm. Αν το απόστημα της κανονικής πυραμίδας είναι 12cm, να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

Λύση

Από τον τύπο $E_{\pi} = \frac{1}{2}$ (περίμετρος βάσης) · (απόστημα) έχουμε

$E_{\pi} = \frac{1}{2}\,(8 \cdot 8) \cdot 12 = 384\text{cm}^2$.

2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας του διπλανού σχήματος.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $KZB\,(\hat{Z}=90^0)$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$KB^2 = KZ^2 + BZ^2$

$8^2 = KZ^2 + 2{,}5^2$ ή $KZ^2 = 64 - 6{,}25$ ή $KZ^2 = 57{,}75$

$KZ = \sqrt{57{,}75} \cong 7{,}6\text{cm}.$

Οπότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ισούται με:

$E_\pi = \frac{1}{2}$ (περίμετρος βάσης) · (απόστημα) $= \frac{1}{2}(4 \cdot 5) \cdot 7{,}6 = 76\text{cm}^2.$

Άρα το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας ισούται με:

$E_{ολ} = E_\pi + E_\beta = 76 + 5^2 = 101\text{cm}^2.$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\,(\hat{A}=90^0)$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$

$A\Gamma^2 = 5^2 + 5^2$ ή $A\Gamma^2 = 50$ ή $A\Gamma = \sqrt{50} \cong 7{,}1\text{cm}.$

Οπότε $AH = \frac{A\Gamma}{2} = \frac{7{,}1}{2} = 3{,}55\text{cm}.$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AHK\,(\hat{H}=90^0)$ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$AK^2 = KH^2 + AH^2$ ή $8^2 = KH^2 + 3{,}55^2$ ή

$KH^2 = 64 - 12{,}6025$ ή $KH^2 = 51{,}3975$ ή $KH = \sqrt{51{,}3975} \cong 7{,}2\text{cm}.$

Άρα ο όγκος της πυραμίδας ισούται με:

$V = \frac{1}{3}$ (Εμβαδόν βάσης) · (ύψος) $= \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 7{,}2 = 60\text{cm}.$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη).

α) Μια πενταγωνική πυραμίδα έχει πέντε έδρες. Σ Λ

β) Σε μία κανονική εξαγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες είναι ισόπλευρα τρίγωνα. Σ Λ

γ) Σε μία κανονική πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάντα στην πυραμίδα. Σ Λ

δ) Το απόστημα μιας πυραμίδας ισούται με το ύψος της. Σ Λ

ε) Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι ισοσκελή τρίγωνα. Σ Λ

στ) Αν έχουμε μια πυραμίδα και ένα πρίσμα με ίδια βάση και ίσα ύψη, τότε ο όγκος του πρίσματος είναι τριπλάσιος από τον όγκο της πυραμίδας. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 15cm και ύψος 20cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

2. Μια κανονική πενταγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 12cm και απόστημα 10cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

3. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και απόστημα 12cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας
β) της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας
γ) τον όγκο της.

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα που αναφέρεται στα στοιχεία κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας.

Ύψος			10cm
Πλευρά βάσης	8cm	12cm	
Απόστημα	10cm		12cm
Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας			$240cm^2$
Όγκος		$384cm^3$	

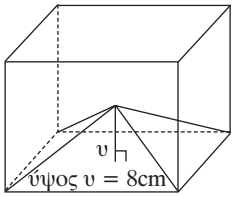
5. Να υπολογίσετε τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας που έχει πλευρά βάσης 16cm και παράπλευρη ακμή 17cm.

6. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όλες τις ακμές της ίσες με 5cm. (Ένα τέτοιο σχήμα λέγεται κανονικό τετράεδρο). Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας
β) τον όγκο του κανονικού τετραέδρου, αν το ύψος του είναι 4,1cm.

7. Δύο κανονικές τετραγωνικές πυραμίδες έχουν το ίδιο ύψος και η πλευρά βάσης της μίας είναι διπλάσια από την πλευρά βάσης της άλλης. Να βρείτε το λόγο των όγκων της.

8. Μια κανονική εξαγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8cm και παράπλευρη ακμή 10cm. Να υπολογίσετε:
α) το απόστημά της
β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας
γ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας
δ) τον όγκο της πυραμίδας.

9. Από έναν κύβο που έχει ακμή α = 12cm, αφαιρούμε μια πυραμίδα, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που απομένει.

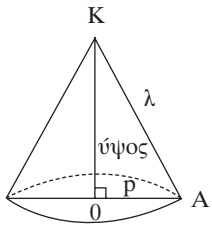


10. Πόσος είναι ο όγκος μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας αν τριπλασιάσουμε:
α) το ύψος της
β)την πλευρά της βάσης.

4.5 Ο ΚΩΝΟΣ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ

- **Κώνος** ονομάζεται το στερεό που προκύπτει από την περιστροφή ενός ορθογωνίου τριγώνου ΚΟΑ γύρω από μία κάθετη πλευρά του ΟΚ.

– **Βάση του κώνου** ονομάζεται ο κυκλικός δίσκος που δημιουργείται με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ. Η ακτίνα ΟΑ = ρ λέγεται **ακτίνα του κώνου**.
– **Ύψος** του κώνου ονομάζεται η απόσταση της **κορυφής Κ** του κώνου από τη βάση του, δηλαδή το ΚΟ.



– Η υποτείνουσα ΚΑ του ορθογωνίου τριγώνου λέγεται **γενέτειρα** του κώνου και το μήκος της συμβολίζεται με λ. Η περιστροφή της γενέτειρας ΚΑ δημιουργεί την παράπλευρη επιφάνεια του κώνου. Ισχύει: $\boxed{\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2}$

Εμβαδόν επιφάνειας κώνου

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου ισούται με :

$$\boxed{E_\pi = \pi \cdot \rho \cdot \lambda}$$

- Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου ισούται με:
  $E_{ολ} = E_{π} + E_{β}$ ή

$$\mathbf{E_{ολ} = π \cdot ρ \cdot λ + π \cdot ρ^2}$$

Όγκος κώνου

- Ο όγκος ενός κώνου ισούται με: $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης) · (ύψος) ή

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} πρ^2υ}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογίσετε τον όγκο ενός κώνου με γενέτειρα λ = 15cm και ύψος 9cm.

Λύση

Από τον τύπο του όγκου κώνου έχουμε: $V = \frac{1}{3} πρ^2 \cdot λ$ οπότε πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα την ακτίνα ρ.

Έχουμε $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $15^2 = 9^2 + ρ^2$ ή $ρ^2 = 15^2 - 9^2$

$ρ^2 = 225 - 81$ ή $ρ^2 = 144$ ή $ρ = \sqrt{144} = 12cm$.

Οπότε: $V = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 12^2 \cdot 9 = 1.356,48cm^3$.

2) Το εμβαδόν της βάσης ενός κώνου είναι $50,24cm^2$ και η γενέτειρά του 5cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του
β) τον όγκο του.

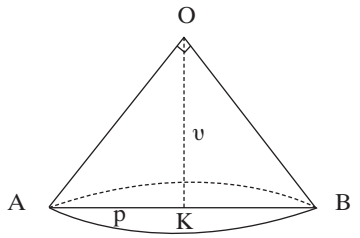
Λύση

α) Έχουμε: $E_{β} = πρ^2$ ή $50,24 = 3,14 \cdot ρ^2$ ή $ρ^2 = 16$ ή $ρ = 4cm$.
Από τον τύπο $E_{π} = π \cdot ρ \cdot λ$ έχουμε
$E_{π} = 3,14 \cdot 4 \cdot 5 = 62,8cm^2$

β) Από τον τύπο $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ προκύπτει
$υ^2 = λ^2 - ρ^2$ ή $υ^2 = 5^2 - 4^2$ ή $υ^2 = 25 - 16$ ή $υ^2 = 9$
$υ = \sqrt{9} = 3cm$.

Οπότε έχουμε: $V = \frac{1}{3} πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 3 = 50,24cm^3$.

3) Στον κώνο του διπλανού σχήματος η γωνία της κορυφής είναι ορθή και η γενέτειρα $\lambda = 3\sqrt{2}$cm. Να υπολογίσετε:
α) Την ακτίνα της βάσης του
β) Το ύψος του
γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας
δ) Τον όγκο του κώνου.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα:

$AB^2 = OA^2 + OB$ ή $AB^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$ ή $AB^2 = 18 + 18$

$AB^2 = 36$ ή $AB = 6$cm. Άρα $p = \dfrac{AB}{2} = 3$cm

β) Έχουμε $\lambda^2 = \upsilon^2 + p^2$ ή $(3\sqrt{2})^2 = \upsilon^2 + 3^2$ ή $\upsilon^2 = 18 - 9$
$\upsilon^2 = 9$ ή $\upsilon = 3$cm

γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι:

$E_{ολ} = E_{Π} + E_{β} = πρλ + πρ^2 = 3{,}14 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} + 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26 \cdot \sqrt{2} + 28{,}26\text{cm}^2$ ή $E_{ολ} = 28{,}26 \cdot (\sqrt{2}+1)\text{cm}^2$

δ) Ο όγκος του κώνου είναι:

$V = \dfrac{1}{3}\, πρ^2 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{3}\, 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 3 = 28{,}26\text{cm}^3$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ (σωστή) ή Λ (λάθος).

α) ισχύει η σχέση $\lambda^2 = \upsilon^2 - \rho^2$. Σ Λ
β) Η γενέτειρα του κώνου είναι πάντα μεγαλύτερη από το ύψος του κώνου. Σ Λ
γ) Ο όγκος του κώνου ισούται με $V = πρ^2\upsilon$. Σ Λ
δ) Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα βάσης ενός κώνου τότε ο όγκος του τριπλασιάζεται. Σ Λ
ε) Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα βάσης ενός κώνου τότε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας διπλασιάζεται. Σ Λ
στ) Το ανάπτυγμα της παράπλευρης επιφάνειας ενός κύκλου είναι ένας κυκλικός τομέας. Σ Λ

ζ) Αν διπλασιάσουμε το ύψος ενός κώνου τότε ο όγκος του τετραπλασιάζεται. Σ Λ

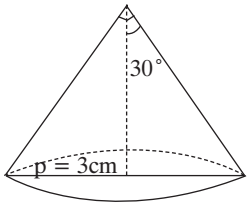
η) Το ύψος ενός κώνου είναι πάντα μέσα στο κώνο. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κώνου με ύψος 8cm και ακτίνα βάσης 6cm.

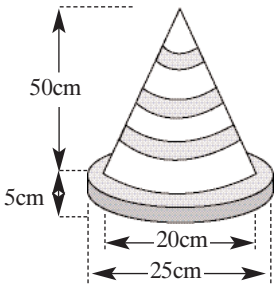
2. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας ενός κώνου είναι 226,08 m^2 και η γενέτειρά του λ = 9 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης του κώνου.

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του διπλανού κώνου.

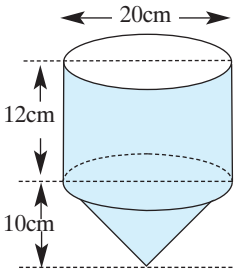


4. Το μήκος του κύκλου της βάσηςενός κώνου είναι 18,84dm. Και η γενέτειρά του λ = 5dm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
β) τον όγκο του.

5. Ένας κώνος της τροχαίας έχει το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
β) τον όγκο του.



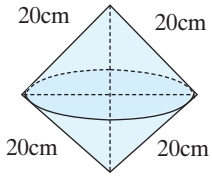
6. Ένα δοχείο είναι κατασκευασμένο από έναν κύλινδρο και έναν κώνο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
α) Να υπολογίσετε τον όγκο του δοχείου.
β) Αν το δοχείο είναι ανοιχτό από πάνω και το υλικό κατασκευής του κοστίζει 30€ το m^2, να υπολογίσετε το κόστος για να κατασκευάσουμε 50 δοχεία



7. Οι σκηνές των ινδιάνων έχουν σχήμα κώνου. Μια τέτοια σκηνή έχει όγκο 19,625m^3 και ύψος 3 m. Να βρείτε πόσο ύφασμα χρειάζεται για την κατασκευή της.

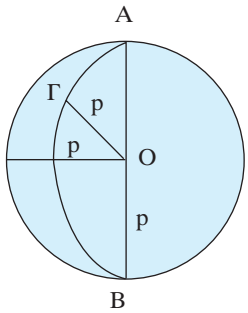
8. Η γενέτειρα ενός κώνου είναι τα $\frac{29}{20}$ της ακτίνας της βάσης του και η διαφορά τους είναι 9 cm. Να βρεθεί ο όγκος του κώνου σε λίτρα (dm^3).

9. Ένα τετράγωνο πλευράς 20 cm περιστρέφεται γύρω από μια διαγώνιο του. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



10. Δύο στερεοί κώνοι έχουν κοινή βάση με ακτίνα 6 cm και ύψη 10cm και 15 cm αντίστοιχα. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

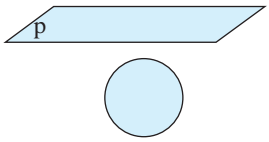
4.6 Η ΣΦΑΙΡΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ



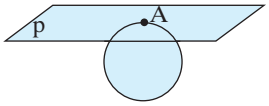
- **Σφαίρα** ονομάζεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε έναν κυκλικό δίσκο (Ο,ρ) γύρω από μια διάμετρό του.
  - **Κέντρο** της σφαίρας ονομάζεται το κέντρο του κυκλικου δίσκου Ο.
  - Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο της Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ του κυκλικού δίσκου (Ο,ρ). Η ακτίνα ρ ονομάζεται **ακτίνα της σφαίρας**.

Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας

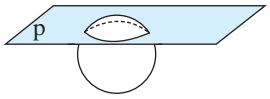
- Να μην τέμνονται μεταξύ τους



- Να εφάπτονται σε ένα σημείο Α που ονομάζεται σημείο επαφής



- Να τέμνονται σε κύκλο



Κάθε επίπεδο που τέμνει τη σφαίρα, την τέμνει κατά έναν κύκλο, ο οποίος «μεγαλώνει» όσο το επίπεδο «πλησιάζει» στο κέντρο της σφαίρας. Όταν το επίπεδο που τέμνει τον κύκλο διέρχεται από το κέντρο Ο της σφαίρας, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται μέγιστος κύκλος της σφαίρας.

Εμβαδόν επιφανείας σφαίρας

Το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το εμβαδόν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.

$$\mathbf{E_{\sigma\varphi} = 4\pi p^2}$$

Όγκος της σφαίρας

Ο όγκος της σφαίρας ισούται με:

$$\mathbf{V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi \cdot p^3}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Η διάμετρος μιας σφαίρας είναι δ = 10cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του και τον όγκο της σφαίρας.

Λύση

Επειδή η διάμετρος είναι δ = 10cm, η ακτίνα είναι $p = \frac{\delta}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{cm}$

Έχουμε

$E_{\sigma\varphi} = 4\pi p^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 314\text{cm}^2$ και

$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi p^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^3 = 523{,}33\text{cm}^3$

2) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας που έχει όγκο 305,08 cm^3.

Λύση

Από τον τύπο του όγκου σφαίρας $V = \frac{4}{3}\pi p^3$ έχουμε:

$3052{,}08 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \rho^3$ ή $\rho^3 = \frac{9156{,}24}{12{,}56}$ ή $p^3 = 729$ ή $p^3 = 9^3$ ή $p = 9\text{cm}$

Οπότε το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας ισούται με:
$E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 9^2 = 1017,36cm^2$.

3) Μια σφαίρα με διάμετρο 12cm χωράει ακριβώς σε έναν κύβο. Να βρεθεί το μέρος του κύβου που μένει άδειο.

Λύση

Επειδή η σφαίρα έχει διάμετρο δ = 12cm, η ακτίνα της θα είναι

$p = \frac{δ}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$ και ο όγκος της θα είναι:

$$V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^3 = 904,32cm^3$$

Η πλευρά του κύβου είναι ίση με τη διάμετρο της σφαίρας, και ο όγκος του είναι: $V_κ = 12^3 = 1728cm^3$
Άρα το μέρος του κύβου που μένει άδειο ισούται με:
$V = V_κ - V_{σφ} = 1728 - 904,32 = 823,68cm^3$.

4) Το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας είναι 153,86 cm^2. Να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας αυτής.

Λύση

Από τον τύπο $E_κ = π \cdot p^2$ έχουμε: $153,86 = 3,14 \cdot ρ^2$ ή $ρ^2 \frac{153,86}{3,14}$ ή $ρ^2 = 49$
ή $ρ = \sqrt{49} = 7cm$.
Οπότε ο όγκος της σφαίρας ισούται με:

$$V_{σφ} = \frac{4}{3}π \cdot ρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 7^3 = 1436,02cm^3$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη)

1) Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι πάντα κύκλος. Σ Λ
2) Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου της. Σ Λ
3) Ισχύει ο τύπος $p = \frac{3V_{σφ}}{E_{σφ}}$ Σ Λ
4) Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Σ Λ

5) Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της τετραπλασιάζεται. Σ Λ

6) Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε η επιφάνεια της σφαίρας εννιαπλασιάζεται. Σ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Η ακτίνα μιας σφαίρας είναι ρ = 8cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο της σφαίρας.

2. Το μήκος ενός μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας είναι 50,24cm. Να βρείτε:
α) την ακτίνα της
β) το εμβαδόν της επιφάνειάς της
γ) τον όγκο της σφαίρας.

3. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των επιφανειών και το λόγο των όγκων δύο σφαιρών με ακτίνες 2cm και 3cm.

4. Μια σφαίρα έχει όγκο 113,04dm^3. Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειάς της.

5. Να βρείτε το κόστος κατασκευής μιας σφαιρικής μεταλλικής δεξαμενής διαμέτρου 18m, αν το ένα m^2 λαμαρίνας κοστίζει 5€.

6. Το εμβαδόν ενός μέγιστου κύκλου μιας σφαίρας είναι 1256cm^2. Να βρείτε τον όγκο της σφαίρας αυτής.

7. Ποιο είναι το εμβαδόν του υφάσματος που χρειάζεται για να καλυφθεί μια μπάλα του τένις που έχει ακτίνα 6cm.

8. Μια μπάλα ποδοσφαίρου έχει διάμετρο 30cm. Να βρείτε πόσα λίτρα αέρα χωράει.

9. Ένα ημισφαίριο έχει ακτίνα ρ = 25cm. Να βρείτε:
α) το εμβαδόν της επιφάνειάς του
β) τον όγκο του.

10. Μια σφαίρα διαμέτρου δ = 30cm χωράει ακριβώς σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου. Να βρείτε:

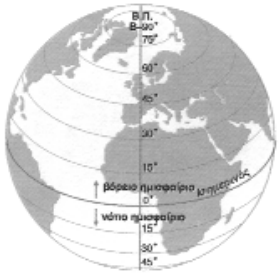
α) τον όγκο της σφαίρας
β) τον όγκο του κιβωτίου
γ) το μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο

11. Ένα επίπεδο τέμνει μια σφαίρα ακτίνας ρ = 8cm και διέρχεται από το μέσο της ακτίνας της. Να βρείτε το εμβαδόν αυτής της τομής.

4.7 ΓΕΩΓΡΑΦΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

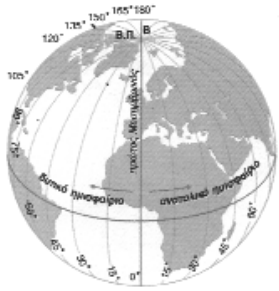
Για να μπορέσουμε να βρούμε τη θέση ενός τόπου πάνω στη γη, έχουμε χαράξει στην υδρόγειο ένα σύστημα από γραμμές.

- Οι γραμμές που είναι παράλληλες προς τον ισημερινό λέγονται **παράλληλοι κύκλοι**. Από τον **ισημερινό** χαράσσονται 90 παράλληλοι κύκλοι προς το βόρειο πόλο και άλλοι 90 προς το νότιο πόλο της γης. Ο **ισημερινός** χωρίζει τη γη σε δύο ημισφαίρια το βόρειο (N) και το νότιο (S).

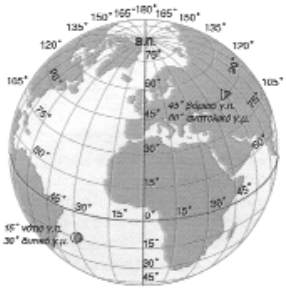


Ο Ισημερινός χωρίζει την υδρόγειο σφαίρα σε βόρειο και νότιο ημισφαίριο

- Οι γραμμές που ενώνουν τους πόλους λέγονται **μεσημβρινοί**. Ο πρώτος μεσημβρινός (που περνά από το αστεροσκοπείο του Γκρίνουιτς της Μ. Βρετανίας) χωρίζει τη γήινη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια, το ανατολικό (E) και το δυτικό (W). Ξεκινώντας από τον πρώτο μεσημβρινό χαράσσονται σε ίση απόσταση 180 ημικύκλια προς τα ανατολικά και 180 ημικύκλια προς τα δυτικά. Έτσι σχηματίζεται πάνω στην υδρόγειο σφαίρα ένα δίκτυο παραλλήλων και μεσημβρινών κύκλων. Η απόσταση (το μήκος του τόξου) ενός τόπου από τον ισημερινό λέγεται **γεωγραφικό πλάτος**. Η απόσταση (το μήκος του τόξου) ενός τόπου από τον πρώτο μεσημβρινό λέγεται **γεωγραφικό μήκος**. Το γεωγραφικό μήκος και το πλάτος ενός τόπου αποτελούν τις **γεωγραφικές συντεταγμένες** του τόπου αυτού. Ανάλογα με τη θέση του τόπου, το γεωγραφικό μήκος χαρακτηρίζεται ως δυτικό (W) ή ως ανατολικό (E), και το γεωγραφικό πλάτος ως βόρειο (N) ή νότιο (S).



Ο Πρώτος Μεσημβρινός χωρίζει την Υδρόγειο σφαίρα σε δυτικό και ανατολικό ημισφαίριο



Γεωγραφική θέση (συντεταγμένες) δύο περιοχών

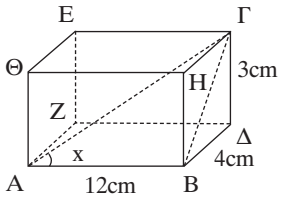
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α) Ποιές είναι οι σχετικές θέσεις ευθείας και επιπέδου.
β) Πότε μια ευθεία είναι κάθετη σε ένα επίπεδο.
γ) Τι ονομάζεται απόσταση πεδίου από επίπεδο.

Θέμα 2

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε:
α) τη ΒΓ
β) τη γωνία $\hat{x} = B\hat{A}\Gamma$



Θέμα 3

Τριγωνικό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 6cm και ΑΓ = 8cm έχει ύψος υ = 15cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
β) τον όγκο του πρίσματος.

Θέμα 4

Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει απόστημα 15cm και πλευρά βάσης 16cm. Να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της
β) τον όγκο της πυραμίδας.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Ποιο στερεό ονομάζεται πυραμίδα; Με τι ισούται ο όγκος της;
β) Ποιο στερεό ονομάζεται κώνος;
γ) Να γράψετε τους τύπους του ολικού εμβαδού της επιφάνειας και του όγκου ενός κώνου.
δ) Να γράψετε τους τύπους του εμβαδού επιφάνειας και του όγκου σφαίρας.

Θέμα 2

Ένας κορμός δέντρου θεωρούμενος ως κύλινδρος έχει μήκος 7m και ακτίνα βάσης 0,4m. Να βρείτε πόσο αξίζει ο κορμός, αν η τιμή του ξύλου είναι 150€ ανά κυβικό μέτρο.

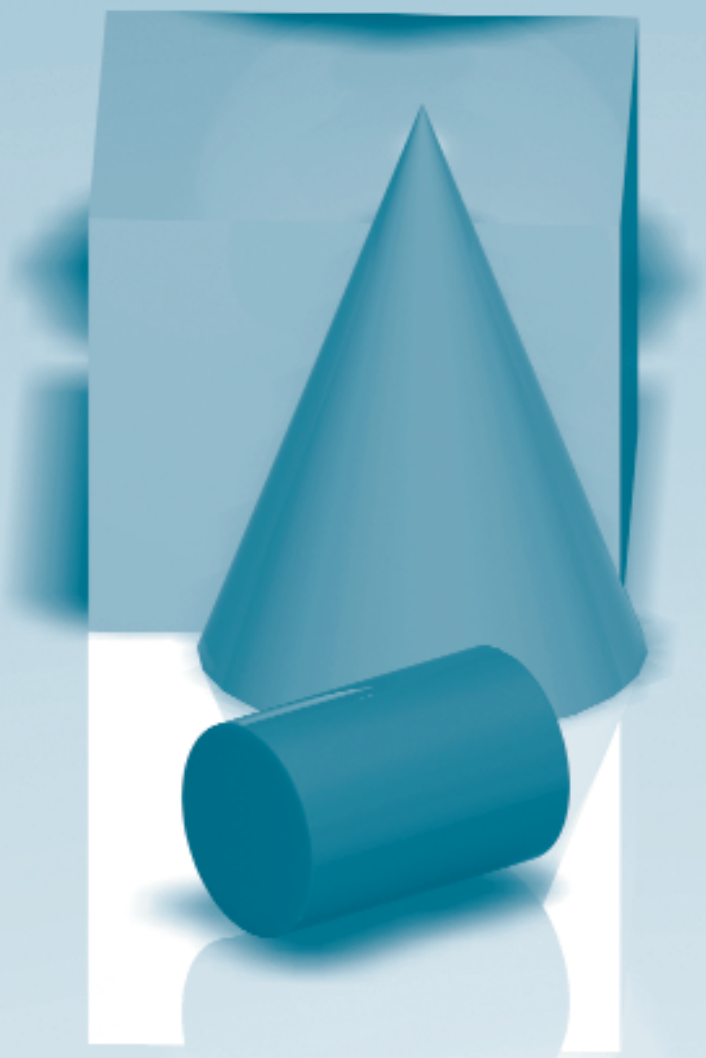
Θέμα 3

Ένας κώνος έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 502,4cm^2 και γενέτειρα με μήκος 20cm. Να υπολογίσετε:
α) την ακτίνα της βάσης του
β) το ύψος του
γ) τον όγκο του.

Θέμα 4

Σε κιβώτιο που έχει σχήμα κύβου χωράει ακριβώς μια σφαίρα με διάμετρο 20cm. Να βρείτε το μέρος του κιβωτίου που μένει άδειο.

ΛΥΣΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α → 2
β → 4
γ → 6
δ → 3

2) α – Λ, β – Σ, γ – Λ, δ – Λ, ε – Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $5x + 7$, όπου x ο αριθμός αυτός
β) $\Pi = 4x$ και $E = x^2$, όπου x η πλευρά του τετραγώνου
γ) $3 \cdot x$, όπου x η τιμή του κιλού
δ) $0{,}8 \cdot x$, όπου x η αρχική τιμή του προϊόντος
ε) $\Pi = 2x + 2(x - 5) = 4x - 10$, όπου x το μήκος του
στ) $\frac{1}{2}x + 10$, όπου x τα χρήματα του Γιάννη

2. α) $9x - 4y$
β) $22\alpha - 27\beta$
γ) $-2\omega + 3$
δ) $3{,}1x - 2{,}8y$
ε) x

3. α) $A = 5x - 12 + 6x + 8 + 4x = 15x - 4$ για $x = -3$
$A = 15 \cdot (-3) - 4 = -49$
β) $B = 7\alpha - 14\beta - 6\alpha - 6\beta + 5 = \alpha - 20\beta + 5$ για $\alpha = 7$ και $\beta = -1$
$B = 7 - 20 \cdot (-1) + 5 = 32$
γ) $\Gamma = 19 - 2\alpha + 2\beta - 2\beta + x - \alpha - 12 = -3\alpha + x + 7$ για $x = 5$ και $\alpha = -6$
$\Gamma = -3 \cdot (-6) + 5 + 7 = 30$

4. α) $A = 5\alpha - 10\beta - 6\alpha + 9\beta + 7 = -\alpha - \beta + 7$ για $\alpha + \beta = -8$

$A = -(-8) + 7 = 15$

β) $B = -x + 6x - 2y - 4y + 12 + x = 6x - 6y + 12$ για $x - y = \frac{1}{6}$

$B = 6 \cdot (x - y) + 12 = 6 \cdot \frac{1}{6} + 12 = 1 + 12 = 13$

γ) $\Gamma = 3 - \alpha + \beta - x - y + \alpha - \beta + 1 = -x - y + 4$ για $x + y = -11$

$\Gamma = -(-11) + 4 = 15$

5. $A = \beta - \gamma - 2\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma - \cancel{\beta\gamma} + \cancel{\beta\gamma} - 2$

$A = -3\beta - \gamma - \beta\gamma - \alpha\gamma$ για $\beta = -\frac{1}{2}$ και $\alpha \cdot \gamma = 1$ έχουμε

$A = -3 \cdot (-\frac{1}{2}) - \gamma - (-\frac{1}{2}) \cdot \gamma - 1$

$A = +\frac{1}{2} - +\frac{1}{2}\gamma$

6. $B = 3x - 4y + 5x - 7y + 10 - 9x + 8y$

$B = -x - 3y + 10 \quad x = -10, \quad y = -\frac{1}{3}$

$B = -(-10) - 3(-\frac{1}{3}) + 10$

$B = 21$

7. α) $\frac{40}{2} - x = 20 - x$ β) $E = x(20 - x) = 20x - x^2$

8. Μήκος $= x - (x - \alpha) - (x - \beta) = x - x + \alpha - x + \beta = \alpha + \beta - x$

1.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) 8 β) 6 γ) 7 δ) 69 ε) -5 στ) -5

α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ στ) Σ

α) → iv

β) → i

γ) → v

δ) → ii

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $x = 4$
β) $x = 3$
γ) $x = 2$
δ) $x = 21$

2. α) $x = 4$
β) $y = 1$
γ) $x = \frac{13}{21}$
δ) $\omega = \frac{10}{3}$

3. α) $x - [3 + (x - x - 3)] = 5$

$$x - (\cancel{3} + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{3}) = 5$$

$$x = 5$$

β) $x - (-3x - 1 - 5) = -2x - 2$

$$x + 3x + 1 + 5 = -2x - 2$$

$$6x = -8$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

γ) $-\{2(x - 4) - 3(x + 1) + [10 - 2(x + 1) - 60]\} = 15(x + 1)$

$$-(\cancel{2}x - 8 - 3x - 3 + 10 - \cancel{2}x - 2 - 60) = 15x + 15$$

$$8 + 3x + 3 - 10 + 2 + 60 = 15x + 15$$

$$3x - 15x = 15 + 10 - 8 - 3 - 2 - 60$$

$$-12x = -48$$

$$x = 4$$

4. α) $2(3x + 2) = 3(4x - 5)$

$$6x + 4 = 12x - 15$$

$$-6x = -19$$

$$x = \frac{19}{6}$$

β) $\frac{-5+5}{4} = \frac{3x-2}{3}$

$$-15x + 15 = 12x - 8$$

$$-27x = -23$$

$$x = \frac{23}{27}$$

γ) $\frac{7x+21-5}{5} = \frac{2-8x}{3}$

$$21x + 63 - 15 = 10 - 40x$$

$$61x = -38$$

$$x = -\frac{38}{61}$$

5. α) $\frac{2(3x-2)}{7}=\frac{1+3x}{2}-x$

$\frac{6x-4}{7}=\frac{1+3x}{2}-x$

$14\cdot\frac{6x-4}{7}=14\cdot\frac{1+3x}{2}-14x$

$2(6x-4)=7(1+3x)-14x$

$12x-8=7+21x-14x$

$5x=15$

$x=3$

β) $\frac{x+3}{2}-(x-5)=\frac{2(x+1)}{3}$

$\frac{x+3}{2}-x+5=\frac{2x+2}{3}$

$6\frac{x+3}{2}-6x+6\cdot5=6\cdot\frac{2x+2}{3}$

$3(x+3)-6x+30=2(2x+2)$

$3x+9-6x+30=4x+4$

$-7x=-35$

$x=5$

γ) $\frac{3(x+1)}{4}-\frac{x+15}{2}=\frac{3x-1}{2}$

$\frac{3x+3}{4}-\frac{x+15}{2}=\frac{3x-1}{2}$

$4\cdot\frac{3x+3}{4}-4\frac{x+15}{2}=4\frac{3x-1}{2}$

$3x+3-2x-30=6x-2$

$-5x=25$

$x=-5$

δ) $\frac{5\cdot(4x-3)}{7}-(3x+2)=\frac{2-x}{7}-20$

$\frac{20x-15}{7}-(3x+2)=\frac{2-x}{7}-20$

$7\cdot\frac{20x-15}{7}-7(3x+2)=\frac{2-x}{7}-7\cdot20$

$20x-15-21x-14=2-x-140$

$0x=-109$

αδύνατη

ε) $\frac{2x-1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{2x+2}{5}-\frac{11}{10}$

$10\frac{2x-1}{5}-10\frac{1}{2}=10\frac{2x+2}{5}-10\cdot\frac{11}{10}$

$4x-2-5=4x+4-11$

$0x=0$ ταυτότητα ή αόριστη

6. α) $\frac{-3x+3}{2}+\frac{2-2x}{3}=\frac{5x-5}{6}$

$6\frac{-3x+3}{2}+6\frac{2-2x}{3}=6\frac{5x-5}{6}$

$3\cdot(-3x+3)+2(2-2x)=5x-5$

$-9x+9+4-4x=5x-5$

$-18x=-18$

$x=1$

β) $\frac{3y-1}{2}+\frac{5}{10}=\frac{y-2}{5}+\frac{2y+5}{2}$

$10\frac{3y-1}{2}+10\frac{5}{10}=10\frac{y-2}{5}+10\cdot\frac{2y+5}{2}$

$5(3y-1)+5=2(y-2)+5(2y+5)$

$15y-5+5=2y-4+10y+25$

$3y=21$

$y=7$

γ) $\frac{1-\omega}{4}+\frac{2\omega-4}{3}=\frac{\omega+11}{6}$

$12\frac{1-\omega}{4}+12\frac{2\omega-4}{3}=12\frac{\omega+11}{6}$

$3(1-\omega)+4(2\omega-4)=2(\omega+11)$

$3-3\omega+8\omega-16=2\omega+22$

$3\omega=35$

$\omega=\frac{35}{3}$

δ) $\frac{\omega}{4}+\frac{\omega+3}{6}=\frac{5\omega}{12}+\frac{1}{2}$

$12\frac{\omega}{4}+12\frac{\omega+3}{6}=12\frac{5\omega}{12}+12\frac{1}{2}$

$3\omega+2(\omega+3)=5\omega+6$

$3\omega+2\omega+6=5\omega+6$

$0\omega=$ ο αόριστη

7. α) $\frac{2}{3}\cdot\left(6-\frac{x}{3}\right)=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{3}+\frac{16}{9}\right)$

$\frac{12}{3}-\frac{2x}{9}=\frac{15}{4}-\frac{6x}{12}-\frac{48}{36}$

$4-\frac{2x}{9}=\frac{15}{4}-\frac{x}{2}-\frac{4}{3}$ ΕΚΠ $=36$

$36\cdot4-36\cdot\frac{2x}{9}=36\cdot\frac{15}{4}-36\cdot\frac{x}{2}-36\cdot\frac{4}{3}$

$144-4\cdot2x=9\cdot15-18x-12\cdot4$

$144-8x=135-18x-48$

$10x=-57$ ή $x=-5{,}7$

β) $\frac{2}{5}\left(3-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\omega}{5}\right)=\frac{\omega+2}{10}$

$\frac{5}{6}-\frac{\omega}{5}+\frac{1}{4}-\frac{\omega}{20}=\frac{\omega+2}{10}$ ΕΚΠ $=20$

$20\frac{5}{6}-20\frac{\omega}{5}+20\frac{1}{4}-20\frac{\omega}{20}=20\frac{\omega+2}{10}$

$4\cdot6-4\omega+5-\omega=\omega+2$

$24-4\omega+5-\omega=\omega+2$

$-6\omega=-27$

$\omega=\frac{-27}{-6}$

$\omega=\frac{9}{2}$

γ) $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{5}-2\right)-3\right]-5=x-\frac{1}{60}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{15}-\frac{2}{3}-3\right)-5=x-\frac{1}{60}$

$$\frac{x}{60}-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}-5=x-\frac{1}{60} \qquad \text{ΕΚΠ}=60$$

$$60\frac{x}{60}-60\frac{1}{6}-60\frac{3}{4}-60\cdot 5=60\cdot x-60\frac{1}{60}$$

$x - 10 - 45 - 300 = 60x - 1$

$-59x = 354$

$$x=-\frac{354}{59}$$

$x = -6$

8. α) $\dfrac{6x-18}{5}=3+\dfrac{3x-12}{10}$ $\qquad$ ΕΚΠ $=10$

$$10\frac{6x-18}{5}=10\cdot 3+10\frac{3x-12}{10}$$

$2(6x - 18) = 30 + 3x - 12$

$12x - 36 = 30 + 3x - 12$

$9x = 54$

$x = 6$

β) $\dfrac{1}{9}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)-1\right]=\dfrac{x}{3}+\dfrac{40}{81}$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{x}{3}+\frac{40}{81}$$

$$\frac{x}{81}-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}=\frac{x}{3}+\frac{40}{81} \qquad \text{ΕΚΠ}=81$$

$$81\frac{x}{81}-81\frac{1}{27}-81\cdot\frac{1}{9}=81\cdot\frac{x}{3}+81\cdot\frac{40}{81}$$

$x - 3 - 9 = 27x + 40$

$-26x = 52$

$x = -2$

γ) $5-\left(\dfrac{5x-1}{8}-\dfrac{x+5}{12}\right)=6-\left(\dfrac{3x+1}{8}+\dfrac{2x+1}{6}\right)$

$$5-\frac{5x-1}{8}+\frac{x+5}{12}=6-\frac{3x+1}{8}-\frac{2x+1}{6} \qquad \text{ΕΚΠ}=24$$

$$24\cdot 5-24\cdot\frac{5x-1}{8}-24\cdot\frac{x+5}{12}=24\cdot 6-24\cdot\frac{3x+1}{8}-24\cdot\frac{2x+1}{6}$$

$120 - 3(5x - 1) - 2(x + 5) = 144 - 3(3x + 1) - 4(2x + 1)$
$120 - 15x + 3 - 2x - 10 = 144 - 9x - 3 - 8x - 4$
$0x = 24$ αδύνατη

9. α) $\dfrac{x}{18} - \dfrac{x - \frac{1}{2}}{9} = \dfrac{1}{9}\left(-\dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{5}\right)$

$$\frac{x}{18} - \frac{\frac{2x-1}{2}}{9} = -\frac{x}{27} + \frac{2}{45}$$

$$\frac{x}{18} - \frac{2x-1}{18} = -\frac{x}{27} + \frac{2}{45} \qquad \text{ΕΚΠ} = 270$$

$$270\frac{x}{18} - 270\frac{2x-1}{18} = -270\frac{x}{27} + 270\frac{2}{45}$$

$15x - 15(2x - 1) = -10x + 6 \cdot 2$
$15x - 30x + 15 = -10x + 12$
$-5x = -3$

$$x = \frac{3}{5}$$

β) $\dfrac{\frac{3+\omega}{2}}{5 - \frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$ ή $\dfrac{\frac{3+\omega}{2}}{\frac{20-3}{4}} = \dfrac{2}{3}$ ή $\dfrac{\frac{3+\omega}{2}}{\frac{17}{4}} = \dfrac{2}{3}$ ή

$\dfrac{{}^{2}\cancel{4}(3+\omega)}{\cancel{2} \cdot 17} = \dfrac{2}{3}$ ή $\dfrac{6+2\omega}{17} = \dfrac{2}{3}$

$18 + 6\omega = 34$ ή $6\omega = 16$ ή $\omega = \dfrac{8}{3}$

γ) $\dfrac{5x - \frac{1}{2}}{3 + \frac{5}{2}} = \dfrac{2 - \frac{x}{3}}{3 - \frac{1}{3}}$ ή $\dfrac{\frac{10x-1}{2}}{\frac{6+5}{2}} = \dfrac{\frac{6-x}{3}}{\frac{9-1}{3}}$ ή $\dfrac{10x-1}{11} = \dfrac{6-x}{8}$ ή

$80x - 8 = 66 - 11x$ ή $91x = 72$ ή $x = \dfrac{72}{91}$

δ) $\dfrac{x-\dfrac{2x+3}{9}}{4}-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2x-\dfrac{5(x+3)}{6}}{2}$

$\dfrac{\dfrac{9x-(2x-3)}{9}}{4}-x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{\dfrac{12x-5(x+3)}{6}}{2}$

$\dfrac{9x-2x-3}{36}-x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{12x-5x-15}{12}$

$\dfrac{7x-3}{36}-x+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7x-15}{12}$ ΕΚΠ = 36

$36\cdot\dfrac{7x-3}{36}-36x+36\cdot\dfrac{1}{3}=36\cdot\dfrac{7x-15}{12}$

$7x-3-36x+12=3(7x-15)$

$7x-3-36x+12=21x-45$

$7x-36x-21x=3-12-45$

$-50x=-54$

$x=\dfrac{-54}{-50}$

$x=\dfrac{27}{25}$

10. α) A = B ή $\dfrac{2(x-3)}{5}-1=\dfrac{3(x-2)}{4}$ ΕΠΚ = 20

$\dfrac{2x-6}{5}-1=\dfrac{3x-6}{4}$

$20\cdot\dfrac{2x-6}{5}-20\cdot 1=20\cdot\dfrac{3x-6}{4}$

$4\cdot(2x-6)-20=5(3x-6)$

$8x-24-20=15x-30$

$-7x=14$

$x=-2$

β) A = B ή $2x-\dfrac{5x-12}{2}=2\left(3-\dfrac{x}{4}\right)$

$2x-\dfrac{5x-12}{2}=6-\dfrac{x}{2}$ ΕΚΠ = 2

$4x - (5x - 12) = 12 - x$
$4x - 5x + 12 = 12 - x$
$0x = 0$ αόριστη ή ταυτότητα

γ) $A = B$ ή $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + 2x - \frac{10}{3} = x + 2\left(3 - \frac{x}{3}\right)$

$\frac{2}{3} - \frac{x}{3} + 2x - \frac{10}{3} = x + 6 - \frac{2x}{3}$ ΕΚΠ $= 3$

$2 - x + 6x - 10 = 3x + 18 - 2x$
$4x = 26$
$x = \frac{13}{2}$

11. α) $(5x - 7)(3x + 12) \cdot (x - 2) = 0$
$5x - 7 = 0$ ή $3x + 12 = 0$ ή $x - 2 = 0$
$x = \frac{7}{5}$ $x = -4$ $x = 2$

β) $(-x + 3)(-2x - 13)(7x + 3) = 0$
$-x + 3 = 0$ ή $-2x - 13 = 0$ ή $7x + 3 = 0$
$x = 3$ $x = -\frac{13}{2}$ $x = -\frac{3}{7}$

γ) $(x - 2) \cdot (x^2 + 5) = 0$
$x - 2 = 0$ ή $x^2 + 5 = 0$
$\boxed{x = 2}$ $x^2 = -5$ αδύνατη

12. $\lambda(1 - x) + 3 = 2x + 5 + \lambda$
α) Αν $\lambda = 5$ έχουμε: $5(1 - x) + 3 = 2x + 5 + 5$
$5 - 5x + 3 = 2x + 10$
$-7x = 2$
$x = -\frac{2}{7}$

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = -3$, τότε
$\lambda(1 - (-3)) + 3 = 2(-3) + 5 + \lambda$

$\lambda + 3\lambda + 3 = -6 + 5 + \lambda$

$3\lambda = -4$

$\lambda = -\frac{4}{3}$

γ) Για $\lambda = -2$, έχουμε

$-2(1-x) + 3 = 2x + 5 - 2$

$-2 + 2x + 3 = 2x + 3$

$0x = 2$ αδύνατη

13. Έχουμε $7x + 5 = \alpha x + \beta$

$(7-\alpha)x = \beta - 5$

α) Για να είναι ταυτότητα πρέπει: $\alpha = 7$ και $\beta = 5$

β) Για να είναι αδύνατη πρέπει: $\alpha = 7$ και $\beta = 5$

14. α) $\lambda = 2$

β) $\lambda = -5$

γ) $\lambda = 1$

δ) $\lambda = 1$

15. Πρέπει: $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ οπότε

$3x + 10^o = 4x - 10^o$ ή $-x = -20^o$ ή $x \neq 20^o$

Άρα $\hat{B} = 70^0$, $\hat{\Gamma} = 70^0$, και $\hat{A} = 40^0$

16. Πρέπει: $AB = \Delta E$ ή $3y - 5 = 3 - y$

$4y = 8$ ή $y = 2$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο θεώρημα:

$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2$ ή $10^2 = BE^2 + 6^2$ ή

$BE^2 = 100 - 36$ ή $BE^2 = 64$ ή $BE = 8$ cm

Οπότε $5x - 2 = 8$

$5x = 10$

$x = 10$

1.3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\upsilon = \frac{2E}{\beta}$

2. i) $h = \frac{P-p}{\varepsilon}$ ii) $\varepsilon = \frac{P-p}{h}$

3. i) $t = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{\gamma}$ ii) $\gamma = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$

4. $m = \frac{Q}{c \cdot \theta}$

5. $\upsilon_0 = \frac{2 \cdot S - g \cdot t^2}{2t}$

6. $h = \frac{E - 2\pi r^2}{2\pi r}$

7. $v = \frac{\alpha_v - \alpha_1 + \omega}{\omega}$

8. $t = \frac{100 \cdot T}{\kappa \cdot \varepsilon}$

9. i) $m = \frac{(B + F)r}{\upsilon^2}$ ii) $r = \frac{(B + F) \cdot m}{\upsilon^2}$

10. $\theta = \frac{V - V_0}{\alpha \cdot V_0}$

11. $C = \frac{F - 32^0}{1,8}$, για $F = 73,4^o$ έχουμε $C = \frac{73,4^0 - 32^0}{1,8} = 23^0$

12. $x = \frac{\Pi - 2y}{2}$ και $y = \frac{\Pi - 2x}{2}$

α) $x = \frac{56 - 2 \cdot 10}{2} = 18cm$ β) $y = \frac{148 - 2 \cdot 46}{2} = 28cm$

1.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Γ.
2) Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω x ο αριθμός αυτός, τότε: $5x - 5 = 4x + 9$

$x = 13$

2. Έστω x ο πρώτος περιττός αριθμός, τότε:

$x + (x + 2) + (x + 4) = 69$

$3x = 63$

$x = 21$

Άρα οι αριθμοί είναι: 21, 23, 25

3. Έστω x ο αριθμός αυτός, τότε:

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 91$ ΕΚΠ = 12

$12\frac{1}{3}x + 12\frac{1}{4}x = 12 \cdot 91$

$4x + 3x = 1092$

$7x = 1092$

$x = 156$

4. Έστω x ο μικρότερος αριθμός, τότε x + 18 ο μεγαλύτερος, οπότε

$\frac{x}{x+18} = \frac{2}{5}$ ή $5x = 2x + 36$ ή $3x = 36$ ή $x = 12$

Άρα οι αριθμοί είναι το 12 και το 18.

5. Έστω x ο αριθμός αυτός, τότε:

$125 = x \cdot 17 + 6$ ή $17 \cdot x = 125 - 6$ ή $17 \cdot x = 119$

$x = \frac{119}{17}$ ή $\boxed{x = 7}$

6. Έστω x οι σωστές απαντήσεις, τότε οι λάθος απαντήσεις είναι $20 - x$, οπότε: $6x - 3(20 - x) = 75$

$$6x - 60 + 3x = 75$$
$$9x = 135$$
$$\boxed{x = 15}$$

7. Έστω x η μία γωνία, τότε η άλλη θα είναι 4x, οπότε

$x + 4x = 90^o$ ή $5x = 90^o$ ή $x = 18^o$

Άρα η μία γωνία είναι 18° και η άλλη $4 \cdot 18^o = 72^o$

8. Έστω x € τα χρήματα της Μαρίας, τότε τα χρήματα της Ελίνας είναι 3x και τα χρήματα της Άννας είναι $2 \cdot (3x) = 6x$.

Οπότε: $6x + 3x + x = 400$

$$10x = 400$$
$$x = 40$$

Άρα η Άννα έχει $6 \cdot 40 = 240$€, η Ελίνα $3 \cdot 40 = 120$€ και η Μαρία 40€.

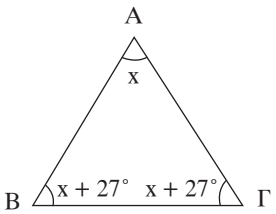
9. Έστω x η γωνία της κορυφής, τότε οι γωνίες της βάσης είναι $x + 27^o$. οπότε:

$x + (x + 27^o) + (x + 27^o) = 180^o$

$3x + 54^o = 180^o$

$3x = 126^o$

$x = 42^o$ $\quad (\hat{A} = 42^0$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 69^0)$



10. Έστω x η πλευρά του τετραγώνου , τότε:

$(x + 2) \cdot x = x^2 + 50$

$x^2 + 2x = x^2 + 50$

$2x = 50$

$x = 25$ cm

11. Έστω x το μήκος του ορθογωνίου , τότε $60 - x$ το πλάτος του, οπότε:

$x(60 - x) = (x - 10)(60 - x + 10) - 100$

$60x - x^2 = (x - 10) \cdot (70 - x) - 100$

$60x - x^2 = 70x - x^2 - 700 + 10x - 100$

$-20x = -800$

$x = 40$

Άρα μήκος $= 40$ cm και πλάτος $= 20$ cm

12. Έστω x η ηλικία του πατέρα, τότε η ηλικία του γιού είναι 50 – x, οπότε:

$x + 8 = 2(50 - x + 8)$
$x + 8 = 100 - 2x + 16$
$3x = 108$
$x = 36$

Άρα η ηλικία του πατέρα είναι 36 χρονών και του γιού είναι 14 χρονών.

13. Έστω x τα χρόνια που θα περάσουν έτσι ώστε η ηλικία της μητέρας να γίνει διπλάσια από την ηλικία της κόρης. Τότε

$48 + x = 2 \cdot (18 + x)$
$48 + x = 36 + 2x$
$-x = -12$
$x = 12$ χρόνια

14. Έστω x η ηλικία του Πέτρου και y η ηλικία του Γιάννη, τότε

$x - 5 = 2(y - 5)$ και $(x + 10)\frac{5}{7} = y + 10$

$x = 2y - 10 + 5$
$x = 2y - 5$

$5x + 50 = 7y + 70$

$x = \frac{7y - 20}{5}$

Οπότε $2y - 5 = \frac{7y - 20}{5}$

$10y - 25 = 7y - 20$
$3y = 45$
$y = 15$ και $x = 2 \cdot 15 - 5 = 25$

Άρα ο Πέτρος είναι 25 χρονών και ο Γιάννης 15 χρονών.

15. Έστω x οι ώρες που κάνει για την ανάβαση, τότε 13 – x οι ώρες που κάνει για την κατάβαση. Οπότε:

$2{,}5x = 4(13 - x)$
$2{,}5x = 52 - 4x$
$6{,}5x = 52$
$x = 8$ ώρες

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι $8 \cdot 2{,}5 = 20$Km.

16. Έστω x οι ώρες που θα περάσουν μέχρι να συναντηθούν , τότε

$80 \cdot (x + 1) = 100 \cdot x$
$80x + 80 = 100 \cdot x$

$20x = 80$
$x = 4$ ώρες
Άρα θα συναντηθούν στη 1μ.μ. και σε απόσταση $512 - 400 = 112$Km από Αθήνα.

17. Έστω x το συνολικό ποσό , τότε:

$$\left(1-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot x = 30$$

$$\frac{60-24-20-15}{60}\cdot x = 30$$

$$\frac{1}{60}\cdot x = 30$$

$x = 1.800$€ το συνολικό ποσό που μοιράστηκαν

Άρα ο πρώτος πήρε $1.800\cdot\frac{2}{5} = 720$€

Ο δεύτερος πήρε $1.800\cdot\frac{1}{3}+30 = 630$€

Και ο τρίτος πήρε $1.800\cdot\frac{1}{4} = 450$€

18. Έστω x το μήκος του, τότε το πλάτος του είναι $x - 7$.
Οπότε: $2x + 2(x - 7) = 66$
$2x + 2x - 14 = 66$
$4x = 80$
$x = 20$
Άρα μήκος = 20cm και πλάτος = 13cm.

19. Έστω x η μικρή βάση του, τότε η μεγάλη βάση του είναι 3x.
Οπότε:

$$E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$$

$$120 = \frac{(3x+x)\cdot 10}{2}$$ ή $240 = 4x \cdot 10$ ή $40x = 240$ ή $x = 6$cm

Άρα η μικρή βάση είναι 6cm και η μεγάλη βάση $3 \cdot 6 = 18$cm

20. Έστω x τα δίκλινα δωμάτια, τότε τα τρίκλινα είναι 48 – x.

Οπότε: $2 \cdot x + 3(48 - x) = 114$

$2x + 144 - 3x = 114$

$-x = -30$

$x = 30$ δίκλινα δωμάτια και $48 - 30 = 18$ τρίκλινα.

21. Έστω x τα στυλό που αγόρασε ο Σπύρος, τότε 12 – x είναι τα τετράδια που αγόρασε. Οπότε:

$1{,}5 \cdot x + 3 \cdot (12 - x) = 30$

$1{,}5x + 36 - 3x = 36$

$-1{,}5x = -6$

$x = 4$

Άρα τα στυλό που αγόρασε είναι 4 και τα τετράδια είναι $12 - 4 = 8$.

22. Έστω ότι οι γυναίκες ήταν x, τότε οι άντρες ήταν 2x

Μετά που έφυγαν 6 άντρες με τις συζύγους τους έχουμε:

$2x - 6 = 3(x - 6)$

$2x - 6 = 3x - 18$

$x = 12$

Άρα στην αρχή ήταν 12 γυναίκες και 24 άντρες.

23. Επειδή η πρώτη βρύση αδειάζει τη δεξαμενή σε 8 ώρες , σε 1 ώρα αδειάζει το $\frac{1}{8}$ της δεξαμενής.

Η δεύτερη βρύση γεμίζει τη δεξαμενή σε 6 ώρες , άρα σε μία ώρα γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής.

Έστω x οι ώρες που θα περάσουν ώστε να γεμίσει η δεξαμενή, τότε ισχύει

$\frac{1}{6}x - \frac{1}{8}x = 1$ ΕΚΠ = 24

$24\frac{1}{6}x - 24 \cdot \frac{1}{8}x = 24$

$4x - 3x = 24$

$x = 24$ ώρες.

24. Έστω x οι ώρες που θα κάνουν οι τρεις βρύσες για να γεμίσουν τη δεξαμενή, τότε ισχύει:

$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=1$ ΕΚΠ = 6

$6\frac{x}{6}+6\frac{x}{3}+6\frac{x}{2}=6\cdot 1$

x + 2x + 3x = 6
6x = 6
x = 1 ώρα.

25. Έστω x € πλήρωσε το κάθε ζευγάρι κάλτσες, τότε ισχύει
12(x + 0,5) = 14 · x + 1
12x + 6 = 14 · x + 1
2x = 5
x = 2,5€

26. Έστω x η περιεκτικότητα του μείγματος σε καθαρό οινόπνευμα, τότε

$\frac{80}{100}\cdot 5+\frac{20}{100}\cdot 3=\frac{x}{100}\cdot 8$

400 + 60 = 8x
460 = 8x
x = 57,5%

27. Έστω x οι μαθητές της τάξης, τότε:

$\left(1-\frac{1}{4}-\frac{5}{8}\right)x=3$

$\frac{8-2-5}{8}\cdot x=3$ ή $\frac{1}{8}x=3$ ή x = 24

Άρα η τάξη έχει 24 μαθητές.

28. Έστω x οι ερωτήσεις που απάντησε σωστά ο Γιάννης, τότε οι ερωτήσεις που απάντησε λάθος είναι 16 – x. Οπότε:
5 · x = 3 (16 – x)
5x = 48 – 3x
8x = 48
x = 6
Άρα ο Γιάννης απάντησε σε 6 ερωτήσεις σωστά.

1.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

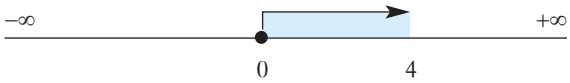
1) α) $x - 2 < 3$
β) $x + 3 \geq 10$
γ) $3x \leq -9$
δ) $-5x > -10$
ε) $\frac{x}{5} \geq 2$
στ) $\frac{3x}{2} < -6$

2) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ στ) Λ ζ) Λ η) Σ θ) Λ

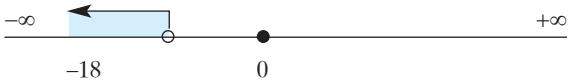
3) α. → i
β. → ii
γ) → ii
δ) → i

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

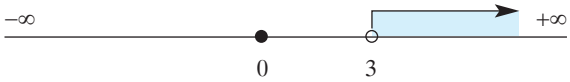
1. α) $x \geq 4$



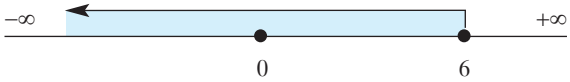
β) $x < -18$



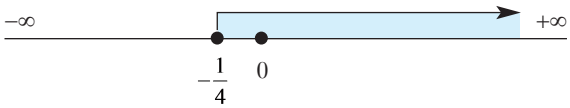
γ) $x > 3$



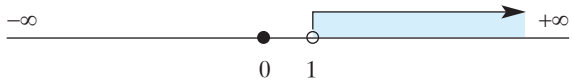
δ) $x \leq 6$



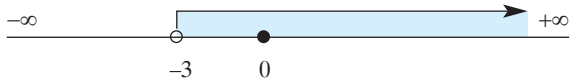
ε) $x \geq -\frac{1}{4}$



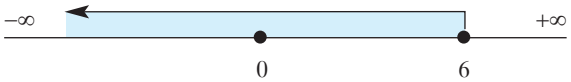
2. α) $x > 1$



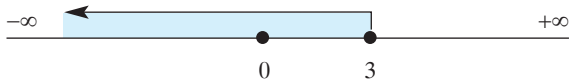
β) $y > -3$



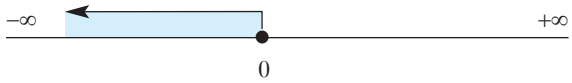
γ) $\omega \leq 6$



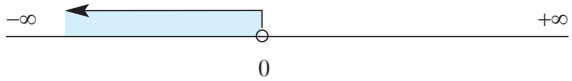
δ) $x \leq 3$



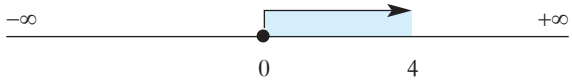
ε) $x \leq 0$



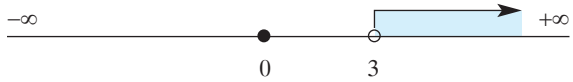
3. α) $x<0$



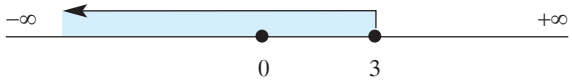
β) $x \geq 4$



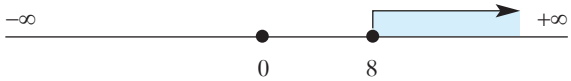
γ) $x > 3$



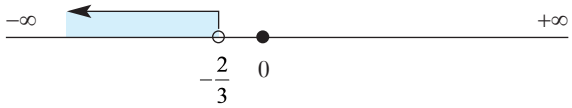
δ) $x \leq 3$



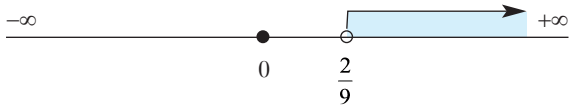
ε) $x \geq 8$



στ) $y < -\frac{2}{3}$



ζ) $\omega > \frac{2}{9}$



4. α) $-3\{x-5[-x-(x+2)]\} < 15(-x-3)$

$-3[x-5(-x-x-2)] < -15x-45$

$-3(x+5x+5x+10) < -15x-45$

$-3(11x + 10) < -15x - 45$

$-33x - 30 < -15x - 45$

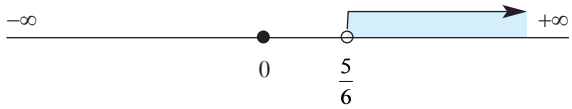
$-18x < -15$

$-33x + 15x < 30 - 45$

$x > \frac{-15}{-18}$

$x > \frac{15}{18}$

$x > \frac{5}{6}$



β) $11x - \{(8x + 23) - 2(x - 8)\} \geq 5(3x - 7)$

$11x - [8x + 23 - 2x + 16] \geq 15x - 35$

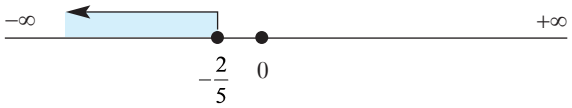
$11x - 8x - 23 + 2x - 16 \geq 15x - 35$

$11x - 8x + 2x - 15x \geq 23 + 16 - 35$

$-10x \geq 4$

$x \leq -\frac{4}{10}$

$x \leq -\frac{2}{5}$



γ) $\frac{x-1}{6} - \frac{x-1}{2} < \frac{3-2x}{3}$ ΕΚΠ = 6

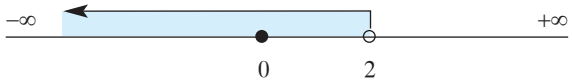
$6 \cdot \frac{x-1}{6} - 6\frac{x-1}{2} < 6\frac{3-2x}{3}$

$x - 1 - 3(x - 1) < 2(3 - 2x)$

$x - 1 - 3x + 3 < 6 - 4x$

$2x < 4$

$x < 2$



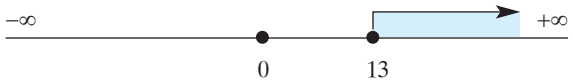
δ) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} \geq 3$ ΕΚΠ = 6

$6 \cdot \frac{2x+1}{3} - 6 \cdot \frac{x-1}{2} \geq 6 \cdot 3$

$2(2x + 1) - 3(x - 1) \geq 18$

$4x + 2 - 3x + 3 \geq 18$

$x \geq 13$



ε) $x+\frac{2x-5}{3}>\frac{x}{6}+\frac{3}{2}$ ΕΚΠ = 6

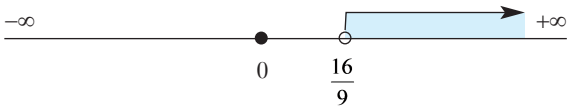
$6x+6\cdot\frac{2x-5}{3}>6\cdot\frac{x}{6}+6\cdot\frac{3}{2}$

$6x + 2(2x - 5) > x + 2 \cdot 3$

$6x + 4x - 10 > x + 6$

$9x > 16$

$x>\frac{16}{9}$



5. α) $3x-\frac{5\cdot(2x-1)}{3}\geq\frac{15\cdot(x+1)}{4}-2x$

$3x-\frac{10x-5}{3}\geq\frac{15x+15}{4}-2x$ ΕΚΠ = 12

$12\cdot 3x-12\cdot\frac{10x-5}{3}\geq 12\cdot\frac{15x+15}{4}-12\cdot 2x$

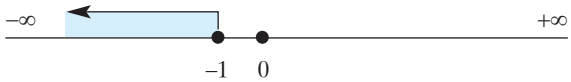
$36x - 4(10x - 5) \geq 3 \cdot (15x + 15) - 24x$

$36x - 40x + 20 \geq 45x + 45 - 24x$

$36x - 40x - 45x + 24x \geq 45 - 20$

$-25x \geq 25$

$x \leq -1$



β) $\frac{2(x+15)}{3}-2x<\frac{5(10-x)}{6}-\frac{x+6}{2}+9$

$\frac{2x+30}{3}-2x<\frac{50-5x}{6}-\frac{x+6}{2}+9$ ΕΚΠ = 6

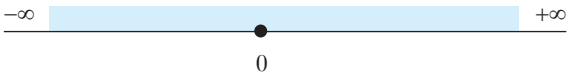
$6\cdot\frac{2x+30}{3}-6\cdot 2x<6\cdot\frac{50-5x}{6}-6\cdot\frac{x+6}{2}+6\cdot 9$

$2(2x + 30) - 12x < 50 - 5x - 3(x + 6) + 54$

$4x + 60 - 12x < 50 - 5x - 3x - 18 + 54$

$4x - 12x + 5x + 3x < 50 - 18 + 54 - 60$

$0x < 26$ αληθεύει για κάθε x.



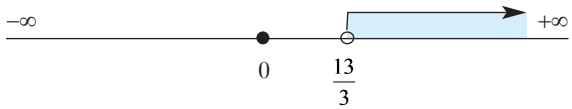
γ) $\omega-\frac{\omega+1}{2}-2-\frac{3-\omega}{4}>0$ ΕΚΠ $=4$

$4\omega - 2(\omega + 1) - 8 - 3(3-\omega) > 0$

$4\omega - 2\omega - 2 - 8 - 3 + \omega > 0$

$3\omega > 13$

$\omega > \frac{13}{3}$



δ) $1+\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{2}+\frac{x+1}{3}\right)>\frac{x+5}{6}$

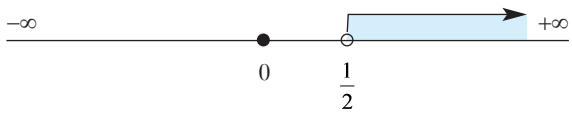
$1+\frac{x-2}{6}+\frac{x+1}{9}>\frac{x+5}{6}$ ΕΚΠ $=18$

$18 + 3(x-2) + 2(x+1) > 3(x+5)$

$18 + 3x - 6 + 2x + 2 > 3x + 15$

$2x > 1$

$x > \frac{1}{2}$



ε) $\frac{2(x-13)}{3}-\frac{3x+5}{2}\le\frac{2(x-2)}{7}-5$

$\frac{2x-26}{3}-\frac{3x+5}{2}\le\frac{2x-4}{7}-5$ ΕΚΠ $=42$

$42\cdot\frac{2x-26}{3}-42\frac{3x+5}{2}\le 42\cdot\frac{2x-4}{7}-42\cdot 5$

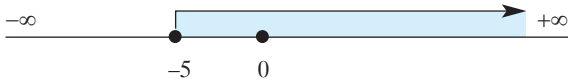
$14(2x-26) - 21(3x+5) \le 6\cdot(2x-4) - 210$

$28x - 364 - 63x - 105 \le 12x - 24 - 210$

$28x - 63x - 12x \le 364 + 105 - 24 - 210$

$-47x \le 235$

$x \ge -5$



6. α) $\frac{x+1}{5}+\frac{x}{2}\le x+2-\frac{3(x+1)-7}{10}$

$\frac{x+1}{5}+\frac{x}{2}\le x+2-\frac{3x+3-7}{10}$ ΕΚΠ $=10$

$10\cdot\frac{x+1}{5}+10\cdot\frac{x}{2}\le 10\cdot x+10\cdot 2-10\frac{3x-4}{10}$

$2(x + 1) + 5x \le 10x + 20 - (3x - 4)$
$2x + 2 + 5x \le 10x + 20 - 3x + 4$
$0x \le 22$ αληθεύει για κάθε x.

β) $\dfrac{5x+1}{6} - \dfrac{3x-1}{2} \ge \dfrac{5-2x}{3}$ ΕΚΠ $= 6$

$5x + 1 - 3(3x - 1) \ge 2(5 - 2x)$
$5x + 1 - 9x + 3 \ge 10 - 4x$
$0x \ge 6$ αδύνατη.

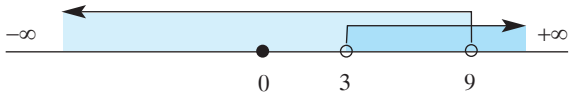
γ) $\dfrac{x+2}{2} - 2x > -\dfrac{3x-1}{2}$ ΕΚΠ $= 2$

$x + 2 - 4x > -(3x - 1)$
$x - 4x + 3x > 1 - 2$
$0x > -1$ αληθεύει για κάθε x.

δ) $\dfrac{x-3}{20} - \dfrac{x-1}{5} > \dfrac{2+x}{4}$ ΕΚΠ $= 20$

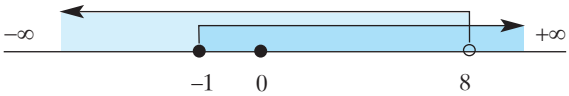
$x - 3 + 4(x - 1) > 5(2 + x)$
$x - 3 + 4x - 4 > 10 + 5x$
$0x > 17$ αδύνατη.

7. α) $x - 7 < 2$ και $5 - x < 2$
$x < 9$ και $x > 3$



Κοινές λύσεις $3 < x < 9$

β) $2(x + 3) - 3(x + 1) \ge -2(x - 1)$ και $3(x - 3) + 7 < 2(x + 3)$
$2x + 6 - 3x - 3 \ge -2x + 2$ $\quad$ $3x - 9 + 7 < 2x + 6$
$x \ge -1$ $\quad$ $x < 8$

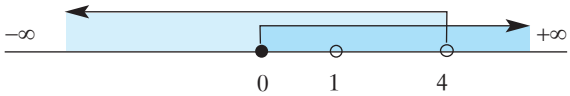


Κοινές λύσεις $-1 \le x < 8$

γ) $2x + 3(x - 7) < 2(4 - x) - 1$ και $2(3x - 1) + 5(3x - 8) > 3x - 24$
$2x + 3x - 21 < 8 - 2x - 1$ και $6x - 2 + 15x - 40 > 3x - 24$

$7x < 28$ $\qquad$ $18x > 18$

$x < 4$ $\qquad$ $x > 1$



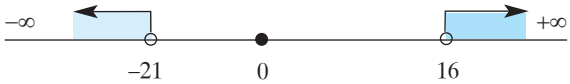
Κοινές λύσεις $1 < x < 4$

δ) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{7}{6}<\dfrac{x-5}{4}$ και $\dfrac{3x}{4}-\dfrac{5}{6}>\dfrac{2x}{3}+\dfrac{1}{2}$

$12\dfrac{x-2}{3}+12\dfrac{7}{6}<12\dfrac{x-5}{4}$ $\qquad$ $12\dfrac{3x}{4}-12\dfrac{5}{6}>12\dfrac{2x}{3}+12\dfrac{1}{2}$

$4x-8+14<3x-15$ $\qquad$ $9x-10>8x+6$

$x<-21$ $\qquad$ $x>16$



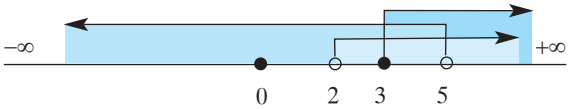
Δεν έχουν κοινές λύσεις

ε) $3x-2<13$ και $2(x-3)>-2$ και $3x\geq 5(x-1)-1$

$3x<15$ $\qquad$ $2x-6>-2$ $\qquad$ $3x\geq 5x-5-1$

$x<5$ $\qquad$ $2x>4$ $\qquad$ $-2x\geq -6$

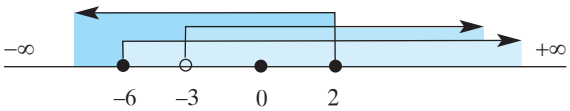
$x>2$ $\qquad$ $x\leq 3$



Κοινές λύσεις $3\leq x<5$

στ) $\dfrac{2}{3}x-1>-3$ και $\dfrac{x}{2}+4\geq\dfrac{2x}{3}-2\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ και $3(3x-2)-2(1-5x)\leq 30$

$x>-3$ και $x\geq -6$ και $x\leq 2$



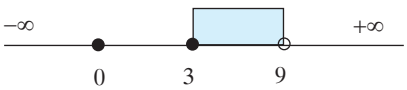
Κοινές λύσεις $3<x\leq 2$

8. α) $11\leq 3x+2<29$

$11-2\leq 3x<29-2$

$9\leq 3x<27$

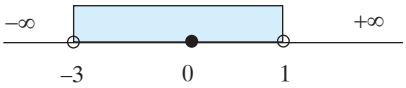
$3\leq x<9$



β) $-2 < 3 - 5x < 18$

$-5 < -5x < 15$

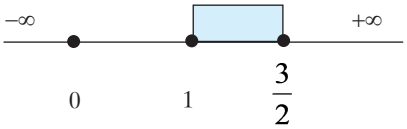
$1 > x > -3$



γ) $9 \le 8x + 1 \le 13$

$8 \le 8x \le 12$

$1 \le x \le \frac{3}{2}$



9. Πρέπει $A < 0$ ή $5(\lambda - 2) - 30 < 0$

$5\lambda - 10 - 30 < 0$

$5\lambda < 40$

$\boxed{\lambda < 8}$

10. Για $x = 4$ έχουμε: $7 \cdot 4 - 5\alpha + 2 > \alpha(4 - 2)$

$28 - 5\alpha + 2 > 2\alpha$

$-7\alpha > -30$

$\boxed{\alpha < \frac{30}{7}}$

11. Έστω x οι διαδρομές που πρέπει να κάνει κάποιος για να τον συμφέρει οικονομικά η αγορά της κάρτας, τότε:

$0{,}40 \cdot x > 10$

$x > 25$

Άρα πρέπει να κάνει τουλάχιστον 25 διαδρομές.

12. Έστω x ο αριθμός αυτός. Από τον τύπο της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε $x = 13 \cdot \pi + 7$ όπου π (πηλίκο) φυσικός αριθμός.

Πρέπει: $55 < x < 65$

$55 < 13 \cdot \pi + 7 < 65$

$48 < 13\pi < 58$

$\frac{48}{13} < \pi < \frac{58}{13}$ ή $3{,}692 < \pi < 4{,}46$. Άρα $\pi = 4$

οπότε $x = 13 \cdot 4 + 7 = 59$.

13. Έστω x τα γραμματόσημα που έχει η Ελένη. τότε

$3x > 750$ και $\frac{x}{2} < 126$

$x > 250$ και $x < 252$

οπότε $250 < x < 252$ ή $x = 251$

Άρα η Ελένη έχει 251 γραμματόσημα.

14. Έστω x ο βαθμός στα μαθηματικά. Τότε

$$\frac{x+16+3\cdot 17+4\cdot 18+4\cdot 19+20}{14} > 18$$

$x + 16 + 51 + 72 + 76 + 20 > 18 \cdot 14$

$x + 235 > 252$

$\boxed{x > 17}$

15. Έστω x τα χιλιόμετρα που πρέπει να κάνουν για να συμφέρει το 2ο γραφείο ταξιδιών, τότε

$100 + 0{,}5 \cdot x > 150 + 0{,}3 \cdot x$

$0{,}5x - 0{,}3x > 150 - 100$

$0{,}2x > 50$

$\boxed{x > 250}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. (Σχολικό βιβλίο)

Β. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ

Θέμα 2

α) $x = -\frac{7}{3}$ β) $x > -1$ γ) όχι

Θέμα 3

Α. $x > \frac{2}{9}$ Β. $\frac{1}{2} \le x \le \frac{2}{3}$

Θέμα 4

Έστω x είναι η γωνία $\hat{A}$, τότε $\hat{B} = \frac{3}{5}x$ και $\hat{\Gamma} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}x = \frac{1}{5}x$

οπότε $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$ ή $x + \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}x = 180^0$

$5x + 3x + x = 5 \cdot 180$ ή $9x = 900$ ή $x = 100^o$

Άρα $\hat{A} = 100^0$, $\hat{B} = 60^0$ και $\hat{\Gamma} = 20^0$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα 2

Α. $x = 7$ Β. $\lambda = 2$

Θέμα 3

Α. $x \leq \frac{7}{3}$ Β. $\lambda = 10$ και $\mu > 5$

Θέμα 4

Είχε 26 επιτυχείς χειρισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ , β) Λ , γ) Σ , δ) Λ , ε) Σ , στ) Λ , ζ) Σ , η) Λ , θ) Σ , ι) Λ

2) $\sqrt{49} \to 7$

$\sqrt{36} \to 6$

$\sqrt{169} \to 13$

$\sqrt{400} \to 20$

$\sqrt{81} \to 9$

$\sqrt{121} \to 11$

3) Γ
4) Α
5) Β
6) Β

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\sqrt{36} = 6$ $\quad \sqrt{0,36} = 0,6$ $\quad \sqrt{3600} = 60$

$\sqrt{196} = 14$ $\quad \sqrt{1,96} = 1,4$ $\quad \sqrt{19600} = 140$

$\sqrt{100} = 10$ $\quad \sqrt{0,01} = 0,1$ $\quad \sqrt{10.000} = 100$

$\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ $\quad \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$ $\quad \sqrt{\frac{169}{121}} = \frac{13}{11}$ $\quad \sqrt{\frac{225}{81}} = \frac{15}{9}$

2. α) 24 β) 38 γ) $\frac{28}{5}$ δ) 19

3. $A = \sqrt{3x-15}$ πρέπει $3x - 15 \geq 0$ ή $x \geq 5$

$B = \sqrt{2-6x}$ πρέπει $2 - 6x \geq 0$ ή $x \leq 1/3$

$\Gamma = \sqrt{x-5}+\sqrt{-6x+54}$ πρέπει $x-5 \geq 0$ και $-6x+54 \geq 0$

$x \geq 5$ και $x \leq 9$

Άρα $5 \leq x \leq 9$

4. α) $\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{9}}} = \sqrt{5+\sqrt{13+3}} = \sqrt{5+\sqrt{16}} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$

β) $\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{4}}}} = \sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \sqrt{7-\sqrt{9}} = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$

γ) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2}+\sqrt{49}} = \sqrt{\frac{4}{2}+7} = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$

5. $x = 6$, $y = 13$, $z = 1$, $\alpha = 25$, $\beta = 8$

6. α) $x = -6$ ή $x = 6$

β) $x = -\frac{7}{5}$ ή $x = \frac{7}{5}$

γ) αδύνατη

δ) $x = -13$ ή $x = 13$

7. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\upsilon = 2$

8. Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\delta = 40m$

9. $\upsilon = 15cm$ και $E = 120cm^2$

10. Πλευρά = 17cm, Περίμετρος = $4 \cdot 17 = 68cm$

11. Ύψος = 24cm και $E = 1008cm^2$

12. Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε ότι $AB = 24cm$ και $\Gamma\Delta = 26cm$

13. Έστω x ο αριθμός αυτός , τότε:

$x^2 - 8 = \frac{x^2}{2}$ ή $2x^2 - 16 = x^2$ ή $x^2 = 16$ ή $x = 4$

14. $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 8$, $x = 6$

2.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

2) ρητοί : $\sqrt{9}$, $(\sqrt{3})^2$, $\sqrt{\frac{9}{25}}$, $-\sqrt{16}$, $\sqrt{\frac{72}{2}}$

άρρητοι : $\sqrt{7}$, $\sqrt{72}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $1<\sqrt{3}<\sqrt{7}<\sqrt{8}$

β) $4<\sqrt{17}<\sqrt{21}<5<\sqrt{28}$

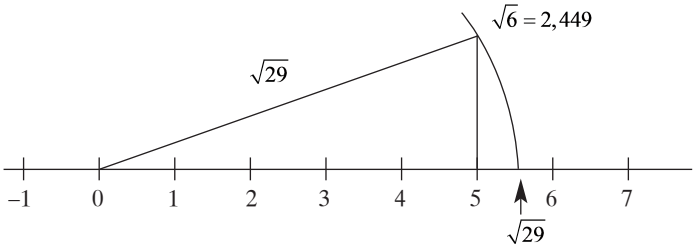
γ) $\sqrt{2}-1<\sqrt{2}<3<2+\sqrt{2}$

δ) $\sqrt{5}<\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ε) $\sqrt{3}<\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2. α) $\sqrt{11}=3,316$ β) $\sqrt{6}=2,449$

3.



4. α) $x=-\sqrt{7}$ ή $x=\sqrt{7}$ β) αδύνατη γ) $x=-1$ ή $x=1$

δ) $x=-\sqrt{8}$ ή $x=\sqrt{8}$

5. Έστω x cm το μήκος κάθε μίας από τις ίσες κάθετες πλευρές.
Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε:

$x^2+x^2=8^2$ ή $x^2=32$ ή $x=\sqrt{32}$ ή $x=5,65$cm

6. Πλευρά τετραγώνου $=\sqrt{18}$cm. Άρα $E_{\tau\varepsilon\tau\rho.}=18\text{cm}^2$

7. Ύψος = 6,92cm και $E=27,68\text{ cm}^2$

8. Επειδή η $\hat{B}=45^o$ το ορθογώνιο τριγ.

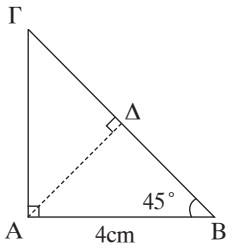
ΑΒΓ $(\hat{A}=90^0)$ είναι και ισοσκελές,
δηλαδή ΑΒ = ΑΓ = 4cm

Έχουμε: $B\Gamma^2=4^2+4^2$

$B\Gamma^2=32$

$B\Gamma=5,65$cm

$$E_{\tau\rho\iota\gamma.}=\frac{AB\cdot A\Gamma}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8\text{cm}^2$$

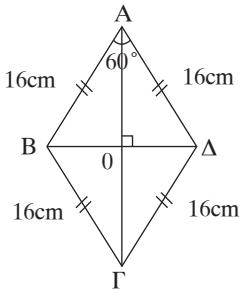


όμως

$$\text{Ετριγ.} = \frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΔ}}{2} \quad \text{ή} \quad 8 = \frac{5{,}65\cdot\text{ΑΔ}}{2} \quad \text{ή} \quad \text{ΑΔ} = 2{,}83\text{cm}$$

9. Έχουμε $\text{ΚΑ}^2 = 6^2+12^2$ ή $\text{ΚΑ}^2 = 180$ ή $\text{ΚΑ} = 13{,}41\text{cm}$
Άρα διάμετρος $\delta = 2\cdot 13{,}41 = 26{,}82\text{cm}$

10. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές και $\widehat{\text{Α}} = 60^0$, θα είναι και ισόπλευρο. Άρα ΒΔ = 16cm
Στο ορθογώνιο τριγ. ΑΟΒ ($\widehat{\text{Ο}} = 90^0$) εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα
$\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΟ}^2 + \text{ΒΟ}^2$
$16^2 = \text{ΑΟ}^2 + 8^2$
$\text{ΑΟ}^2 = 192$ ή $\text{ΑΟ} = \sqrt{192} = 13{,}85\text{cm}$
Άρα $\text{ΑΓ} = 2\cdot\text{ΑΟ} = 2\cdot 13{,}85 = 27{,}7\text{cm}$



$$\text{Εμ.} = \frac{\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}}{2} = 221{,}6\text{cm}^2$$

11. Αν α είναι η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου τότε ισχύει :

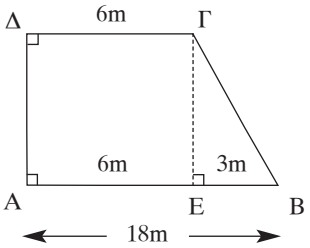
$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

Άρα $\alpha = 16\text{cm}$ και $\upsilon = 8\sqrt{3}\text{cm}$

12. Από τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου

έχουμε $E = \dfrac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$

$$45 = \frac{(9+6)\cdot\upsilon}{2} \quad \text{ή} \quad \upsilon = 6\text{cm}$$



Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγ. ΓΕΒ έχουμε:
$\text{ΒΓ}^2 = \text{ΓΕ}^2 + \text{ΕΒ}^2$ οπότε ΒΓ = 6,7cm
Άρα Περίμετρος = 6+6+9+6,7 = 27,7cm

2.3

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $AB = 8{,}696m$

2. $x = 3cm$ ($1^η$ περίπτωση: υποτείνουσα 5cm)

$x = \sqrt{41}cm$ ($2^η$ περίπτωση: κάθετες πλευρές 5cm και 4cm.

3. $B\Delta^2 = BE^2 - E\Delta^2$ ή $B\Delta^2 = 20^2 - 16^2$ ή $B\Delta^2 = 144$ ή $B\Delta = 12cm$

$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή $AB^2 = 36^2 + 12^2$ ή $AB^2 = 1440$ ή $AB = 37{,}947cm$

4. Έστω xcm η πλευρά του τετραγώνου , τότε η διαγώνιος είναι $x\sqrt{2}cm$ οπότε $x + \sqrt{2}x = 12{,}07$ ή $2{,}41x = 12{,}07$ ή $x = 5cm$

Άρα περίμετρος = 20cm και Εμβαδόν $= 5^2 = 25cm^2$

5. Θα χρειαστούμε περίπου 10 λίτρα μπογιάς.

6. $x^2 + (3x)^2 = 30^2$ ή $x^2 + 9x^2 = 900$ ή $10x^2 = 900$ ή $x^2 = 90$

$E\mu = 5 \cdot x^2 = 5 \cdot 90 = 450cm^2$

7. $A\Delta^2 = \Delta B^2 - AB^2$ ή $A\Delta^2 = 29^2 - 21^2$ ή $A\Delta^2 = 400$ ή $A\Delta = 20cm$

Άρα Εμβ. $= 21 \cdot 20 = 420cm^2$

8. $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$ ή $AB^2 = 1296$ ή $AB = 36cm$.

$$E\mu = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{36 \cdot 27}{2} = 486cm^2$$

Όμως $E = \dfrac{B\Gamma \cdot A\Delta}{2}$ ή $486 = \dfrac{45 \cdot A\Delta}{2}$ ή $A\Delta = 21{,}6cm$.

9. $AB = 8 + 20 + 8 = 36cm$

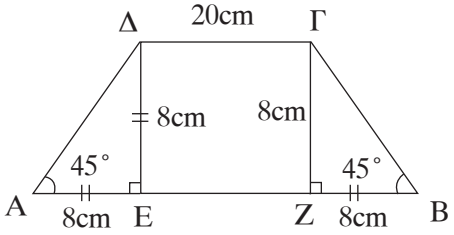
$A\Delta^2 = 8^2 + 8^2$ ή

$A\Delta^2 = 128$

$A\Delta = \sqrt{128}$ ή $A\Delta = 11{,}31cm$

$$E\mu = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2} =$$

$$= \frac{(36+20)\cdot 8}{2} = 224cm^2$$



10. $AB^2 = 2^2 + 4^2$ ή $AB^2 = 20$ ή $AB = \sqrt{20}$cm

$B\Gamma^2 = 2^2 + 4^2$ ή $B\Gamma^2 = 20$ ή $B\Gamma = \sqrt{20}$cm

$A\Gamma^2 = 2^2 + 6^2$ ή $A\Gamma^2 = 40$ ή $A\Gamma = \sqrt{40}$cm

Επειδή ισχύει $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ το τρίγ. είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΑΓ.

11. Ύψος υ=50m

Εμβ = β · υ = 150 · 50 = 7.500m^2 ή 7,5 στρέμματα.

Άρα χρειαζόμαστε 50 · 7,5 = 375 κιλά σπόρους.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. (Σχολικό βιβλίο)

Β. i) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$ ii) $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Γ. (Σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

α) $x \geq 3$ β) $x \leq 4$

Θέμα 3

α) Ύψος=8cm β) Ε=120cm^2

Θέμα 4

Με Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι ΛΜ = 15m

Περίμετρος =76m

Άρα η περίφραξη θα μας στοιχίσει 12 · 76 = 912 ευρώ.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) Β. –7 β) Γ. 4 γ) Α. $\sqrt{24}$ δ) Γ. 4 ε) Δ. $\sqrt{5}$

Θέμα 2

α) 125 β) 23 γ) 153 δ) $2\sqrt{7}+9\sqrt{5}$

Θέμα 3

Πλευρά τετραγώνου $=10\cdot\sqrt{2}\text{cm}$

Περίμετρος τετραγώνου $=40\cdot\sqrt{2}\text{cm}$

Θέμα 4

$x = 4\text{cm}$, $y = 6\text{cm}$, $\omega = \sqrt{45} \cong 6,7\text{cm}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) β) $y = 1{,}1x$
2) δ) $y = x - 4000$
3) γ) $y = \frac{120}{x}$
4) δ) $E = 20 + 5x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

x	–1	0	1	3	4
y	–2	$-\frac{1}{2}$	1	4	$\frac{11}{2}$

2.

x	–2	–1	0	1	2
y	5	–1	–3	–1	5

3.

x	–3	–1	0	2	5
y	30	12	6	0	6

4. $y = 1{,}19 \cdot x$

5. $y = 200 + 0.5 \cdot x$

x	100	200	300	500
y	250	300	350	450

6. $E = 4x^2$

7. α) $y = 25 - x$. Για $x = 8$ έχουμε $y = 17$

β) $y = \frac{240}{x}$. Για $x = 15$ έχουμε $y = 16$

8. α) $y = 1{,}05 \cdot x$

x	900	1000	1400	1500
y	945	1050	1470	1575

9. $y = 2x - 3$

x	5	–2	2	6
y	7	–7	1	9

10. α) $S = 3 \cdot 450 = 1350$ χιλιόμετρα

β) $S = 450 \cdot t$

γ) $2.250 = 450 \cdot t$ ή $t = 5$ ώρες.

3.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Α (–3,4), Β (0,–3), Γ (4,3), Δ (–2–5), Ε (1,–2)

2)

Σημείο Μ	**Συμμετρικά του Μ ως προς τον x΄x**	**Συμμετρικά του Μ ως προς τον y΄y**	**Συμμετρικά του Μ ως προς το 0**
(3, 7)	(3, –7)	(–3, 7)	(–3, –7)
(–5, 6)	(–5, –6)	(5, 6)	(5, –6)
(–1, –4)	(–1, +4)	(1, –4)	(1, 4)
(8, –10)	(8, 10)	(–8, –10)	(–8, 10)

3) α) $AB < A\Gamma$

4) α) Β: $\widehat{A} = 90^o$

β) Β: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{2}$

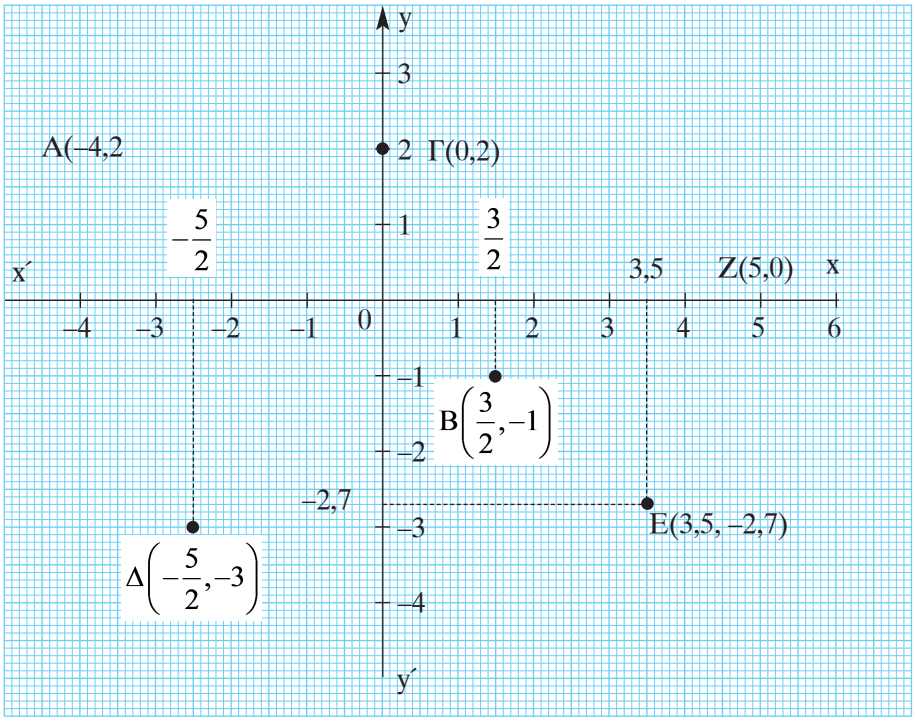
γ) Β: $\varepsilon\varphi\varphi = 2$

δ) Α: $E_{AB\Gamma} = 5$ τ.μ.

5) α) $y = 4$, β) $y = 2$, γ) $y = 1$, δ) $y = 0$, ε) $y = -2$, στ) $y = -3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.



2. α) Α΄(7,2) Β΄ $\left(-\frac{3}{2},-5\right)$

β) Α΄΄(–7,–2) Β΄΄ $\left(\frac{3}{2},5\right)$

γ) $A'''(-7,2)$ $B'''\left(\frac{3}{2},-5\right)$

3. α) $AB=\sqrt{(-1-0)^2+(1+2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ μ.μ.

$A\Gamma=\sqrt{(-4-0)^2+(0+2)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$ μ.μ.

$B\Gamma=\sqrt{(-4+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ μ.μ.

β) Ισχύει $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$

$(\sqrt{20})^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2$

$20 = 10 + 10$

$20 = 20$

Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα ΑΓ

γ)

$$E=\frac{AB\cdot B\Gamma}{2}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{2}=\frac{10}{2}=5\text{τ.μ.}$$

4.

	Απόσταση από x΄x	Απόσταση από y΄y
Α (5,2)	2 μονάδες	5 μονάδες
Β (-2,4)	4 μονάδες	2 μονάδες
Γ (-1,0)	0 μοναδες	1 μονάδες

5. α) $AB=\sqrt{(1-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

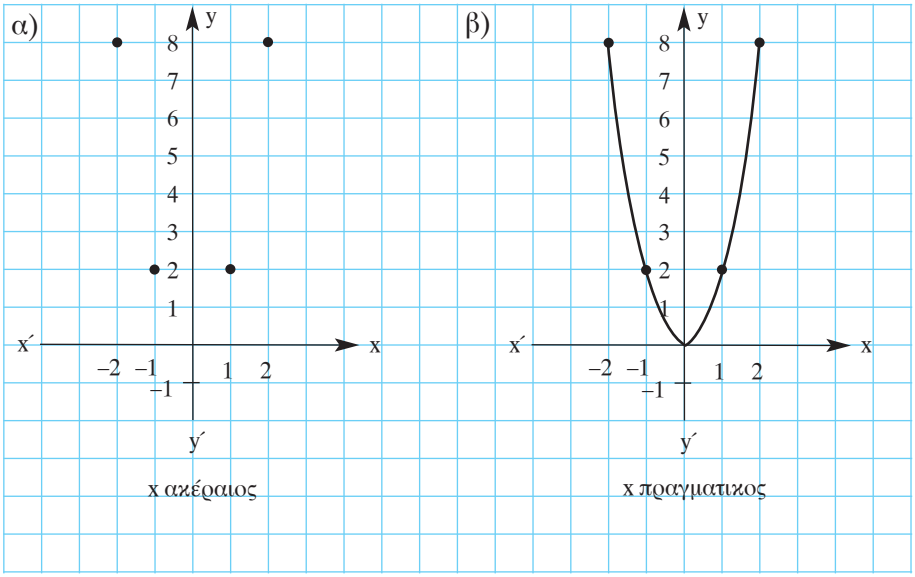
β) $\Gamma\Delta=\sqrt{(3-5)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}\cong 6{,}32$

γ) $EZ=\sqrt{(7-7)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{0+49}=\sqrt{49}=7$

δ) $K\Lambda=\sqrt{(4+3)^2+(5-5)^2}=\sqrt{49+0}=\sqrt{49}=7$

6. $y = 2x^2$

x	–2	–1	0	1	2
y	8	2	0	2	8



x ακέραιος

x πραγματικος

7. Για να ανήκει το ζεύγος (–3,–15) στη γραφική παράσταση της σύναρτησης $y = -2x^2 + \lambda$ πρέπει:

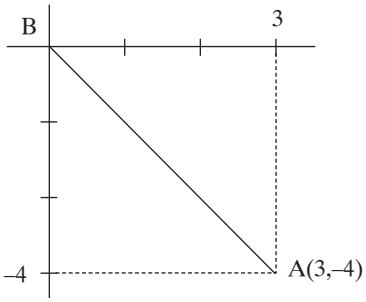
$-15 = -2(-3)^2 + \lambda$

$-15 = -18 + \lambda$

$\boxed{\lambda = 3}$

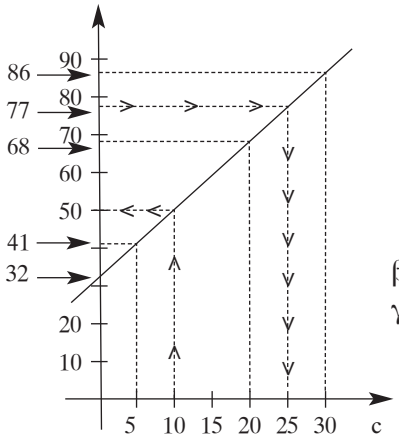
8. $AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$

Άρα το αεροπλάνο Α απέχει από το αεροδρόμιο Β, 500 χιλιόμετρα, οπότε 500 : 400= 1,25 ώρες ή 1 ώρα και 1 τέταρτο θα κάνει για να φτάσει στο Β.



9.

α)

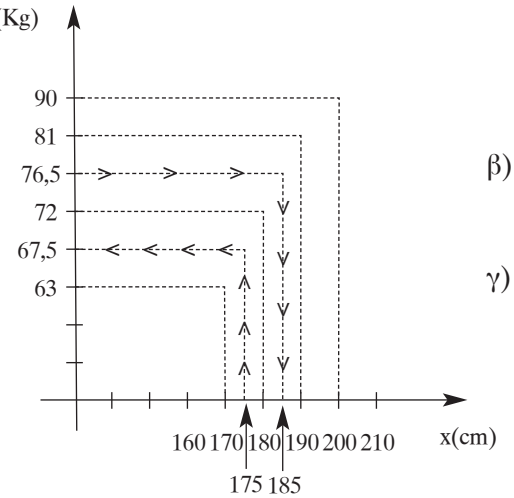


β) όταν είναι 10° C τότε σε F είναι 50°

γ) όταν είναι 77° F τότε σε C είναι 25°

10.

α)



β) Το ιδανικό βάρος για έναν άντρα ύψους 175 cm είναι 67,5 κιλά

γ) Το ύψος ενός άντρα με ιδανικό βάρος 76,5 είναι 185 cm.

3.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α)

x	3	6	9	12
y	4	8	12	16

β) $\Gamma : y = \frac{4}{3}x$

2) Γ: $y = \frac{2}{5}x$

3) Δ: $y = -3x$

4) α) → 2, β) → 1, γ) → 1, δ) → 2, ε) → 1

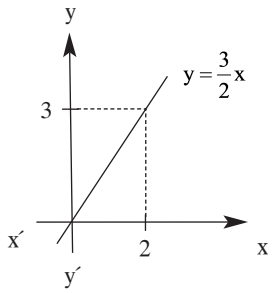
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α)

x	2	4	6	8
y	3	6	9	12

β) $y = \frac{3}{2}x$

γ)



2. $y = 3x$

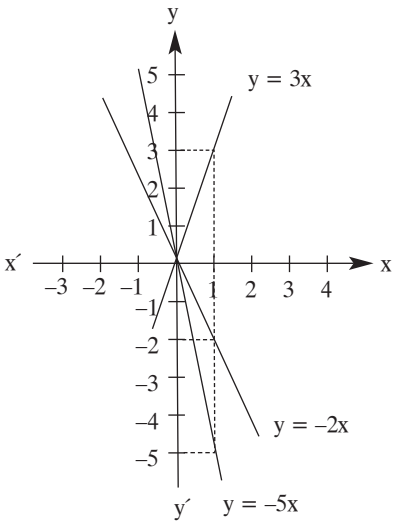
x	0	1
y	0	3

$y = -5x$

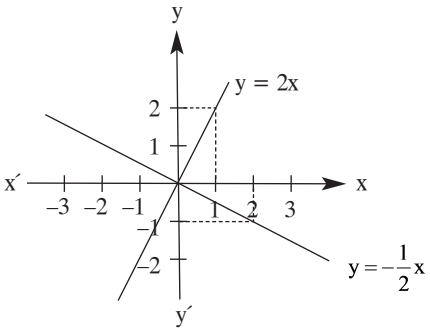
x	0	1
y	0	–5

$y = -2x$

x	0	1
y	0	–2



3.



$y = 2x$

x	0	1
y	0	2

$y = -\frac{1}{2}x$

x	0	2
y	0	–1

Οι δύο ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους.

4. Η ευθεία είναι της μορφής $y=\alpha x$, οπότε έχουμε

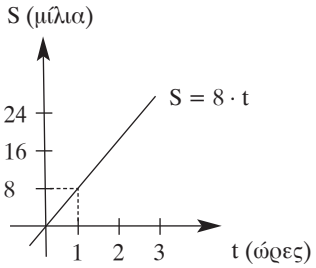
$6 = \alpha \cdot (-4)$ ή $\alpha = -\frac{3}{2}$. η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -\frac{3}{2}x$

5. $y = \frac{7}{2}x$

6. ε_1: $y = \frac{2}{3}x$ και ε_2: $y = \frac{5}{3}x$

7. $S = 8 \cdot t$

t	0	1
S	0	8



8. Η ευθεία είναι της μορφής $y=\alpha \cdot x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο Λ (3,–6) ισχείει:
$-6 = \alpha \cdot 3$ ή $\alpha = -2$
Άρα η κλίση της ευθείας είναι $\alpha = -2$

9. α) $y=1{,}05 \cdot x$
β) Για $x = 850$ έχουμε $y = 1{,}05 \cdot 850=892{,}5$ ευρώ
γ) Για $y = 945$ έχουμε $945=1{,}05 \cdot x$ ή $x = 900$ ευρώ

10. α) $y =5x$
β) 52,5 ευρώ
γ) 9 λίτρα

11. α) $y = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$ β) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ οπότε $\hat{\omega} = 30^0$

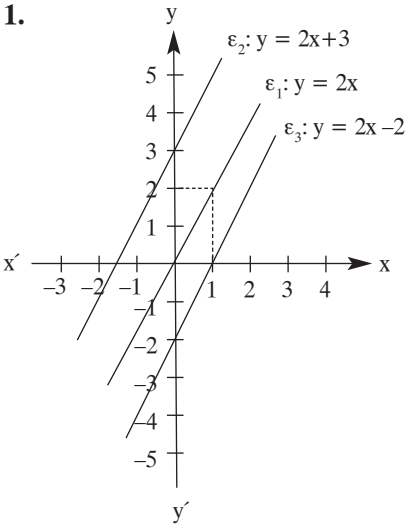
3.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Δ: $y = -7x + 3$
2) Β: (3,0)
3) Α: (0,7)
4) Δ: $3x - 2y = -6$
5) α) Β: $\frac{1}{3}$ β) Γ: (6,0) γ) Α: (0,–2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.



ε_1: y = 2x

x	0	1
y	0	2

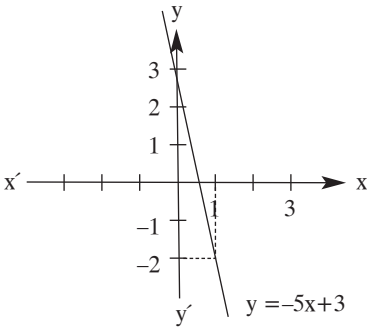
ε_2: y = 2x + 3

x	0	$-\frac{3}{2}$
y	3	0

ε_3: y = 2x –2

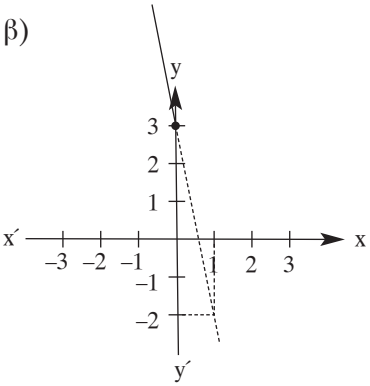
x	0	1
y	–2	0

2. α)



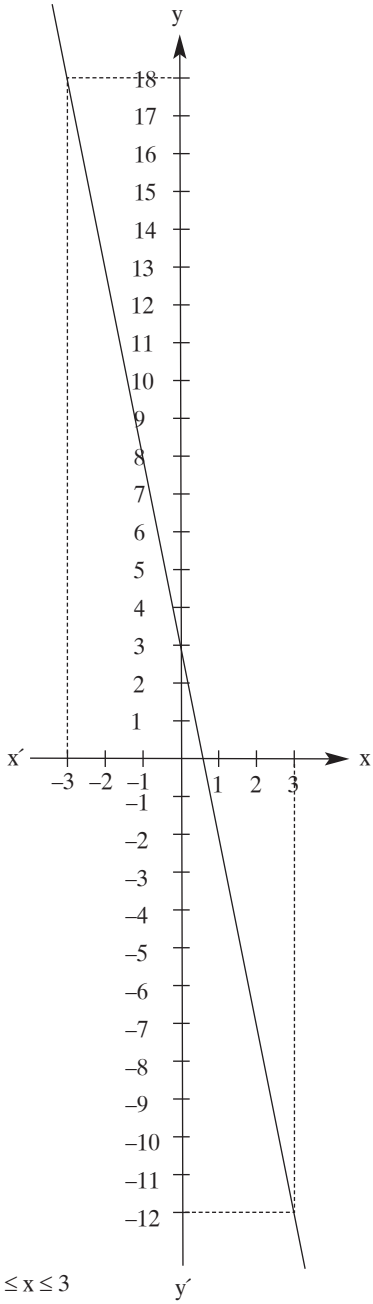
(x πραγματικός)

β)



(x ≤ 0)

γ)



$(-3 \le x \le 3$

3. ε_1: $y = (5\lambda - 2)x + 3$ και ε_2: $y = (\lambda + 2)x - 9$

Για να είναι παράλληλες πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, οπότε: $5\lambda - 2 = \lambda + 2$

$4\lambda = 4$

$\boxed{\lambda = 1}$

4. ε: $y = -\frac{5}{3}x + 7$

5. α) A (–2,1) B (2,4)

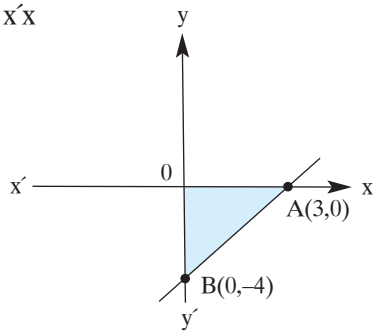
$(AB) = \sqrt{(2+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

β) Για να ανήκει το σημείο A(–2,1) στην ευθεία –3x + 4y = 10 πρέπει:
–3(–2) + 4 · 1 = 10 που ισχύει
Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία –3x + 4y = 10
Για ανήκει το σημείο B(2,4) στην ευθεία –3x + 4y = 10
πρέπει: –3 · 2 + 4 · 4 = 10
Άρα το σημείο B ανήκει στην ευθεία –3x + 4y = 10

6. Η ευθεία 4x –3y = 12 τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(3,0) και τον άξονα y΄y στο σημείο B(0,–4).

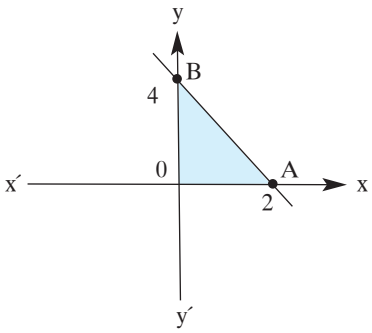
$E_{A\hat{O}B} = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}3\cdot|-4| =$

$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6\tau.\mu.$



7. α) 2x + y = 4

x	0	2
y	4	0



β) κλίση = –2

γ) $E_{A\hat{O}B} = \frac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 4\tau.\mu.$

8. α) K(–5,–1) Λ(2,–1) M(2,3) N(–5,3)

β) $KM = \sqrt{(2+5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \cong 8{,}06\mu.\mu.$

9. Επειδή είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x–7$, θα έχει τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης, δηλαδή $\alpha = 5$. Οπότε είναι της μορφής $y = 2x + \beta$ ή $y = 5x + \beta$. Αφού διέρχεται από το σημείο $A(–3,1)$ ισχύει; $1 = 5(–3) + \beta$ ή $\beta = 16$. Άρα η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 5x + 16$.

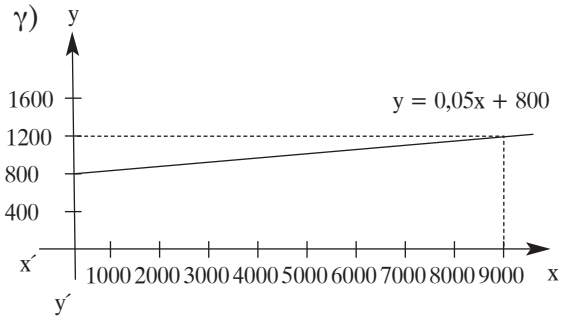
10. α) $y = 0,05x + 800$

β) Για $y = 1200$ έχουμε: $1200 = 0,05 \cdot x + 800$

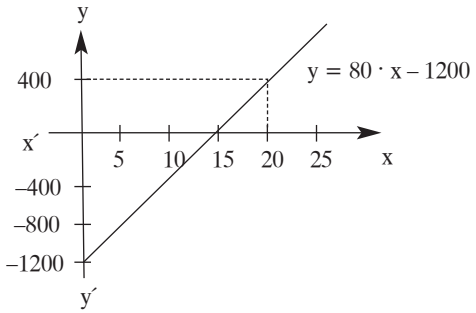
$0,05x = 400$

$x = 8.000$ ευρώ

γ)



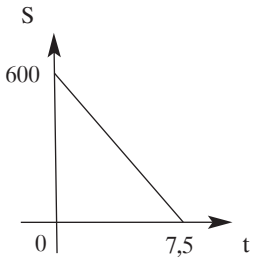
11. α) $y = 80 \cdot x –1200$ β)



12. α) Για $t = 0$ έχουμε $S=600 – 80 \cdot 0 = 600$Km

β) Για $S = 0$ έχουμε $0 = 600 – 80 \cdot t$ ή $t = 7,5$ ώρες

γ)

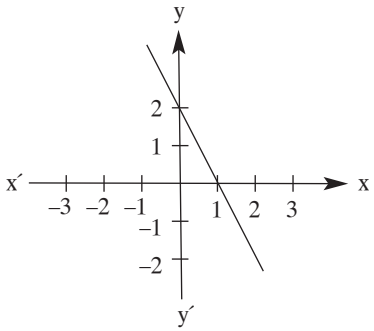


13. α) Επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2,–2) έχουμε:

$-2 = (3\alpha + 1) \cdot 2 +$ ή $-2 = 6\alpha + 2 + 2$ ή $6\alpha = -6$ ή $\alpha = -1$

β) Για $\alpha = -1$ έχουμε: $y = -2x + 2$

x	0	1
y	2	0



14. Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -5x + 7$ πρέπει να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε $2\lambda + 1 = -5$ ή $\lambda = -3$ και επειδή διέρχεται από το σημείο Β(–1,6) πρέπει:

$6 = [2 \cdot (-3) + 1](-1) + 3\mu - 2$

$6 = -5 \cdot (-1) + 3\mu - 2$

$3\mu = 3$

$\mu = 1$

Άρα $\lambda = -3$ και $\mu = 1$

3.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α), γ), δ) είναι αντιστρόφως ανάλογα

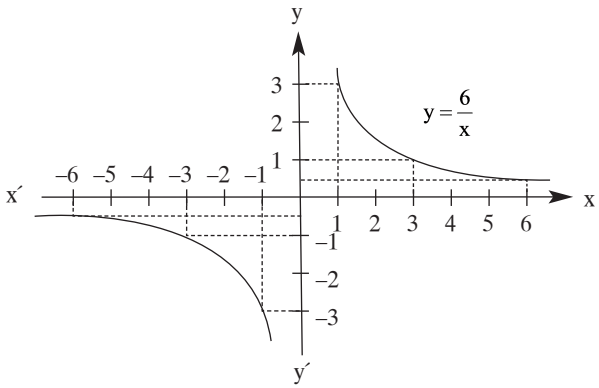
2) α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α)

x	–6	–3	–1	1	3	6
y	$-\frac{1}{2}$	–1	–3	3	1	$\frac{1}{2}$

β) $y = \frac{6}{x}$



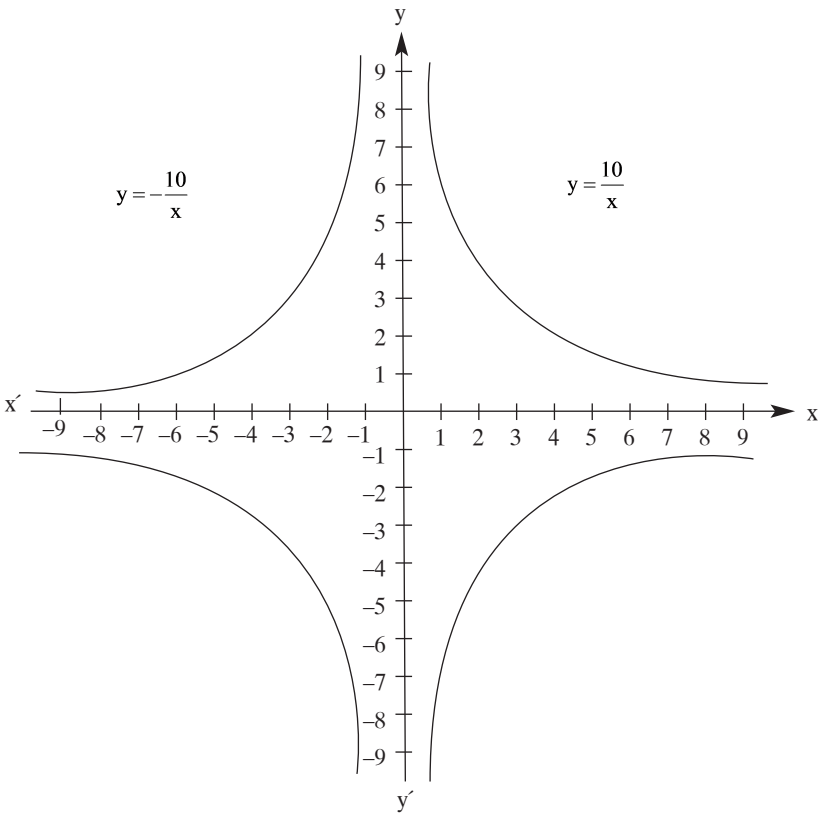
2.

$y = \frac{10}{x}$

x	–5	–4	–2	2	4	5
y	–2	–2,5	–5	5	2,5	2

$y = -\frac{10}{x}$

x	–5	–4	–2	2	4	5
y	2	2,5	5	–5	–2,5	–2



3. $y=-\frac{2}{x}$

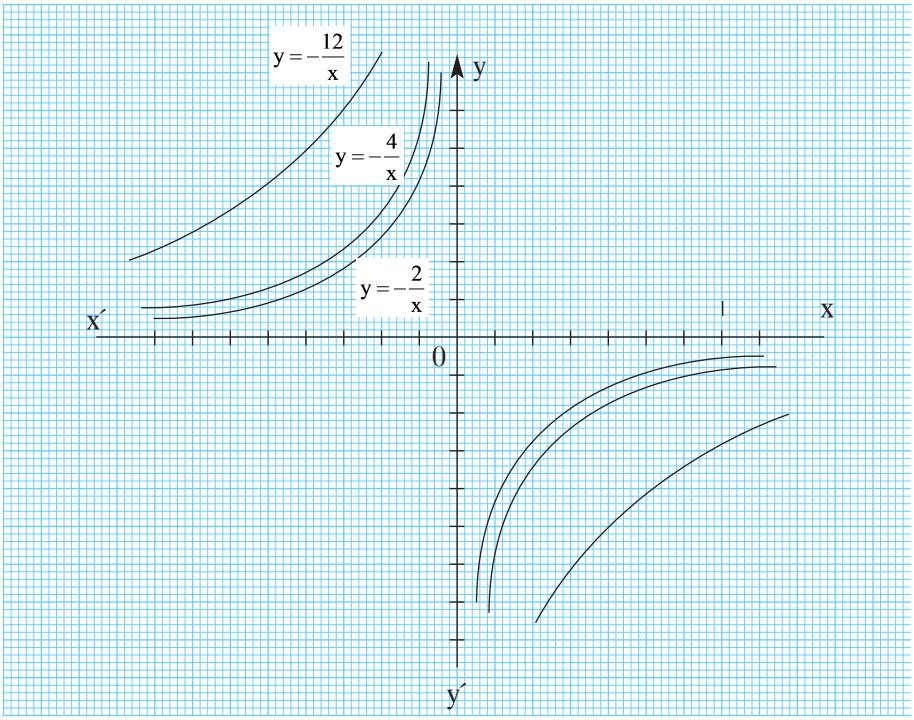
x	–4	–2	–1	1	2	4
y	$\frac{1}{2}$	–1	2	–2	–1	$-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{4}{x}$

x	–4	–2	–1	1	2	4
y	1	2	4	–4	–2	–1

$y=-\frac{12}{x}$

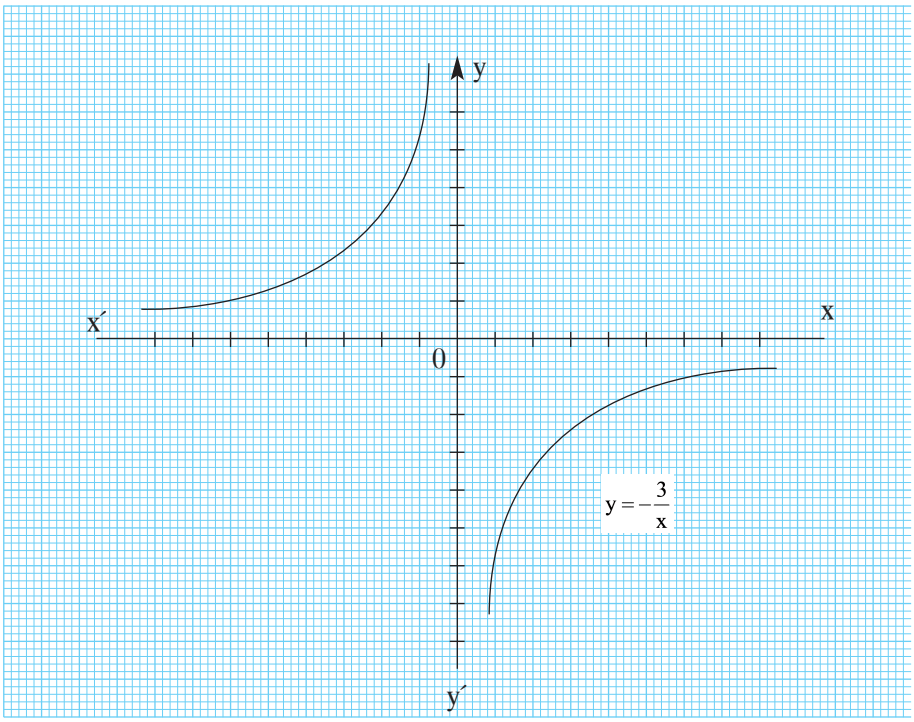
x	–6	–4	–3	3	4	6
y	2	3	4	–4	–3	–2



4. α) Επειδή διέρχεται από το σημείο $A\left(6,-\frac{1}{2}\right)$ ισχύει:

$-\frac{1}{2}=\frac{2\lambda-5}{6}$ ή $-3 = 2\lambda-5$ ή $2\lambda = 2$ ή $\boxed{\lambda = 1}$

β) Για $\lambda = 1$ έχουμε $y=-\frac{3}{x}$



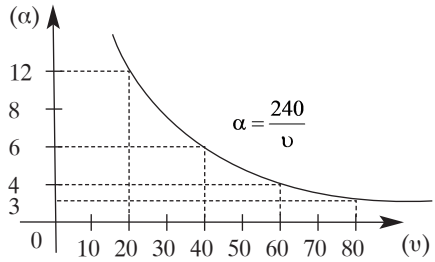
5. $12 \cdot (20 - 5) = 10 \cdot x$ ή $x = 18$ ημέρες

6. $150 \cdot (10 - 4) = (150 - x) \cdot 9$
$900 = 1350 - 9x$ ή $9x = 450$ ή $x = 50$ στρατιώτες πήραν μετάθεση.

7. α) $\alpha = \frac{240}{\upsilon}$

β)

υ	80	60	40	20
α	3	4	6	12



8. α) $y = \frac{48}{x}$

β) Για $x = 4$ έχουμε $y = \frac{48}{4} = 12$ ώρες

γ) Για $y = 6$ έχουμε $6 = \frac{48}{x}$ ή $x = 8$ εργάτες.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α), β) (Σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

$y = 5x^2 - 7$

x	0	2	1	–4	5
y	–7	13	–2	73	118

Θέμα 3

A (–1,3) B (7,9)

$$AB = \sqrt{(7+1)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

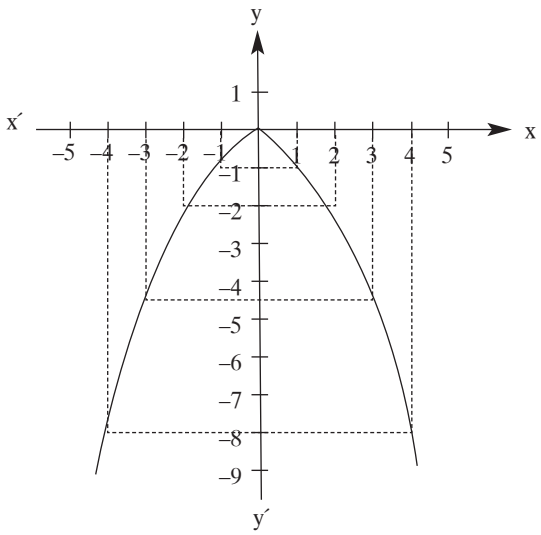
Θέμα 4

Για να ανήκει το ζεύγος (2,–2) στη γραφική παράσταση της $y = -\frac{1}{2} - x^2 + \lambda$

πρέπει: $-2 = -\frac{1}{2}2^2 + \lambda$ ή $\lambda = 0$

Για $\lambda = 0$ έχουμε $y = -\frac{1}{2}x^2$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–8	$-\frac{9}{2}$	–2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–2	$-\frac{9}{2}$	–8



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α), β) (σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

Η ευθεία είναι της μορφής $y = \alpha x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-3,15)$ ισχύει: $15 = \alpha \cdot (-3)$ ή $\alpha = -5$

Άρα $y = -5x$

Θέμα 3

α) Τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $A(-3,0)$ και τον άξονα y΄y στο σημείο $B(0,7)$

β) Κλίση $= \dfrac{7}{3}$

γ) $E_{A\hat{O}B} = \dfrac{1}{2}(OA)\cdot(OB) = \dfrac{1}{2}|-3|\cdot|7| = \dfrac{21}{2}$ τ.μ.

Θέμα 4

Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, οπότε:

$6 \cdot 10 = x \cdot 15$

$60 = 15 \cdot x$

$x = 4$ εργάτες

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

Θέμα 1

Α. Β. (Σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

α) $y = 1{,}08 \cdot x$

β) Για $x = 120$ έχουμε: $y = 1{,}08 \cdot 120 = 129{,}6$ ευρώ

γ) Για $y = 216$ έχουμε: $216 = 1{,}08 \cdot x$ ή $x = 200$ ευρώ

Θέμα 3

α) Είναι της μορφής $y = \alpha x$ και επειδή διέρχεται από το σημείο

$A(\sqrt{3},1)$ ισχύει: $1=\alpha\cdot\sqrt{3}$ ή $\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ή $\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Άρα $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

β) Έχουμε ότι $\varepsilon\varphi\hat{\omega}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, οπότε $\hat{\omega}=30^0$

Θέμα 4

Η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$, έχουμε $3 = \alpha \cdot 0 + \beta$ ή $\boxed{\beta = 0}$

Επειδή διέρχεται και από το σημείο $B(3,-12)$, έχουμε

$$-12 = \alpha \cdot 3 + 0 \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha = -4}$$

Άρα $y = -4x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. β) 2. γ) 3. δ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) 130 β) 45 γ) 167 δ) 18 ε) 8
2. α) 3,5 β) 24 γ) 56 δ) 208 ε) 450
3. α) 40% β) 400% γ) 100% δ) 80%
4. β) 165
5. Οι άνδρες είναι το 40% και οι γυναίκες το 60% του δείγματος.

6. Το ποσοστό του κόμματος "Α" είναι: $\frac{270}{405+270+225}=\frac{270}{900}=$ 0,3 ή 30%

Το ποσοστό του κόμματος "Β" είναι: $\frac{405}{405+270+225}=\frac{405}{900}=$ 0,45 ή 45%

Το ποσοστό του κόμματος "Γ" είναι: $\frac{225}{405+270+225}=\frac{225}{900}=$ 0,25 ή 25%

7. α) Ποσοστό αγοριών: $\frac{350}{500}=$ 0,7 ή 70%

β) Ποσοστό παιδιών που παίζουν μπάσκετ: $\frac{175}{500}=$ 0,35 ή 35%

8. Όχι. Έπρεπε να πάρει δείγμα από διάφορες ασφαλιστικές εταιρείες και όχι μόνο από μία, για να βγάλει σωστά αποτελέσματα.

9. Ο πληθυσμός της έρευνας είναι όλα τα άτομα που παρακολουθούν τηλεόραση. Το δείγμα είναι οι 200 μαθητές του σχολείου του. Το δείγμα δεν είναι αξιόπιστο.

4.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

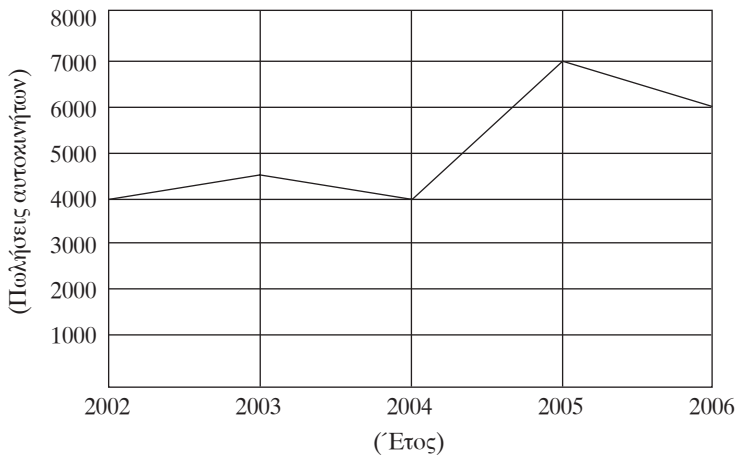
1. α) Γ. 100 β) Β. 20 γ) Δ. 65 δ) Α. 65 ε) Β. 0 στ) Α. 10%

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Και τα πέντε έτη πουλήθηκαν: 4.000 + 4.500 + 3.5 00+ 7.000 + 6.000 = 25.000 αυτοκίνητα.

β) Το ποσοστό των πωλήσεων το έτος 2005 είναι: $\frac{7000}{25.000} = 0{,}28$ ή 28%.

γ)



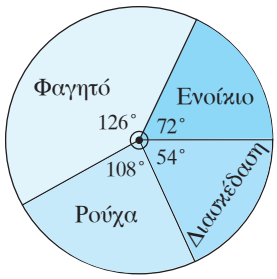
2. α) Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες:

ενοίκιο: $\frac{20}{100} \cdot 360^0 = 72^0$

φαγητό: $\frac{35}{100} \cdot 360^0 = 126^0$

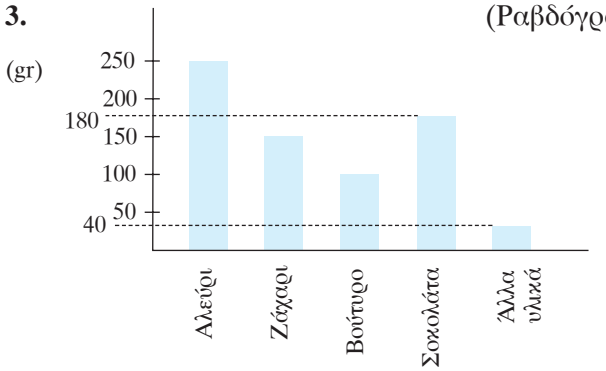
ρούχα: $\frac{30}{100} \cdot 360^0 = 108^0$

διασκέδαση: $\frac{15}{100} \cdot 360^0 = 54^0$



β) Ξοδεύει για ρούχα: $\frac{30}{100} \cdot 1500 = 450$ ευρώ

3. (Ραβδόγραμμα)



Υπολογίζουμε τις επίκεντρες γωνίες:

Αλεύρι: $\frac{250}{720} \cdot 360^0 = 125^0$

Ζάχαρη: $\frac{150}{720} \cdot 360^0 = 75^0$

Βούτυρο: $\frac{100}{720} \cdot 360^0 = 50^0$

Σοκολάτα: $\frac{180}{720} \cdot 360^0 = 90^0$

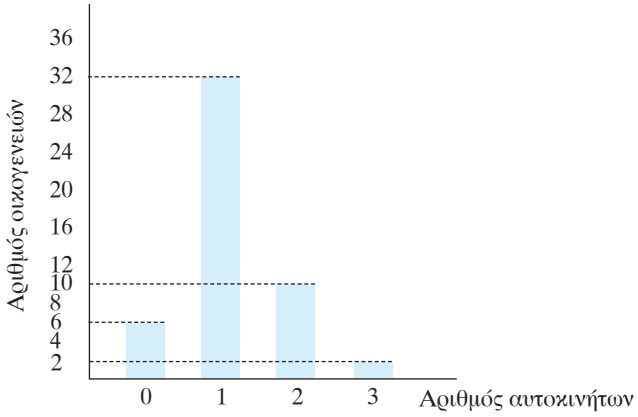
Άλλα υλικά: $\frac{40}{720} \cdot 360^0 = 20^0$

(Κυκλικό διάγραμμα)

4. α) 6 + 32 = 38 οικογένειες έχουν το πολύ ένα αυτοκίνητο
β) 10 οικογένειες έχουν 2 αυτοκίνητα
γ) 10 + 2 = 12 οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα

δ) $\frac{32}{50} = 0,64$ ή 64% έχουν ένα αυτοκίνητο

ε)

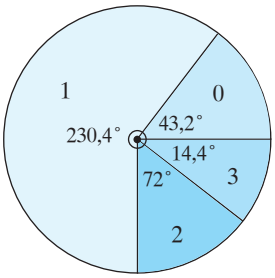


στ) 0 αυτοκίνητα: $\frac{6}{50}\cdot 360^0 = 43,2^0$

1 αυτοκίνητο: $\frac{32}{50}\cdot 360^0 = 230,4^0$

2 αυτοκίνητα: $\frac{10}{50}\cdot 360^0 = 72^0$

3 αυτοκίνητα: $\frac{2}{50}\cdot 360^0 = 14,4^0$



5. άζωτο: 90°
Οξυγώνο: 270°

4.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Β. 20 β) Α. 5 γ) Γ. $\frac{2}{20}$ δ) Δ. $\frac{11}{20}\cdot 100$ ε) Β. $\frac{5}{20}\cdot 360^0$

2)

Κόμμα	ψήφοι	Σχετικές συχν. (%)
Α	40	25
Β	16	10
Γ	32	20
Δ	48	30
Ε	24	15
Σύνολο	160	100

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αριθμός	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
1	2	10
2	4	20
3	6	30
4	5	25
5	2	10
6	1	5
Σύνολο	20	100

2.

Μάθημα	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
Αρχαία Ελληνικά	6	15
Νέα Ελληνικά	2	5
Αγγλικά	8	20
Μαθηματικά	10	25
Ιστορία	8	20
Γεωγραφία	6	15
Σύνολο	40	100

3. α)

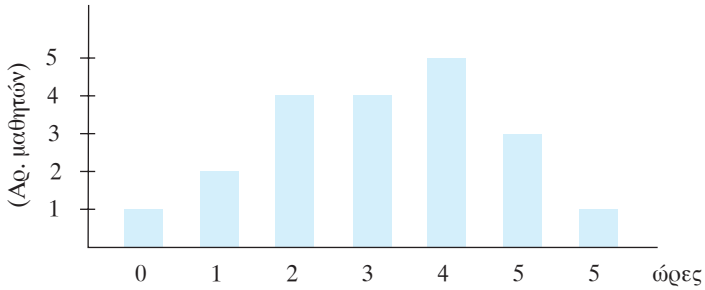
Αριθμός μαθητών	Αρ. τμημάτων	Σχετική συχν. (%)
26	4	25
27	6	37,5
28	3	18,75
29	2	12,5
30	1	6,25
Σύνολο	16	100

β) 3 + 2 + 1 = 6 τμήματα έχουν τουλάχιστον 28 μαθητές
γ) 4 + 6 + 3 = 13 τμήματα έχουν το πολύ 28 μαθητές

4. α)

Ώρες	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
0	I	1	5
1	II	2	10
2	III	4	20
3	IIII	4	20
4	~~IIII~~	5	25
5	III	3	15
6	I	1	5
Σύνολο		20	100

β)



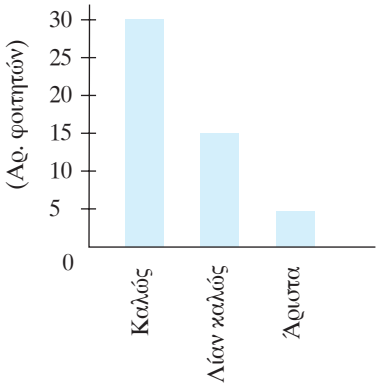
γ) 1+2+4+4=11 μαθητές βλέπουν το πολύ 3 ώρες τηλεόραση.

δ) $\frac{3+1}{20}=\frac{4}{20}=0,2$ ή 20% των μαθητών βλέπουν τουλάχιστον 5 ώρες τηλεόραση.

5. α)

Χαρακτηρισμός πτυχίου	Συχνότητα	Σχετική συχν. %	Γωνία κυκλικού τομέα
Καλώς	30	60	216°
Λίαν καλώς	15	30	108°
Άριστα	5	10	36°
Σύνολο	50	100	360°

β)



6. $\varphi + 2\varphi + 126^\circ + \frac{40}{200}\cdot 360^0 = 360^0$

$3\varphi + 126^\circ + 72^\circ = 360^\circ$
$3\varphi = 162^\circ$
$\varphi = 54^\circ$

Μεταβλητή	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)	Γωνία κυκλικού τομέα
Α	40	20	72°
Β	60	30	108°
Γ	70	35	126°
Δ	30	15	54°
Σύνολο	200	100	360°

7.

Αρ. παιδιών	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
0	12	24
1	10	20
2	18	36
3	7	14
4	3	6
Σύνολο	50	100

α) Τουλάχιστον δύο παιδιά έχουν: 28 οικογένειες ή $\frac{28}{50}=0,56$ ή 56%

β) Λιγότερα από τρία παιδιά έχουν: 40 οικογένειες ή $\frac{40}{50}=0,80$ ή 80%

γ) Ακριβώς ένα παιδί έχουν: 10 οικογένειες ή $\frac{10}{50}=0,20$ ή 20%

δ)Από 2 έως 3 παιδιά έχουν: 25 οικογένειες ή $\frac{25}{50}=0,50$ ή 50%

4.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) 1. Γ. 4
   2. Β. 14
   3. Δ. 8
   4. Α. 20%

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

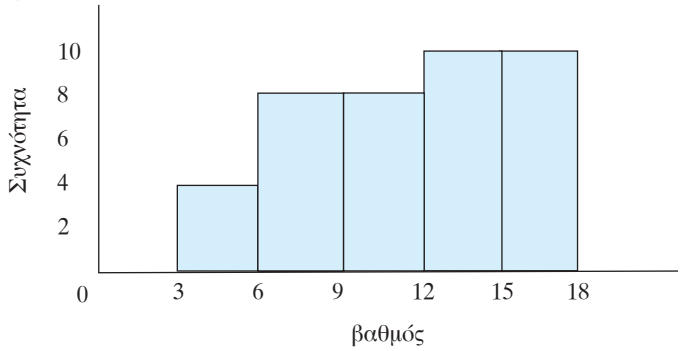
1. α) Εύρος = 18 – 3 = 15

Πλάτος κλάσης = $\frac{15}{5}=3$

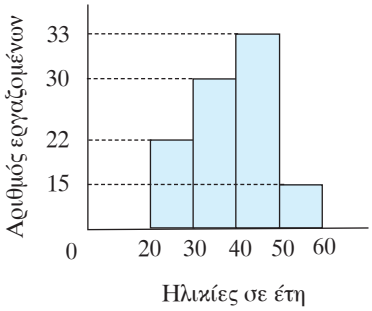
β)

Κλάσεις	Διαλογή	Συχνότητα	Σχετική συχν. (%)
3 – 6	IIII	4	10
6 – 9	~~IIII~~ III	8	20
9 – 12	~~IIII~~ III	8	20
12 – 15	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	25
15 – 18	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	25
Σύνολο		40	100

γ)



2. α)



β)

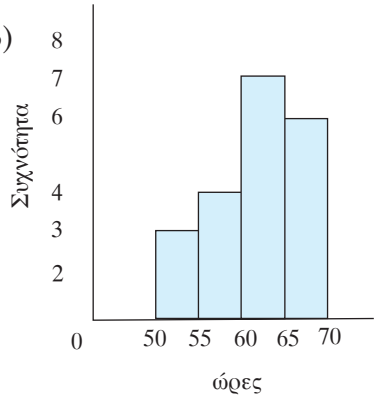
Ηλικίες σε έτη	Συχνότητα Αρ. εργαζομ.	Σχετική συχν. (%)
20 – 30	22	22
30 – 40	30	30
40 – 50	33	33
50 – 60	15	15
Σύνολο	100	100

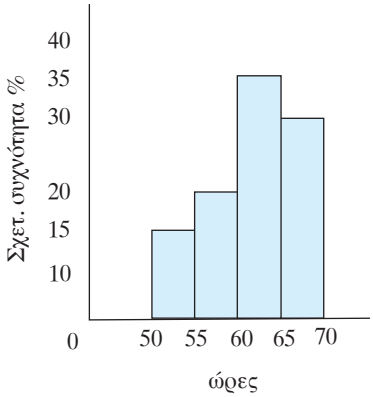
γ) 33% + 15% = 48% των υπαλλήλων έχει ηλικία πάνο από 40 έτη.

3. α)

Κλάσεις (ώρες)	**Διαλογή**	**Συχνότητα**	**Σχετική συχν. (%)**
50 – 55	III	3	15
55 – 60	IIII	4	20
60 – 65	~~IIII~~ II	7	35
65 – 70	~~IIII~~ I	6	30
Σύνολο		20	100

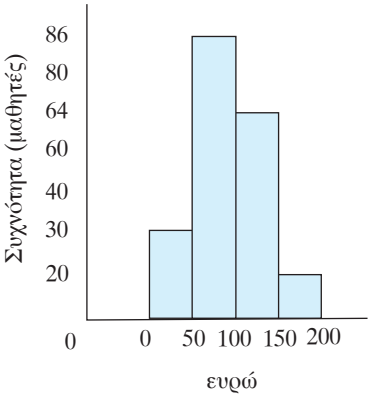
β)





4. α)

Ποσό (ευρώ)	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200
Σχετ. συχνότητα %	15%	43%	32%	10%
Συχνότητα	30	86	64	20



β) 64 + 20 = 84 μαθητές ξοδεύουν πάνω από 100 ευρώ.

γ) 30 + 86 + 64 = 180 μαθητές ξοδεύουν το πολύ 150 ευρώ.

5. α) 8 + 12 + 14 + 10 + 6 = 50 μαθητές

β) $\frac{6}{50}=0,12$ ή 12% πήρε πάνω από 16

γ) $\frac{8+12+7}{50}=\frac{27}{50}=0,54$ ή 54% πήρε κάτω από τη βάση.

4.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Γ. 6 2) Β. 567 3) α) Α. 25 β) Γ. 27 γ) Δ. 23
4) Α. 24 5) Β. $360^\circ \cdot f_i$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $\bar{x}=6$ β) $\bar{x}=13$ γ) $\bar{x}=0$ δ) $\bar{x}=16$

2. α) $\delta=\frac{2+3}{2}=2,5$ β) $\delta=50$ γ) $\delta=\frac{11+14}{2}=12,5$ δ) $\delta=0$

3. Έστω x ο ένας, τότε ο άλλος θα είναι 2x, οπότε έχουμε

$$5=\frac{3+4+5+6+11+x+2x}{7}$$

35 = 29 + 3x ή 3x = 6 ή x = 2
Άρα ο ένας είναι το 2 και ο άλλος το 4.

4. α) $\bar{x}=\frac{172+175+183+177+190+193+189+195}{8}=\frac{1474}{8}=184,25\text{cm}$

β) Έχουμε: 172, 175, 177, 183, 189, 190, 193, 195

$$\delta=\frac{183+189}{2}=186\text{cm}$$

γ) $\bar{x}'=\frac{1474-195+198}{8}=\frac{1477}{8}=184,625\text{cm}$

5.

Επισκέψεις	**Κέντρα κλάσης**	**Συχνότητα Αρ. μαθητών**	**(Κέντρο κλάσης) · (Συχνότητα)**
0 – 2	1	8	8
2 – 4	3	12	36
4 – 6	5	10	50
6 – 8	7	6	42
8 – 10	9	4	36
Σύνολο		40	172

Μέση τιμή $\bar{x} = \frac{172}{40} = 4,3$

6. Έχουμε: $\bar{x} = \frac{14 \cdot \bar{x}_A + 16 \cdot \bar{x}_K}{30}$

$$16,2 = \frac{14 \cdot 15,8 + 16 \cdot \bar{x}_K}{30}$$

$$486 = 221,2 + 16 \cdot \bar{x}_K$$

$$16 \cdot \bar{x}_K = 264,8$$

$$\bar{x}_K = 16,55$$

7. Έχουμε: $1.150 = \frac{1200 \cdot v + 1000 \cdot 5}{v + 5}$

1.150 (v + 5) = 1.200v + 5.000
1.150v + 5.750 = 1.200v + 5000
50v = 750
N = 15 εργαζόμενοι.

8. Πρέπει y – 2 = 14 ή $\boxed{y = 16}$

και $14 = \frac{4x + 2x - 1 + 8 + 15 + 14 + 6x - 1 + 21 + 7x + 1 + 31}{9}$

126 = 19x + 88 ή 19x = 38 ή $\boxed{x = 2}$

9. α)

Ηλικίες	Διαλογή	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα	Σχετ. συχν. %	(Κέντρο κλάσης) · (συχνότητα)
20 – 30	卌 卌 卌	25	15	30	375
30 – 40	卌 卌 卌 卌	35	20	40	700
40 – 50	卌 卌	45	10	20	450
50 – 60	卌	55	5	10	275
Σύνολο			50	100	1800

β) $\bar{x} = \frac{1800}{50} = 36$ έτη

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α), β) (Σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

α) $\frac{135}{240} = 0,5625$ ή 56,25% ποσοστό κοριτσιών.

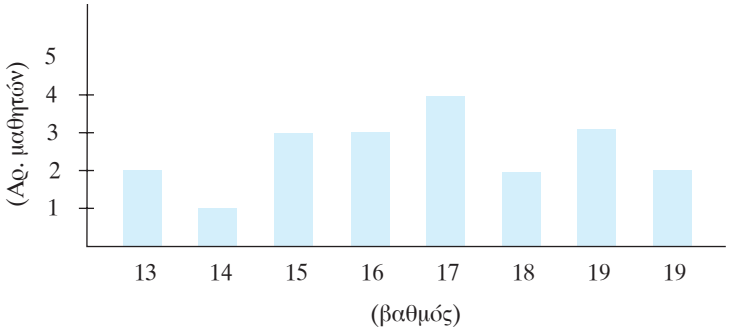
β) $\frac{80}{240} \cong 0,3333$ ή 33,33% ποσοστό παιδιών Β΄ γυμνασίου.

Θέμα 3

α)

Βαθμοί	Συχνότητα	Σχετ. συχν. %
13	2	10
14	1	5
15	3	15
16	3	15
17	4	20
18	2	10
19	3	15
20	2	10
Σύνολο	20	100

β)



γ) 2 + 1 + 3 + 3 = 9 μαθητές πήραν το πολύ 16.
δ) 20% + 10% + 15% + 10% = 55% των μαθητών πήραν τουλάχιστον 17.

Θέμα 4

α) $\bar{x} = \dfrac{168+172+180+170+175+183+175+177+169+171}{10} = \dfrac{1740}{10} = 174\text{cm}$

β) Βάζουμε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς και έχουμε:
168, 169, 170, 171, 172, 175, 175, 177, 180, 183

$\delta = \dfrac{172+175}{2} = 173{,}5\text{cm}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α), β) (Σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

$\bar{x}' = \dfrac{30\cdot 42-58+28}{30} = \dfrac{1260-30}{30} = 41$ έτη

Θέμα 3

α) $\bar{x} = \dfrac{1\cdot 5+3\cdot 20+5\cdot 12+7\cdot 9+9\cdot 4}{50} = \dfrac{5+60+60+63+36}{50} = \dfrac{224}{50} = 4{,}48$ ταινίες

β) $\dfrac{12}{2}$ + 9 + 4 = 19 μαθητές παρακολούθησαν τουλάχιστον 5 ταινίες.

Θέμα 4

α) Έχουμε: $f_1 + f_2 + 0,3 + f_4 = 1$ και $f_2 = 2f_1$ και $f_1 = 2f_4$

οπότε $2f_4 + 4f_4 + 0,3 + f_4 = 1$

$7f_4 = 0,7$

$f_4 = 0,1$. Άρα $f_1 = 0,2$ και $f_2 = 0,4$

β) $\bar{x} = 167 \cdot 0,2 + 173 \cdot 0,4 + 179 \cdot 0,3 + 185 \cdot 0,1 =$

$= 33,4 + 69,2 + 53,7 + 18,5$

$=174,8$cm.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $\Sigma_1 = 36$  $\Sigma_2 = 42$ 

β) $\Sigma_1 = 18$  $\Sigma_2 = 21$ 

γ) $\Sigma_1 = 9$  $\Sigma_2 = 10{,}5$ 

2. $\dfrac{\text{Εμ}(\text{ΑΒΓΔ})}{\text{Εμ}(\text{ΕΖΗΘ})} = \dfrac{9}{4{,}5} = 2$

3. $\dfrac{6}{5}$

1.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) 1. Β. 450mm^2
   2. Β. 51000cm^2
   3. Γ. $0{,}00039\text{dm}^2$
   4. Δ. $0{,}072\text{m}^2$

2) 1. $2{,}7\text{Km}^2 = 2.700.000\text{m}^2 = 2.700$ στρέμματα
   2. $46\text{m}^2 = 4.600\text{dm}^2 = 460.000\text{cm}^2 = 46.000.000\text{mm}^2$
   3. $528\text{dm}^2 = 5{,}28\text{m}^2 = 0{,}00528$ στρέμματα
   4. $7903\text{mm}^2 = 79{,}03\text{cm}^2 = 0{,}7903\text{dm}^2\ 0{,}007903\text{m}^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $25\text{m}^2 = 250.000\text{cm}^2$
$2{,}16\ \text{Km}^2 = 21.600.000.000\text{cm}^2$

$143dm^2 = 14.300cm^2$
$5779mm^2 = 57,79cm^2$
$712m^2 = 7.120.000cm^2$

2. $498cm^2 = 0,0498m^2$
$111dm^2 = 1,11m^2$
$12,7Km^2 = 12.700.000m^2$
$13.534mm^2 = 0,013534m^2$
$607dm^2 = 6,07m^2$

3. $456m^2 = 456.000.000mm^2$
$82,7dm^2 = 827.000mm^2$
$0,571cm^2 = 57,1mm^2$
$0,0025m^2 = 2.500mm^2$

4. $914m^2 = 0,000914Km^2$
$4832dm^2 = 0,00004832Km^2$
$17075m^2 = 0,017075Km^2$
103 στρέμματα = $0,103Km^2$

5. $72564m^2$ = 72,564 στρέμματα
$3,4Km^2$ = 3400 στρέμματα
$137920dm^2$ = 1,3792 στρέμματα
$45m^2$ = 0,045 στρέμματα

6.

m^2	dm^2	cm^2	mm^2
98,3	9.830	983.000	98.300.000
7,56	756	75.600	7.560.000
3,2103	321,03	32103	3.210.300
0,738019	73,8019	7380,19	738.019

1.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) 1. Β 2. Α 3. Γ 4. Β 5. Α 6. Β 7. Γ 8. Γ
2) 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Σ 5. Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Από τον τύπο Εμ. τετρ. = α^2 έχουμε:
$144 = \alpha^2$ ή $12^2 = \alpha^2$ ή $\alpha = 12cm$
Οπότε η περίμετρος του τετράγωνου είναι: $4 \cdot 12 = 48cm$.

2. Έστω xm το πλάτος, τότε 2x m το μήκος. Από τον τύπο της περιμέτρου έχουμε:
$2 \cdot x + 2 \cdot 2x = 162$ ή $2x + 4x = 162$ ή $6x = 162$ ή $x = 27$
Οπότε το πλάτος είναι 27m και το μήκος $2 \cdot 27 = 54m$.
Άρα Εμβ. = (μήκος) · (πλάτος) = $54 \cdot 27 = 1458m^2$.

3. Επειδή κάθε φύλλο έχει δύο επιφάνειες, η επιφάνεια κάθε φύλλου είναι:
Εμ. φύλου = $2 \cdot 16 \cdot 25 = 800cm^2$
Άρα τα 127 φύλλα έχουν επιφάνεια: $127 \cdot 800 = 101.600cm^2$.

4. Εμ. ορθογωνίου = $46 \cdot 20 = 920m^2$
χρειάζονται $300 \cdot 920 = 276.000g = 276Kg$.
θα μας κοστίσει $2 \cdot 276 = 552$ ευρώ.

5. Εμ. ορθογωνίου = $8 \cdot 7 = 56cm^2$ = Εμ. παραλληλόγραμου
Περίμετρος ορθογωνίου = $2 \cdot 8 + 2 \cdot 7 = 30cm$ = Περ. παραλληλόγραμμου.
Από τον τύπο της περιμέτρου παραλληλόγραμμου έχουμε
$2 \cdot 10 + 2 \cdot x = 30$ ή $2x = 10$ ή $x = 5cm$ η άλλη πλευρά του παραλληλόγραμμου
Από τον τύπο του εμβαδού παραλληλόγραμμου έχουμε
$10 \cdot \upsilon_1 = 56$ και $5 \cdot \upsilon_2 = 56$
$\upsilon_1 = 5{,}6cm$ $\upsilon_2 = 11{,}2cm$.

6. Έστω x η μικρή βάση του τραπεζίου, τότε 2x η μεγάλη βάση του έχουμε:

$$E = \frac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$$

$36 = \frac{(2x + x)\cdot 6}{2}$ ή $3x \cdot 6 = 72$ ή $3x = 12$ ή $x = 4$

Μικρή βάση = 4cm, Μεγάλη βάση = 8cm.

7. Εμβ. τετραγώνου (ΑΒΓΔ) = $18^2 = 324cm^2$

$E_{(ΑΚΒ)} = \frac{1}{4} \cdot 324 = 81cm$, όμως $E_{(ΑΚΒ)} = \frac{18\cdot x}{2}$ ή $81 = \frac{18\cdot x}{2}$

ή $18 \cdot x = 162$ ή $x = 9cm$

$E_{(ΔΚΛ)} = \frac{1}{6} \cdot 324 = 54cm$, όμως $E_{(ΔΚΛ)} = \frac{18\cdot y}{2}$ ή $54 = \frac{18\cdot y}{2}$

ή $18 \cdot y = 108$ ή $y = 6cm$

$E_{(ΒΓΛΚ)} = E_{(ΑΒΓΔ)} - E_{(ΑΒΚ)} - E_{(ΔΚΛ)} = 324 - 81 - 54 = 189cm^2$.

8. $E_{(ΕΖΗΘ)} = E_{(ΑΒΓΔ)} - 4 \cdot E_{(ΑΕΘ)} = 32 \cdot 18 - 4 \cdot \frac{16\cdot 9}{2} = 576 - 288 = 288cm^2$.

9. α) Ισχύει: ΑΜ = ΜΒ και $υ_1 = υ_2$

Άρα $E_{(ΑΜΔ)} = \frac{ΑΜ\cdot υ_1}{2} = \frac{ΑΜ\cdot υ_2}{2} = E_{(ΜΒΓ)}$

β) Επειδή $ΓΔ = \frac{1}{2}$ ΑΒ = ΑΜ=ΜΒ

και $υ_3 = υ_1 = υ_2$ έχουμε

$E_{(ΜΔΓ)} = E_{(ΑΜΔ)} = E_{(ΒΜΓ)}$

Άρα $E_{(ΜΔΓ)} = \frac{1}{3} E_{(ΑΒΓΔ)}$

10. α) $x^2 = 81$ ή $x = 9cm$

β) $5 \cdot x = 60$ ή $x = 12cm$

γ) $\frac{8\cdot x}{2} = 24$ ή $x = 6cm$

δ) $\frac{x\cdot x}{2} = 32$ ή $x^2 = 64$ ή $x = 8cm$

11. α) 24,5cm^2 β) 300cm^2 γ) 228cm^2 δ) 70cm^2 ε) 169cm^2

12. $E_{(ΑΒΓΔ)} = \dfrac{(40+25)\cdot 30}{2} = 975m^2$

$E_{(ΕΖΗΘ)} = 4 \cdot 30 = 120m^2$

Άρα απομένουν 975 – 120 = 855m^2

13. $E_{(ΑΒΓΔ)} = 1024$ ή $ΒΓ^2 = 1024$ ή $ΒΓ = 32cm$

$E_{(ΒΗΖΕ)} = 676$ ή $ΒΕ^2 = 676$ ή $ΒΕ = 26cm$

$E_{(ΓΕΖ)} = \dfrac{(ΕΖ)\cdot(ΓΕ)}{2} = \dfrac{26\cdot 6}{2} = 78cm^2$

(ΕΖ = ΒΕ= 26cm και ΕΖ = ΒΓ – ΒΕ = 32 – 26 = 6cm).

14. $E_{(ΑΒΕΖΗΘ)} = E_{(ΑΒΓΔ)} - E_{(ΓΕΖ)} - E_{(ΔΗΘ)}$

$= 80^2 - \dfrac{30\cdot 20}{2} - \dfrac{40\cdot 15}{2} = 6400 - 300 - 300 = 5.800m^2$

ή 5,8 στρέμματα

Άρα η αξία του χωραφιού είναι: 5,8 · 12.000 = 69.600 ευρώ.

15. α) $E = \dfrac{4\cdot 4,5}{2} + \dfrac{1,5\cdot 3}{2} = 9 + 2,25 = 11,25cm^2$

β) $E_{(ΑΕΖΗΘ)} = E_{(ΑΒΓΔ)} - E_{(ΑΔΕ)} - E_{(ΘΒΗ)} - E_{(ΓΖΗ)} =$

$= 8 \cdot 5 - \dfrac{5\cdot 2,5}{2} - \dfrac{5\cdot 2}{2} - \dfrac{3\cdot 3,5}{2} =$

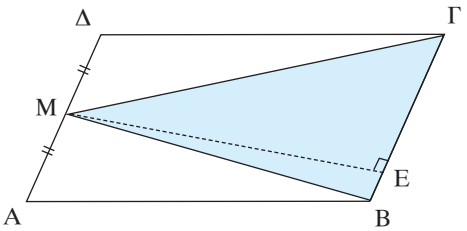
$= 40 - 6,25 - 5 - 5,25$

$= 23,5cm^2$

16. $E_{(ΒΜΓ)} = \dfrac{1}{2}(ΒΓ)\cdot(ΜΕ)$ και

$E_{(ΑΒΓΔ)} = (ΒΓ)\cdot(ΜΕ)$

Άρα $E_{(ΒΜΓ)} = \dfrac{1}{2} E_{(ΑΒΓΔ)}$



Επειδή το εμβαδόν του $\overset{\Delta}{ΒΜΓ}$ είναι το μισό του εμβαδού του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ, τα εμβαδά των $\overset{\Delta}{ΑΜΒ}$ και $\overset{\Delta}{ΜΔΓ}$ θα είναι το άλλο μισό του εμβαδού ΑΒΓΔ.

Άρα $E_{(ΒΜΓ)} = E_{(ΑΜΒ)} + E_{(ΔΜΓ)}$

1.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) 1. Β(x = 6cm) 2. Α(x = 13cm) 3. Δ(x = 24cm)
2) 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Σ 5. Σ

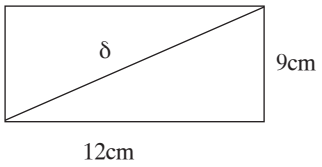
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $26^2 = 24^2 + 10^2$
$676 = 576 + 100$
$676 = 676$ ισχύει
Είναι ορθογώνιο

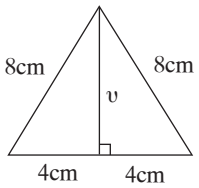
β) $29^2 = 20^2 + 21^2$
$841 = 400 + 441$
$841 = 841$ ισχύει
Είναι ορθογώνιο

γ) $6^2 = 5^2 + 4^2$
$36 = 25 + 16$
$36 = 41$ δεν ισχύει
Δεν είναι ορθογώνιο

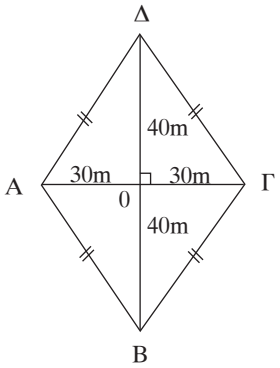
2. $\delta^2 = 12^2 + 9^2$
$\delta^2 = 144 + 81$
$\delta^2 = 225$
$\delta = \sqrt{225} = 15$cm
$E_{\text{τετράγωνου}} = \delta^2 = 15^2 = 225$cm



3. Από Π.Θ. έχουμε
$8^2 = \upsilon^2 + 4^2$
$64 = \upsilon^2 + 16$
$\upsilon^2 = 64 - 16$
$\upsilon^2 = 48$
$E_{\text{τετράγωνου}} = \upsilon^2 = 48\text{cm}^2$

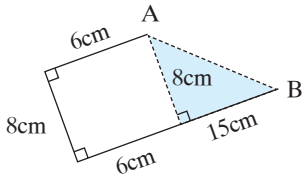


4. α) Από το Π.Θ. στο τρίγ. $\Gamma\overset{\Delta}{O}\Delta$ έχουμε:
$\Gamma\Delta^2 = 40^2 + 30^2$
$\Gamma\Delta^2 = 2500$
$\Gamma\Delta = 50$m
Περίμετρος $= 4 \cdot 50 = 200$m
β) Η περίφραξη κοστίζει
$15 \cdot 200 = 3000$ ευρώ



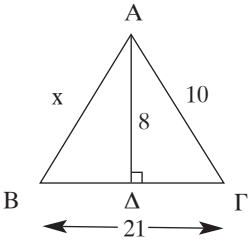
5. $ΛΚ^2 = 21^2 + 20^2$ ή $ΛΚ^2 = 441 + 400$ ή $ΛΚ^2 = 841$ ή $ΛΚ = 29Km$

6. $AB^2 = 8^2 + 15^2$
$AB^2 = 64 + 225$
$AB^2 = 289$
$AB^2 = 17^2$
$AB = 17cm$

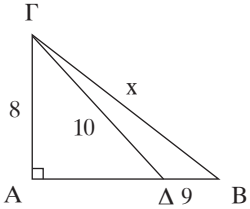


7. Για να είναι τέλειο ορθογώνιο πρέπει να ισχύει Π.Θ., δηλαδή
$150^2 = 75^2 + 130^2$
$22500 = 5625 + 16900$
$22500 = 22525$ δεν ισχύει
Άρα καλά έκανε γιατί δεν είναι τέλειο ορθογώνιο.

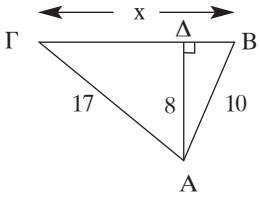
8. α) $ΔΓ^2 = 10^2 – 8^2$ ή $ΔΓ^2 = 100 – 64$
$ΔΓ^2 = 36$ ή $ΔΓ = 6$
Οπότε $ΒΔ = 21 – 6 = 15$
Άρα $x^2 = 8^2 + 15^2$
$x^2 = 289$
$x= 17$



β) Από Π.Θ. έχουμε:
$ΓΔ^2 = ΑΔ^2 + ΑΓ^2$
$10^2 = ΑΔ^2 + 8^2$
$ΑΔ^2 = 100 – 64$
$ΑΔ^2 = 36$ ή $ΑΔ= 6$
$ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 6+9 = 15$
Άρα $x^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$
$x^2= 15^2 + 8^2$
$x^2 = 289$ ή $x = 17$



γ) Από Π.Θ. έχουμε:
$ΑΒ^2 = ΔΒ^2 + ΑΔ^2$
$10^2 = ΔΒ^2+ 8^2$
$ΔΒ^2 = 36$ ή $ΔΒ = 6$
Ακόμα $ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΔΓ^2$
$17^2 = 8^2 + ΔΓ^2$
$ΔΓ^2 = 289 – 64$
$ΔΓ^2 = 225$ ή $ΔΓ = 15$
Άρα $x = 6 + 15 = 21$



9. α) $AB = A\Gamma = \dfrac{128-48}{2} = 40cm$

β) Από Π.Θ. έχουμε:

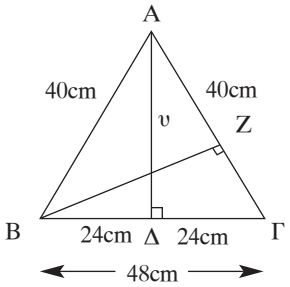
$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$

$40^2 = \upsilon^2 + 24^2$

$1600 = \upsilon^2 + 574$

$\upsilon^2 = 1600 - 574$

$\upsilon^2 = 1024$ ή $\upsilon = 32cm$



γ) $E(AB\Gamma) = \dfrac{48 \cdot 32}{2} = 768cm^2$

δ) $E(AB\Gamma) = \dfrac{A\Gamma \cdot BZ}{2}$ ή $768 = \dfrac{40 \cdot BZ}{2}$ ή $40 \cdot BZ = 1536$ ή $BZ = 38{,}4cm$

10. Έστω $BK = xcm$, τότε $\Gamma K = 8 - x$ cm

Από Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{ABK}$: $AK^2 = AB^2 + BK^2$

$AK^2 = 9^2 + x^2$

$AK^2 = 81 + x^2$ (1)

Από Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma K}$: $\Delta K^2 = \Delta\Gamma^2 + \Gamma K^2$

$\Delta K^2 = 7^2 + (8-x)^2$

$\Delta K^2 = 49 + (8-x)^2$ (2)

Επειδή $AK = \Delta K$ από (1) και έχουμε:

$81 + x^2 = 49 + (8-x)^2$

$81 + x^2 = 49 + (8-x) \cdot (8-x)$

$81 + x^2 = 49 + 64 + 8x - 8x + x^2$

$16x = 32$

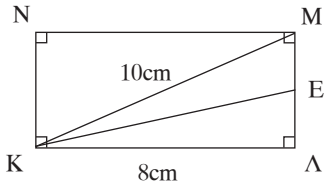
$x = 2cm$. Άρα $BK = 2cm$.

11. Από Π.Θ. στο ΚΛΜ: $KM^2 = M\Lambda^2 + K\Lambda^2$

$10^2 = M\Lambda^2 + 8^2$

$M\Lambda^2 = 36$ ή $M\Lambda = 6cm$

Οπότε $E\Lambda = \dfrac{M\Lambda}{2} = \dfrac{6}{2} = 3cm$



Από Π.Θ. στο $\overset{\Delta}{K\Lambda E}$ έχουμε:

$KE^2 = 8^2 + 3^2$ ή $KE^2 = 73$

Άρα $E_{\text{τετράγωνον}} = KE^2 = 73cm^2$

12. $E_{(EZH\Theta)} = EZ^2$ ή $136 = EZ^2$

Από Π.Θ. στο τριγ. ΕΒΖ έχουμε:

$EZ^2 = EB^2 + BZ^2$

$136 = 6^2 + x^2$
$x^2 = 100$
$x = 10cm$

Οπότε η πλευρά του τετράγωνου ΑΒΓΔ είναι $10 + 6 = 16cm$
Άρα $E_{(ΑΒΓΔ)} = 16^2 = 256cm^2$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

Α. Β. (σχολικό βιβλίο)

Θέμα 2

Μήκος = 20cm και Εμβ. = $20 \cdot 14 = 280cm^2$

Θέμα 3

α) Δεν είναι ορθογώνιο
β) Είναι ορθογώνιο
γ) Είναι ορθογώνιο

Θέμα 4

α) 16cm β) $υ = 20cm$ γ) $240cm^2$ δ) $υ_1 = 15cm$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

Α. (σχολικό βιβλίο)
Β. α) $x = 5cm$ β) $x = 7cm$

Θέμα 2

Η άλλη πλευρά του παραλληλόγραμμου είναι $27 – 15 = 12cm$
Από τον τύπο του εμβαδού έχουμε:

$$υ_1 = \frac{300}{15} = 20cm \quad \text{και} \quad υ_2 = \frac{300}{12} = 25cm$$

Θέμα 3

α) Πρέπει $(7x–2)+(6x–4) + 4x = 96$
$17x = 102$
$x = 6$

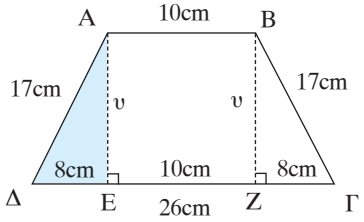
Οπότε: ΛΜ = 40cm, ΚΜ = 32cm και ΛΚ = 24cm

β) Έχουμε $ΛΜ^2 = ΚΜ^2 + ΛΚ^2$

$40^2 = 32^2 + 24$

1600 = 1600 ισχύει Π.Θ., Άρα το τρίγ. ΛΚΜ είναι ορθογώνιο

Θέμα 4



Στο τριγ. ΑΕΔ ($\hat{E} = 90^0$)

εφαρμόζουμε Π.Θ.:

$AΔ^2 = AE^2 + ΔE^2$

$17^2 = υ^2 + 8^2$

$υ^2 = 289 - 64$

$υ^2 = 225$

υ = 15cm

Άρα $E_{τραπεζίου} = \frac{(B+β)\cdot υ}{2} = \frac{(26+10)\cdot 15}{2} = 270cm^2$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) 1. Β 2. Δ 3. Α 4. Β 5. Α 6. Δ 7. Γ
2) 1. Λ 2. Λ 3. Σ 4. Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

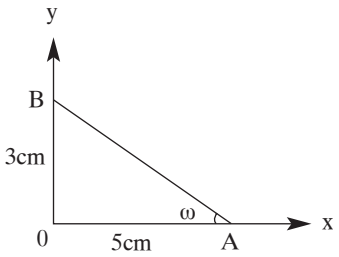
1. α) $\varepsilon\varphi 40^{o} = \frac{x}{5}$ ή $0{,}839 = \frac{x}{5}$ ή $x = 0{,}839 \cdot 5$ ή $x = 4{,}195\text{cm}$

β) $\varepsilon\varphi 50^{o} = \frac{6}{x}$ ή $1{,}192 = \frac{6}{x}$ ή $x = \frac{6}{1{,}192}$ ή $x = 5\text{ cm}$

γ) $\varepsilon\varphi 48^{o} = \frac{20}{x}$ ή $1{,}111 = \frac{20}{x}$ ή $x = \frac{20}{1{,}111}$ ή $x \cong 18\text{cm}$

δ) $\varepsilon\varphi 60^{o} = \frac{x}{15}$ ή $1{,}732 = \frac{x}{15}$ ή $x = 1{,}732 \cdot 15$ ή $x = 25{,}98\text{cm}$

2. Σχεδιάζουμε μια ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και στην πλευρά Ox παίρνουμε τμήμα OA = 5cm και στην πλευρά oy παίρνουμε τμήμα OB = 3cm. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB έχουμε



$\varepsilon\varphi\omega = \frac{OB}{OA} = \frac{3}{5}$

3. $\varepsilon\varphi 20^{o} = \frac{5}{A\Gamma}$ ή $0{,}364 = \frac{5}{A\Gamma}$ ή $A\Gamma = \frac{5}{0{,}364}$ ή $A\Gamma \cong 13{,}736\text{ cm}.$

$\varepsilon\varphi 50^{o} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}$ ή $1{,}192 = \frac{\Gamma\Delta}{13{,}736}$ ή $\Gamma\Delta \cong 16{,}37\text{ cm}$

Άρα $x = B\Gamma + \Gamma\Delta = 5 + 16{,}37 = 21{,}37\text{cm}.$

4. $\varepsilon\varphi 25^o = \dfrac{12}{\text{ΑΓ}}$ ή $0{,}466 = \dfrac{12}{\text{ΑΓ}}$ ή $\text{ΑΓ} = \dfrac{12}{0{,}466}$ ή $\text{ΑΓ} \cong 25{,}75\text{m}$.

$\varepsilon\varphi 42^o = \dfrac{12}{\text{ΒΓ}}$ ή $0{,}9 = \dfrac{12}{\text{ΒΓ}}$ ή $\text{ΒΓ} = \dfrac{12}{0{,}9}$ ή $\text{ΒΓ} \cong 13{,}33\text{m}$.

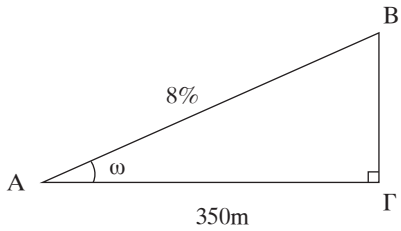
Άρα ΑΒ = ΑΓ – ΒΓ = 25,75 – 13,33 = 12,42m.

5. $\varepsilon\varphi 23^o = \dfrac{\text{ΒΓ}}{30}$ ή $0{,}424 = \dfrac{\text{ΒΓ}}{30}$ ή $\text{ΒΓ} = 0{,}424 \cdot 30$ ή $\text{ΒΓ} = 12{,}72\text{m}$.

$\varepsilon\varphi 41^o = \dfrac{\text{ΒΔ}}{30}$ ή $0{,}869 = \dfrac{\text{ΒΔ}}{30}$ ή $\text{ΒΔ} = 0{,}869 \cdot 30$ ή $\text{ΒΔ} = 26{,}07\text{m}$.

Άρα x = ΒΔ – ΒΓ = 26,07 – 12,72 = 13,35m.

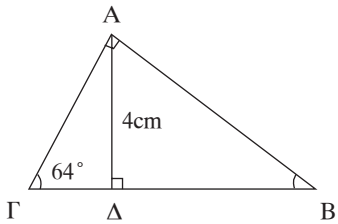
6. $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$. Οπότε



$\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$ ή $0{,}08 = \dfrac{\text{ΒΓ}}{350}$ ή

ΒΓ = 0,08 · 350
ΒΓ = 28m.

7. Επειδή $\hat{\Gamma} = 64^0$, έχουμε



$\hat{B} = 90^0 - 64^0 = 26^0$. Οπότε $\varepsilon\phi 64^0 = \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΓΔ}}$ ή

$2{,}05 = \dfrac{4}{\text{ΓΔ}}$ ή $\text{ΓΔ} = \dfrac{4}{2{,}05}$ ή $\text{ΓΔ} \cong 1{,}95$ cm.

$\varepsilon\varphi 26^o = \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΒ}}$ ή $0{,}487 = \dfrac{4}{\text{ΔΒ}}$ ή $\text{ΔΒ} = \dfrac{4}{0{,}487}$ ή $\text{ΔΒ} \cong 8{,}21$ cm.

Άρα ΒΓ = 1,95 + 8,21 = 10,16 cm.

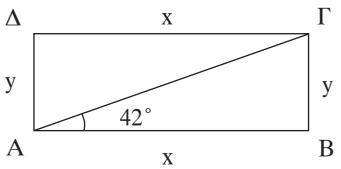
8. $\varepsilon\phi\widehat{M} = \dfrac{\text{ΚΛ}}{\text{ΚΜ}}$ και $\varepsilon\phi\theta = \dfrac{\text{ΚΝ}}{\text{ΚΜ}}$. Επειδή $\varepsilon\phi\widehat{M} = 2\varepsilon\varphi\theta$ έχουμε

$\dfrac{\text{ΚΛ}}{\text{ΚΜ}} = 2\dfrac{\text{ΚΝ}}{\text{ΚΜ}}$ ή ΚΛ = 2 · ΚΝ, άρα Ν μέσο του ΚΛ.

9. Περίμετρος $= 2x + 2y$

$19 = 2x + 2y$

$9{,}5 = x + y \qquad (1)$



Έχουμε $εφ42^o = \dfrac{y}{x}$ ή $0{,}9 = \dfrac{y}{x}$ ή $y = 0{,}9\,x \qquad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε

$9{,}5 = x + 0{,}9\,x$ ή $9{,}5 = 1{,}9x$ ή $x = \dfrac{9{,}5}{1{,}9}$ ή $x = 5$ cm.

Οπότε $y = 0{,}9 \cdot 5 = 4{,}5$ cm.

Άρα Ε ορθογωνίου $= x \cdot y = 5 \cdot 4{,}5 = 22{,}5$ cm^2

10. $εφω = \dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΒ}{2 \cdot ΑΔ}$

$εφθ = \dfrac{ΑΒ}{ΑΔ}$

άρα $εφθ = 2 \cdot εφω$.

2.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Β β) Γ γ) Α δ) Δ

2) Γ: $\dfrac{5}{12}$

3) β), δ), ε), η) δεν μπορούν να εκφράζουν το ημίτονο ή το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας.

4) α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ, στ) Λ

5) α) $ημ^2Μ + συν^2Μ = 1$

β) $συν^2Μ + συν^2Λ = 1$

γ) $ημΛ = \dfrac{ΚΜ}{ΜΛ}$ δ) $συνΛ = \dfrac{ΚΛ}{ΜΛ}$ ε) $\dfrac{ημΜ}{συνΜ} = εφΜ$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Πρώτα βρίσκουμε την πλευρά ΕΖ με Π.Θ.

$ΕΖ^2 = ΔΖ^2 - ΔΕ^2$ ή $ΕΖ^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2$ ή $ΕΖ^2 = 6{,}25 - 2{,}25$

$ΕΖ^2 = 4$ ή $ΕΖ = 2$ cm.

Έχουμε $ημΔ = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}$ $ημZ = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$

$συνΔ = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5}$ $συνZ = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5}$

β) $ΑΓ^2 = 21^2 + 20^2$ ή $ΑΓ^2 = 841$ ή $ΑΓ = 29cm$

$ημΑ = \frac{20}{29}$ $ημΒ = \frac{21}{29}$

$συνΑ = \frac{21}{29}$ $συνΒ = \frac{20}{29}$

γ) $ΘΗ^2 = 20^2 - 16^2$ ή $ΘΗ^2 = 144$ ή $ΘΗ = 12cm$

$ημΘ = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$ $ημZ = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

$συνΘ = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $συνZ = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

2. Από τη σχέση $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε

$$ημ^2ω + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$ημ^2ω + \frac{25}{169} = 1$$

$$ημ^2ω = 1 - \frac{25}{169}$$

$ημ^2ω = \frac{144}{169}$ ή $ημω = \sqrt{\frac{144}{169}}$ ή $συνω = \frac{12}{13}$

Οπότε $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

3. Από τη σχέση $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε $συνω = \frac{15}{17}$ και $εφω = \frac{8}{15}$

4. α) $5 - 3\,\eta\mu\omega > 2$ ή $-3\eta\mu\omega > -3$ ή $\eta\mu\omega < 1$ που ισχύει

β) $\left.\begin{array}{l}\eta\mu\omega < 1 \text{ ή } 7\,\eta\mu\omega < 7 \\ \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \text{ ή } 4\,\sigma\upsilon\nu\omega < 4\end{array}\right\}$ άρα $7\,\eta\mu\omega + 4\,\sigma\upsilon\nu\omega < 11$

γ) $6 + 3\,\sigma\upsilon\nu\omega < 9$ ή $3\,\sigma\upsilon\nu\omega < 3$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega < 1$ που ισχύει

δ) $\left.\begin{array}{l}\eta\mu\omega < 1 \text{ ή } 2\,\eta\mu\omega < 2 \\ \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \text{ ή } 3\,\sigma\upsilon\nu\omega < 3\end{array}\right\}$ άρα $2\,\eta\mu\omega + 3\,\sigma\upsilon\nu\omega < 5$ και $2\,\eta\mu\omega + 3\,\sigma\upsilon\nu\omega + 5 < 10$

5. Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τρίγωνο $AB\Delta\ (\hat{B} = 90^0)$:

$A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2$

$10^2 = 8^2 + B\Delta^2$ ή $B\Delta^2 = 100 - 64$ ή $B\Delta^2 = 36$ ή $B\Delta = 6cm$.

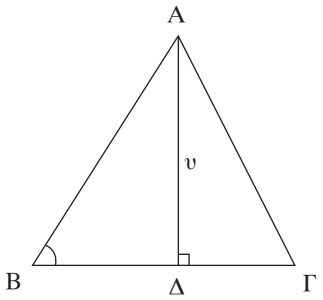
Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\Delta B}{AB}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$, οπότε

$\dfrac{\Delta B}{AB} = \dfrac{\Delta\Gamma}{B\Delta}$ ή $\dfrac{6}{8} = \dfrac{\Delta\Gamma}{6}$ ή $8 \cdot \Delta\Gamma = 36$ ή $\Delta\Gamma = 4{,}5cm$

Ακόμα $\sigma\upsilon\nu\omega\ \dfrac{AB}{A\Delta}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega\ \dfrac{\Delta B}{B\Gamma}$, οπότε

$\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{B\Delta}{B\Gamma}$ ή $\dfrac{8}{10} = \dfrac{6}{B\Gamma}$ ή $8 \cdot B\Gamma = 60$ ή $B\Gamma = 7{,}5$ cm.

6. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:



$\eta\mu B = \dfrac{A\Delta}{AB}$ ή $A\Delta = AB \cdot \eta\mu B$ ή

$\upsilon = AB \cdot \eta\mu B$

Οπότε:

$E_{\tau\rho\iota\gamma.} = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{1}{2}\ B\Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu B$.

2.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Λ, στ) Σ

2) α) Α : $\omega < \varphi$ β) Β : $\theta = x$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $ημ36^o = \frac{x}{20}$ ή $0,587 = \frac{x}{20}$ ή $x = 0,587 \cdot 20$ ή $x = 11,74cm.$

β) $συν20^o = \frac{50}{y}$ ή $0,939 = \frac{50}{y}$ ή $y = \frac{50}{0,939}$ ή $y = 53,24$ cm.

γ) $εφ40^o = \frac{ω}{15}$ ή $0,839 = \frac{ω}{15}$ ή $ω = 0,839 \cdot 15$ ή $ω = 12,585$ cm.

δ) $ημ50^o = \frac{10}{z}$ ή $0,766 = \frac{10}{z}$ ή $z = \frac{10}{0,766}$ ή $z = 13,05$ cm.

2. α) $συν81^o < συν73^o < συν45^o < συν34^o < συν11^o$
β) $ημ7^o < ημ24^o < ημ59^o < ημ62^o < ημ78^o$
γ) $εφ5^o < εφ18^o < εφ49^o < εφ50^o < εφ83^o$

3. α) $συνω \cdot εφω = \cancel{συνω} \cdot \frac{ημω}{\cancel{συνω}} = ημω$

β) $ημω \cdot συνω \cdot εφω + ημω \cdot συνω \cdot \frac{1}{εφω} = ημω \cdot \cancel{συνω} \cdot \frac{ημω}{\cancel{συνω}} + \cancel{ημω}$

$\cdot συνω \cdot \frac{συνω}{\cancel{ημω}} = ημ^2ω + συν^2ω = 1$

γ) $συν^2ω + εφ^2ω + ημ^2ω = 1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω}{συν^2ω} + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω}$

$\frac{1}{συν^2ω}$

δ) $(1 - συν^2ω) \cdot (1 + εφ^2ω) = ημ^2ω \cdot (1 + \frac{ημ^2ω}{συν^2ω}) = ημ^2ω \cdot \frac{συν^2ω + ημ^2ω}{συν^2ω}$

$= ημ^2ω \cdot \frac{1}{συν^2ω} = \frac{ημ^2ω}{συν^2ω} = εφ^2ω$

4. $ημ20^o = \frac{h}{1500}$ ή $0,342 = \frac{h}{1500}$ ή $h = 0,342 \cdot 1500$ ή $h = 513$ m

5. $\sigma\upsilon\nu 28^o = \frac{x}{5}$ ή $0{,}882 = \frac{x}{5}$ ή $x = 0{,}882 \cdot 5$ ή $x = 4{,}41$ m

Άρα τα πλάτος από το κιόσκι είναι $2 \cdot 4{,}41 = 8{,}82$ m

6. $\eta\mu 70^o = \frac{x}{150}$ ή $0{,}939 = \frac{x}{150}$ ή $x = 0{,}939 \cdot 150$ ή $x = 140{,}85$ m

7. $\sigma\upsilon\nu 75^o = \frac{x}{1{,}5}$ ή $0{,}258 = \frac{x}{1{,}5}$ ή $x = 0{,}258 \cdot 1{,}5$ ή $x = 0{,}387$ m

Άρα το πλάτος του ανοίγματος είναι: $3 - 2 \cdot (0{,}387) = 3 - 0{,}774 = 2{,}226$ m

8. $\varepsilon\varphi 70^o = \frac{\upsilon}{B\Delta}$ ή $2{,}747 = \frac{\upsilon}{B\Delta}$ ή $B\Delta = \frac{\upsilon}{2{,}747}$ (1)

$\varepsilon\varphi 48^o = \frac{\upsilon}{150 + B\Delta}$ ή $1{,}11 = \frac{\upsilon}{150 + B\Delta}$ ή $150 + B\Delta =$ ή $B\Delta = -150$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $= \frac{\upsilon}{2{,}747} = \frac{\upsilon}{1{,}11} - 150$

$\frac{\upsilon}{1{,}11} - \frac{\upsilon}{2{,}747} = 150$ ή $\frac{2{,}747 \cdot \upsilon - 1{,}11 \cdot \upsilon}{3{,}04917} = 150$

$1{,}63\upsilon = 3{,}04917 \cdot 150$ ή $\upsilon = \frac{457{,}3755}{1{,}63}$ ή $\boxed{\upsilon \cong 280\text{m}}$

9. $\eta\mu 68^o = \frac{R}{R + 500}$ ή $0{,}927 = \frac{R}{R + 500}$ ή $0{,}927 \cdot R + 0{,}927 \cdot 500 = R$

$0{,}073R = 463{,}5$ ή $R = 6.350$ km.

10. $\varepsilon\varphi 68^o = \frac{h - 1{,}6}{x}$ ή $2{,}475 = \frac{h - 1{,}6}{x}$ ή $2{,}475 \cdot x = h - 1{,}6$ ή

$h = 2{,}475x + 1{,}6$ (1)

$\varepsilon\varphi 80^o = \frac{h - 1{,}6}{1000 - x}$ ή $5{,}671 = \frac{h - 1{,}6}{1000 - x}$ ή $5671 - 5{,}671x = h - 1{,}6$

$h = 5.672{,}6 - 5{,}671x$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $2{,}475x + 1{,}6 = 5.672{,}6 - 5{,}671 \cdot x$

$8{,}146x = 5.671$ ή $x = 696{,}17$m

Από την (1) έχουμε: $h = 2{,}475 \cdot 696{,}17 + 1{,}6 = 1.724{,}62$m.

2.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ, στ) Σ
2) α) Β, β) Α, γ) Δ, δ) Γ
3) α) Α, β) Β, γ) Β, δ) Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $\text{συν}60^\circ = \frac{4}{x}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$ ή $x = 8$ cm

$\text{εφ}60^\circ = \frac{y}{4}$ ή $\sqrt{3} = \frac{y}{4}$ ή $y = 4\sqrt{3}$cm

β) $\text{ημ}45^\circ = \frac{y}{2\sqrt{2}}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{y}{2\sqrt{2}}$ ή $2y = 4$ ή $y = 2$ cm και $x = 2$cm.

2. α) $\text{συν}60^\circ = \text{συν}^2 30^\circ - \text{ημ}^2 30^\circ$

$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ή $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ισχύει.

β) $\text{ημ}60^\circ = 2\text{ημ}30^\circ \cdot \text{συν}30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ισχύει.

γ) $\text{εφ}^3 45^\circ = \text{εφ}30^\circ \cdot \text{εφ}60^\circ$

$1^3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}$ ή $1 = 1$ ισχύει.

δ) $\text{ημ}30^\circ - \text{εφ}45^\circ = -\text{συν}60^\circ$

$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ ή $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ ισχύει.

ε) $\text{συν}60^\circ + 2\text{ημ}^2 30^\circ = 1$

$\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ ή $\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$ ή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ή $1 = 1$ ισχύει.

στ) $\text{συν}^2 45^\circ + 2\text{ημ}^2 60^\circ = 2$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=2 \quad \text{ή} \quad \frac{2}{4}+2\cdot\frac{3}{4}=2 \quad \text{ή} \quad 2=2 \text{ ισχύει.}$$

3. $\eta\mu^2 45^o + \varepsilon\varphi^2 30^o = x \cdot \eta\mu 45^o \cdot \sigma\upsilon\nu 45^o \cdot \varepsilon\varphi 60^o$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad \frac{5}{6}=x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{5}{6}:\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x=\frac{5}{3\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad \boxed{x=\frac{5\sqrt{3}}{9}}$$

4. α) $A=\sqrt{2\eta\mu x-\sqrt{2}}$ πρέπει

$$2\eta\mu x-\sqrt{2}\geq 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x\geq\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu x\geq\eta\mu 45^0 \quad \text{ή} \quad x\geq 45^0$$

β) $B=\sqrt{2\sigma\upsilon\nu x-1}$ πρέπει

$$2\sigma\upsilon\nu x-1\geq 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x\geq\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x\geq\sigma\upsilon\nu 60^0 \quad \text{ή} \quad x\leq 60^0$$

5. α) $2\eta\mu^2 x-\sqrt{3}\eta\mu x=0$

$\eta\mu x\,(2\eta\mu x\ \sqrt{3}\ ) = 0$

$\eta\mu x = 0$ ή $2\eta\mu x-\sqrt{3} = 0$

αδύνατη $\eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x = 60^o$

β) $\varepsilon\varphi^2 x - \varepsilon\varphi x = 0$
$\varepsilon\varphi x\,(\varepsilon\varphi x - 1) = 0$
$\varepsilon\varphi x = 0$ ή $\varepsilon\varphi x = 1$
αδύνατη $x = 45^o$

6. $ημ60^o = \frac{ΑΔ}{100}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ΑΔ}{100}$ ή $ΑΔ = 50 \cdot \sqrt{3}m$

$E_{ΑΒΓ}\ \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{120 \cdot 50\sqrt{3}}{2} = 3000\sqrt{3}m^2$

7. $ημ30^o = \frac{5}{ΒΓ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{5}{ΒΓ}$ ή $ΒΓ = 10cm$

$εφ45^o = \frac{10}{x}$ ή $1 = \frac{10}{x}$ ή $x = 10cm$

$ημ45^o = \frac{10}{y}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{10}{y}$ ή $\sqrt{2}y = 20$ ή $y = \frac{20}{\sqrt{2}}$ ή $y = 10\sqrt{2}cm$

8. Έχουμε $\hat{B} = 60^0$ και $\hat{Γ} = 30^0$

οπότε ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = $3\sqrt{3}cm$

9. Από το Π.Θ. έχουμε: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$12^2 = ΑΒ^2 + 6^2$

$ΑΒ^2 = 144 - 36$

$ΑΒ^2 = 108$ ή $ΑΒ = \sqrt{108}$ ή $ΑΒ = 6\sqrt{3}cm$

$ημΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, άρα $\hat{B} = 30^0$

$ημΓ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $\hat{Γ} = 60^0$

10. Έχουμε $ημ30^o = \frac{2400 + 1500}{x}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{900}{x}$ ή $x = 1.800m$

Οπότε 1.800 : 3 = 600 sec ή 10 λεπτά.

11. α) $συν45^o = \frac{ΚΛ}{12,6}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ΚΛ}{12,6}$ ή $ΚΛ = 6,3 \cdot \sqrt{2}Km$

$συν30^o = \frac{ΜΡ}{10,8}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{ΜΡ}{10,8}$ ή $ΜΡ = 5,4 \cdot \sqrt{3}Km$

Άρα στη θέση Ν ήταν $6,3\sqrt{2}+5,4\sqrt{3}$ = 8,9 + 9,35 = 18,25Km βόρεια.

β) $\eta\mu 45^o = \frac{KM}{12,6}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{KM}{12,6}$ ή $KM = 6,3\cdot\sqrt{2}Km$

$\eta\mu 30^o = \frac{PN}{10,8}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{PN}{10,8}$ ή $PN = 5,4Km$

Άρα στη θέση Ν ήταν $6,3\sqrt{2}$ + 5,4 = 14,3Km ανατολικά.

12. i) $\eta\mu x = \frac{28}{56}$ ή $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, άρα $x = 30^o$

$\sigma\upsilon\nu 30^o = \frac{\alpha}{56}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha}{56}$ ή $\alpha = 28\sqrt{3}m$

ii) $\sigma\upsilon\nu y = \frac{16}{25}$ ή $\sigma\upsilon\nu y = 0,64$, άρα $y = 50^o$

$\eta\mu 50^o = \frac{\beta}{25}$ ή $0,766 = \frac{\beta}{25}$ ή $\beta = 19,25cm$

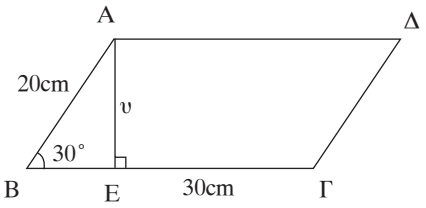
13. α) ΑΓ = 14 · 18 = 252 cm β) ΑΒ = 14 · 30 = 420 cm

γ) κλίση = εφω = $\frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{252}{420}$ = 0.6 ή 60%

14. $\eta\mu 30^o = \frac{ΑΕ}{ΑΒ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{\upsilon}{20}$

ή υ = 10 cm

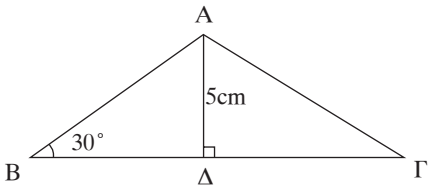
$E_{ΑΒΓΔ}$ = ΒΓ · ΑΕ = 30 · 10 = 300cm²



15. Έχουμε $\hat{B} = 30^0, \hat{\Gamma} = 30^0$ και $\hat{A} = 120^0$

$\eta\mu 30^o = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{5}{ΑΒ}$ ή

ΑΒ = 10 cm και ΑΓ = 10 cm



$\text{συν}30^o = \frac{B\Delta}{AB}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{B\Delta}{10}$ ή $B\Delta = 5\sqrt{3}$. Άρα $B\Gamma = 2 \cdot B\Delta = 10\sqrt{3}\text{cm}$

16. $\text{ημ}60^o = \frac{\Delta E}{A\Delta}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\upsilon}{4}$ ή $\upsilon = 2\sqrt{3}\text{cm}$

$\text{εφ}30^o = \frac{\Gamma Z}{ZB}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{ZB}$ ή $ZB = 6\text{cm}$

$\text{συν}60^o = \frac{AE}{A\Delta}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{AE}{4}$ ή $AE = 2\text{cm}$

Οπότε $AB = AE + EZ + ZB = 2 + 3 + 6 = 11$ cm

Άρα $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{(11+3)\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}\text{cm}^2$

17. $2 \cdot A\Delta = 42 - 2 \cdot \Delta\Gamma$ ή $2 \cdot A\Delta = 42 - 30$ ή $2 \cdot A\Delta = 12$ ή $A\Delta = 6$ cm

$\text{ημ}45^o = \frac{\upsilon}{A\Delta}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\upsilon}{6}$ ή $\upsilon = 3\sqrt{2}\text{cm}$

Άρα $E_{AB\Gamma\Delta} = \beta \cdot \upsilon = 15 \cdot 3\sqrt{2} = 45\sqrt{2}\text{cm}^2$

18. Έχουμε $\text{εφ}78^o = \frac{A\Gamma}{AB}$ ή $4,704 = \frac{A\Gamma}{1,8}$ ή $A\Gamma = 4,704 \cdot 1,8$ ή $A\Gamma = 8,46$m

19. Επειδή $B\hat{A}\Gamma = 150^0 = 150^o$ η γωνία $\Gamma\hat{A}\Delta$ είναι 30°.

α) $\text{ημ}30^o \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{8}$ ή $\Gamma\Delta = 4\text{cm}$

$E_{AB\Gamma} = \frac{AB \cdot \Gamma\Delta}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16\text{cm}^2$

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{A} = 150^o$, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 15^o$. Στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύει: $\text{ημ}15^o = \frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$ ή $0,258 = \frac{4}{B\Gamma}$ ή $B\Gamma = \frac{4}{0,258}$ ή $B\Gamma \cong 15,5\text{cm}$

$$\varepsilon\varphi 15^{o} = \frac{\Gamma\Delta}{B\Delta} \quad \text{ή} \quad 0,267 = \frac{4}{B\Delta} \quad \text{ή} \quad B\Delta = \frac{4}{0,267} \quad \text{ή} \quad B\Delta = 14,98\text{cm}$$

Περίμετρος = ΒΔ + ΓΔ + ΒΓ = 14,98 + 4 + 15,5 = 34,48cm.

20. $\eta\mu(180^{o} - 120^{o}) = \frac{200}{AB}$ ή $\eta\mu 30^{o} = \frac{200}{AB}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{200}{AB}$ ή AB = 400m.

2.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Λ

α) $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

β) $\overrightarrow{K\Lambda} // \overrightarrow{\Delta K}$

γ) $\overrightarrow{\Lambda\Gamma} // -\overrightarrow{\Lambda B}$

δ) $\overrightarrow{K\Lambda} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{BA}$

ε) $\overrightarrow{\Delta K} = -\overrightarrow{AK}$

στ) $|\overrightarrow{\Gamma\Lambda}| = |\overrightarrow{\Lambda B}|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{ZE}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AZ}$, $\overrightarrow{\Delta O} = \overrightarrow{OA}$

β) $\overrightarrow{B\Gamma} // \overrightarrow{OA} // \overrightarrow{\Delta O} // \overrightarrow{ZE}$, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{O\Gamma} // \overrightarrow{OZ} // \overrightarrow{E\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} // \overrightarrow{BO} // \overrightarrow{EO} // \overrightarrow{AZ}$

γ) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{\Delta O} = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = -\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{BO}$

δ) Όλα τα διανύσματα του σχήματος έχουν ίσα μέτρα.

2. α) $|\overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{\Gamma B}| = |\overrightarrow{B\Gamma'}| = |\overrightarrow{\Delta' A'}|$

β) $\overrightarrow{A\Delta} // \overrightarrow{\Gamma B} // \overrightarrow{\Gamma' B'} // \overrightarrow{\Delta' A'}$

γ) $\overrightarrow{A\Delta} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B\Gamma'}$

δ) $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

ε) $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$

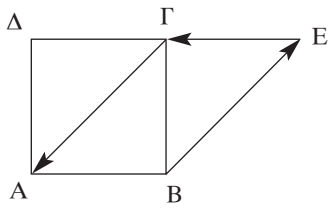
3. α) $\vec{\alpha}=\vec{\eta}$ και $\vec{\beta}=\vec{\zeta}$

β) $\vec{\gamma}=-\vec{\varepsilon}$

γ) $|\vec{\alpha}|=|\vec{\delta}|=|\vec{\eta}|$, $|\vec{\beta}|=|\vec{\zeta}|$ και $|\vec{\gamma}|=|\vec{\varepsilon}|$

4. $|\vec{\alpha}|=\sqrt{41}$, $|\vec{\beta}|=4$, $|\vec{\gamma}|=\sqrt{17}$

5. Επειδή $\overrightarrow{\Gamma A}=-\overrightarrow{BE}$ το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο, άρα $\overrightarrow{E\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$



6. α) Δύο $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$

β) Έξι $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}, \overrightarrow{\Gamma B})$

2.6

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$

β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma A}$

γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\vec{0}$

δ) $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}$

ε) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Delta}$

στ) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{B\Delta}$

2) α) Σ, β) Λ, γ) Λ, δ) Λ
ε) Σ, στ) Σ

3) 1. → γ. $\vec{y}$
2. → δ. $\overrightarrow{A\Gamma}$
3. → α. $\vec{0}$

4) α) αντίθετα
β) ίσα
γ) αντίθετα

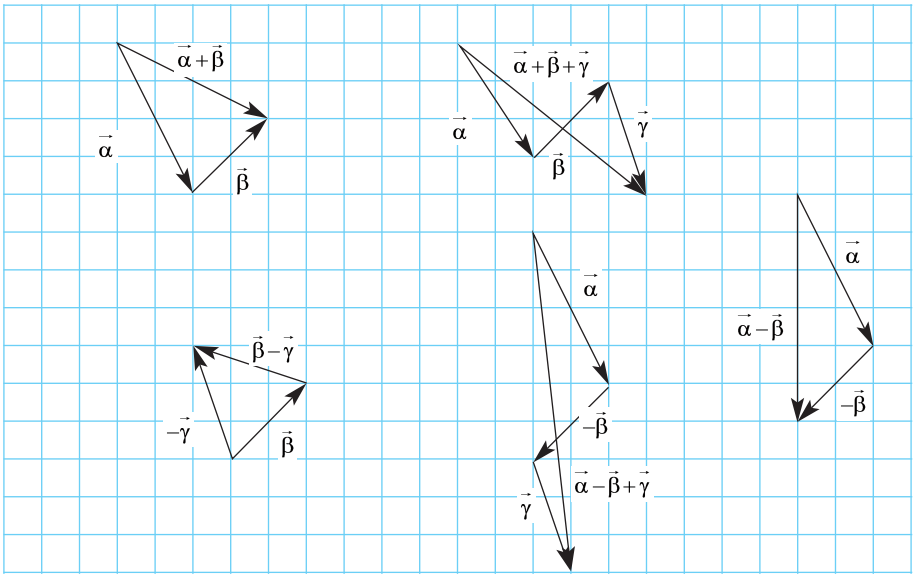
5) Σωστή Β: $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}$ γιατί γράφετε

$$\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}$$

$$\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.



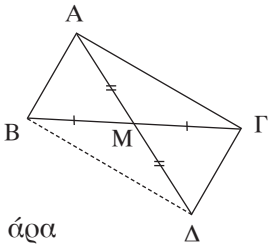
2. α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$

β) $\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{B\Delta}$

δ) $\overrightarrow{\Delta O}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{O\Gamma}$

3. α) Επειδή ΑΜ = ΜΔ και ΒΜ = ΜΓ το τετράπλευρο ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$



β) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$

γ) Έχουμε $\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ όμως $\overrightarrow{A\Delta}=2\cdot\overrightarrow{AM}$ άρα

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}$$

4. α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$

β) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$

γ) $\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{BA}$

5. α) $\overrightarrow{B\Gamma}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}=-\overrightarrow{\Gamma A}$

β) $(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA})-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Gamma}$

6. α) $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ β) $\vec{x}=-\vec{\gamma}+\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

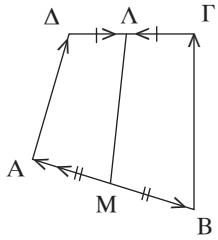
7. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Σ είναι η $\vec{F}_2$, επειδή $\vec{F}_1+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{0}$

8. Έχουμε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Gamma}$

$\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma E}$ άρα το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

9. Έχουμε $\overrightarrow{M\Lambda}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$
και $\overrightarrow{M\Lambda}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}$ } (+) άρα



$2\overrightarrow{M\Lambda}=\cancel{\overrightarrow{MB}}+\cancel{\overrightarrow{MA}}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}+\cancel{\overrightarrow{\Gamma\Lambda}}+\cancel{\overrightarrow{\Delta\Lambda}}$

$2\overrightarrow{M\Lambda}=\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}$ ($\overrightarrow{MB}$ αντίθετο με $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$ αντίθετο με $\overrightarrow{\Delta\Lambda}$).

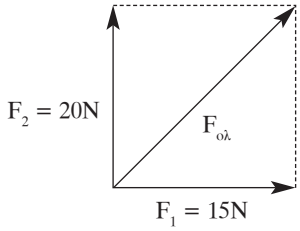
10. α) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{Z\Gamma}$

β) $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{\Delta A}$

γ) $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{Z\Delta}$

δ) $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Gamma}$

11. α), β)



γ) $|\overrightarrow{Fολ}| = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25N.$

12. α) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$

β) $\overrightarrow{OΓ} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BΓ}$

γ) $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OΓ} + \overrightarrow{ΓB}$ ή $2\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OΓ} + 2\overrightarrow{ΓB}$ (2)

Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε

$$3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \cancel{\overrightarrow{AB}} + 2\overrightarrow{OΓ} + \cancel{2\overrightarrow{ΓB}} \qquad (\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BΓ} = -2\overrightarrow{ΓB})$$

$$3\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OΓ}$$

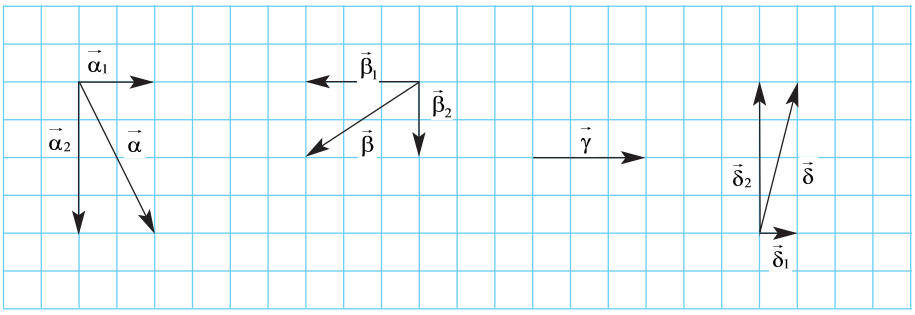
2.7

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Γ: 8
2) Α: 17

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.



2. Αναλύουμε το βάρος $\vec{B}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, μία παράλληλη στο συρματόσκοινο τη $\vec{B}_1$ και μία κάθετη στο επίπεδο τη $\vec{B}_2$.

Έχουμε $\left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{συν}45^0 = 3000 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1500 \cdot \sqrt{2}\text{N}.$

Άρα η δύναμη που ακεί το συρματόσκοινο στο βαγόνι είναι $1500\sqrt{2}$N.

3. Είναι $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \text{συν}52^0 = 2000 \cdot 0{,}615 = 1230\text{N}$

και $\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \text{ημ}52^0 = 2000 \cdot 0{,}788 = 1576\text{N}$

4. Είναι $\left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{συν}45^0 = 500 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 250\sqrt{2}\text{N}$

και $\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{ημ}45^0 = 500 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 250\sqrt{2}\text{N}$

5. Είναι $\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{συν}35^o = 320 \cdot 0{,}819 = 262{,}08\text{N}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α), β) (Θεωρία)

Θέμα 2

α) $\text{ημ}30^o = \frac{x}{8}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$ ή $x = 4\text{cm}$

β) $\text{συν}45^o = \frac{x}{3\sqrt{2}}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{3\sqrt{2}}$ ή $x = 3\text{ cm}$

γ) $\text{εφ}60^o = \frac{x}{5\sqrt{3}}$ ή $\sqrt{3} = \frac{x}{5\sqrt{3}}$ ή $x = 15\text{ cm}$

Θέμα 3

$\text{εφω} = \frac{EZ}{\Delta Z}$ ή $0{,}15 = \frac{EZ}{520}$ ή $EZ = 0{,}15 \cdot 520$ ή $EZ = 78\text{m}$

Θέμα 4

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \text{συν}35^0 = 70.000 \cdot 0,819 = 57.330\text{N}$$

$$|\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \text{ημ}35^0 = 70.000 \cdot 0,573 = 40.110\text{N}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α), β) (Θεωρία)

γ) i) εφ37° < εφ43°

ii) εφ56° > εφ 16°

iii) συν17° > συν52°

iv) ημ89° > ημ1°

v) ημ40° = συν50°

Θέμα 2

Έχουμε $\text{ημ}30^o = \dfrac{x}{150}$ ή $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{150}$ ή $x = 75\text{cm}$

$\text{συν}30^o = \dfrac{y}{150}$ ή $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{150}$ ή $y = 75\sqrt{3}\text{cm}$

$\text{ημ}45^o = \dfrac{z}{y}$ ή $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{z}{75\sqrt{3}}$ ή $z = \dfrac{75\sqrt{6}}{2}\text{cm}$

και $\omega = z = \dfrac{75\sqrt{6}}{2}\text{cm}.$

Θέμα 3

$\text{εφω} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{\text{ΑΓ}}$ ή $0,1 = \dfrac{70}{\text{ΑΓ}}$ ή $\text{ΑΓ} = 700\text{m}$

Από Π.Θ. έχουμε $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 + \text{ΒΓ}^2$

$\text{ΑΒ}^2 = 700^2 + 70^2$

$\text{ΑΒ}^2 = 490000 + 4900$

$\text{ΑΒ}^2 = 494.900$

$\text{ΑΒ} = \sqrt{494.900} \cong 703,5\text{m}$

Θέμα 4

$$\left|\vec{F}_1\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu 30^0 = 300.000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 150.000\sqrt{3}N$$

$$\left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot \eta\mu 30^0 = 300.000 \cdot \frac{1}{2} = 150.000N$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 3

Θέμα 1

(Θεωρία)

Θέμα 2

Έχουμε $5\eta\mu B - 4 = 0$ ή $\eta\mu B = \frac{4}{5}$. Από τον τύπο $\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$$

$$\frac{16}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 B = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 B = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 B = \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

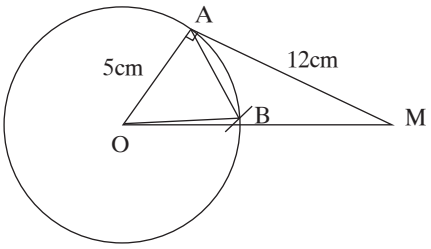
Θέμα 3

α) Π.Θ. στο τρίγωνο $O\hat{A}M$:

$OM^2 = 5^2 + 12^2$

$OM^2 = 25 + 144$

$OM^2 = 169$ ή $OM = 13cm$



β) εφ $A\widehat{M}O = \frac{OA}{AM} = \frac{5}{12} = 0,416$, άρα $A\widehat{M}O = 25^0$ και $A\widehat{O}M = 65^0$

γ) Με κέντρο το Α και άνοιγμα του διαβήτη όσο η ακτίνα ΟΑ = 5cm σχηματίζουμε ένα τόξο που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Β.
Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισόπλευρο, άρα $A\widehat{O}B = 60^0$.

Θέμα 4

$$\left|\vec{B}_1\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{συν}40^0 = 250 \cdot 0,766 = 30,64\text{N}$$

$$\left|\vec{B}_2\right| = \left|\vec{B}\right| \cdot \text{ημ}40^0 = 250 \cdot 0,642 = 160,5\text{N}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Γ: 55°, β) Β: 110°, γ) Α: 35°
2) α) Β. 40°, β) Α. 120°, γ) Γ. 115°, δ) Δ. 65°
3) α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) $\hat{x}=50^0$, $\hat{y}=100^0$, $\hat{\omega}=260^0$

β) $\hat{x}=40^0$, $\hat{y}=45^0$, $\hat{\omega}=60^0$

γ) $\hat{x}=35^0$, $\hat{y}=55^0$, $\hat{\omega}=55^0$

2. $A\widehat{M}\Gamma=\dfrac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}}{2}=\dfrac{120^0+120^0}{2}=120^0$

3. Έχουμε $6x-10^\circ+2x+30^\circ=180^\circ$ ή $8x=160^\circ$ ή $x=20^\circ$

Άρα $\overset{\frown}{AB}=70^0$, $\overset{\frown}{B\Gamma}=110^0$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=35^0$ και $\overset{\frown}{A\Delta}=145^0$

4. $\hat{x}=25^0$, $\hat{y}=125^0$, $\hat{\omega}=55^0$

5. $\hat{x}=35^0$, $\hat{y}=20^0$ και $\hat{\omega}=55^0$

6. $\hat{x}=25^0$, $\hat{y}=60^0$,

7. $\hat{A}=75^0$, $\hat{B}=70^0$, $\hat{\Gamma}=105^0$ και $\hat{\Delta}=110^0$

8. Είναι $A\widehat{M}B=90^0$ και $M\widehat{B}A=90^0-25^0=65^0$

άρα $M\widehat{B}y=25^0$

9. $\hat{x} = 76^0$ και $\hat{y} = 14^0$

10. $\widehat{AΔ} = \widehat{ΔΓ} = 80^0$ άρα $\hat{A} = 102^0$, $\hat{B} = 80^0$, $\hat{Γ} = 78^0$ και $\hat{Δ} = 100^0$

11. $\hat{A} + \hat{Γ} = 180^0$ και $\hat{B} + \hat{Δ} = 180^0$. Παρατηρώ ότι οι απέναντι γωνίες ενός εγγεγραμμένου τετράπλευρου είναι παραπληρωματικές.

12. Επειδή ΑΟΖ είναι διάμετρος του κύκλου, έχουμε $A\hat{Γ}Z = 90^0$ δηλαδή ΓΖ ⊥ ΑΓ. Ακόμα ΒΔ είναι ύψος άρα ΒΔ ⊥ ΑΓ
Άρα ΒΔ || ΓΖ

3.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δ. 36°
2. Δ. 120°
3. Α. 24°
4. Γ. 30°
5. Β. 3°
6. Α. 135°
7. Γ. 72°
8. Δ. 90°
9. α) Σ
   β) Σ
   γ) Λ
   δ) Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Πλήθος πλευρών κανονικού πολυγώνου	Γωνία πολυγώνου	Κεντρική γωνία
4	90°	90°
5	108°	72°
8	135°	45°
12	150°	30°

2.

Γωνία κανονικού πολυγώνου	**Κεντρική γωνία**
120°	30°
160°	20°
108°	72°
140°	40°

3. Έχουμε $\hat{\phi} = 5 \cdot \hat{\omega}$ και $\hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^0$, οπότε

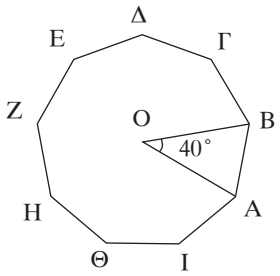
$$5\hat{\omega} + \hat{\omega} = 180^0 \quad \text{ή} \quad 6\hat{\omega} = 180^0 \quad \text{ή} \quad \hat{\omega} = 30^0$$

Άρα ο αριθμός των πλευρών του πολυγώνου είναι

$$\nu = \frac{360^0}{30^0} = 12 \text{ πλευρές}$$

4. Είναι $\hat{\omega} = \frac{2}{5} \cdot 90^0 = 36^0$. Άρα $\nu = \frac{180^0}{36^0} = 5$ πλευρές

5. Υπολογίζουμε την κεντρική γωνία $\hat{\omega} = \frac{360^0}{10} = 36^0$. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 36^0$. σχεδιάζουμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$ και φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων.

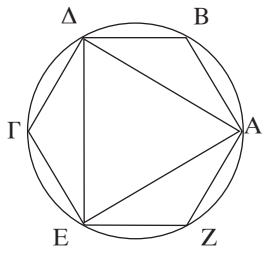


6. α) $\nu = \hat{\omega} = \frac{360^0}{22^0} = 16{,}36$ αδύνατο (Δεν υπάρχει)

β) Αν $\hat{\phi} = 140^0$ τότε $\hat{\omega} = 180° - 140° = 40°$ και $\nu = \frac{360^0}{40^0} = 9$

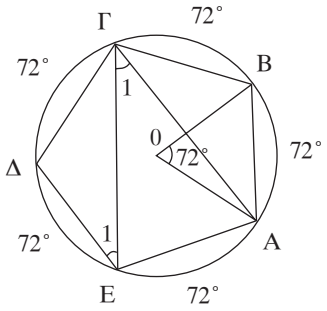
Άρα υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία $\hat{\phi} = 140^0$ το κανονικό εννιάγωνο.

7. Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου. Άρα το ΑΒΓΔΕΖ είναι κανονικό εξάγωνο και το ΑΔΕ ισόπλευρο τρίγωνο.



8. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου είναι $\hat{\omega} = \frac{360}{5} = 72^0$.

Άρα κάθε ένα από τα 5 ίσα τόξα που ορίζονται στον κύκλο (Ο,ρ) είναι 72˚. Φέρνουμε τις διαγώνιες ΓΑ και ΓΕ. Έχουμε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{E}_1 = 36^0$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε τόξα 72˚. Άρα ΑΓ || ΔΕ διότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.

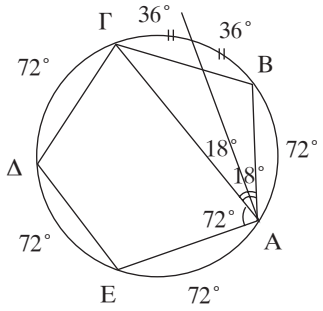


9. Έχουμε $E\hat{A}\Gamma = \frac{72^0 + 72^0}{2} = 72^0$ ως εγγεγραμμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta E}$. Ακόμα

$\Gamma\hat{A}K = \frac{36^0}{2} = 18^0$ ως εγγεγραμένη γωνία του κύκλου που βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma K}$.

Άρα $K\hat{A}E = 18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$

Δηλαδή ΑΚ ⊥ ΑΕ.



3.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

Ακτίνα ρ	6cm	0,8m	8cm	18cm
Μήκος κύκλου L	37,68cm	5,024m	50,24cm	113,04m

2. α) Λ, β) Σ, γ) Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $L = 56{,}52$ cm

2. $p = 13$ cm

3. $L_1 - L_2 = 26$ ή $2\pi\varrho_1 - 2\pi \cdot \varrho_2 = 26$ ή $(\varrho_1 - \varrho_2) = 26$

ή $\varrho_1 - \varrho_2 = \dfrac{26}{2\pi}$ ή $\varrho_1 - \varrho_2 = \dfrac{13}{3{,}14}$ ή $\varrho_1 - \varrho_2 \cong 4{,}14$cm.

4. α) $\delta_1 - \delta_2 = 8$ ή $2\varrho_1 - 2\varrho_2 = 8$ ή $\varrho_1 - \varrho_2 = 4$cm

β) $L_1 - L_2 = \delta_1 \cdot \pi - \delta_2\pi = \pi \cdot (\delta_1 - \delta_2) = 3{,}14 \cdot 8 = 25{,}12$cm

5. $L = 3{,}14 \cdot 68 = 213{,}52$cm $= 2{,}1352$m η μία στροφή του τροχού.
Άρα το αυτοκίνητο διάνυσε $3.500 \cdot 2{,}1352 = 7.473{,}2$m $= 7{,}4732$Km.

6. Από Π.Θ. έχουμε: $AB^2 = MA^2 + MB^2$

$AB^2 = 12^2 + 16^2$ ή $AB^2 = 400$ ή $AB = 20$cm

Άρα $L = 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8$cm.

7. Είναι $A\hat{O}B = 2 \cdot A\hat{M}B = 2 \cdot 45^\circ = 90^o$ ως εγγεγραμμένη και επίκεντρη που βαίνουν στο ίδιο τόξο. Οπότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ορθογώνιο.
Από Π.Θ. έχουμε: $AB^2 = OA^2 + OB^2$

$(3\sqrt{2})^2 = \varrho^2 + \varrho^2$ ή $2\varrho^2 = 18$ ή $\varrho^2 = 9$ ή $\varrho = 3$cm.

Άρα $L = 3{,}14 \cdot 2 \cdot 3 = 18{,}84$cm.

8. Σε 24 ώρες ο ωροδείκτης κάνει μία στροφή ενώ ο λεπτοδείκτης 24 στροφές. Έχουμε:
L ωροδείκτη $= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}2 = 7{,}536$cm και
L λεπτοδείκτη $= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$cm

9. $L = 3{,}14 \cdot 70 = 219{,}8$m
Σε δύο ώρες διανύει $2 \cdot 110 = 220$Km $= 220.000$m
Άρα θα κάνει $220.000 : 219{,}8 \cong 1000$ στροφές.

3.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. $30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$

$60^\circ \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$120^\circ \rightarrow \frac{2\pi}{3}$

$135^\circ \rightarrow \frac{3\pi}{4}$

$150^\circ \rightarrow \frac{5\pi}{6}$

$240^\circ \rightarrow \frac{4\pi}{3}$

2. α) Β: $\mu = 60^\circ$

β) Γ: 2L

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Τόξο σε μοίρες	45°	30°	75°	48°	225°	330°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{15}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

2. α) $L = 2\pi\varrho$ ή $50{,}24 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \varrho$ ή $\varrho = \frac{50{,}24}{6{,}28}$ ή $\varrho = 8$ cm.

β) $L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0} = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 90^0}{180^0} = 12{,}56$ cm.

3.

Ακτίνα ρ	4cm	5m	4cm
Τόξο σε μοίρες μ°	30°	45°	$270°$
Τόξο σε ακτίνια α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
Μήκος τόξου L	2,09cm	3,925m	6πcm

4. $L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0} = \frac{3{,}14 \cdot 30 \cdot 120}{180} =$ 62,8 cm.

5. $L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0}$ ή $8{,}37 = \frac{3{,}14 \cdot \rho \cdot 40^0}{180^0}$ ή $\rho \cong 12$ cm.

6. Έχουμε $6(x-2) + 3 = 4x - 1$ ή $6x - 12 + 3 = 4x - 1$ ή $2x = 8$

ή $x = 4$cm. Οπότε $\delta = 4$cm και $\rho = 2$cm

Άρα $L = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0} = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 50}{180^0} = 1{,}74$cm.

7. Έχουμε: $L_{\widehat{AB}} = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 180^0}{180^0} = 6{,}28$cm

$L_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 180^0}{180^0} = 3{,}14$ cm

$L_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 180^0}{180^0} = 9{,}42$ cm

Άρα περίμετρος $= L_{\widehat{AB}} + L_{\widehat{B\Gamma}} + L_{\widehat{A\Gamma}} = 6{,}28 + 3{,}14 + 9{,}42 = 18{,}84$cm

8. Έχουμε L ωροδείκτη $= \frac{3{,}14 \cdot 5 \cdot 90^0}{180^0} = 7{,}85$ cm και

L λεπτοδείκτη $= 3 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 8) = 150{,}72$ cm

Άρα το συνολικό διάστημα είναι $7{,}85 + 150{,}72 = 158{,}57$ cm.

3.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1)

Ακτίνα κύκλου ρ	2cm	4cm	7cm
Μήκος L κύκλου	12,56cm	25,12cm	43,96cm
Εμβαδόν Ε κύκλου	12,56cm^2	50,24cm^2	153,86cm^2

2) Β: 4Ε

3) Α: $E = \dfrac{L^2}{4\pi}$

4) Γ: Ε = L

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Από τον τύπο $E = \pi \cdot \rho^2$ έχουμε: $1256 = \pi \cdot \rho^2$ ή

$\rho^2 = \dfrac{1256}{3{,}14}$ ή $\rho^2 = 400$ ή $\rho = 20$ cm

Άρα $L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6$ cm

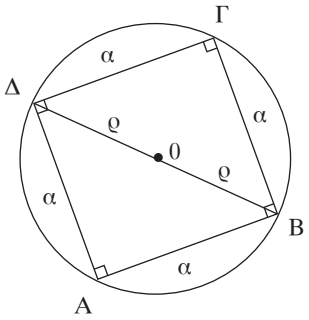
2. Από τον τύπο $L = 2\pi\rho$ έχουμε: $81{,}64 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho$ ή $\rho = 13$ m
Άρα $E = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 13^2 = 530{,}66$ m^2.

3. Έχουμε $E_1 = \pi \cdot \rho_1^2 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26$ cm^2, οπότε η επιφάνεια E_2 του δεύτερου κύκλου είναι $E_2 = 8 \cdot E_1 = 8 \cdot 28{,}26 = 226{,}08$ cm^2
Άρα $E_2 = \pi \cdot \rho_2^2$ ή $226{,}08 = 3{,}14 \cdot \rho_2^2$ ή $\rho_2^2 = 72$ ή $\rho_2 = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$cm.

4. $E_{\text{κυκλ.δακτυλίου}} = 3{,}14 \cdot (5^2 - 3^2) = 3{,}14 \cdot 16 = 50{,}24$ cm^2.

5. Από Π.Θ. έχουμε $AB^2 = MB^2 + MA^2$
$AB^2 = 3^2 + 4^2$ ή $AB^2 = 25$ ή $AB = 5$ cm
Άρα $L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm και $E = \pi \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$ cm^2.

6. Από τον τύπο $E_{τετραγ.} = α^2$ έχουμε
$32 = α^2$



Στο ορθ. τριγ. ΒΑΔ εφαρμόζουμε Π.Θ.
$ΔΒ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2$
$δ^2 = α^2 + α^2$
$δ^2 = 32 + 32$
$δ^2 = 64$ ή $δ = 8cm$ και $ρ = 4cm$
Άρα $L = 8 \cdot 3,14 = 25,12cm$ και
$E = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24cm^2$.

7. Είναι $δ = 16$ cm και $ρ = 8cm$
Άρα $L = 16 \cdot 3,14 = 50,24cm$ και $E = 3,14 \cdot 8^2 = 200,96cm^2$.

8. Από τον τύπο $E = π \cdot ρ^2$ έχουμε:
$615,44 = 3,14 \cdot ρ^2$ ή $ρ^2 = 196$ ή $ρ = 14cm$
Οπότε η πλευρά του τετράγωνου είναι $2 \cdot ρ = 2 \cdot 14 = 28cm$
Άρα περίμετρος τετραγώνου $= 4 \cdot 28 = 112cm$.

9. Ισχύει: $E_{δακτυλίου} = π \cdot (R^2 - ρ^2)$ ή $E_{δακτυλίου} = π \cdot R^2 - π \cdot ρ^2$
και $E_{δακτυλίου} = E_{μικρού κύκλου} = π \cdot ρ^2 = 3,14 \cdot (5\sqrt{2})^2 = 157cm^2$
Άρα $157 = π \cdot R^2 - 157$ ή $3,14 \cdot R^2 = 314$ ή $R^2 = 100$ ή $R = 10cm$.

10. Ισχύει $E_{μικρού κύκλου} = E_{δακτυλίου}$
και $E_{δακτυλίου} = E_{μεγάλου δακτυλίου} - E_{μικρού κύκλου}$
Οπότε $2 \cdot E_{μικρού κύκλου} = E_{μεγάλου κύκλου}$
$2 \cdot 3,14 \cdot ρ^2 = 3,14 \cdot 4^2$
$ρ^2 = 8$
$ρ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}cm$.

3.6

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Α: $8π$ (cm^2)
2) Γ: $60°$
3) Δ: 2Ε
4) α) Σ, β) Λ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\mu = 36^\circ$

2. Από τον τύπο $E_{κ.τ.} = \dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0}$ ή $84{,}78 = \dfrac{3{,}14 \cdot \rho^2 \cdot 120^0}{360^0}$ ή

$\rho^2 = 81$ ή $\rho = 9cm$

Άρα $L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 = 56{,}52cm$.

3. Από τον τύπο $E = \pi\rho^2$ έχουμε $1519{,}76 = 3{,}14 \cdot \rho^2$ ή

$\rho^2 = 484$ ή $\rho = 22cm$

Άρα $E_{κ.τ.} = \dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0} = \dfrac{3{,}14 \cdot 22^2 \cdot 72^0}{360^0} = 303{,}952cm^2$

4. Από τον τύπο $L_{\widehat{AB}} = \dfrac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^0}{180^0}$ έχουμε

$\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi \cdot \rho \cdot 30^0}{180^0}$ ή $\rho = 4cm$

Άρα $E_{κ.τ.} = \dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0} = \dfrac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 30^0}{360^0} \cong 4{,}18cm^2$

5. α) $E_{(O\widehat{AB})} = \dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{180^0} = \dfrac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 60^0}{360^0} = 75{,}36cm^2$

β) Με το Π.Θ. υπολογίζουμε το ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΟΑΒ:

$12^2 = \upsilon^2 + 36$ ή $144 = \upsilon^2 + 36$ ή $\upsilon^2 = 108$ ή $\upsilon = 6\sqrt{3}cm$

Οπότε $E_{O\hat{A}B} = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \dfrac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}cm^2$

γ) $\tau = E_{κ.τ.} - E_{O\hat{A}B} = 75{,}36 - 36\sqrt{3} = 75{,}36 - 62{,}35 = 13{,}01cm^2$

7. $E_{(O\widehat{B\Gamma})} = \dfrac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^0}{360^0} = \dfrac{3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 120^0}{360^0} = 104{,}66cm^2$

8. $E_{(AB\Gamma\Delta)} = E_{(O\widehat{A\Gamma})} - E_{(O\widehat{B\Delta})} = \dfrac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 60^0}{360^0} = \dfrac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 60^0}{360^0} =$

$= 75{,}36 - 13{,}08 = 62{,}28\ cm^2$

9. $E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = \frac{3,14\cdot 5^2}{2} - \frac{3,14\cdot 3^2}{2} - \frac{3,14\cdot 2^2}{2} = 39,25 - 14,13 - 6,28 = 18,84\text{cm}^2$

$\Pi_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = 3,14\cdot 5 + 3,14\cdot 3 + 3,14\cdot 2 = 3,14\cdot(5+3+2) = 3,14\cdot 10$
$= 31,4\text{cm}$

10. Με το Π.Θ. υπολογίζουμε τη διαγώνιο ΒΔ του τετράγωνου ΑΒΓΔ.

$B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$

$B\Delta^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2$ ή $B\Delta^2 = 10\text{cm}$

Οπότε η ακτίνα των κυκλικών τομέων είναι $\rho = \frac{B\Delta}{2} = 5\text{cm}$.

Άρα $E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma.} - 2\,E_{\kappa.\tau.}$

$E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = (5\sqrt{2})^2 - 2\cdot\frac{3,14\cdot 5^2\cdot 90^0}{360^0} = 50 - 39,25 = 10,75\text{cm}^2.$

11. Με το Π.Θ. υπολογίζουμε το ύψος ΑΔ.

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$

$10^2 = A\Delta^2 + 5^2$ ή $A\Delta^2 = 75$ ή $A\Delta = 5\sqrt{3} = 8,66\text{cm}$

Άρα $E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = E_{A\overset{\triangle}{B}\Gamma} - 2\cdot E_{\kappa.\tau.}$

$$= \frac{B\Gamma\cdot A\Delta}{2} - 2\cdot\frac{3,14\cdot 5^2\cdot 60^0}{360^0}$$

$$= \frac{10\cdot 8,66}{2} - 26,16 = 43,3 - 26,16 = 17,14\text{cm}^2$$

12. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\hat{A} = 90^\circ$ και ΑΒ= ΑΓ)

άρα $\hat{\Gamma} = \hat{B} = 45^\circ$

$E_{(\Gamma\widehat{A}\Delta)} = \frac{3,14\cdot 6^2\cdot 45^0}{360^0} = 14,13\text{cm}^2$

$E_{A\overset{\triangle}{B}\Gamma} = \frac{AB\cdot A\Gamma}{2} = \frac{6\cdot 6}{2} = 18\text{cm}^2$

Άρα $E_{\gamma\rho\alpha\mu\mu.} = 18 - 14,13 = 3,87\text{cm}^2$

Με το Π.Θ. υπολογίζουμε την πλευρά ΒΓ:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$B\Gamma^2 = 6^2 + 6^2$ ή $B\Gamma^2 = 72$ ή $B\Gamma = \sqrt{72} \cong 8,48\text{cm}$

Έχουμε $L_{\widehat{A\Delta}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 45^0}{180^0} = 4{,}71\text{cm}$

Άρα $\Pi_{\text{γραμμ.}} = AB + B\Delta + L_{\widehat{A\Delta}} = 6 + (8{,}48 - 6) + 4{,}71 = 13{,}19\text{cm}$

13. α) Η ακτίνα του μικρού κύκλου είναι $\rho = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\text{cm}.$

Με το Π.Θ. την διαγώνιο ΑΓ.

$(A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2$ ή

$A\Gamma^2 = 400$ ή $A\Gamma = \sqrt{400}$ ή $A\Gamma = 20\text{cm}$

Οπότε η ακτίνα του μεγάλου κύκλου είναι $R = \dfrac{A\Gamma}{2} = 10\text{cm}$

β) $E_{\text{μικρού κύκλου}} = 3{,}14 \cdot (5\sqrt{2})^2 = 157\text{cm}^2$

$E_{\text{μεγάλου κύκλου}} = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314\text{cm}^2$

γ) $E_{\text{δακτυλίου}} = 314 - 157 = 157\text{cm}^2$

14. $E_{\text{γραμμ.}} = 10^2 - 4 \cdot \dfrac{3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 90^0}{360^0} = 100 - 78{,}5 = 21{,}5\text{cm}^2$

15. $E_{\text{γραμμ.}} = E_{\text{τετραγώνου}} - 2 \cdot E_{\text{ημικύκλιου}} + 2\, E_{\text{κυκλικού τμήματος}}$

- $E_{\text{τετράγωνου}} = 8^2 = 64\text{cm}^2$
- $E_{\text{ημικύκλιου}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 4^2}{2} = 25{,}12\text{cm}^2$
- $E_{\text{κυκλικού τμήματος}} = E_{\text{κυκλικού τομέα}} - E_{\text{τριγώνου}}$

$$= \frac{3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 60^0}{360^0} - \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$= 33{,}49 - 27{,}71 = 5{,}78\text{cm}^2$$

Άρα $E_{\text{γραμμ.}} = 64 - 2 \cdot 25{,}12 + 2 \cdot 5{,}78 = 25{,}32\text{cm}^2$

16. α) Έχουμε $\Delta\widehat{A}\Gamma = \dfrac{\widehat{A}}{2} = \dfrac{120^0}{2} = 60^0.$ Οπότε $\varepsilon\varphi 60^0 = \dfrac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$ ή

$$\sqrt{3} = \frac{\Delta\Gamma}{3} \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma = 3\sqrt{3}\text{cm}$$

β) $E_{\text{γραμμ.}} = E_{A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma} - E_{\text{κ.τ.}} = \dfrac{\Delta\Gamma \cdot A\Delta}{2} - \dfrac{\pi \cdot AE^2 \cdot 60^0}{360^0} =$

$$= \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} - \frac{3{,}14 \cdot 3^2}{6} = 7{,}65 - 4{,}71 = 2{,}94\text{cm}^2$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α), β) (θεωρία)

γ) Ημικύκλιο $\rightarrow 180^\circ$

Τεταρτοκύκλιο $\rightarrow 90^\circ$

κύκλος $\rightarrow 360^\circ$

$\frac{1}{8}$ κύκλου $\rightarrow 45^\circ$

Θέμα 2

Πρέπει $2x + 10^\circ = 90^\circ$ ή $x = 40^\circ$. Οπότε $\widehat{AB} = 60^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta} = 50^\circ$ και $\widehat{A\Delta} = 130^\circ$. Άρα $\hat{A} = 85^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 95^\circ$ και $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

Θέμα 3

Περίμετρος τετράγ. $= 4 \cdot \alpha$ ή $62{,}8 = 4 \cdot \alpha$ ή $\alpha = 15{,}7$ cm

Οπότε $E_{\text{τετράγωνου}} = \alpha^2 = 15{,}7^2 = 246{,}49$ cm^2

Έχουμε $L = 2\pi\rho$ ή $62{,}8 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho$ ή $\rho = 10$ cm

Οπότε $E_{\text{κύκλου}} = \pi\rho^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$ cm^2

Άρα ο κύκλος έχει εμβαδόν μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου.

Θέμα 4

$$\Pi_{\text{γραμμ.}} = 4 \cdot 12 + 2\frac{3{,}14 \cdot 12 \cdot 90^0}{180^0} = 48 + 37{,}68 = 85{,}68\text{cm}^2$$

$$E_{\text{γραμμ.}} = 2\,(E_{\text{τετράγωνου}} - E_{\text{τετερτοκύκλιου}}) = 2 \cdot \left(12^2 - \frac{3{,}14 \cdot 12^2}{4}\right) = 61{,}92 \text{ cm}^2.$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α) (Θεωρία) β)

ν	3	5	6	9
φ	60°	108°	120°	140°
ω	120°	72°	60°	40°

Θέμα 2

α) $\hat{x} = 110^\circ$, $\hat{y} = 50^\circ$, $\hat{z} = 60^\circ$ και $\hat{\omega} = 70^\circ$

β) $\hat{x} = 20^\circ$, $\hat{y} = 25^\circ$, $\hat{z} = 135^\circ$ και $\hat{\omega} = 45^\circ$

Θέμα 3

Εμβ. $= 50 \cdot 30 - 3{,}14 \cdot 5^2 = 1500 - 78{,}5 = 1421{,}5\text{cm}^2$
Άρα χρειαζόμαστε $1421{,}5 : 10 = 142{,}15$ κιλά σπόρους

Θέμα 4

α) $L_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = L_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = L_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 6 \cdot 60^0}{180^0} = 6{,}28\text{cm}$

β) Περίμετρος $= L_{\overset{\frown}{AB}} + L_{\overset{\frown}{A\Gamma}} + L_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = 3 \cdot 6{,}28 = 18{,}84\text{cm}$

$E_{\text{καμπυλόγραμμου τριγώνου}} = E_{\text{τριγ. } A\hat{B}\Gamma} + 3 \cdot E_{\text{κυκλικού τμήματος}} =$

$$= \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \left(\frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 60^0}{360^0} - \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) =$$

$= 15{,}3 + 3(18{,}84 - 15{,}3) = 15{,}3 + 3 \cdot 3{,}54 = 25{,}92\ \text{cm}^2$

γ) $E_{\text{γραμμ.}} = 25{,}92 - 15{,}3 = 10{,}62\ \text{cm}^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Σ, 2) Λ, 3) Λ, 4) Σ, 5) Λ, 6) Λ, 7) Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) ΔΓ, ΗΘ, ΕΖ
β) ΑΔ, ΔΘ, ΒΓ, ΓΗ
γ) ΒΓ, ΖΗ, ΔΓ, ΗΘ

2. $ΔΗ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΔΗ^2 = 25$ ή $ΔΗ = 5cm$
$ΑΗ^2 = ΑΔ^2 + ΔΗ^2$ ή $ΑΗ^2 = 12^2 + 5^2$ ή $ΑΗ^2 = 144 + 5$ ή $ΑΗ^2 = 169$
ή $ΑΗ = 13$ cm

3. $ΚΛ^2 = 12^2 + (17 - 12)^2 = 144 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
Άρα $ΚΛ = 13$ cm

4. α) $ΖΘ^2 = ΖΗ^2 + ΗΘ^2$ ή $ΖΘ^2 = 12^2 + 9^2$ ή $ΖΘ^2 = 144 + 81$ ή
$ΖΘ^2 = 225$ ή $Ζθ = 15cm$
β) $ΒΘ^2 = ΒΖ^2 + ΖΘ^2$ ή $ΒΘ^2 = 8^2 + 15^2$ ή $ΒΘ^2 = 64 + 225$ ή
$ΒΘ^2 = 289$ ή $ΒΘ = 17$ cm
γ) $εφ\,Ζ\hat{Θ}Β = \frac{ΒΖ}{ΖΘ} = \frac{8}{15} = 0{,}533$, άρα $Ζ\hat{Θ}Β \cong 28^0$

5. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ ή $ΑΓ^2 = 6^2 + 4^2$ ή $ΑΓ^2 = 52$ ή $ΑΓ = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \cong 7{,}21m$

$ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + ΓΔ^2$ ή $ΑΔ^2 = 52 + 25$ ή $ΑΔ^2 = 77$ ή $ΑΔ = \sqrt{77} \cong 8{,}77m$

$ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2$ ή $ΑΕ^2 = 6^2 + 5^2$ ή $ΑΕ^2 = 61$ ή $ΑΕ = \sqrt{61} \cong 7{,}81m$

6. $ΒΜ^2 = ΑΒ^2 + ΑΜ^2$ ή $ΒΜ^2 = 18^2 + 14^2$ ή $ΒΜ^2 = 520$ ή $ΒΜ \cong 22{,}8cm$.

$εφ\,Β\hat{Μ}Ζ = \frac{ΒΖ}{ΒΜ} = \frac{10}{22{,}8} = 0{,}438$, άρα $Β\hat{Μ}Ζ = 24^\circ$

4.2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Α: 5 έδρες β) β: 6 κορυφές γ) Β: 9 ακμές
2) α) Γ: 234 cm^2 β) Α:314 cm^2
3) α) Γ: 628 cm^2 β) Α: 1256 cm^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $E_{ολ} = E_{π} + 2 \cdot E_{β} = (2 \cdot 80 + 2 \cdot 40) \cdot 30 + 2 \cdot 80 \cdot 40 = 13.600 cm^2$

2. α) $E = E_{π} + E_{β} = (2 \cdot 25 + 2 \cdot 15) \cdot 2,5 + 25 \cdot 15 = 575 m^2$
β) $E_{πλακιδίου} = 25^2 = 625\ cm^2 = 0,0625\ m^2$
Οπότε χρειαζόμαστε 575 : 0,0655 = 9.200 πλακάκια
Άρα θα μας κοστίσει 9.200 · 0,30 = 2760 ευρώ

3. Από τον τύπο $E_{π}$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) έχουμε

$$192 = 3 \cdot α \cdot 8 \quad ή \quad α = \frac{192}{24} \quad ή \quad α = 8cm$$

Εμβ. ισόπλευρου τριγ. $= \frac{α^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 16 \cdot \sqrt{3} \cong 27,71 cm^2$

Άρα $E_{ολ}$ = Επ + 2 · Εβ = 192 + 2 · 27,71 = 247,42cm^2

4. $E_{βάσης} = 2 \cdot \left[\frac{(0,8 + 0,6) \cdot 0,4}{2}\right] = 0,56 m^2$

$E_{ολ} = E_{π} + 2\,E_{β} = (0,8 + 0,6 + 0,45 + 0,45 + 0,6) \cdot 1,2 + 2 \cdot 0,56 = 4,6 m^2$
Οπότε η κατασκευή κοστίζει 4,6 · 15 = 69ευρώ.

5. $E_{ολ} = 2 \cdot 3,14 \cdot 8 \cdot 16 + 2 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = 1205,76 cm^2$

6. $E_{π} = 50,24 \cdot 20 = 1004,8\ cm^2$
Από τον τύπο L = 2πρ έχουμε

$$50,24 = 2 \cdot 3,14 \cdot ρ \quad ή \quad ρ = 8cm$$

$E_{ολ} = E_{π} + 2 \cdot E_{β} = 1004,8 + 2 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = 1406,72\ cm^2$

7. $E_{\pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}10 \cdot 1{,}50 = 0{,}942\ m^2$
Έχουμε $50 \cdot 0{,}942 = 47{,}1\ m^2$
Άρα θα πληρώσουμε $3 \cdot 47{,}1 = 141{,}3$ ευρώ.

8. α) $E_{\pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 3 = 75{,}36\ m^2$
$E_{ολ} = 75{,}16 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 175{,}64\ m^2$
β) $\varrho = 6cm$ $E_{\pi} = 452{,}16\ cm^2$ $E_{ολ} = 678{,}24\ cm^2$
γ) $\varrho = 5\ cm$ $E_{\pi} = 314\ cm^2$ $E_{ολ} = 471\ cm^2$

9. $E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^2 = 4{,}0192m^2$
Για 1000 βαρέλια θέλουμε $1000 \cdot 4{,}0192 = 4019{,}2m^2$
Επειδή έχουμε απώλεια 10% χρειαζόμαστε
$4019{,}2 : 0{,}9 = 4465{,}77m^2$
Άρα θα μας κοστίσει $1{,}5 \cdot 4.465{,}77 = 6698{,}65$ ευρώ.

10. α) $E_{\pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}5652m^2$ κουρεύει σε κάθε στροφή.
β) $E_{κήπου} = 10 \cdot 18 = 180\ m^2$
Οπότε θα κάνει $180 : 0{,}5652 = 319$ στροφές.

4.3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1)

Εμβαδόν βάσης	$25cm^2$	$16cm^2$	32dm
Ύψος	4cm	9cm	50cm
Όγκος	$100cm^2$	$144cm^3$	$160dm^3$

2)

Εμβαδόν βάσης	$25\pi\ cm^2$	$49\pi\ cm^2$	$78{,}5cm^2$
Ύψος	8	6cm	4cm
Όγκος	$200\pi\ cm^3$	$294\ \pi\ cm^3$	$314cm^3$

3) α) Σ, β) Λ, γ) Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. α) Έστω α η πλευρά του τετραγώνου, τότε από τον τύπο του όγκου έχουμε:

$V = \alpha^2 \cdot \upsilon$ ή $V = \alpha^2 \cdot 5\alpha$ ή $V = 5\alpha^3$

ή $135 = 5 \cdot \alpha 3$ ή $\alpha 3 = 27$ ή $\alpha 3 = 33$ ή $\alpha = 3\text{cm}$.

β) $E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} = 4\alpha \cdot 5\alpha + 2 \cdot \alpha^2 = 20 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^2 = 198\text{cm}^2$

2. α) $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή $B\Gamma^2 = 12^2 + 16^2$ ή $B\Gamma^2 = 400$ ή $B\Gamma = 20$ cm

β) $E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{B} = 4$

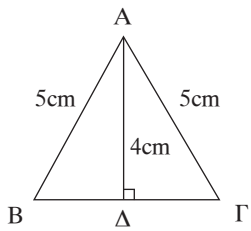
$$(12+16+20)\cdot 20 + 2\cdot\frac{12\cdot 16}{2} = 1.152\text{cm}^2$$

γ) $V = (\text{Έμβασης}) \cdot (\text{ύψος}) = \dfrac{12\cdot 16}{2} \cdot 20 = 1.920\text{cm}^3$

3. α) Με το Π.Θ. βρίσκουμε: $AB^2 = 24^2 + 10^2$ ή $AB^2 = 676$ ή $AB = 26\text{cm}$.
Οπότε $AB = \Gamma\Delta = 26$ cm.

β) $E_{ολ} = (2 \cdot 0{,}26 + 0{,}3) \cdot 2 + 2 \cdot \dfrac{(0{,}5+0{,}3)\cdot 0{,}24}{2} = 1{,}832\text{m}^2$

γ) $V = \dfrac{(0{,}5+0{,}3)\cdot 0{,}24}{2} \cdot 2 = 0{,}192\text{m}^3$



4. α) Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τριγ. ΑΔΓ και έχουμε:

$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 - A\Delta^2$ ή

$\Delta\Gamma^2 = 5^2 - 4^2$ ή $\Delta\Gamma^2 = 9$ ή $\Delta\Gamma = 3\text{cm}$.

Οπότε $B\Gamma = 2 \cdot 3 = 6\text{cm}$

$E_{ολ} = E_{\pi} + 2 \cdot E_{\beta} = (5 + 5 + 6) \cdot 15 + 2 \cdot \dfrac{6\cdot 4}{2} = 264\text{cm}^2$

β) $V = \dfrac{6\cdot 4}{2} \cdot 15 = 180\text{cm}^3$

5. α) $V = 3{,}14 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}22608\text{m}^3 = 226{,}08\text{dm}^3$

β) $\varrho = 150\text{mm} = 0{,}15\text{m}$ και $V = 3{,}14 \cdot 0{,}15^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}02826\text{m}^3 = 28{,}26\text{dm}^3$

6. Έχουμε $E_{\pi} = 2\pi \cdot \varrho \cdot \upsilon$ ή $452{,}16 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \varrho \cdot 24$ ή

$$\varrho = \frac{452{,}16}{150{,}72} \quad \text{ή} \quad \varrho = 3\text{cm}.$$

Άρα $V = \pi\varrho^2 \cdot \upsilon = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 24 = 678{,}24\text{cm}^3$.

7. V κυλίνδρου $= 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 \cdot 10 = 384{,}65\text{cm}^3$
Οπότε $V_{ολ} = 2 \cdot 384{,}65 = 769{,}3\text{cm}^3$

8. $E_{κύκλου} = π \cdot ρ_1^{\,2} = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314\ \text{cm}^2$
Από το τύπο του εμβαδού κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου έχουμε

$Eπ = 2πρ \cdot υ$ ή $314 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot ρ \cdot \frac{ρ}{2}$ ή

$ρ^2 = 100$ ή $ρ = 10\text{cm}$.
Άρα $V_κ = 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 5 = 1570\ \text{cm}^3$

9. V = V εξωτερικού – V εσωτερικού $= 3{,}14 \cdot 1{,}75^2 \cdot 8 - 3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 8 = 20{,}41\text{m}^3$

4.4

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ, β) Λ, γ) Σ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $V = \frac{1}{3} \cdot 15^2 \cdot 20 = 1500\text{cm}^3$

2. $Eπ = \frac{1}{2} \cdot$ (περίμετρος βάσης) $\cdot$ (απόστημα)

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot 10 \cdot = 300\text{cm}^2$

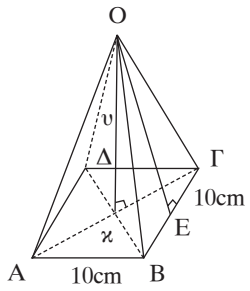
3. α) $Eπ = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 10) \cdot 12 = 240\ \text{cm}^2$

β) $Eολ = Eπ + Eβ = 240 + 10^2 = 340\ \text{cm}^2$

γ) Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο τριγ. ΟΚΕ
και έχουμε:
$OE^2 = OK^2 + KE^2$

$12^2 = \upsilon^2 + 5^2$
$\upsilon^2 = 144 - 25$
$\upsilon^2 = 119$
$\upsilon = \sqrt{119} \cong 10,9\text{cm}$

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 10,9 = 545\text{cm}^3$



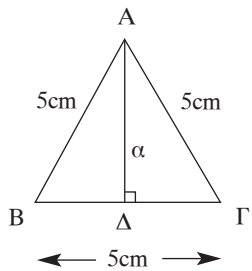
4.

Ύψος	9,16cm	8cm	10cm
Πλευρά βάσης	8cm	12cm	13,26cm
Απόστημα	10cm	10cm	12cm
Εμβαδόν παράπλ. επιφ.	160cm^2	240cm^2	$318,24\text{cm}^2$
Όγκος	$195,41\text{cm}^3$	384cm^3	$1758,276\text{cm}^3$

5. Με το Π.Θ. βρίσκουμε πρώτα τα απόστημα (α) και το έπειται το ύψος (υ)
$17^2 = \alpha^2 + 8^2$ ή $\alpha^2 = 289 - 64$ ή $\alpha^2 = 225$ ή $\alpha = 15\text{cm}$
και $15^2 = \upsilon^2 + 8^2$ ή $\upsilon^2 = 225 - 64$ ή $\upsilon^2 = 161$ ή $\upsilon = \sqrt{161} \cong 12,68\text{cm}$

Άρα $V = \frac{1}{2} \cdot 16^2 \cdot 12,68 = 1623,04\text{cm}^3$

6. α) Από το Π.Θ. έχουμε:
$5^2 = \alpha^2 + 2,5^2$
$\alpha^2 = 18,75$
$\alpha = \sqrt{18,75} \cong 4,33\text{cm}$



Οπότε $E_\pi = \frac{1}{2}(3 \cdot 5) \cdot 4,33 = 32,475\text{cm}^2$

β) $V = \frac{1}{3}$ (εμβ. βάσης) · (ύψος) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 4,33}{2} \cdot 4,1 = 14,79\text{cm}^3$

7. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \cdot \upsilon}{\frac{1}{3} \cdot (2\alpha)^2 \cdot \upsilon} = \frac{\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{1}{4}$ ή $V_2 = 4 \cdot V_1$

8. α) $\alpha^2 = 10^2 - 4^2$ ή $\alpha^2 = 84$ ή $\alpha = \sqrt{84} \cong 9{,}16\text{cm}$

β) $E\pi = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 8) \cdot 9{,}16 = 219{,}84\text{cm}^2$

γ) Με το Π.Θ. βρίσκουμε το απόστημα της βάσης, που είναι κανονικό εξάγωνο.

$\alpha^2 = 8^2 - 4^2$ ή $\alpha = 64 - 16$ ή $\alpha^2 = 48$ ή $\alpha = \sqrt{48} \cong 6{,}92\text{cm}$

$E_{\text{κανονικού εξάγωνου}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6{,}92 = 166{,}08\text{cm}^2$

Οπότε $E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + E_{\beta} = 219{,}84 + 166{,}08 = 385{,}92\text{cm}^2$

δ) $\upsilon^2 = 10^2 - 8^2$ ή $\upsilon^2 = 36$ ή $\upsilon = 6\text{cm}$

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot 166{,}08 \cdot 6 = 332{,}16\text{cm}^3$.

9. Βρίσκουμε το απόστημα με το Π.Θ.

$\alpha^2 = 8^2 + 6^2$ ή $\alpha^2 = 100$ ή $\alpha = 10\text{cm}$ (απόστημα)

Οπότε $E_{\text{ολ}} = 5 \cdot 12^2 + \frac{1}{2}(4 \cdot 12) \cdot 10 = 960\text{cm}^2$

$V_{\text{ολ}} = V_{\text{κύβου}} - V_{\text{πυραμίδας}} = 12^3 - \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 = 1344\text{cm}^3$

10. α) τριπλασιάζεται

β) εννιαπλασιάζεται

4.5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ, στ) Σ, ζ) Λ, η) Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $E_{\text{ολ}} = \pi\rho \cdot \lambda + \pi \cdot \rho^2$ $(\lambda^2 = \upsilon^2 + \rho^2 = 8^2 + 6^2 = 100$ ή $\lambda = 10\text{cm})$

$E_{\text{ολ}} = 3{,}14 \cdot 6 \cdot 10 + 3{,}14 \cdot 6^2 = 301{,}44\text{cm}^2$

2. $Επ = π \cdot ρ \cdot λ$ ή $226,08 = 3,14 \cdot ρ \cdot 9$ ή $ρ = 8cm$
Οπότε $E_β = π \cdot ρ^2 = 3,14 \cdot 8^2 = 200,96cm^2$

3. Έχουμε $ημ30° = \frac{ρ}{λ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{3}{λ}$ ή $λ = 6cm$

και $συν30° = \frac{υ}{λ}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{υ}{6}$ ή $υ = 3\sqrt{3} \cong 5,19cm$

Άρα $E_{ολ} = π \cdot ρλ + πρ^2 = 3,14 \cdot 3 \cdot 6 + 3,14 \cdot 3^2 = 84,78cm^2$.

και $V = \frac{1}{3} πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 5,19 = 48,89cm^3$

4. α) Έχουμε $L = 2πρ$ ή $18,84 = 2 \cdot 3,14 \cdot ρ$ ή $ρ = 3dm$.
$E_{ολ} = 3,14 \cdot 3 \cdot 5 + 3,14 \cdot 3^2 = 75,36\ cm^2$
β) Από τον τύπο $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $5^2 = υ^2 + 3^2$ ή
$υ^2 = 25 - 9$ ή $υ^2 = 16$ ή $υ = 4dm$

$V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 3^2 \cdot 4 = 37,68dm^3$

5. α) Έχουμε $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $λ^2 = 50^2 + 10^2$ ή
$λ^2 = 2500 + 100$ ή $λ^2 = 2.600$ ή $λ = \sqrt{2600} \cong 51cm$
Οπότε $E_{παρ.επιφ.κώνου} = π \cdot ρ \cdot λ = 3,14 \cdot 10 \cdot 51 = 1601,4\ cm^2$
Ακόμα $E_{παρ.επιφ.κυλίνδρου} = 2πρ \cdot υ = 2 \cdot 3,14 \cdot 12,5 \cdot 5 = 392,5cm^2$
Άρα $E_{ολ} = 1601,4 + 392,5 + (3,14 \cdot 12,5^2 - 3,14 \cdot 10^2) =$
$= 1993,9 + 3,14 \cdot (156,25 - 100) = 1993,9 + 176,625 =$
$= 2170,525cm^2$

β) $V_{κώνου} = \frac{1}{3} πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 50 = 5233,33cm^3$

$V_{κυλινδρου} = πρ^2 \cdot υ = 3,14 \cdot 12,5^2 \cdot 5 = 2453,125cm^3$
$V_{ολ} = 5233,33 + 2453,125 = 7686,455cm^3$.

6. α) $V_{κώνου} = \frac{1}{3} πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 10 = 1046,66cm^3$

$V_{κυλίνδρου} = πρ^2 \cdot υ = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 12 = 3768cm^3$
$V_{ολ} = 1046,66 + 3768 = 4814,66\ cm^3$.
β) $E_{παρ.επιφ.κυλίνδρου} = 2πρ \cdot υ = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 12 = 753,6\ cm^2$
Έχουμε $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $λ^2 = 10^2 + 10^2$ ή $λ^2 = 200$ ή
$λ = \sqrt{200} \cong 14,1cm$

$E_{παρ.επιφ.κώνου} = π \cdot ρ \cdot λ = 3,14 \cdot 10 \cdot 14,1 = 442,74cm^2$

$E_{ολ} = 753,6 + 442,74 = 1196,34\ cm^2$

Για 50 δοχεία χρειαζόμαστε $50 \cdot 1196,34 = 59817\ cm^2 =$
$= 5,9817\ m^2$

Άρα το κόστος είναι $30 \cdot 5,9817 = 179,451$ ευρώ.

7. Από τον τύπο $V = \frac{1}{3}πρ^2 \cdot υ$ έχουμε

$19,625 = 3,14 \cdot ρ^2 \cdot 3$ ή $ρ^2 = 6,25$ ή
$ρ = \sqrt{6,25}$ ή $ρ = 2,5m$

Οπότε $E_π = π \cdot ρ \cdot λ$ ($λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $λ^2 = 3^2 + 2,5^2$ ή $λ^2 = 15,25$ ή $λ = 3,9m$)
$E_π = 3,14 \cdot 2,5 \cdot 3,9 = 30,615\ m^2$ ύφασμα.

8. Έχουμε $λ = \frac{29}{20} \cdot ρ$ και $λ - ρ = 9$, οπότε

$\frac{29}{20} \cdot ρ - ρ = 9$ ή $29 \cdot ρ - 20 \cdot ρ = 180$ ή $9ρ = 180$

ή $ρ = 20cm$ και $λ = 29cm$

Από τον τύπο $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $29^2 = υ^2 + 20^2$ ή
$υ^2 = 841 - 400$ ή $υ^2 = 441$ ή $υ = 21cm$

Άρα $V = \frac{1}{3} \cdot πρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 20^2 \cdot 21 = 8792cm^3 = 8,792dm^3$ (λίτρα)

9. Με το Π.Θ. υπολογίζουμε τη διαγώνιο του τετραγώνου:

$δ^2 = 20^2 + 20^2$ ή $δ^2 = 800$ ή $δ = \sqrt{800} \cong 28,28cm$

Οπότε η ακτίνα του κύκλου είναι $ρ = \frac{δ}{2} = 14,14cm$

$E_{ολ} = 2 \cdot E_π = 2 \cdot π \cdot ρ \cdot λ = 2 \cdot 3,14 \cdot 14,14 \cdot 20 = 1775,984cm^2$

$V_{ολ} = 2 \cdot V_{κώνου} = 2 \cdot \frac{1}{3} π \cdot ρ^2 \cdot υ = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 14,14^2 \cdot 14,14 = 5918,15cm^3$

$V = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \cdot 10 = 188,4cm^3$.

4.6

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Σ, 2) Λ, 3) Σ, 4) Σ, 5) Λ, 6) Σ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 8^2 = 803,84cm^2$

$$V_{σφ} = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 8^3 = 2143,57cm^3$$

2. α) Έχουμε $L = 2πρ$ ή $50,24 = 2 \cdot 3,14 \cdot ρ$ ή $ρ = 8cm$
β) $E_{σφ} = 803,84cm^2$
γ) $V_{σφ} = 2143,57cm^3$

3. $$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4π \cdot ρ_1^2}{4π \cdot ρ_2^2} = \frac{ρ_1^2}{ρ_2^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}π \cdot ρ_1^3}{\frac{4}{3}π \cdot ρ_2^3} = \frac{ρ_1^3}{ρ_2^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

4. Από τον τύπο $V_{σφ} = \frac{4}{3}π \cdot ρ^3$ έχουμε:

$113,04 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot ρ^3$ ή $ρ^3 = 27$ ή $ρ^3 = 3^3$ ή $ρ = 3cm$

Άρα $E_{σφ} = 4 \cdot π \cdot ρ^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 3^2 = 113,04cm^2$

5. $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 9^2 = 1017,36m^2$
Άρα κοστίζει $5 \cdot 1017,36 = 5086,8$ ευρώ.

6. Από τον τύπο $E = π \cdot ρ^2$ έχουμε $1256 = 3,14 \cdot ρ^2$ ή
$ρ^2 = 400$ ή $ρ = 20cm$.

Άρα $V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi \cdot ρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 20^3 \cong 33493{,}33cm^3$.

7. $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 = 452{,}16cm^2$.

8. $V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi \cdot ρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15^3 = 14130cm^3 = 14{,}13$ λίτρα.

9. α) $E_{ημισφαίριου} = \frac{4 \cdot \pi \cdot \rho^2}{2} + \pi \cdot ρ^2 = 3πρ^2 = 3 \cdot 3{,}14 \cdot 25^2 = 5887{,}5cm^2$

β) $V_{ημισφαίριου} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho^3}{2} = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 25^3 = 32708{,}33cm^3$

10. α) $Vσφ = \frac{4}{3}\pi ρ^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15^3 = 14130cm^3$

β) V κιβωτίου $= α^3 = 30^3 = 27000cm^3$
γ) $V = 27000 - 14130 = 12870\ cm^3$

11. Έστω $ρ_1$ η ακτίνα του κύκλου τομής, τότε από το Π.Θ. έχουμε
$8^2 = ρ_1^2 + 4^2$ ή $ρ_1^2 = 64 - 16$ ή $ρ_1^2 = 48$ ή $ρ_1 = \sqrt{48} \cong 6{,}92cm$
$E_{κύκλου} = \pi \cdot ρ_1^2 = 3{,}14 \cdot 48 = 150{,}72cm^2$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 1

Θέμα 1

α), β), γ), (Θεωρία)

Θέμα 2

α) $ΒΓ^2 = 4^2 + 3^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5cm$

β) $εφx = \frac{ΒΓ}{ΑΒ} = \frac{5}{12}$ άρα $\hat{x} \cong 23^0$

Θέμα 3

α) Έχουμε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $ΒΓ^2 = 6^2 + 8^2$ ή $ΒΓ^2 = 100$ ή $ΒΓ = 10cm$.

$E_{ολ} = E_{π} + 2 \cdot E_{β} = (6 + 8 + 10) \cdot 15 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} = 408cm^2$

β) $V = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 15 = 360cm^3$

Θέμα 4

α) $E_{π} = \frac{1}{2} (4 \cdot 16) \cdot 15 = 480cm^2$

β) Με το Π.Θ. βρίσκουμε το ύψος της πυραμίδας:
$15^2 = υ^2 + 8^2$ ή $υ^2 = 15^2 - 8^2$ ή
$υ^2 = 225 - 64$ ή $υ^2 = 161$ ή $υ = \sqrt{161} \cong 12,68cm$
Άρα $V = 16^2 \cdot 12,68 = 3246cm^2$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ 2

Θέμα 1

α), β), γ), δ) (Θεωρία)

Θέμα 2

$V = π \cdot ρ^2 \cdot υ = 3,14 \cdot 0,4^2 \cdot 7 = 3,5168m^3$
Άρα η αξία του κορμού είναι $150 \cdot 3,5168 = 527,52$ ευρώ.

Θέμα 3

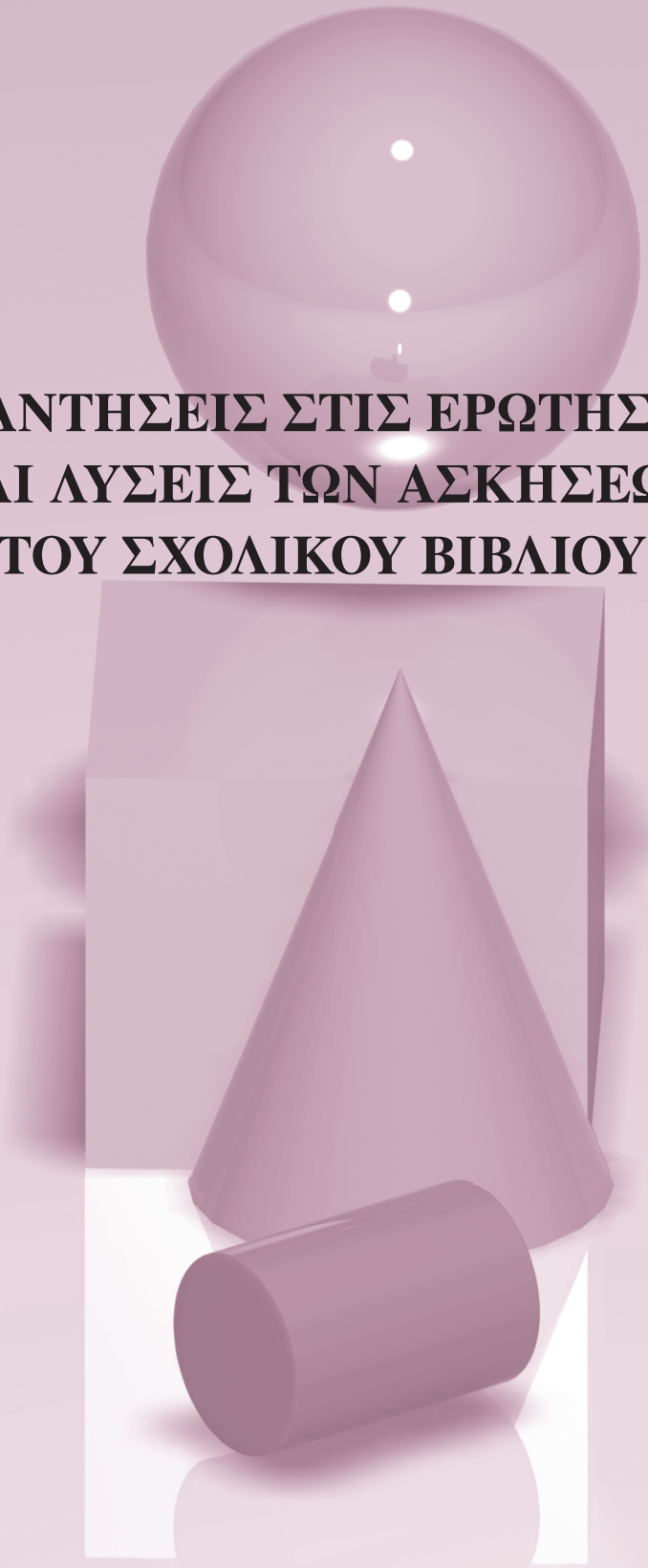
α) $E_{π} = π \cdot ρ \cdot λ$ ή $502,4 = 3,14 \cdot ρ \cdot 20$ ή $ρ = 8$ cm
β) $λ^2 = υ^2 + ρ^2$ ή $20^2 = υ^2 + 8^2$ ή $υ^2 = 400 - 64$ ή $υ^2 = 336$
$υ = \sqrt{336} \cong 18,33cm$

γ) $V = \frac{1}{3} \cdot π \cdot ρ^2 \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 8^2 \cdot 18,33 = 1227,86cm^3$

Θέμα 4

$V = V_{κιβωτίου} - V_{σφ} = 203 - \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 10^3 = 8000 - 4186,66 = 3813,34cm^3$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ



ΜΕΡΟΣ Α΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1 Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** iii, **β)** iv, **γ)** i, **δ)** ii. **2.** **α)** Γ, **β)** Α, **γ)** Β, **δ)** Γ. **3.** **α)** iv, **β)** i, **γ)** iii, **δ)** ii.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** Έστω x είναι ο αριθμός, τότε $3x + 12$. **β)** Έστω x, y είναι οι αριθμοί, τότε $9(x + y)$. **γ)** Έστω x m είναι το πλάτος, $(x + 2)$ m είναι το μήκος, άρα η περίμετρος $2x + 2(x + 2) = 4x + 4$.

2. **α)** Έστω x € η τιμή του κιλού, έχουμε 5x €. **β)** Έστω x € είναι η αρχική τιμή, έχουμε $x + 19\% \cdot x = x + 0{,}19x = 1{,}19x$.

3. **α)** $17x$, **β)** -16α, **γ)** $27y$, **δ)** 4ω, **ε)** $1 - 2x$, **στ)** -2β.

4. **α)** $5x - y$, **β)** $7\omega + 5\alpha$, **γ)** $-2x - 2y$, **δ)** $-7x + 4\omega$.

5. **α)** $A = 3x + 6y - 4x - 2y = 4y - x$, άρα $A = 4 \cdot (-2) - 1 = -8 - 1 = -9$.
β) $B = 10\alpha - 15\beta + 12\beta - 3\alpha = 7\alpha - 3\beta$,
άρα $B = 7 \cdot (-3) - 3 \cdot 5 = -21 - 15 = -36$.

6. $A = 2\alpha - 6\beta + 3\alpha + 6\beta = 5\alpha$, άρα $A = 5 \cdot 0{,}02 = 0{,}1$.
$B = 3x + 6y + 6x + 2y + y = 9x + 9y = 9(x + y)$, άρα $B = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$.

7. **α)** $\frac{87}{1{,}75^2} = \frac{87}{3{,}0625} \simeq 28{,}41 \rightarrow$ 1ος βαθμός,
β) $\frac{64}{1{,}42^2} = \frac{64}{2{,}0164} \simeq 31{,}74 \rightarrow$ 2ος βαθμός.

1.2 Εξισώσεις α΄ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** 30, **β)** 7, **γ)** 24, **δ)** (-3), **ε)** (-9), **στ)** 7. **2.** **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ.

3. **α)** iii, **β)** iv, **γ)** i, **δ)** ii.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $-2\cdot(-7)+3=14+3=17\neq 21$, δεν είναι λύση.

β) $3\cdot 0{,}5+5=1{,}5+5=6{,}5\neq 7{,}5$, δεν είναι λύση.

γ) $-3\cdot 1+4=7\cdot 1-6$ ή $-3+4=7-6$, οπότε είναι λύση.

2. **α)** $2x-x=4-5-21$ ή $x=-22$.

β) $7y+y+2y=1+9$ ή $10y=10$ ή $y=\frac{10}{10}$ ή $y=1$.

γ) $3t-3t-3=t+2t+2+1$ ή $3t-3t-t-2t=3+2+1$ ή $-3t=6$ ή $t=\frac{6}{-3}$ ή $t=-2$.

3. **α)** $8x+4-6x+6=3x+6$ ή $8x-6x-3x=6-6-4$ ή $-x=-4$ ή $x=4$.

β) $3y+3+2y-8=2y-y+6$ ή $3y+2y-2y+y=-3+8+6$ ή $4y=11$ ή $y=\frac{11}{4}$.

γ) $6\omega+12+3=3-2\omega+8$ ή $6\omega+2\omega=3+8-3-12$ ή $8\omega=-4$ ή $\omega=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$.

4. **α)** $4\cdot\frac{2x+3}{2}=4\cdot\frac{3x-5}{4}$ ή $2(2x+3)=3x-5$ ή $4x+6=3x-5$ ή $4x-3x=-6-5$ ή $x=-11$.

β) $12\cdot\frac{7x-6}{3}=12\cdot\frac{5x+2}{4}$ ή $4(7x-6)=3(5x+2)$ ή $28x-24=15x+6$ ή $28x-15x=24+6$ ή $13x=30$ ή $x=\frac{30}{13}$.

γ) $4\cdot\frac{2(x-1)-2}{2}=4\cdot\frac{1-3x}{4}$ ή $2\left[2(x-1)-2\right]=1-3x$ ή $2(2x-2-2)=1-3x$ ή $4x-4-4=1-3x$ ή $4x+3x=4+4+1$ ή $7x=9$ ή $x=\frac{9}{7}$.

5. **α)** $15\cdot\frac{x+4}{5}-15\cdot\frac{x-4}{3}=15\cdot\frac{1-3x}{15}-15\cdot 2$ ή $3(x+4)-5(x-4)=1-3x-30$ ή $3x+12-5x+20=1-3x-30$ ή $3x-5x+3x=-12-20+1-30$ ή $x=-61$.

β) $6\cdot\frac{y-1}{3}-6\cdot\frac{2y+7}{6}=6y+6\cdot\frac{1-3y}{2}$ ή $2(y-1)-(2y+7)=6y+3(1-3y)$ ή $2y-2-2y-7=6y+3-9y$ ή $2y-2y-6y+9y=2+7+3$ ή $3y=12$ ή $y=\frac{12}{3}=4$.

γ) $28\cdot\frac{1}{4}(\omega+4)-28\cdot 7=28(1-\omega)\frac{1}{7}+28\cdot\frac{\omega-23}{4}$ ή

$7(\omega+4)-196=4(1-\omega)+7(\omega-23)$ ή

$7\omega+28-196=4-4\omega+7\omega-161$ ή

$7\omega+4\omega-7\omega=196-28+4-161$ ή $4\omega=11$ ή $\omega=\frac{11}{4}$.

6. **α)** $3x-\frac{2x}{3}+5=6-\frac{x}{3}+2$ ή $3\cdot 3x-3\cdot\frac{2x}{3}+3\cdot 5=3\cdot 6-3\cdot\frac{x}{3}+3\cdot 2$ ή

$9x-2x+15=18-x+6$ ή $9x-2x+x=18+6-15$ ή $8x=9$

ή $x=\frac{9}{8}$.

β) $5-\frac{t+1}{2}-\frac{1+2t}{3}=12-t+\frac{t+5}{6}$ ή

$6\cdot 5-6\cdot\frac{t+1}{2}-6\cdot\frac{1+2t}{3}=6\cdot 12-6t+6\cdot\frac{t+5}{6}$

ή $30-3(t+1)-2(1+2t)=72-6t+t+5$

ή $30-3t-3-2-4t=72-6t+t+5$

ή $-3t-4t+6t-t=-30+3+2+72+5$ ή $-2t=52$

ή $t=-\frac{52}{2}=-26$.

7. **α)** $3\cdot\frac{1+x}{2}=1+\frac{1}{4}$ ή $3\cdot 4\cdot\frac{1+x}{2}=4\cdot 1+4\cdot\frac{1}{4}$ ή $6(1+x)=4+1$ ή

$6+6x=5$ ή $6x=5-6$ ή $6x=-1$ ή $x=\frac{-1}{6}$.

β) $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(2t-\frac{1}{3}\right)=\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ή

$\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(2t-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ή $\frac{3}{2}\left(2t-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{2}\left(1-\frac{t}{2}\right)$ ή

$3t-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{5t}{4}$ ή $3t\cdot 4-4\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{5}{2}-4\cdot\frac{5t}{4}$ ή $12t-2=10-5t$ ή

$12t+5t=10+2$ ή $17t=12$ ή $t=\frac{12}{17}$.

8. **α)** $A=B$ ή $5x-3=12-2x$ ή $5x+2x=12+3$ ή $7x=15$ ή $x=\frac{15}{7}$.

β) $A=B$ ή $2(x-1)+\frac{3}{2}=6+\frac{x}{3}$ ή $6\cdot 2\cdot(x-1)+6\cdot\frac{3}{2}=6\cdot 6+6\cdot\frac{x}{3}$

ή $12(x-1)+3\cdot 3=36+2x$ ή $12x-12+9=36+2x$

ή $12x-2x=12-9+36$ ή $10x=39$ ή $x=\frac{39}{10}$.

9. **α)** Για $\mu=2$ έχουμε: $2(x+6)-2=(2\cdot 2-1)x+2$ ή

$2x+12-2=3x+2$ ή $2x-3x=-12+2+2$ ή $-x=-8$ ή $x=8$.

β) Για $x=7$ έχουμε: $\mu(7+6)-2=(2\mu-1)\cdot 7+2$ ή

$13\mu-2=14\mu-7+2$ ή $13\mu-14\mu=2-7+2$ ή $-\mu=-3$ ή $\mu=3$.

γ) Για $\mu = 1$ έχουμε: $1(x+6) - 2 = (2 \cdot 1 - 1)x + 2$ ή $x + 6 - 2 = x + 2$ ή $x - x = 2 + 2 - 6$ ή $0 \cdot x = -2$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

10. **α)** $AB = A\Gamma$ ή $2x + 3 = x + 5$ ή $2x - x = -3 + 5$ ή $x = 2$, οπότε $AB = 2 \cdot 2 + 3 = 7 = A\Gamma$ και $B\Gamma = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

β) $A\Gamma = B\Gamma$ ή $x + 5 = 2x + 1$ ή $x - 2x = -5 + 1$ ή $-x = -4$ ή $x = 4$, οπότε $AB = 2 \cdot 4 + 3 = 11$ και $B\Gamma = 2 \cdot 4 + 1 = 9 = A\Gamma$.

γ) $AB = B\Gamma$ ή $2x + 3 = 2x + 1$ ή $2x - 2x = -3 + 1$ ή $0x = -2$, άρα η εξίσωση είνα αδύνατη.

11. $3x - 1 = 11$ ή $3x = 11 + 1$ ή $3x = 12$ ή $x = \frac{12}{3}$ ή $x = 4$.

$2y + 3 = 15 - 2y$ ή $2y + 2y = 15 - 3$ ή $4y = 12$ ή $y = \frac{12}{4}$ ή $y = 3$.

$2\omega - 40^\circ = 90^\circ$ ή $2\omega = 40^\circ + 90^\circ$ ή $2\omega = 130^\circ$ ή $\omega = \frac{130^\circ}{2}$ ή $\omega = 65^\circ$.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

2	·	3	+	5	=	11
·		·		·		·
3	·	5	+	7	=	22
+		+		+		+
7	·	2	+	4	=	18
=		=		=		=
13	·	17	+	39	=	260

3	·	-3	+	-2	=	-11
·		·		·		·
-3	·	1	+	-4	=	-7
+		+		+		+
-5	·	-3	+	-9	=	6
=		=		=		=
-14	·	-6	+	-1	=	83

1.3 Επίλυση τύπων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Γ. **2.** Β. **3.** Γ. **4.** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\frac{L}{2\pi} = \frac{2\pi\rho}{2\pi}$ ή $\rho = \frac{L}{2\pi}$. **2.** $P - 2x = 2y$ ή $\frac{P - 2x}{2} = y$. **3.** $\frac{E}{2\pi\upsilon} = \frac{2\pi\rho\upsilon}{2\pi\upsilon}$ ή $\rho = \frac{E}{2\pi\upsilon}$.

4. $\beta y = -\alpha x - \gamma$ ή $y = \dfrac{-\alpha x - \gamma}{\beta}$. **5.** $E = 2xy + 2y\omega + 2\omega x$ ή $E - 2xy = (2y + 2x)\omega$ ή $\dfrac{E - 2xy}{2y + 2x} = \omega$. **6.** $t \cdot \upsilon = t \cdot \dfrac{S}{t}$ ή $t \cdot \upsilon = S$ ή $t = \dfrac{S}{\upsilon}$.

7. $2E = 2\dfrac{\beta + B}{2} \cdot \upsilon$ ή $2E = (\beta + B) \cdot \upsilon$ ή $2E = \beta \cdot \upsilon + B \cdot \upsilon$ ή $2E - B \cdot \upsilon = \beta \cdot \upsilon$ ή $\dfrac{2E - B \cdot \upsilon}{\upsilon} = \beta$. **8.** $(1 - \lambda) \cdot S = (1 - \lambda)\dfrac{\alpha}{1 - \lambda}$ ή $(1 - \lambda)S = \alpha$ ή $S - \lambda \cdot S = \alpha$ ή $-\lambda \cdot S = \alpha - S$ ή $\lambda = \dfrac{\alpha - S}{-S}$ ή $\lambda = \dfrac{S - \alpha}{S}$. **9.** $P - P_0 = \varepsilon \cdot h$ ή $\dfrac{P - P_0}{\varepsilon} = h$.

10. $\dfrac{Q}{m\theta} = \dfrac{mc\theta}{m\theta}$ ή $\dfrac{Q}{m\theta} = c$. **11.** $r^2 \cdot F = r^2 \cdot k_C \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ ή $r^2F = k_C \cdot q_1 \cdot q_2$ ή $\dfrac{r^2F}{q_2 \cdot k_C} = q_1$. **12.** $S - \dfrac{1}{2}gt^2 = \upsilon_0 t$ ή $2S - gt^2 = 2 \cdot \upsilon_0 t$ ή $\upsilon_0 = \dfrac{2S - gt^2}{2 \cdot t}$.

13. **α)** $V = V_0 + V_0 \cdot \dfrac{\theta}{273{,}15}$ ή $273{,}15V = 273{,}15V_0 + 273{,}15V_0 \cdot \dfrac{\theta}{273{,}15}$ ή

$$273{,}15V - 273{,}15V_0 = V_0 \cdot \theta \text{ ή } \frac{273{,}15V - 273{,}15V_0}{V_0} = \theta \text{ ή } \theta = \frac{273{,}15(V - V_0)}{V_0}$$

β) Για $V_0 = 25\ cm^3$ και $V = 30\ cm^3$ έχουμε:

$$\theta = \frac{273{,}15 \cdot (V - V_0)}{V_0} = \frac{273{,}15(30 - 25)}{25} = 54{,}63\ °C$$

14. **α)** Για $h = 0$ m έχουμε: $D = 0{,}155 \cdot 0 + 11 = 11$ ημέρες.

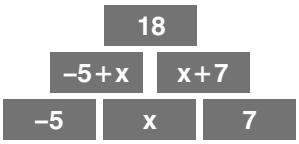
β) $D - 11 = 0{,}155 \cdot h$ ή $\dfrac{D - 11}{0{,}155} = h$.

Για $D = 180$ ημέρες έχουμε: $h = \dfrac{180 - 11}{0{,}155} = \dfrac{169}{0{,}155} \simeq 1.090{,}32$ m.

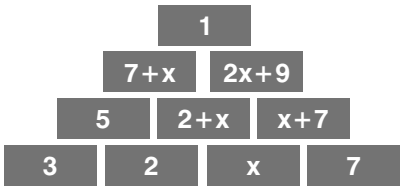
Για $D = 365$ ημέρες έχουμε: $h = \dfrac{365 - 11}{0{,}155} = \dfrac{354}{0{,}155} \simeq 2.283{,}87$ m.

Ενώ, για $D = 360$ ημέρες έχουμε: $\dfrac{360 - 11}{0{,}155} \simeq 2.251{,}61$ m.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ



$-5+x+x+7 = 18$ ή $x+x = 18 - 7+5$ ή $2x = 16$ ή $x = 8$.



$7+x+2x+9 = 1$ ή $x+2x = 1 - 7 - 9$ ή $3x = -15$ ή $x = -5$.

1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δ. **2.** Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $\hat{\Gamma} = 2\hat{B}$ και $\hat{A} = 90°$, έχουμε: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$ ή $\hat{B} + 2\hat{B} = 90°$ ή $3\hat{B} = 90°$ ή $\hat{B} = 30°$, άρα $\hat{\Gamma} = 60°$.

2. Για $x > 7$ έχουμε: $2x + 2(x - 7) = 3x$ ή $2x + 2x - 14 = 3x$ ή $2x + 2x - 3x = 14$ ή $x = 14$ m και $x - 7 = 7$ m.

3. Έστω x τα έτη. Τότε: $44 + x = 3(8 + x)$ ή $44 + x = 24 + 3x$ ή $x - 3x = 24 - 44$ ή $-2x = -20$ ή $x = 10$ χρόνια.

4. Έστω x € το αρχικό ποσό. Τότε: $\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + 100 = x$ ή

$12 \cdot \frac{1}{4}x + 12 \cdot \frac{1}{3}x + 12 \cdot \frac{1}{3}x + 12 \cdot 100 = 12x$ ή $3x + 4x + 4x + 1.200 = 12x$ ή $3x + 4x + 4x - 12x = -1.200$ ή $-x = -1.200$ ή $x = 1.200$ €.

Επομένως ο πρώτος παίρνει $\frac{1}{4} \cdot 1.200 = 300$ €, ο δεύτερος $\frac{1}{2} \cdot 1.200 = 400$ € και ο τρίτος $1.200 - 300 - 400 = 500$ €.

5. Έστω x λίτρα η βενζίνη στο ένα, τότε 2x λίτρα η βενζίνη στο άλλο. Έχουμε $2x - 34 = x - 7$ ή $2x - x = 34 - 7$ ή $x = 27$ λίτρα το ένα και $2x = 54$ λίτρα το άλλο.

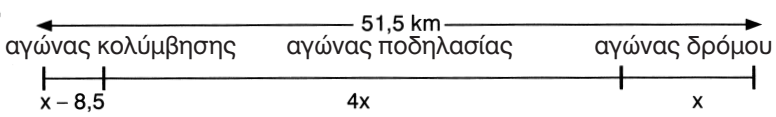
6. Έστω x τα λεωφορεία των 8 ατόμων, τότε $12 - x$ τα λεωφορεία των 14 ατόμων. Έχουμε $8x + 14 \cdot (12 - x) = 126$ ή $8x + 168 - 14x = 126$ ή $8x - 14x = 126 - 168$ ή $-6x = -42$ ή $x = 7$ λεωφορεία των 8 ατόμων και $12 - x = 5$ λεωφορεία των 14 ατόμων.

7. $E = \alpha \cdot \beta = 8 \cdot 12 = 96\ m^2$. Τότε $E' = 2 \cdot 96 = 192\ cm^2$ και $\alpha' = 16$ m, άρα $E' = \alpha' \cdot \beta'$ ή $\beta' = \frac{E'}{\alpha'}$ ή $\beta' = \frac{192}{16} = 12$ m, οπότε πρέπει να την αυξήσουμε $12 - 8 = 4$ m.

8. Έστω x € την ώρα παίρνει ο Σάκης, τότε $(x + 2)$ € την ώρα παίρνει ο Πέτρος. Έχουμε $7(x + 2) = 5x + 26$ ή $7x + 14 = 5x + 26$ ή $7x - 5x = 26 - 14$ ή $2x = 12$ ή $x = 6$ € ο Σάκης και $x + 2 = 8$ € ο Πέτρος.

9. Έστω x τα στιλό, τότε: (x – 3) τα μπλε, (x – 4) τα κόκκινα και (x – 5) τα μαύρα, οπότε: $x - 3 + x - 4 + x - 5 = x$ ή $x + x + x - x = 3 + 4 + 5$ ή $2x = 12$ ή $x = 6$ στιλό.

10. α)



β) $x - 8{,}5 + 4x + x = 51{,}5$ ή $x + 4x + x = 51{,}5 + 8{,}5$ ή $6x = 60$ ή $x = 10$ km ο δρόμος, 40 km η ποδηλασία και 1,5 km η κολύμβηση.

1.5 Ανισώσεις α΄ βαθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** < 6, **β)** $< -\frac{3}{2}$, **γ)** > 2, **δ)** ≥ -2, **ε)** ≥ -4, **στ)** < 6, **ζ)** > -21, **η)** ≥ 2.

2. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Λ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Λ.

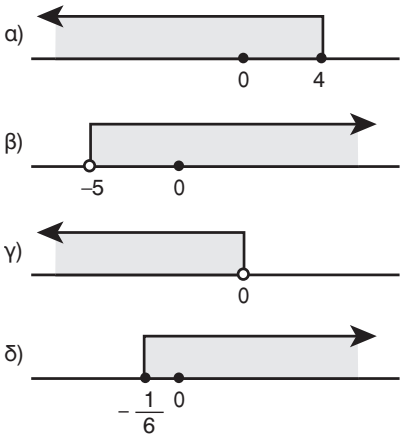
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $8x - 5x \leq 16 - 4$ ή $3x \leq 12$ ή $x \leq \frac{12}{3}$ ή $x \leq 4$.

β) $x > -2 - 3$ ή $x > -5$.

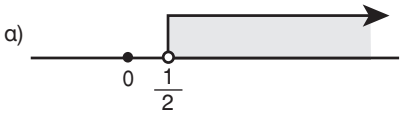
γ) $-1 + x > 2x - 1$ ή $x - 2x > 1 - 1$ ή $-x > 0$ ή $x < \frac{0}{-1}$ ή $x < 0$.

δ) $-7x + x \leq 4 - 3$ ή $-6x \leq 1$ ή $x \geq \frac{1}{-6}$ ή $x \geq -\frac{1}{6}$.



2. **α)** $3\omega - 3 > \omega - 2$ ή

$3\omega - \omega > 3 - 2$ ή $2\omega > 1$ ή $\omega > \frac{1}{2}$.



β) $2x + 2 - x + 2 \geq 4 - x$ ή

$2x - x + x \geq 4 - 2 - 2$ ή $2x \geq 0$

ή $x \geq 0$.

γ) $3y - 1 - y - 2 < 2y + 4 + 1$ ή

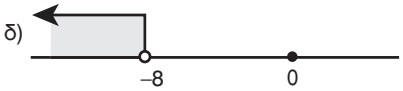
$3y - y - 2y < 1 + 2 + 4 + 1$ ή

$0 \cdot y < 8$, αόριστη.

δ) $4t + 20 < t - 4$ ή

$4t - t < -4 - 20$ ή $3t < -24$ ή

$t < -\frac{24}{3}$ ή $t < -8$.



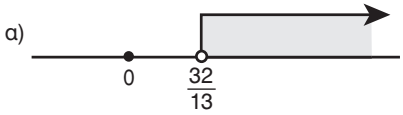
3. **α)** $12 \cdot \frac{3x-4}{4} - 12 \cdot \frac{2-x}{3} > 12 \cdot 1$

ή $3(3x - 4) - 4(2 - x) > 12$ ή

$9x - 12 - 8 + 4x > 12$ ή

$9x + 4x > 12 + 12 + 8$ ή

$13x > 32$ ή $x > \frac{32}{13}$.

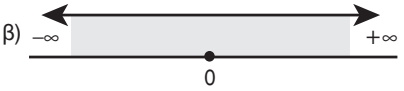


β) $2 \cdot 2(x+1) - 2 \cdot \frac{3}{2}(x+1) > 2 \cdot \frac{x}{2}$ ή $4(x + 1) - 3(x + 1) > x$ ή

$4x + 4 - 3x - 3 > x$ ή

$4x - 3x - x > 3 - 4$ ή

$0x > -1$, αόριστη.



γ) $6x + 6 \cdot 3 + 6 \cdot \frac{x+2}{2} - 6 \cdot \frac{x+1}{3} > 6 \cdot 0$ ή $6x + 18 + 3(x + 2) - 2(x + 1) > 0$ ή

$6x + 18 + 3x + 6 - 2x - 2 > 0$

ή $6x + 3x - 2x > -18 - 6 + 2$ ή

$7x > -22$ ή $x > \frac{-22}{7}$.

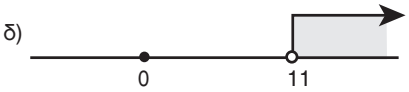
δ) $\frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{6} - \frac{x+7}{6} > 2$ ή $12 \cdot \frac{x+1}{4} + 12 \cdot \frac{x+1}{6} - 12 \cdot \frac{x+7}{6} > 12 \cdot 2$ ή

$3(x+1) + 2(x+1) - 2(x+7) > 24$

ή $3x + 3 + 2x + 2 - 2x - 14 > 24$

ή $3x + 2x - 2x > 24 + 14 - 2 - 3$

ή $3x > 33$ ή $x > \frac{33}{3}$ ή $x > 11$.



ε) $4\omega - 4\cdot\frac{\omega-2}{2} < 4\cdot\frac{\omega-1}{2} - 4\cdot\frac{\omega-3}{4}$ ή

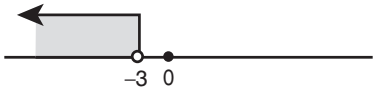
$4\omega - 2(\omega-2) < 2(\omega-1) - (\omega-3)$ ή

$4\omega - 2\omega + 4 < 2\omega - 2 - \omega + 3$ ή

$4\omega - 2\omega - 2\omega + \omega < -2 + 3 - 4$ ή

$\omega < -3$.

ε)



στ) $28t + 28\cdot\frac{t+1}{4} > 28\cdot\frac{2t-1}{7} + 28\cdot\frac{27t}{28}$ ή $28t + 7(t+1) > 4(2t-1) + 27t$

ή $28t + 7t + 7 > 8t - 4 + 27t$ ή

$28t + 7t - 8t - 27t > -7 - 4$ ή

$0t > -11$, αόριστη.

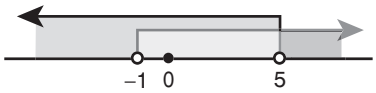
στ)

4. **α)** $x < 4 + 1$ ή $\boxed{x < 5}$ και

$-x < 3 - 2$ ή $-x < 1$ ή $\boxed{x > -1}$,

άρα $\boxed{-1 < x < 5}$.

α)



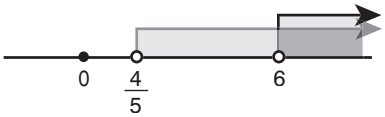
β) $2x + 2 + x > 6 - 2x$ ή $2x + x + 2x > 6 - 2$ ή $5x > 4$ ή $\boxed{x > \frac{4}{5}}$ και

$7x - 8 > 3x + 9 + 7$ ή

$7x - 3x > 8 + 9 + 7$ ή $4x > 24$ ή

$\boxed{x > \frac{24}{4} = 6}$, άρα $\boxed{x > 6}$.

β)



γ) $3x - 1 > 2 - 2x + 7$ ή $3x + 2x > 2 + 7 + 1$ ή $5x > 10$ ή $\boxed{x > 2}$ και

$3 - 3x \geq 6$ ή $-3x \geq 6 - 3$ ή $-3x \geq 3$

ή $\boxed{x \leq -1}$.

Δεν υπάρχουν κοινές λύσεις.

γ)

δ) $5(3y - 15) > 5\cdot\frac{2}{5}(y+2)$ ή $15y - 75 > 2y + 4$ ή $15y - 2y > 75 + 4$ ή

$13y > 79$ ή $\boxed{y > \frac{79}{13}}$ και $21\cdot\frac{2}{3}y - 21\cdot\frac{5}{21} < 21y - 21\cdot 5$ ή

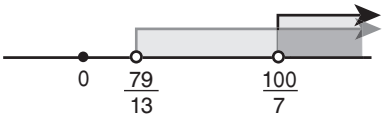
$7\cdot 2y - 5 < 21y - 105$ ή

$14y - 21y < 5 - 105$ ή

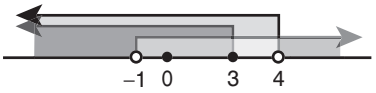
$-7y < -100$ ή $\boxed{y > \frac{100}{7}}$,

άρα $\boxed{y > \frac{100}{7}}$.

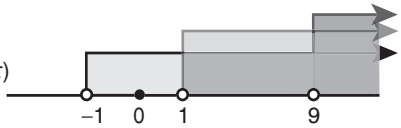
δ)



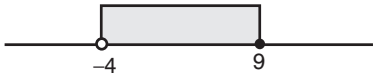
ε) $2x < 7 + 1$ ή $2x < 8$ ή $\boxed{x < 4}$ και $3x - 3 > -6$ ή $3x > 3 - 6$ ή $3x > -3$ ή $\boxed{x > -1}$ και $x \geq 3x - 6$ ή $x - 3x \geq -6$ ή $-2x \geq -6$ ή $\boxed{x \leq 3}$, άρα $\boxed{-1 < x \leq 3}$.

ε)


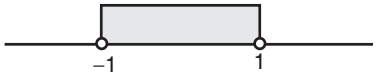
στ) $6 \cdot \frac{3x-1}{2} > 6 \cdot \frac{2x+1}{3}$ ή $3(3x-1) > 2(2x+1)$ ή $9x - 3 > 4x + 2$ ή $9x - 4x > 3 + 2$ ή $5x > 5$ ή $\boxed{x > 1}$ και $6x - 2 + x > -2x - 10 - 1$ ή $6x + x + 2x > 2 - 10 - 1$ ή $9x > -9$ ή $\boxed{x > -1}$ και $3 + x < 2x - 6$ ή $x - 2x < -3 - 6$ ή $-x < -9$ ή $\boxed{x > 9}$, άρα $\boxed{x > 9}$.

στ)


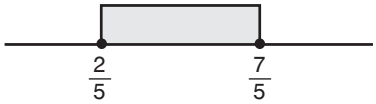
5. **α)** $-7 - 1 < 2x \leq 19 - 1$ ή $-8 < 2x \leq 18$ ή $-4 < x \leq 9$.

α)


β) $-1 - 1 < -2x < 3 - 1$ ή $-2 < -2x < 2$ ή $1 > x > -1$ ή $-1 < x < 1$.

β)


γ) $3 - 1 \leq 5x \leq 8 - 1$ ή $2 \leq 5x \leq 7$ ή $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{7}{5}$.

γ)


6. Πρέπει $A < 0$ ή $2\mu - 6 - 4 < 0$ ή $2\mu < 6 + 4$ ή $2\mu < 10$ ή $\mu < 5$, άρα $0 < \mu < 5$.

7. Πρέπει $2 \cdot 2 - 3\alpha + 1 > \alpha \cdot (2 - 1)$ ή $4 - 3\alpha + 1 > \alpha$ ή $-3\alpha - \alpha > -1 - 4$ ή $-4\alpha > -5$ ή $\alpha < \frac{5}{4}$.

8. Έστω x € τα χρήματα της Μαρίας, τότε 3x € τα χρήματα της Άννας. Έχουμε $3x - 14 < x$ ή $3x - x < 14$ ή $2x < 14$ ή $x < 7$ €.

9. Έστω x ο βαθμός που πρέπει να γράψει. Τότε: $\frac{12 + 14 + x}{3} > 14$ ή $12 + 14 + x > 14 \cdot 3$ ή $x > 42 - 12 - 14$ ή $x > 16$, άρα πρέπει να γράψει 17 ή 18 ή 19 ή 20.

10. Έστω x λεπτά ο χρόνος ομιλίας. Τότε: $7{,}5 + 0{,}254x > 15 + 0{,}204x$ ή $0{,}254x - 0{,}204x > 15 - 7{,}5$ ή $0{,}05x > 7{,}5$ ή $x > \frac{7{,}5}{0{,}05}$ ή $x > 150$ λεπτά.

11. Έστω x m το πλάτος. Τότε: $2 \cdot (80 + x) < 240$ ή $160 + 2x < 240$ ή $2x < 240 - 160$ ή $2x < 80$ ή $\boxed{x < 40\text{ m}}$ και $80x > 3.000$ ή $x > \frac{3.000}{80}$ ή $\boxed{x > 37{,}5\text{ m}}$, άρα $\boxed{37{,}5\text{ m} < x < 40\text{ m}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Α, **β)** Α, **γ)** Β. **2.** Γ.

3. $9 \to 3$, $16 \to 4$, $4 \to 2$, $25 \to 5$, $36 \to 6$.

4. **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ, **στ)** Λ, **ζ)** Λ, **η)** Σ, **θ)** Λ, **ι)** Λ.

5. $1 \to$ Β, $2 \to$ Β, $3 \to$ Ε, $4 \to$ Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, $\sqrt{8.100} = 90$.
β) $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, $\sqrt{400} = 20$, $\sqrt{40.000} = 200$.
γ) $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$, $\sqrt{12.100} = 110$, $\sqrt{0{,}0121} = 0{,}11$.
δ) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$, $\sqrt{\frac{400}{49}} = \frac{20}{7}$, $\sqrt{\frac{36}{121}} = \frac{6}{11}$.

2. **α)** $\sqrt{36} = 6$, **β)** $\sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$, **γ)** $\sqrt{18 \cdot 18} = \sqrt{324} = 18$,
δ) $(\sqrt{18})^2 = 18$.

3. **α)** 9, **β)** 5, **γ)** 33, **δ)** 81, **ε)** 4, **στ)** 6,0 ή 5,1 ή 4,4 ή 3,9 ή 2,16 ή 1,25 ή 0,36.

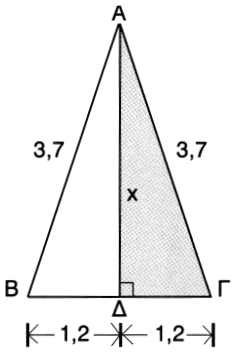
4. **α)** $\sqrt{\frac{2}{2} + 3} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$.
β) $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}} = \sqrt{2 + \sqrt{4}} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$.
γ) $\sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{1 + 3}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} = \sqrt{7 + \sqrt{2 + 2}} = \sqrt{7 + \sqrt{4}} =$
$= \sqrt{7 + 2} = \sqrt{9} = 3$.

5. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. έχουμε: $x^2 = 6^2 + 8^2$ ή $x^2 = 36 + 64$ ή $x^2 = 100$ ή $x = \sqrt{100}$ ή $x = 10$.

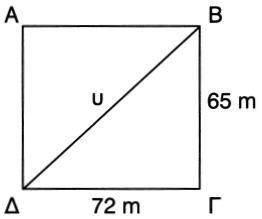
$13^2 = 12^2 + y^2$ ή $169 = 144 + y^2$ ή $169 - 144 = y^2$ ή $25 = y^2$ ή $\sqrt{25} = y$ ή $5 = y$.
$5^2 = 3^2 + \beta^2$ ή $25 = 9 + \beta^2$ ή $25 - 9 = \beta^2$ ή $16 = \beta^2$ ή $\sqrt{16} = \beta$ ή $4 = \beta$.
$\alpha^2 = 21^2 + 20^2$ ή $\alpha^2 = 441 + 400$ ή $\alpha^2 = 841$ ή $\alpha = \sqrt{841}$ ή $\alpha = 29$.
$37^2 = \gamma^2 + 12^2$ ή $1.369 = \gamma^2 + 144$ ή $1.369 - 144 = \gamma^2$ ή $1.225 = \gamma^2$ ή $\sqrt{1.225} = \gamma$ ή $35 = \gamma$.
$85^2 = 36^2 + \omega^2$ ή $7.225 = 1.296 + \omega^2$ ή $7.225 - 1.296 = \omega^2$ ή $5.929 = \omega^2$ ή $\sqrt{5.929} = \omega$ ή $77 = \omega$.

6. **α)** $x^2 = 9$ ή $x = \sqrt{9}$ ή $x = 3$. **β)** $x^2 = 25$ ή $x = \sqrt{25}$ ή $x = 5$. **γ)** $x^2 = 64$ ή $x = \sqrt{64}$ ή $x = 8$. **δ)** $x^2 = \frac{100}{81}$ ή $x = \sqrt{\frac{100}{81}}$ ή $x = \frac{10}{9}$.

7. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΓ}}$ έχουμε:
$3{,}7^2 = x^2 + 1{,}2^2$ ή
$13{,}69 = x^2 + 1{,}44$ ή
$13{,}69 - 1{,}44 = x^2$ ή
$12{,}25 = x^2$ ή
$x = \sqrt{12{,}25}$ ή
$x = 3{,}5$.



8. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΒΓΔ}}$ έχουμε:
$υ^2 = 72^2 + 65^2$ ή
$υ^2 = 5.184 + 4.225$ ή $υ^2 = 9.409$ ή
$υ = \sqrt{9.409}$ ή $υ = 97$ m.



9. Έστω x ο ζητούμενος αριθμός, $(x > 0)$. Τότε: $x^2 + 8 = 3x^2$ ή $x^2 - 3x^2 = -8$ ή $-2x^2 = -8$ ή $x^2 = 4$ ή $x = \sqrt{4}$ ή $x = 2$.

10. Με χρήση του Π.Θ. έχουμε ότι: $\alpha^2 = 4^2 + 3^2$ ή $\alpha^2 = 16 + 9$ ή $\alpha^2 = 25$ ή $\alpha = \sqrt{25}$ ή $\alpha = 5$.
$13^2 = \beta^2 + \alpha^2$ ή $169 = \beta^2 + 25$ ή $169 - 25 = \beta^2$ ή $144 = \beta^2$ ή $\sqrt{144} = \beta$ ή $12 = \beta$.
$\gamma^2 = 9^2 + 12^2$ ή $\gamma^2 = 81 + 144$ ή $\gamma^2 = 225$ ή $\gamma = \sqrt{225}$ ή $\gamma = 15$.
$17^2 = x^2 + 15^2$ ή $289 = x^2 + 225$ ή $289 - 225 = x^2$ ή $64 = x^2$ ή $\sqrt{64} = x$ ή $8 = x$.

11. **α)**

$\sqrt{\alpha}$	α	α^2
2	4	16
3	9	81
4	16	256

Αν $\alpha > 1$, ισχύει $\sqrt{\alpha} < \alpha < \alpha^2$.

β)

$\sqrt{\alpha}$	α	α^2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$

Αν $0 < \alpha < 1$, ισχύει $\sqrt{\alpha} > \alpha > \alpha^2$.

12.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Ισχύει: $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, αν $\alpha, \beta \geq 0$.

13.

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Ισχύει: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ για $\begin{matrix} \alpha \geq 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}$.

14.

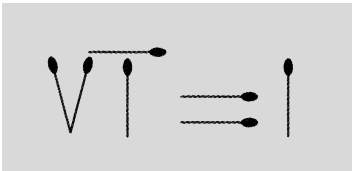
α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha + \beta}$
9	16	3	4	7	5
64	36	8	6	14	10

Ισχύει: $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \geq \sqrt{\alpha + \beta}$, αν $\alpha, \beta \geq 0$.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

1. Επειδή $43^2 = 1.849$, $44^2 = 1.936$ και $45^2 = 2.025$, έχουμε $1.900 \leq 44^2 \leq 2.000$. Οπότε η ηλικία του είναι 44 ετών, άρα γεννήθηκε το $44^2 = 1.936$ και η ερώτηση έγινε το $1.936 + 44 = 1980$.

2.



$(\sqrt{1} = 1)$

2.2. Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Σ.

2. **α)** Δ, **β)** Ε, **γ)** Γ, **δ)** Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Ερώτημα	Ρητοί	Άρρητοι
α	$(\sqrt{2})^2$	$\sqrt{2}$
β	$-\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
γ	$\sqrt{\frac{18}{2}}$, $\sqrt{18^2}$	$\sqrt{18}$

2. **α)** $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$, **β)** $\sqrt{2} < 2 < \sqrt{5} < \sqrt{7}$, **γ)** $\sqrt{3} < 1 + \sqrt{3}$, **δ)** $\sqrt{2} < \sqrt{1+\sqrt{2}}$.

3. **α)** $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, **β)** $\sqrt{5} \simeq 2{,}23$, **γ)** $\sqrt{7} \simeq 2{,}64$, **δ)** $\sqrt{8} \simeq 2{,}82$.

4. **α)** $x = 0$, **β)** $x = \pm\sqrt{5}$, **γ)** αδύνατη, **δ)** $x = \pm\sqrt{17}$.

5. Έστω α cm η πλευρά του. Τότε: $\alpha^2 = 12$ ή $\alpha = \sqrt{12}$ ή $\alpha \simeq 3{,}46$ cm.

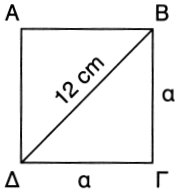
6. **α)** Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΒΓΔ}}$:

$\alpha^2 + \alpha^2 = 12^2$ ή

$2\alpha^2 = 144$ ή $\alpha^2 = 72$ ή

$\alpha = \sqrt{72}$ ή $\alpha \simeq 8{,}48$ cm.

β) $E_{ΑΒΓΔ} = \alpha^2$ ή $E_{ΑΒΓΔ} = 72$ cm^2.



2.3. Προβλήματα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

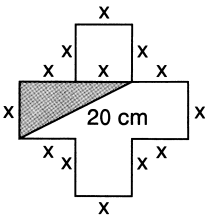
1. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο έχουμε:

$(2x)^2 + x^2 = 20^2$ ή $4x^2 + x^2 = 400$

ή $5x^2 = 400$ ή $x^2 = 80$.

$E = 5x^2$ ή $E = 5 \cdot 80$

ή $E = 400\ cm^2$.



2. Με χρήση του Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ έχουμε: $AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2$ ή $x^2 + x^2 = 10^2$ ή $2x^2 = 100$ ή $x^2 = 50$ ή $x = \sqrt{50}$.

Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AEZ}$ έχουμε: $AE^2 = AZ^2 + EZ^2$ ή

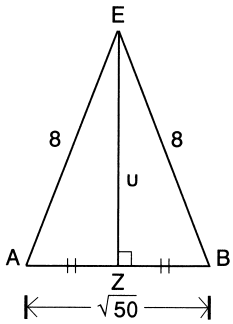
$8^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 + \upsilon^2$ ή $64 = \frac{50}{4} + \upsilon^2$

ή $4 \cdot 64 = 4 \cdot \frac{50}{4} + 4\upsilon^2$ ή

$256 = 50 + 4\upsilon^2$ ή $256 - 50 = 4\upsilon^2$

ή $206 = 4\upsilon^2$ ή $\frac{206}{4} = \upsilon^2$ ή

$\frac{\sqrt{206}}{2} = \upsilon$.



$E_{ολ} = 4 \cdot E_{AEB} + E_{AB\Gamma\Delta} =$

$= 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{50} \cdot \frac{\sqrt{206}}{2} + \sqrt{50}^2 = \sqrt{10.300} + 50 \simeq 101{,}48 + 50 = 151{,}48\ cm^2$.

3. Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{KOM}$: $KM^2 = KO^2 + OM^2$ ή $KM^2 = 2^2 + 1^2$ ή $KM^2 = 4 + 1$ ή $KM = \sqrt{5}$.

Ακόμα, αν A(0, 3), B(2, 0), έχουμε: Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{K\Lambda A}$: $K\Lambda^2 = KA^2 + A\Lambda^2$ ή $K\Lambda^2 = 1^2 + 2^2$ ή $K\Lambda^2 = 1 + 4$ ή $K\Lambda = \sqrt{5}$.

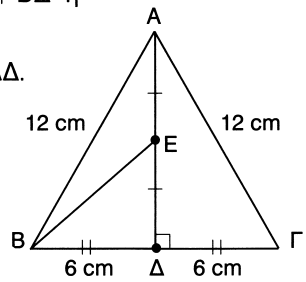
Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{M\Lambda B}$: $M\Lambda^2 = MB^2 + \Lambda B^2$ ή $M\Lambda^2 = 1^2 + 3^2$ ή $M\Lambda^2 = 1 + 9$ ή $M\Lambda = \sqrt{10}$.

Ισχύει $M\Lambda^2 = KM^2 + K\Lambda^2$ ή $\sqrt{10}^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{5}^2$ ή $10 = 5 + 5$, άρα το $\overset{\triangle}{K\Lambda M}$ είναι ορθογώνιο (αντίστροφο Π.Θ.)

4. Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$: $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή

$12^2 = A\Delta^2 + 6^2$ ή $144 = A\Delta^2 + 36$

ή $144 - 36 = A\Delta^2$ ή $108 = A\Delta^2$ ή $\sqrt{108} = A\Delta$.



Εφαρμόζουμε Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{BE\Delta}$:

$BE^2 = B\Delta^2 + \Delta E^2$ ή $BE^2 = 6^2 + \left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2$

ή $BE^2 = 36 + \frac{108}{4}$ ή $BE^2 = 36 + 27$

ή $BE^2 = 63$ ή $BE = \sqrt{63}$ ή $BE \simeq 7{,}93$ cm.

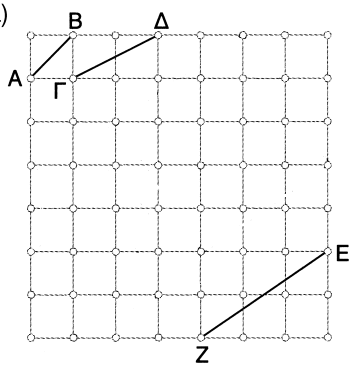
5. *1η περίπτωση*: Αν x cm η υποτείνουσα, $x^2 = 10^2 + 8^2$ ή $x^2 = 100 + 64$ ή $x^2 = 164$ ή $x = \sqrt{164}$ cm $\simeq 12{,}8$ cm.

2η περίπτωση: Αν y cm η μια κάθετη, $y^2 + 8^2 = 10^2$ ή $y^2 + 64 = 100$ ή $y^2 = 100 - 64$ ή $y^2 = 36$ ή $y = \sqrt{36} = 6$ cm.

α) $AB = \sqrt{2}$ cm, $\Gamma\Delta = \sqrt{5}$ cm,

$EZ = \sqrt{13}$ cm.

α)

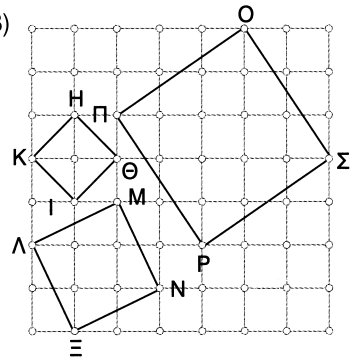


6. **β)** $E_{ΗΘΙΚ} = KH^2 = AB^2 = 2$ cm^2 ή

$E_{ΛΜΝΞ} = ΛM^2 = ΓΔ^2 = 5$ cm^2 ή

$E_{ΟΠΡΣ} = ΟΠ^2 = EZ^2 = 13$ cm^2.

β)



7. Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{KMN}$: $KN^2 + MN^2 = KM^2$

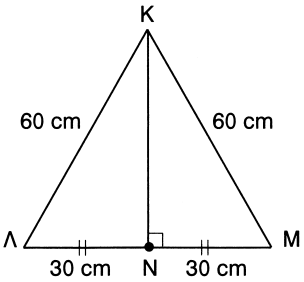
ή $KN^2 + 30^2 = 60^2$ ή

$KN^2 + 900 = 3.600$ ή

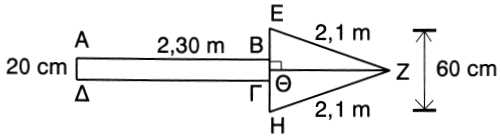
$KN^2 = 3.600 - 900$ ή $KN^2 = 2.700$

ή $KN = \sqrt{2.700}$ ή $KN \simeq 51{,}96$ cm, οπότε

2 m + 51,96 cm = 251,96 cm = 2,5196 m.



8.



$E_{ΑΒΓΔ} = 23 \cdot 2 = 46\ dm^2$.

Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{ΕΘΖ}$: $ΕΘ^2 + ΘΖ^2 = ΕΖ^2$ ή $3^2 + ΘΖ^2 = 21^2$ ή

$9 + ΘΖ^2 = 441$ ή $ΘΖ^2 = 441 - 9$ ή $ΘΖ^2 = 432$

ή $ΘΖ = \sqrt{432}$ ή $ΘΖ \simeq 20{,}78$ dm.

$E_{ΕΗΖ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 20{,}78 = 62{,}34\ dm^2$, άρα $E_{βέλους} = 46 + 62{,}34 = 108{,}34\ dm^2$.

Επομένως μπορούμε να βάψουμε με 1 κιλό χρώματος 540 : 108,34 $\simeq$ 5 βέλη.

9. $δ^2 = 7{,}5^2 + 2{,}4^2$ ή $δ^2 = 56{,}25 + 5{,}76$ ή $δ^2 = 62{,}01$ ή $δ = \sqrt{62{,}01}$ ή $δ \simeq 7{,}87\ m < 8$,

άρα μπορεί να κάνει αναστροφή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 Η έννοια της συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. β. **2.** γ. **3.** γ.

4. β. **5.** α → ii, β → i, γ → iii.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)**

x	−3	−2	−1	0	2
y	−11	−8	−5	−2	4

β)

x	−1	0	2	4	5
y	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

2. **α)**

x	−3	−1	0	2	5
y	10	2	1	5	26

β)

x	−3	−2	0	1	3
y	−2	−4	−2	2	16

3. $y = x + \frac{8}{100}x$ ή $y = x + 0{,}08x$ ή $y = 1{,}08x$.

4. $y = 600 + \frac{7}{100}x$ ή $y = 600 + 0{,}07x$.

5. **α)** $2(x + y) = 60$ ή $x + y = 30$ ή $y = 30 - x$, με $0 < x < 30$,

β) $x \cdot y = 100$ ή $y = \frac{100}{x}$, με $x > 0$.

6. $E = x^2$ και $\Pi = 4x$.

x	1	2	2,5	5	0,3
E	1	4	6,25	25	0,09
Π	4	8	10	20	1,2

7.

x	2	3	−3	0
y	4	7	−11	−2

8. **α)** Σε 2 ώρες: $2 \cdot 70 = 140$ km, σε 5 μέρες $= 5 \cdot 24$ ώρες $= 120$ ώρες και $120 \cdot 70 = 8.400$ km.

β) $S = 70 \cdot t$.

3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Α (2, 3), Β (−2, 3), Γ (−2, −3), Δ (2, −3).

2.

Α	ως προς x′x	ως προς y′y	ως προς (0, 0)
(3, 5)	(3, −5)	(−3, 5)	(−3, −5)
(−3, 5)	(−3, −5)	(3, 5)	(3, −5)
(−3, −5)	(−3, 5)	(3, −5)	(3, 5)
(3, −5)	(3, 5)	(−3, −5)	(−3, 5)

3. Από Π.Θ.: $AB = \sqrt{26}$, $A\Gamma = \sqrt{41}$, άρα (α).

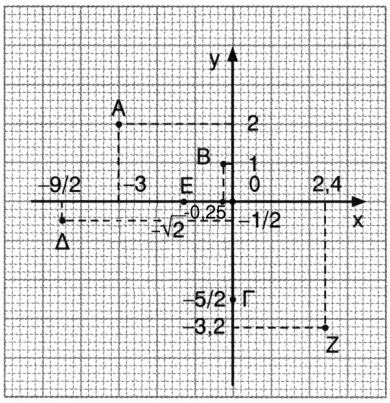
4. **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β, **δ)** Γ.

5. **α)** iii, **β)** iv, **γ)** iv, **δ)** i.

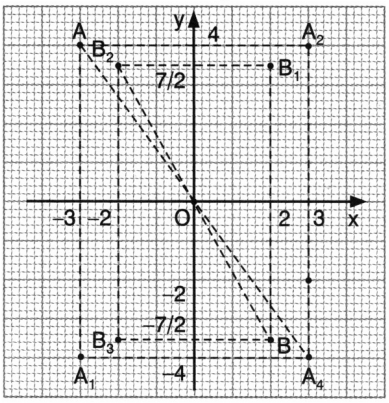
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Α(2, 3), Β(4, 0), Γ(−3, 3), Δ(0, −4), Ε(−4, −2), Ζ(5, −3), Η(−2, 1), Θ(−5, 0), Ι(0, 5).

2.



3.



4. **α)** Α (1, 3), Β (−2, −1), Γ (−2, 3). **β) i)** Α, **ii)** Β. **γ)** $AB^2 = 4^2 + 3^2$ ή $AB^2 = 25$ ή $AB = \sqrt{25} = 5$.

5. **α)** 5, 3, **β)** 2, 3, **γ)** 4, 0.

6. **α)** $AB = \sqrt{(3-5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$.

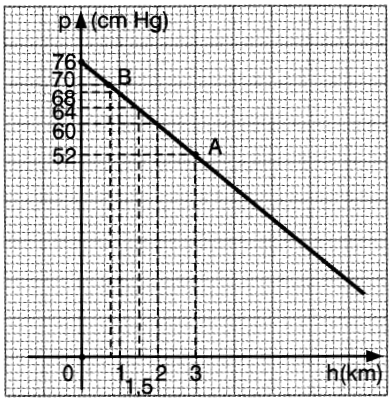
β) $AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$.

γ) $AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-5-(-5))^2} = \sqrt{25+0} = 5$.

δ) $AB = \sqrt{(-5-(-5))^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{0+81} = 9$.

7. Π (−8, 15), Λ (0, 0), $ΠΛ = \sqrt{(-8-0)^2 + (15-0)^2} = \sqrt{64+225} =$ $= \sqrt{289} = 17$ μίλια, άρα $\frac{17}{8}$ ώρες ή 2 ώρες και $\frac{1}{8}$ της ώρας ή 2 ώρες και $\frac{1}{8} \cdot 60$ λεπτά ή 2 ώρες και 7,5 λεπτά ή 2 ώρες 7 λεπτά 20 δεύτερα.

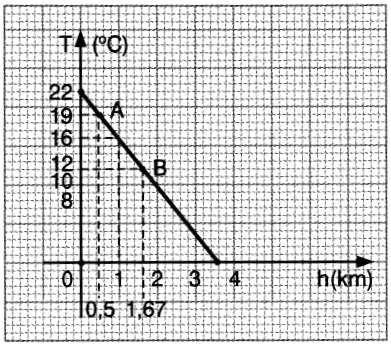
8.



β) Από το σχήμα, για h = 1,5 km έχουμε P = 64 cm Hg.

γ) Από το σχήμα, για P = 70 cm Hg έχουμε h = 0,75 km.

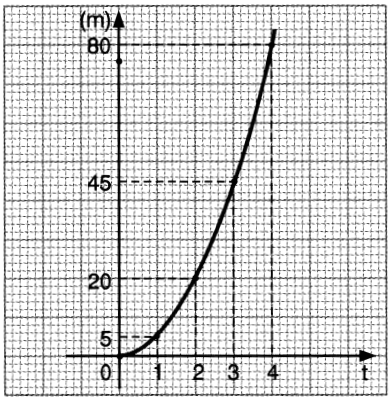
9.



β) Από το σχήμα, για h = 500 m = 0,5 km έχουμε T = 19 °C.

γ) Από το σχήμα, για T = 12 °C έχουμε h ≃ 1,67 km.

10.



3.3 Η συνάρτηση y = αx

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)**

x	2	4	6
y	5	10	15

β) Γ. **2.** 1ο σχήμα. **3.** δ).

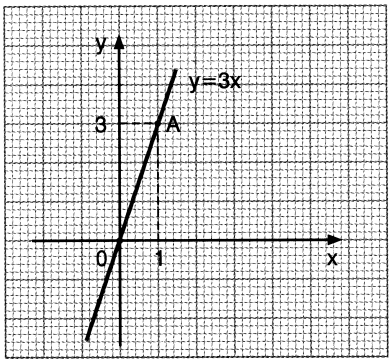
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)**

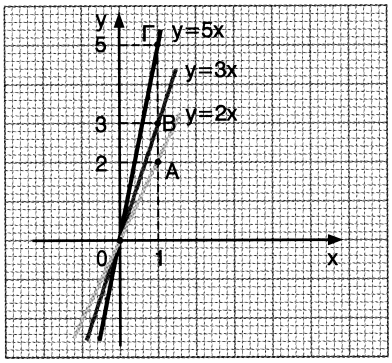
x	1	2	5	7	10
y	3	6	15	21	30

β) y = 3x.

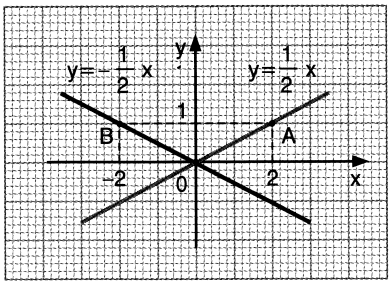
γ)



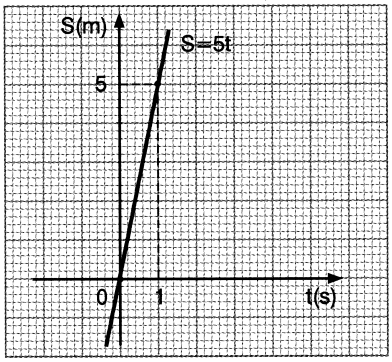
2.



3.

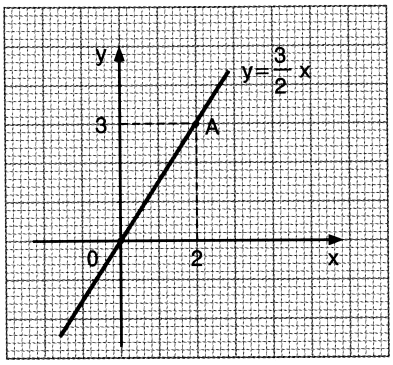


4. S = 5t.



5. $y = \alpha x$ ή $6 = \alpha \cdot 2$ ή $\alpha = \frac{6}{2} = 3$,
άρα $y = 3x$.

6. Επειδή έχει κλίση $\frac{3}{2}$ η ευθεία είναι η $y = \frac{3}{2}x$

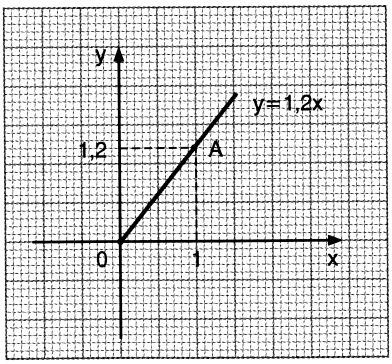


7. $y = \alpha x$ ή $3 = \alpha \cdot (-1)$ ή
$\alpha = \frac{3}{-1} = -3$.

8. **α)** $y = x + \frac{20}{100}x$

ή $y = x + 0{,}2x$ ή $y = 1{,}2x$, $x \geq 0$.

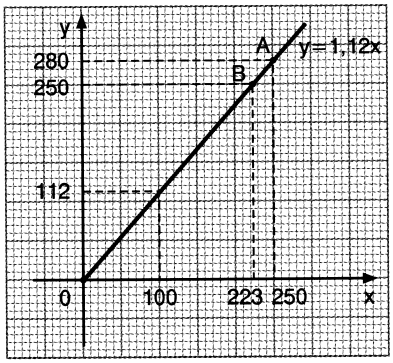
β)



γ) i) Για $x = 7$, έχουμε: $y = 1{,}2 \cdot 7$
ή $y = 8{,}4$ €.

ii) Για $y = 7$, έχουμε: $7 = 1{,}2x$
ή $x \simeq 5{,}83$ €.

9. α) Για y \$ και x €, έχουμε $y = \alpha x$
και $112 = \alpha \cdot 100$ ή
$\alpha = \frac{112}{100} = 1{,}12$,
άρα $y = 1{,}12x$ για $x \geq 0$.



β) Για $x = 250$ € βλέπουμε ότι
$y=280$ άρα 280 \$.

γ) Για $y = 250$ \$ βλέπουμε ότι
$x \simeq 223$, άρα 223 €.

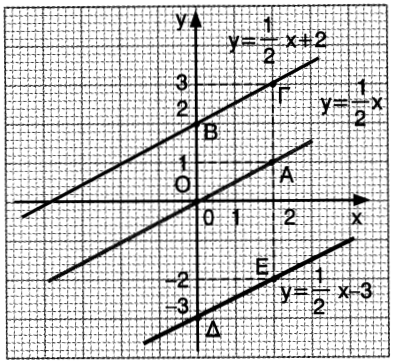
3.4 Η συνάρτηση y = αx+β

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Γ. **2.** $\varepsilon_1 \to y = 2x+2$, $\varepsilon_2 \to y = 2x$, $\varepsilon_3 \to y = 2x - 1$. **3.** $AB \to y = 2$, $A\Gamma \to x = -3$, $\Gamma\Delta \to y = -2$, $B\Delta \to x = 3$. **4.** **α)** Β, **β)** Δ, **γ)** Β. **5.** Γ.

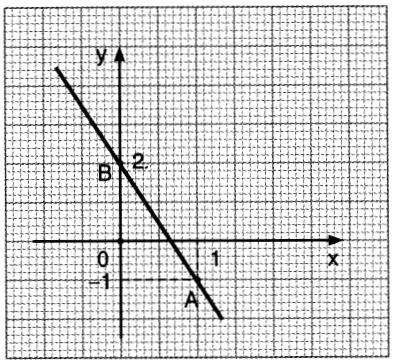
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

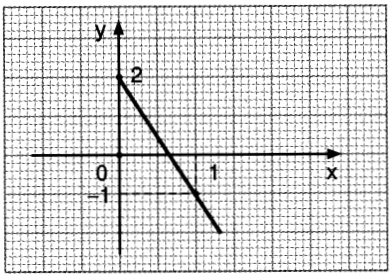


2.

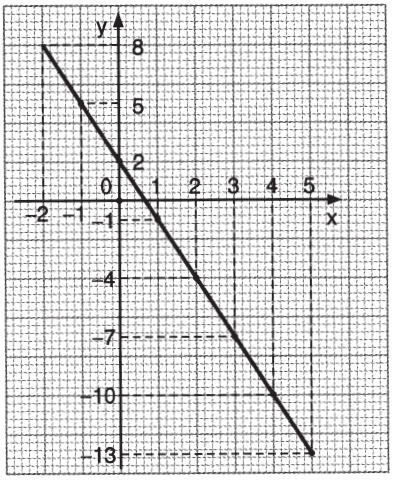
α)



β)



γ)



3. Επειδή έχει κλίση $\alpha = 2$, άρα $y = 2x + \beta$. Επειδή το σημείο τομής με $y'y$ είναι το $(0, -3)$, άρα $\beta = -3$ και $y = 2x - 3$.

4. **α)** $AB = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

β) $A(1, 1)$: $1 = 2 \cdot 1 - 1$ ή $1 = 2 - 1$, ισχύει, άρα η ευθεία διέρχεται από το Α.

$B(2, 3)$: $3 = 2 \cdot 2 - 1$ ή $3 = 4 - 1$, ισχύει, άρα η ευθεία διέρχεται από το Β.

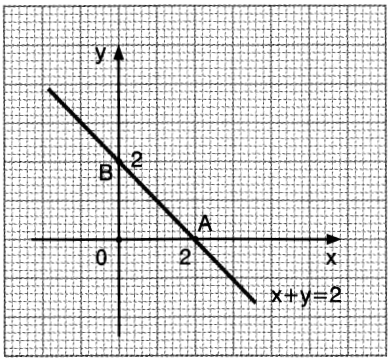
5. $y = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot x$, για $x \geq 0$.

6. Σημείο τομής με $y'y$: Για $x = 0$: $-3y = 6$ ή $y = -2$, άρα $A\ (0, -2)$.

Σημείο τομής με $x'x$: Για $y = 0$: $2x = 6$ ή $x = 3$, άρα $B(3, 0)$.

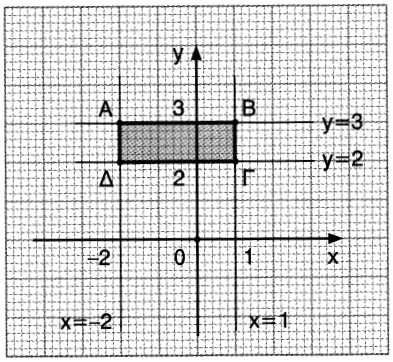
7. Η ευθεία $x + y = 2$

διέρχεται από τα $A(2, 0)$, $B(0,2)$.

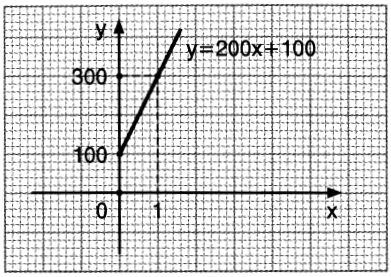


8. $A(-2, 3)$, $B(1, 3)$, $\Gamma(1, 2)$, $\Delta(-2, 2)$.

$E_{AB\Gamma\Delta} = AB \cdot B\Gamma = 3 \cdot 1 = 3$.



9. $y = 200x + 100,\ x \geq 0.$



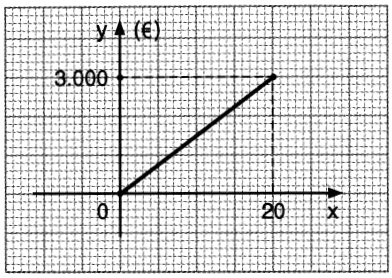
10. **α)** $\omega = 20 - x,\ 0 \leq x \leq 20.$

β) $y = 1.000 + 100x - 50 \cdot (20 - x)$

ή $y = 1.000 + 100x - 1.000 + 50x$

ή $y = 150x,\ 0 \leq x \leq 20.$

γ)



3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{α}{x}$ - Η υπερβολή

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

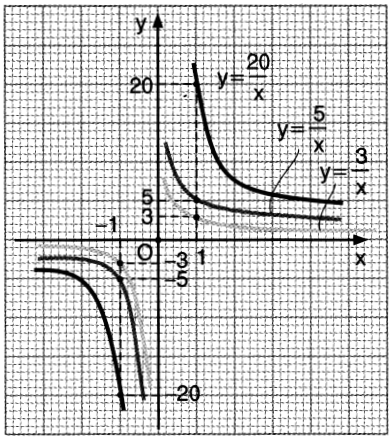
1. α, γ. **2.** **α)** Λ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Σ. **3.** γ: $y = \frac{1}{x}$, β: $y = \frac{2}{x}$, α: $y = \frac{3}{x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

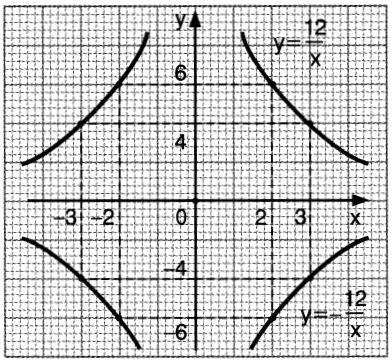
1.

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

2.



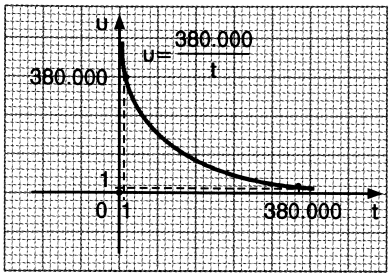
3.



4. **α)** 3 ημέρες $= 3 \cdot 24 = 72$ h,

ταχύτητα $= \dfrac{380.000}{72} \simeq 5.277{,}78$ km/h.

β) $\upsilon = \dfrac{380.000}{t}$, $t > 0$.



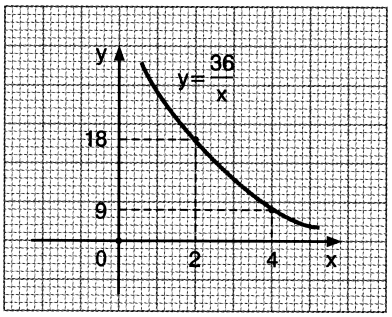
5. **α)**

x	1	2	3	4	6	12	18	36
y	36	18	12	9	6	3	2	1

Τα μεγέθη x, y είναι αντιστρόφως ανάλογα.

β) $xy = 36$ ή $y = \dfrac{36}{x}$, $x > 0$.

γ)



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1 Βασικές έννοιες της στατιστικής: Πληθυσμός-Δείγμα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. γ. **2.** δ. **3.** β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** 72, **β)** 30, **γ)** 20, **δ)** 7, **ε)** 16, **στ)** 72. **2.** **α)** $0{,}15 \cdot 80 = 12$, **β)** $0{,}4 \cdot 60 = 24$,

γ) $0{,}35 \cdot 120 = 42$, **δ)** $0{,}75 \cdot 80 = 60$, **ε)** $0{,}3 \cdot 30 = 9$, **στ)** $0{,}05 \cdot 1.000 = 50$.

3. $25\% \cdot x = 15$ ή $0{,}25 \cdot x = 15$ ή $x = \frac{15}{0{,}25}$ ή $x = 60 \rightarrow$ β.

4. $15\% \cdot 200 = \frac{15}{100} \cdot 200 = \frac{3.000}{100} = 30 \rightarrow$ α.

5. $\frac{300}{2.000} = 0{,}15 = 15\%$.

6. Σύνολο ψηφοφόρων: $360 + 280 + 160 = 800$. Α: $\frac{360}{800} = 0{,}45 = 45\%$, Β: $\frac{280}{800} = 0{,}35 = 35\%$, Γ: $\frac{160}{800} = 0{,}2 = 20\%$.

7. Σύνολο μαθητών: $120+180=300$. **α)** $\frac{180}{300}=0{,}6=60\%$, **β)** $\frac{90}{300}=0{,}3=30\%$.

8. **Πληθυσμός:** οπαδοί ομάδων ποδοσφαίρου.
Δείγμα: 1.000 άτομα από τον Πειραιά.
Το δείγμα δεν είναι αξιόπιστο, επειδή στον Πειραιά οι περισσότεροι οπαδοί είναι Ολυμπιακοί.

9. Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου πιθανόν να έχουν τις ίδιες μουσικές προτιμήσεις και να προτιμούν τους ίδιους τραγουδιστές. Αξιόπιστο συμπέρασμα θα παίρναμε αν ρωτούσαμε άτομα διαφόρων ηλικιών και διαφόρων περιοχών.

4.2 Γραφικές παραστάσεις

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

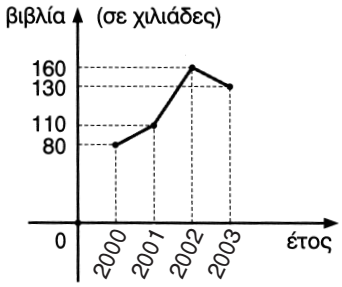
1. **1.** Γ, **2.** Β, **3.** Β, **4.** Δ, **5.** Γ, **6.** Β. **2.** **1.** Α, **2.** Β, **3.** Β, **4.** Γ, **5.** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** Το 2000: 80.000 βιβλία.
Το 2001: 110.000 βιβλία.
Το 2002: 160.000 βιβλία.
Το 2003: 130.000 βιβλία.
Συνολικά: 480.000 βιβλία.

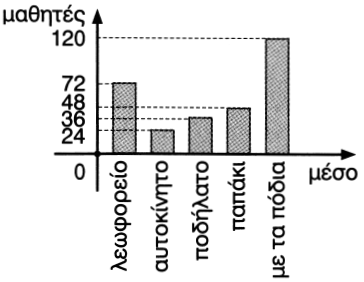
β) $\frac{160.000}{480.000} = 0{,}\bar{3} = 33{,}\bar{3}\%$.

γ)



2. **α)** $25 \cdot 12 = 300$ μαθητές.

β) $\frac{6 \cdot 12}{300} = 0{,}24 = 24\%$.



3. **α)** Α: $10\% \cdot 360° = 36°$,

Β: $30\% \cdot 360° = 108°$,

Γ: $40\% \cdot 360° = 144°$,

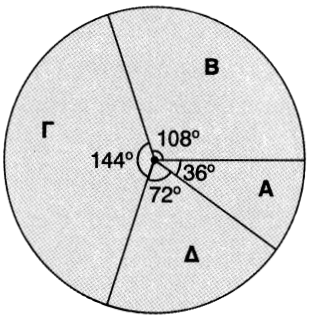
Δ: $20\% \cdot 360° = 72°$.

β) Α: $10\% \cdot 400 = 40$,

Β: $30\% \cdot 400 = 120$,

Γ: $40\% \cdot 400 = 160$,

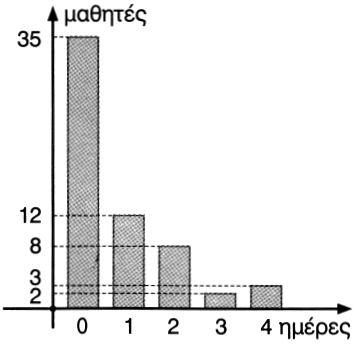
Δ: $20\% \cdot 400 = 80$.

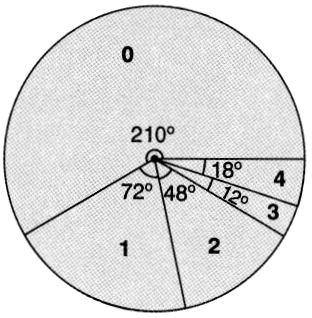


4. **α)** Απουσίασαν 4 ημέρες: $60 - (35 + 12 + 8 + 2) = 3$ μαθητές, δηλαδή $\frac{3}{60} = 0{,}05 = 5\%$.

β) 0: $\frac{35}{60} \cdot 360° = 210°$, 1: $\frac{12}{60} \cdot 360° = 72°$, 2: $\frac{8}{60} \cdot 360° = 48°$,

3: $\frac{2}{60} \cdot 360° = 12°$, 4: $\frac{3}{60} \cdot 360° = 18°$.

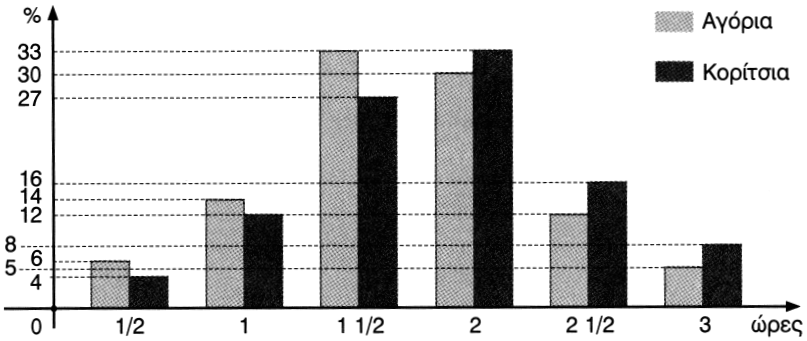




5. **α)** Φωνήεντα: 7, σύμφωνα: 17, $\omega = \frac{7}{24} \cdot 360° = 105°$.

β) Έστω **π** = 1 γράμμα. Τότε
Φωνήεντα: **π π π π π π π**
Σύμφωνα: **π π π π π π π π π π π π π π π π π**

6. **α)**



β) **Αγόρια:**

Τουλάχιστον 1,5 ώρες: 33+30+12+5=80%

Το πολύ 2 ώρες: 6+14+33+30=83%

Κορίτσια:

Τουλάχιστον 1,5 ώρες: 27+33+16+8=84%

Το πολύ 2 ώρες: 4+12+27+33=76%

4.3 Κατανομή συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **1.** Γ, **2.** Α, **3.** Β,

4. Δ, **5.** Α.

2.

Ομάδες	Συχνότητες	Σχετικές συχνότητες (%)
ΑΕΚ	40	20
ΠΑΟΚ	10	5
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ	30	15
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ	20	10
ΟΦΗ	70	35
ΕΡΓΟΤΕΛΗΣ	30	15
ΣΥΝΟΛΟ	200	100

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

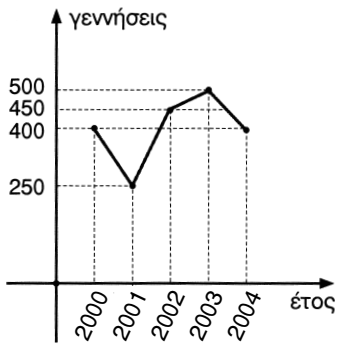
Αρ. παιδιών	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
0	4	10
1	10	25
2	14	35
3	8	20
4	4	10
ΣΥΝΟΛΟ	40	100

Αρ. απουσιών	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
0	3	7,5
1	8	20
2	12	30
3	6	15
4	6	15
5	4	10
6	1	2,5
ΣΥΝΟΛΟ	40	100

2. **α)**

Έτος	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
2000	400	20
2001	250	12,5
2002	450	22,5
2003	500	25
2004	400	20
ΣΥΝΟΛΟ	2.000	100

β)

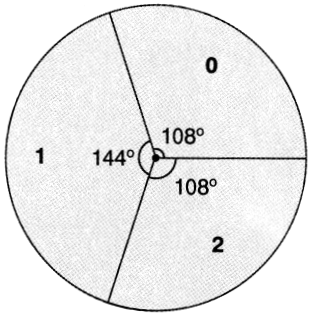


γ) Αύξηση: 2002, 2003, μείωση: 2001, 2004.

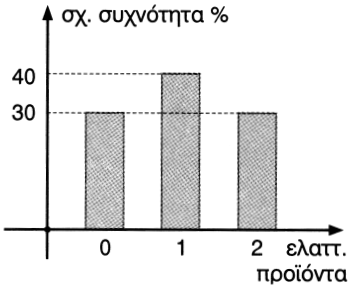
3. **α)**

Ελατ. προϊόντα	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
0	3	30
1	4	40
2	3	30
ΣΥΝΟΛΟ	10	100

β)



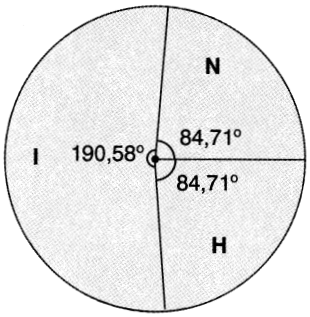
γ)

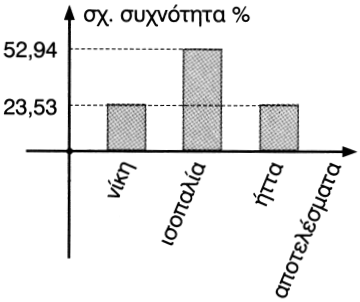


4. **α)**

Αποτέλεσμα	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
Ν	8	23,53
Ι	18	52,94
Η	8	23,53
ΣΥΝΟΛΟ	34	100

β)





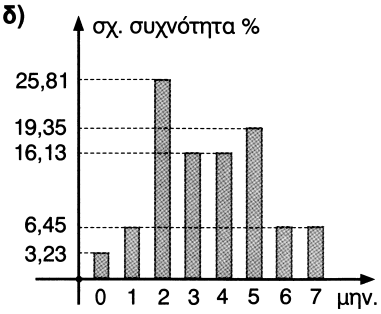
5. **α)**

Αρ. μηνυμάτων	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
0	1	3,23
1	2	6,45
2	8	25,81
3	5	16,13
4	5	16,13
5	6	19,35
6	2	6,45
7	2	6,45
ΣΥΝΟΛΟ	31	100

β) $5 + 6 + 2 + 2 = 15$ μέρες.

γ) $\frac{1+2+8+5}{31} \simeq 0{,}5161 = 51{,}61\%$.

δ)



6. **α)**

Ομάδα αίματος	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
Ο	5	20
Α	11	44
Β	6	24
ΑΒ	3	12
ΣΥΝΟΛΟ	25	100

β) $44\% + 24\% = 68\%$.

γ) Η ΑΒ, με ποσοστό 12%.

7. **α)**

Σωστές απαντήσεις	Γωνία (°)	Σχ. συχνότητα %	Βαθμολογία
0	30	8,33	0
1	90	25	5
2	150	41,67	10
3	60	16,67	15
4	30	8,33	20
ΣΥΝΟΛΟ	360	100	–

β) $8{,}33\% + 25\% + 41{,}67\% = 75\%$.

8. **α)** $20 \cdot 1.000 = 20.000$ υπολογιστές.

β)

Μάρκα	Συχνότητα	Σχ. συχνότητα %
Α	4.000	20
Β	7.000	35
Γ	4.000	20
Δ	5.000	25
ΣΥΝΟΛΟ	20.000	100

γ) $20\% + 25\% = 45\%$.

4.4 Ομαδοποίηση των παρατηρήσεων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **1.** Β, **2.** Γ, **3.** Δ.

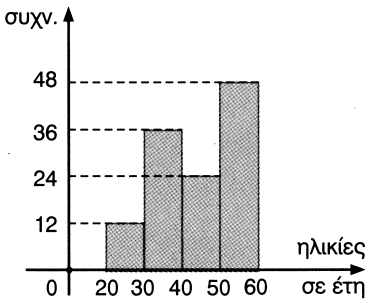
2.

Κλάσεις	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
Συχνότητα	1	4	5	6	4
Σχ. συχνότητα %	5	20	25	30	20

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Κλάσεις	Συχνότητα
20-30	12
30-40	36
40-50	24
50-60	48
ΣΥΝΟΛΟ	120



2. **α)**

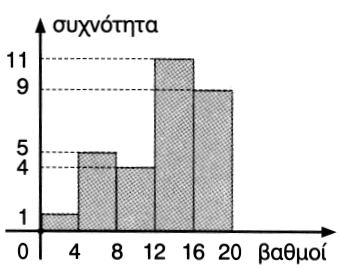
Κλάσεις	Συχνότητα
0-2	8
2-4	15
4-6	15
6-8	8
8-10	4
ΣΥΝΟΛΟ	50

β)

3. **α)**

Βαθμοί	Συχνότητα
0-4	1
4-8	5
8-12	4
12-16	11
16-20	9
ΣΥΝΟΛΟ	30

β)

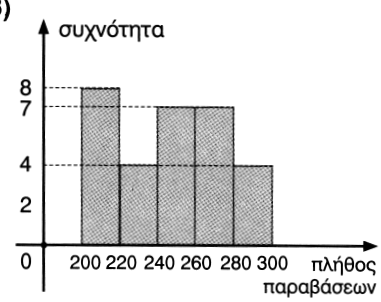


4. **α)** $298 - 201 = 97$.

$97 : 5 = 19{,}4$.

Κλάσεις	Συχνότητα
200-220	8
220-240	4
240-260	7
260-280	7
280-300	4
ΣΥΝΟΛΟ	30

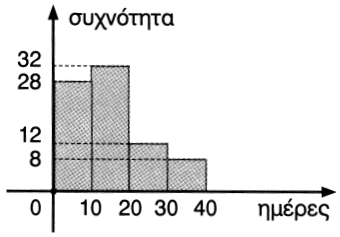
β)



5. **α)**

Ημέρες	Ποσοστό	Συχνότητα
0-10	35%	28
10-20	40%	32
20-30	15%	12
30-40	10%	8
ΣΥΝΟΛΟ	100%	80

β)



4.5 Μέση τιμή - Διάμεσος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Δ. **2.** Γ. **3.** Β. **4.** **α)** Α, **β)** Γ, **γ)** Δ. **5.** Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $\frac{7+7+7+7+7+7}{6}=\frac{42}{6}=7,$

β) $\frac{1+2+3+\ldots+9+10}{10}=\frac{55}{10}=5{,}5,$

γ) $\frac{-3-2-2+0+1+1+1}{7}=-\frac{4}{7},$ **δ)** $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}{6}=\frac{127}{360}.$

2. **α)** $\frac{2+1}{2}=1{,}5,$ **β)** 2, **γ)** 101, **δ)** $\frac{-2+0}{2}=-1.$

3. **α)** Α′ μαθητής: $\frac{18+17+16+\ldots+19+17}{14}=\frac{251}{14}\simeq 17{,}93.$

Β′ μαθητής: $\frac{19+19+18+\ldots+18+20}{14}=\frac{261}{14}\simeq 18{,}64.$

β) Ο Β′ μαθητής.

γ) Α′ μαθητής: $\frac{18+18}{2}=18,$ αφού 16 16 17 17 17 18 $\underbrace{18\ 18}$ 18 19 19 19 19 20.

Β′ μαθητής: $\frac{19+19}{2}=19,$ αφού 17 18 18 18 18 18 $\underbrace{19\ 19}$ 19 19 19 19 20 20.

4. **α)** $\bar{x}=\frac{192+197+\ldots+205+206}{12}=\frac{2.399}{12}\simeq 199{,}92$ cm.

β) $\delta=\frac{200+200}{2}=200,$ **γ)** $\bar{x}'=\frac{2.399-192+200}{12}=\frac{2.407}{12}\simeq 200{,}58$ cm.

5.

Θερμοκρασία (°C)	Συχνότητα	Σχ. συχν. %	Συχν. επί θερμ.
10	5	16,67	50
12	5	16,67	60
14	9	30	126
16	6	20	96
17	2	6,66	34
18	3	10	54
ΣΥΝΟΛΟ	30	100	420

Οπότε η μέση τιμή είναι $\frac{420}{30}=14$ °C και $\delta=\frac{14+14}{2}=14$ °C.

6.

Ηλικία	Κέντρο κλάσης	Συχν.	Σχ. συχν. (%)	Συχνότητα επί κέντρο κλάσης
0-2	1	50	25	50
2-4	3	40	20	120
4-6	5	60	30	300
6-8	7	30	15	210
8-10	9	10	5	90
10-12	11	10	5	110
ΣΥΝΟΛΟ	–	200	100	880

Οπότε η μέση τιμή είναι $\frac{880}{200} = 4{,}4$.

7. Μέση τιμή $= \frac{12 \cdot 24 + 18 \cdot 48 + 24 \cdot 56 + 30 \cdot 36 + 36 \cdot 24 + 42 \cdot 12}{200} =$

$= \frac{4.944}{200} = 24{,}72.$

8. **α) i)**

Τιμή	Συχν.	Τιμή · Συχν.
45	1	45
46	1	46
47	2	94
48	1	48
49	4	196
50	3	150
51	2	102
52	3	156
53	1	53
54	2	108
ΣΥΝΟΛΟ	20	998

ii) $M = \frac{998}{20} = 49{,}9.$

β) i)

Κλάσεις	Κέντρο	Συχν.	Συχν. · Κέντρο
45–47	46	2	92
47–49	48	3	144
49–51	50	7	350
51–53	52	5	260
53–55	54	3	162
ΣΥΝΟΛΟ	–	20	1.008

ii) $M' = \frac{1.008}{20} = 50{,}4.$ **iii)** Πραγματική μέση τιμή είναι η Μ.

ΜΕΡΟΣ Β΄

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

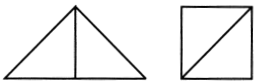
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Α = 71 τετρ., Β = 65 τετρ., άρα το Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν.

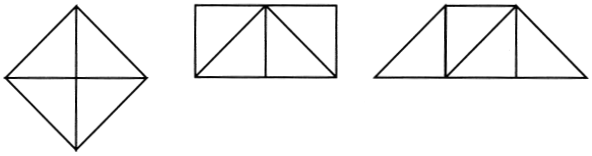
2. Α = 39 □, Β = 39 □, Γ = 39 □

Άρα τα τρία σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδόν.

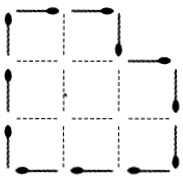
3. **α)**



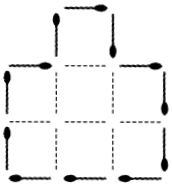
β)



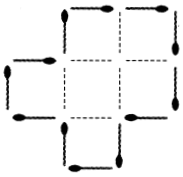
ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ



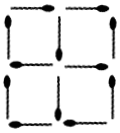
8 τετράγωνα



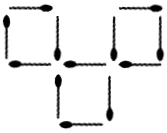
7 τετράγωνα



6 τετράγωνα



4 τετράγωνα



3 τετράγωνα

1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **1.** Γ, **2.** Δ, **3.** Δ, **4.** Α, **5.** Β, **6.** Α.

2. **1.** Α, **2.** Β, **3.** Γ, **4.** Β, **5.** Γ, **6.** Α, **7.** Β, **8.** Α, **9.** Β, **10.** Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** 0,0032 m^2, **β)** 0,0312 m^2, **γ)** 127.000.000 m^2, **δ)** 7,1 m^2, **ε)** 0,01272 m^2, **στ)** 2,12 m^2, **ζ)** 0,00128 m^2, **η)** 79.000.000 m^2.

2. α) 12 m^2 = 120.000 cm^2, β) 175 dm^2 = 17.500 cm^2, γ) 456 m^2 = 4.560.000 cm^2, δ) 136 m^2 = 1.360.000 cm^2, ε) 3 km^2 = 30.000.000.000 cm^2, στ) 1750 m^2 = 17,5 cm^2, ζ) 256 km^2 = 2.560.000.000.000 cm^2

3. α) 12 km^2 = 12.000.000.000.000 mm^2, β) 431 m^2 = 431.000.000 mm^2, γ) 17 dm^2 = 170.000 mm^2, δ) 236 cm^2 = 23.600 mm^2

4. α) 7233 mm^2 = 0,000000007233 km^2, β) 4321 cm^2 = 0,0000004321 km^2, γ) 6322 dm^2 = 0,00006322 km^2, δ) 14632 mm^2 = 0,000000014632 km^2 ε) 560 m^2 = 0,00056 km^2,

5. **α)** 13.850 mm^2 = 0,01385 m^2, 670 cm^2 = 0,067 m^2,
13,7 dm^2 = 0,137 m^2, άρα
13.850 mm^2 < 670 cm^2 < 13,7 dm^2 < 0,23 m^2 < 0,48 m^2.
β) 32 dm^2 = 0,32 m^2, 23.270 mm^2 = 0,02327 m^2,
1.356 cm^2 = 0,1356 m^2, άρα
23.270 mm^2 < 1.356 cm^2 < 32 dm^2 < 1,23 m^2.

6. **α)** m^2, **β)** km^2, **γ)** στρέμμα, **δ)** cm^2, **ε)** cm^2.

1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **1.** Γ, **2.** Γ, **3.** Β, **4.** Α, **5.** Γ, **6.** Β, **7.** Α, **8.** Β.

1. Γ, **2.** Γ, **3.** Α, **4.** Α, **5.** Α, **6.** Γ, **7.** Β, **8.** Α, **9.** Γ, **10**. Α, **11.** Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $4\alpha = 60$ ή $\alpha = \frac{60}{4} = 15$ cm, άρα $E = \alpha^2 = 15^2 = 225$ cm^2.

2. $E_{\text{φύλλου}} = 21 \cdot 30 = 630$ cm^2,

$E_{\text{τετραδίου}} = 2 \cdot 20 \cdot 630 = 25.200$ cm^2 .

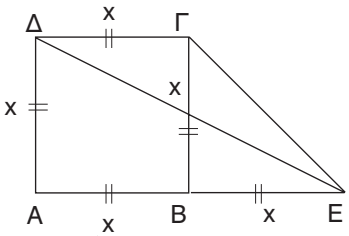
3. $E_{\text{κίτρινου}} = 12 \cdot 4 = 48\,\square$, $E_{\text{ροζ}} = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 48\,\square$

4. **α)** $E_{\text{ΑΒΓΔ}} = \text{ΑΒ}^2 = x^2$,

$E_{\text{ΑΔΕ}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΔ} \cdot \text{ΑΕ} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$.

β) $E_{\text{ΒΓΕ}} = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΕ} \cdot \text{ΒΓ} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x =$

$= \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}E_{\text{ΑΒΓΔ}}E_{\text{ΑΕΔ}}$.



5. $E_{\text{πρώτου}} = 5 \cdot (5 + 3) = 40$ cm^2,

$E_{\text{δεύτερου}} = 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 25 + 15 = 40$ cm^2 ή

$E_{\text{πρώτου}} = x \cdot (x + 3) = x^2 + 3x$, $E_{\text{δεύτερου}} = x \cdot x + \frac{1}{2}x \cdot 6 = x^2 + 3x$.

6. $E_{\text{τραπεζίου}} = \frac{12 + 20}{2} \cdot 4 = 64$ cm^2, άρα $E_{\text{τετραγώνου}} = 64$ cm^2.

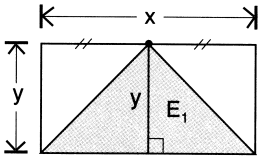
7. $E_{\text{κήπου}} = 25 \cdot 40 = 1.000$ m^2,

$E_{\text{δρομάκια}} = 0{,}6 \cdot 40 + 0{,}8 \cdot 25 - 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 43{,}52$ m^2,

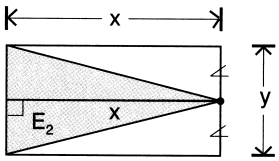
$E_{\text{γκαζόν}} = 1.000 - 43{,}52 = 956{,}48$ m^2,

οπότε το κόστος του γκαζόν $956{,}48 \cdot 12 = 11.477{,}76$ €.

8.



$E_1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$.



$E_2 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot x$.

9. **α)** Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη 18 m, και η άλλη κάθετη είναι (30–x). Οπότε εμβαδόν $E = \frac{18 \cdot (30 - x)}{2} = 9(30 - x) = 270 - 9x$.

β) $E_{\delta\rho\acute{o}\mu o\upsilon} = \frac{1}{4} E_{\alpha\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\varepsilon\iota}$ ή $18 \cdot x = \frac{1}{4}(18 \cdot 30 - 18 \cdot x)$ ή $72x = 540 - 18x$ ή $72x + 18x = 540$ ή $90x = 540$ ή $x = \frac{540}{90} = 6$ m.

10. **α)** $E_{MAB} = \frac{1}{2} AM \cdot AB = \frac{1}{2}\frac{A\Delta}{2} \cdot AB = \frac{A\Delta \cdot AB}{4}$,

$E_{NB\Gamma} = \frac{1}{2} \Gamma B \cdot \Gamma N = \frac{1}{2} A\Delta \cdot \frac{AB}{2} = \frac{A\Delta \cdot AB}{4}$.

β) $E_{BM\Delta N} = E_{AB\Gamma\Delta} - (E_{AMB} + E_{B\Gamma N}) = AB \cdot A\Delta - 2 \cdot \frac{A\Delta \cdot AB}{4} =$

$= AB \cdot A\Delta - \frac{AB \cdot A\Delta}{2} = \frac{AB \cdot A\Delta}{2} = 2E_{MAB} = E_{MAB} + E_{NB\Gamma}$.

11. **1.** 15 cm^2, **2.** 12 cm^2, **3.** 7,5 cm^2, **4.** 16 cm^2, **5.** 16 cm^2, **6.** 15 cm^2, **7.** 9 cm^2, **8.** 16 cm^2, **9.** 18,5 cm^2, **10.** 10 cm^2, **11.** 10,5 cm^2, **12.** 22 cm^2.

12. $E_{AB\Gamma\Delta} = E_{AB\Delta} + E_{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} AO \cdot B\Delta + \frac{1}{2} \Gamma O \cdot B\Delta = \frac{1}{2} B\Delta \cdot (AO + \Gamma O) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (3 + 6) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 9 = \frac{45}{2} = 22{,}5$ cm^2.

13. **α)** $4 \cdot x = 40$ ή $x = \frac{40}{4}$ ή $x = 10$ cm .

β) $x^2 = 36$ ή $x = \sqrt{36}$ ή $x = 6$ cm.

γ) $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x = 20$ ή $2x = 20$ ή $x = \frac{20}{2}$ ή $x = 10$ cm.

δ) $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x = 18$ ή $x^2 = 36$ ή $x = \sqrt{36}$ ή $x = 6$ cm.

14. **α)** $E = 12 \cdot 5 = 60$ cm^2, **β)** $E = \frac{5 + 12}{2} \cdot 4 = 34$ cm^2,

γ) $E = \frac{10 + 6}{2} \cdot 4 = 32$ cm^2, **δ)** $E = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ cm^2,

ε) $E = 9^2 = 81$ cm^2, **στ)** $E = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$ cm^2.

15. $E_{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o\upsilon\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 17^2 = 289$, $E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, άρα

$E_{\mu\iota\kappa\rho o\acute{\upsilon}\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 289 - 4 \cdot 30 = 169$.

16. **α)** $E_{\sigma\alpha\lambda o\nu\iota o\acute{\upsilon}} = 4 \cdot 8{,}5 = 34$ m^2, $E_{\kappa o\upsilon\zeta\acute{\iota}\nu\alpha\varsigma} = 4 \cdot 3 = 12$ m^2,

$E_{\gamma\rho\alpha\varphi\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon} = 3 \cdot 3 = 9$ m^2, $E_{WC} = 3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$ m^2,

$E_{\upsilon\pi\nu o\delta\omega\mu\alpha\tau\acute{\iota}o\upsilon 1} = 3 \cdot 4 = 12\ m^2$,

$E_{\upsilon\pi\nu o\delta\omega\mu\alpha\tau\acute{\iota}o\upsilon 2} = 2{,}5 \cdot 4 = 10\ m^2$, $E_{\mu\pi\acute{\alpha}\nu\iota o\upsilon} = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5\ m^2$.

β) $E_{\delta\iota\alpha\delta\rho\acute{o}\mu o\upsilon} = 4{,}5 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 3 = 9\ m^2$.

γ) $E_{\delta\omega\mu\alpha\tau\acute{\iota}\omega\nu} = 34 + 12 + 9 + 4{,}5 + 12 + 10 + 7{,}5 = 89\ m^2$,

$E_{\beta\varepsilon\rho\acute{\alpha}\nu\tau\alpha\varsigma} = E_{\delta\iota\alpha\mu\varepsilon\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma} - E_{\delta\omega\mu\alpha\tau\acute{\iota}o\upsilon} - E_{\delta\iota\alpha\delta\rho\acute{o}\mu o\upsilon} =$

$= 11 \cdot 13{,}5 - 89 - 9 = 50{,}5\ m^2$.

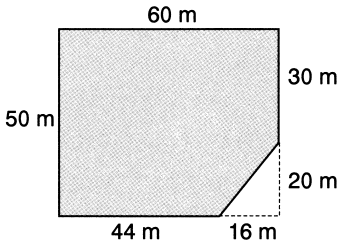
17. α) $E_{o\iota\kappa o\pi\acute{\varepsilon}\delta o\upsilon} = 60 \cdot 50 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 16 =$

$= 2.840\ m^2 = 2{,}84$ στρέμματα,

οπότε η αξία είναι:

$2{,}84 \cdot 20.000 = 56.800$ €.

β) 2.840 : 2,5 = 1.136 κλήματα.



ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

Αριστερά είναι το ορθογώνιο και έχει εμβαδόν 400 cm^2.
Στη μέση είναι το ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν 200 cm^2
και δεξιά είναι το τετράγωνο με εμβαδόν 100 cm^2.

1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Γ. **2.** Β. **3.** Γ. **4.** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $E = 25 - 9 = 16\ m^2$, **β)** $E = 5{,}76 + 1 = 6{,}76\ m^2$,

γ) $E = 1 - 0{,}64 = 0{,}36\ m^2$.

2. **α)** $25^2 = 24^2 + 7^2$ ή $625 = 576 + 49$ ή 625=625 ισχύει αντίστρ. Π.Θ.

β) $20^2 = 16^2 + 12^2$ ή $400 = 256 + 144$ ή 400=400 ισχύει αντίστρ. Π.Θ.

γ) $17^2 = 15^2 + 8^2$ ή $289 = 225 + 64$ ή 289=289 ισχύει αντίστρ. Π.Θ.

3. **α)** Έχουμε $10^2 = 6^2 + 8^2$ ή $100 = 36 + 64$, άρα είναι ορθογώνιο.

β) Για πλευρές 3, 4, 5 ισχύει $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Για πλευρές 12, 16, 20 ισχύει $20^2 = 12^2 + 16^2$.

4. Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΓ}}$: $\text{ΑΔ}^2 + \text{ΔΓ}^2 = \text{ΑΓ}^2$ ή $x^2 + 6^2 = 10^2$ ή $x^2 + 36 = 100$ ή $x^2 = 100 - 36$ ή $x^2 = 64$.

$E_{\text{τετραγώνου}} = x^2 = 64\ \text{cm}^2$.

5. Εφαρμόζοντας Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$: $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΒΓ}^2$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 1^2 + 2{,}1^2$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 5{,}41$, άρα $E_{\text{τετραγώνου}} = \text{ΑΓ}^2 = 5{,}41\ \text{m}^2$.

6. Ισχύει $\text{ΒΓ}^2 = \text{ΑΒ}^2 + \text{ΑΓ}^2$ ή $50^2 = 30^2 + 40^2$, άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο από το αντίστροφο του Π.Θ.

7. Οι διαγώνιες του ρόμβου διχοτομούνται, οπότε $\text{ΑΟ} = \text{ΟΓ} = \dfrac{\text{ΑΓ}}{2} = 6\ \text{dm}$ και $\text{ΒΟ} = \text{ΟΔ} = \dfrac{\text{ΒΔ}}{2} = 8\ \text{dm}$. με το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΟ}}$: $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΟ}^2 + \text{ΟΓ}^2$ ή $\text{ΑΒ}^2 = 6^2 + 8^2$ ή $\text{ΑΒ}^2 = 100$ ή $\text{ΑΒ} = \sqrt{100}$ ή $\text{ΑΒ} = 10\ \text{dm}$.

$\text{Περίμετρος}_{\text{ΑΒΓΔ}} = 4 \cdot 10 = 40\ \text{dm}$.

$E_{\text{ΑΒΓΔ}} = E_{\text{ΑΒΓ}} + E_{\text{ΑΓΔ}} = \dfrac{1}{2}\text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΟ} + \dfrac{1}{2}\text{ΑΓ} \cdot \text{ΔΟ} = \dfrac{1}{2}\text{ΑΓ}(\text{ΒΟ} + \text{ΔΟ}) =$

$= \dfrac{1}{2}\text{ΑΓ} \cdot \text{ΒΔ} = \dfrac{1}{2}12 \cdot 16 = 96\ \text{dm}^2$.

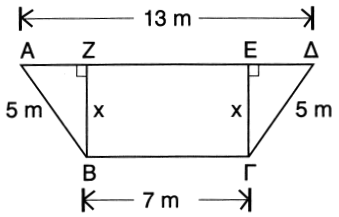
8. Το ΒΓΕΖ είναι ορθογώνιο, άρα:

$\text{ΖΕ} = \text{ΒΓ} = 7\ \text{m}$,

$\text{ΑΖ} + \text{ΕΔ} = \text{ΑΔ} - \text{ΖΕ} = 6\ \text{m}$,

ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο,

άρα: $\text{ΑΖ} = \text{ΕΔ} = 3\ \text{m}$.



Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΔΕΓ}}$:

$\text{ΕΔ}^2 + \text{ΕΓ}^2 = \text{ΓΔ}^2$

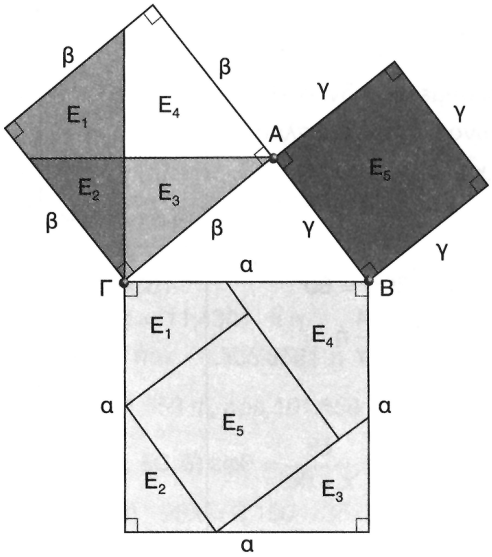
ή $3^2 + x^2 = 5^2$ ή $9 + x^2 = 25$ ή

$x^2 = 25 - 9$ ή $x^2 = 16$ ή

$x = \sqrt{16} = 4\ \text{m}$.

9. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή $AB^2 = 9^2 + 12^2$ ή $AB^2 = 81 + 144$ ή $AB^2 = 225$ ή $AB = \sqrt{225}$ ή $AB = 15$ m, και Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{BE\Delta}$: $B\Delta^2 + E\Delta^2 = EB^2$ ή $B\Delta^2 + 8^2 = 17^2$ ή $B\Delta^2 + 64 = 289$ ή $B\Delta^2 = 289 - 64$ ή $B\Delta^2 = 225$ ή $B\Delta = \sqrt{225} = 15$ m. Οι τοποθεσίες Α, Δ ισαπέχουν από τη Β, ενώ η Ε είναι πιο μακριά.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Γ. **2.** **α)** Β, **β)** Δ. **3.** $\varepsilon\varphi\theta = 1$, $\varepsilon\varphi\varphi = \frac{5}{2}$, $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{2}$, $\varepsilon\varphi\psi = \frac{5}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

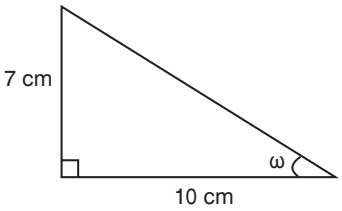
1. **α)** $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{x}{12}$ ή $0{,}5774 = \frac{x}{12}$ ή $x = 12 \cdot 0{,}5774$ ή $x = 6{,}9288$.

β) $\varepsilon\varphi 35^\circ = \frac{x}{17}$ ή $0{,}7 = \frac{x}{17}$ ή $x = 0{,}7 \cdot 17$ ή $x = 11{,}9$.

γ) $\varepsilon\varphi 38^\circ = \frac{13}{x}$ ή $0{,}7813 = \frac{13}{x}$ ή $0{,}7813x = 13$ ή $x = \frac{13}{0{,}7813}$ ή $x \simeq 16{,}64$.

δ) Επειδή $\widehat{\Lambda} = 45^\circ$, $\widehat{M} = 90^\circ$, έχουμε $\widehat{K} = 45^\circ$, δηλαδή $\overset{\triangle}{K\Lambda M}$ ισοσκελές με $M\Lambda = MK = 10$.

2. Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 7 cm και 10 cm όπως στο διπλανό σχήμα.



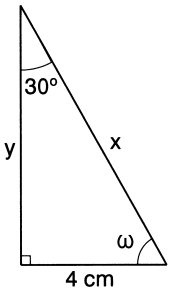
Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

3. $\widehat{\omega} = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$.

$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{4}{y}$ ή $0{,}5774 = \frac{4}{y}$ ή

$0{,}5774y = 4$ ή

$y = \frac{4}{0{,}5774} \simeq 6{,}93$ cm.



Με εφαρμογή του Π.Θ. έχουμε:

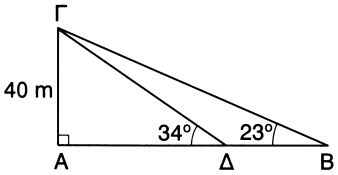
$x^2 = 4^2 + 6{,}93^2$ ή $x^2 = 16 + 48{,}0249$

ή $x^2 = 64{,}0249$ ή $x \simeq 8$ cm.

4. $\overset{\triangle}{\text{ΑΓΔ}}$: $\varepsilon\varphi 34^\circ = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}}$ ή $0{,}6745 = \dfrac{40}{\text{ΑΔ}}$

ή $0{,}6745 \cdot \text{ΑΔ} = 40$ ή $\text{ΑΔ} = \dfrac{40}{0{,}6745}$

ή $\text{ΑΔ} \simeq 59{,}3$ m.



$\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$: $\varepsilon\varphi 23^\circ = \dfrac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$ ή $0{,}4245 = \dfrac{40}{\text{ΑΒ}}$

ή $0{,}4245 \cdot \text{ΑΒ} = 40$ ή $\text{ΑΒ} = \dfrac{40}{0{,}4245}$ ή $\text{ΑΒ} \simeq 94{,}23$ m.

Συνεπώς $\text{ΔΒ} = 94{,}23 - 59{,}3$ ή $\text{ΔΒ} = 34{,}93$ m.

5. $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΓ}}$: $\varepsilon\varphi 18^\circ = \dfrac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΔ}}$ ή $0{,}3249 = \dfrac{3}{\text{ΑΔ}}$ ή $0{,}3249 \cdot \text{ΑΔ} = 3$ ή $\text{ΑΔ} = \dfrac{3}{0{,}3249}$ ή

$\text{ΑΔ} \simeq 9{,}23$ m.

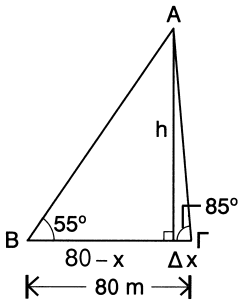
$\overset{\triangle}{\text{ΑΔΕ}}$: $\varepsilon\varphi 40^\circ = \dfrac{\text{ΔΕ}}{\text{ΑΔ}}$ ή $0{,}8391 = \dfrac{\text{ΔΕ}}{9{,}23}$ ή $\text{ΔΕ} = 0{,}8391 \cdot 9{,}23$ ή $\text{ΔΕ} \simeq 7{,}74$ m,

άρα $h = \text{ΓΔ} + \text{ΔΕ} = 3 + 7{,}74 = 10{,}74$ m.

6. Αν $\text{ΓΔ} = x$, τότε $\text{ΒΔ} = 80 - x$.

$\overset{\triangle}{\text{ΑΓΔ}}$: $\varepsilon\varphi 85^\circ = \dfrac{h}{x}$ ή $11{,}4301 = \dfrac{h}{x}$ ή

$11{,}4301x = h$ ή $x = \dfrac{h}{11{,}4301}$.



$\overset{\triangle}{\text{ΑΒΔ}}$: $\varepsilon\varphi 55^\circ = \dfrac{h}{80 - x}$ ή

$1{,}4281 = \dfrac{h}{80 - x}$ ή

$1{,}4281(80 - x) = h$ ή

$1{,}4281 \cdot 80 - 1{,}4281 \cdot x = h$ ή

$114{,}248 - 1{,}4281 \cdot \dfrac{h}{11{,}4301} = h$ ή

$1.305{,}8661 - 1{,}4281 \cdot h = 11{,}4301 \cdot h$ ή

$-1{,}4281 \cdot h - 11{,}4301 \cdot h = -1.305{,}8661$ ή $-12{,}8582 \cdot h = -1.305{,}8661$

ή $h = \dfrac{1.305{,}8661}{12{,}8582} \simeq 101{,}559$ m, άρα $101{,}559 + 1{,}4 = 102{,}959$ m.

7. **α)** $\text{ΒΔ} = 90 - x$, $0 < x < 90$, **β)** $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{25}{90 - x}$, **γ)** $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{35}{x}$, **δ)** $\dfrac{25}{90 - x} = \dfrac{35}{x}$

ή $25x = 35(90 - x)$ ή $25x = 3.150 - 35x$ ή $25x + 35x = 3.150$ ή

$60x = 3.150$ ή $x = \dfrac{3.150}{60} = 52{,}5$ cm.

2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Δ, **δ)** Γ. **2.** Β. **3.** Β. **4.** Α. **5.** δ, στ.

6. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ, **στ)** Σ, **ζ)** Σ, **η)** Λ, **θ)** Σ.

7. **α)** $\overset{\triangle}{AΔB}$, $συν\widehat{AΔB} = \frac{AΔ}{BΔ}$, **β)** $\overset{\triangle}{ABΓ}$, $ημ\widehat{ABΓ} = \frac{AΓ}{BΓ}$, **γ)** $\overset{\triangle}{AEΓ}$, $συν\widehat{AEΓ} = \frac{AE}{EΓ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** Έχουμε: $AB^2 + BΓ^2 = AΓ^2$ ή $3^2 + BΓ^2 = 5^2$ ή $9 + BΓ^2 = 25$ ή

$BΓ^2 = 25 - 9$ ή $BΓ^2 = 16$ ή $BΓ = \sqrt{16} = 4$ cm.

Άρα: $ημA = \frac{4}{5}$, $συνA = \frac{3}{5}$, $ημΓ = \frac{3}{5}$, $συνΓ = \frac{4}{5}$.

β) Έχουμε: $AΓ^2 = AB^2 + BΓ^2$ ή $AΓ^2 = 1{,}5^2 + 4^2$ ή $AΓ^2 = 2{,}25 + 16$

ή $AΓ^2 = 18{,}25$ ή $AΓ = \sqrt{18{,}25}$ ή $AΓ \simeq 4{,}27$ cm.

Άρα $ημA = \frac{4}{4{,}27} \simeq 0{,}94$, $συνA = \frac{1{,}5}{4{,}27} \simeq 0{,}35$, $ημΓ = \frac{1{,}5}{4{,}27} \simeq 0{,}35$,

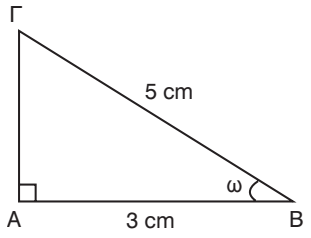
$συνΓ = \frac{4}{4{,}27} \simeq 0{,}94$.

γ) Έχουμε: $BΓ^2 = AB^2 + AΓ^2$ ή $BΓ^2 = 7^2 + 9^2$ ή $BΓ^2 = 49 + 81$ ή

$BΓ^2 = 130$ ή $BΓ = \sqrt{130}$ ή $BΓ \simeq 11{,}4$ cm. Άρα $ημB = \frac{9}{11{,}4} \simeq 0{,}79$,

$συνB = \frac{7}{11{,}4} \simeq 0{,}61$, $ημΓ = \frac{7}{11{,}4} \simeq 0{,}61$, $συνΓ = \frac{9}{11{,}4} \simeq 0{,}79$.

2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ
με κάθετη πλευρά ΑΒ = 3cm
και υποτείνουσα ΒΓ = 5 cm.
Από το Π.Θ. έχουμε:
$BΓ^2 = AB^2 + AΓ^2$ ή $AΓ^2 = 5^2 - 3^2$ ή
$AΓ^2 = 16$ ή $AΓ = 4$ cm.
Άρα $ημω = \frac{AΓ}{BΓ} = \frac{4}{5}$



α) $\eta\mu\omega < 1$ ή $5\eta\mu\omega < 5 \cdot 1$ ή $2 + 5\eta\mu\omega < 2 + 5$ ή $2 + 5\eta\mu\omega < 7$.

β) $\sigma\upsilon\nu\omega < 1$ ή $-2\sigma\upsilon\nu\omega > -2 \cdot 1$ ή $4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 4 - 2$ ή $4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 2$.

γ) $\eta\mu\omega < 1$ ή $5\eta\mu\omega < 5$ και $\sigma\upsilon\nu\omega < 1$ ή $3\sigma\upsilon\nu\omega < 3$, άρα $5\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega < 5 + 3 = 8$.

Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$: $A\Gamma^2 + O\Gamma^2 = OA^2$ ή $A\Gamma^2 + 8^2 = 10^2$ ή $A\Gamma^2 + 64 = 100$ ή $A\Gamma^2 = 100 - 64$ ή $A\Gamma^2 = 36$ ή $A\Gamma = \sqrt{36} = 6$ m, $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\Gamma}{O\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{O\Gamma}{OA} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\overset{\triangle}{OB\Delta}$: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{B\Delta}{OB}$ ή $\frac{3}{4} = \frac{B\Delta}{12}$ ή $4 \cdot B\Delta = 36$ ή $B\Delta = \frac{36}{4} = 9$ m και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OB}{O\Delta}$ ή $\frac{4}{5} = \frac{12}{O\Delta}$ ή $4O\Delta = 60$ ή $O\Delta = \frac{60}{4} = 15$ m.

2.3 Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Γ, **β)** Γ. **2.** **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Σ, **δ)** Λ, **ε)** Λ, **στ)** Σ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $\eta\mu 28^\circ = \frac{x}{15}$ ή $0{,}4695 = \frac{x}{15}$ ή $0{,}4695 \cdot 15 = x$ ή $x = 7{,}0425$ cm.

β) $\sigma\upsilon\nu 68^\circ = \frac{1}{x}$ ή $0{,}3746 = \frac{1}{x}$ ή $0{,}3746x = 1$ ή $x = \frac{1}{0{,}3746}$ ή $x \simeq 2{,}67$ cm.

γ) $\varepsilon\varphi 50^\circ = \frac{5}{x}$ ή $1{,}1918 = \frac{5}{x}$ ή $1{,}1918x = 5$ ή $x = \frac{5}{1{,}1918}$ ή $x \simeq 4{,}2$ cm.

2. **α)** $\sigma\upsilon\nu 63^\circ = \frac{5}{x}$ ή $0{,}454 = \frac{5}{x}$ ή $0{,}454x = 5$ ή $x = \frac{5}{0{,}454}$ ή $x \simeq 11{,}013$.

β) $\eta\mu 35^\circ = \frac{x}{10}$ ή $0{,}5736 = \frac{x}{10}$ ή $x = 5{,}736$.

γ) $\varepsilon\varphi 40^\circ = \frac{4}{x}$ ή $0{,}8391 = \frac{4}{x}$ ή $0{,}8391x = 4$ ή $x = \frac{4}{0{,}8391}$ ή $x \simeq 4{,}767$.

δ) $\eta\mu 38^\circ = \frac{x}{8}$ ή $0{,}6157 = \frac{x}{8}$ ή $x = 4{,}9256$.

ε) $\varepsilon\varphi 50^\circ = \frac{x}{5}$ ή $1{,}1918 = \frac{x}{5}$ ή $x = 5{,}959$.

3. $\overset{\triangle}{AB\Delta}$: $\eta\mu 55^\circ = \frac{8}{x}$ ή $0{,}8192 = \frac{8}{x}$ ή

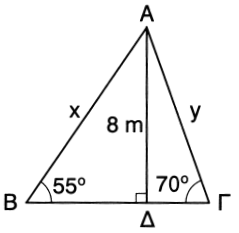
$0{,}8192x = 8$ ή $x = \frac{8}{0{,}8192}$ ή

$x \simeq 9{,}77$ m.

$\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $\eta\mu 70^\circ = \frac{8}{y}$ ή $0{,}9397 = \frac{8}{y}$ ή

$0{,}9397y = 8$ ή $y = \frac{8}{0{,}9397}$ ή

$y \simeq 8{,}51$ m.



4. $\eta\mu 13^\circ = \frac{2{,}25}{A\Gamma}$ ή $0{,}225 = \frac{2{,}25}{A\Gamma}$ ή $0{,}225 \cdot A\Gamma = 2{,}25$ ή $A\Gamma = \frac{2{,}25}{0{,}225}$ ή

$A\Gamma = 10$ m. $\varepsilon\varphi 13^\circ = \frac{2{,}25}{AB}$ ή $0{,}2309 = \frac{2{,}25}{AB}$ ή $0{,}2309 \cdot AB = 2{,}25$ ή

$AB = \frac{2{,}25}{0{,}2309}$ ή $AB \simeq 9{,}74$ m.

5. **α)** $\eta\mu 56^\circ > \eta\mu 37^\circ > \eta\mu 20^\circ > \eta\mu 16^\circ$.

β) $\sigma\upsilon\nu 20^\circ > \sigma\upsilon\nu 25^\circ > \sigma\upsilon\nu 28^\circ > \sigma\upsilon\nu 36^\circ$.

γ) $\varepsilon\varphi 89^\circ > \varepsilon\varphi 51^\circ > \varepsilon\varphi 22^\circ > \varepsilon\varphi 18^\circ$.

6. $\sigma\upsilon\nu 75^\circ = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή $0{,}2588 = \frac{AB}{6}$ ή $0{,}2588 \cdot 6 = AB$ ή $1{,}5528$ m $= AB$.

$\eta\mu 75^\circ = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ή $0{,}9659 = \frac{A\Gamma}{6}$ ή $0{,}9659 \cdot 6 = A\Gamma$ ή $5{,}7954$ m $= A\Gamma$, άρα

$\Gamma\Delta = 7 - 5{,}7954$ ή $\Gamma\Delta = 1{,}2046$ m.

7. $\overset{\triangle}{ABH}$: $\eta\mu 78^\circ = \frac{AH}{AB}$ ή $0{,}9781 = \frac{AH}{20}$ ή $0{,}9781 \cdot 20 = AH$ ή $19{,}562$ m $= AH$,

$\widehat{HAB} = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$ άρα $\widehat{MAH} = 70^\circ - 12^\circ = 58^\circ$.

$\overset{\triangle}{AHM}$: $\sigma\upsilon\nu 58^\circ = \frac{AH}{AM}$ ή $0{,}5299 = \frac{19{,}562}{AM}$ ή $0{,}5299 \cdot AM = 19{,}562$ ή

$AM = \frac{19{,}562}{0{,}5299}$ ή $AM \simeq 36{,}92$ m.

8. $\sigma\upsilon\nu\widehat{A\Gamma\Sigma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Sigma}$ ή $\sigma\upsilon\nu 89{,}05^\circ = \frac{6.371}{\Gamma\Sigma}$ ή $\sigma\upsilon\nu 89{,}05^\circ \cdot \Gamma\Sigma = 6.371$ ή

$\Gamma\Sigma = \frac{6.371}{\sigma\upsilon\nu 89{,}05^\circ}$ ή $\Gamma\Sigma = \frac{6.371}{0{,}0166}$ ή $\Gamma\Sigma \simeq 383.795$ km.

2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α** → i, **β** → iii, **γ** → i, **δ** → v, **ε** → iii, **στ** → v. **2.** Β.

3. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Σ, **ε)** Σ. **4.** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

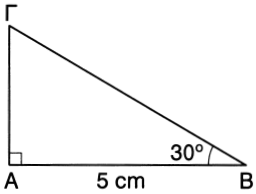
1. **α)** $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{A\Gamma}{AB}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{A\Gamma}{5}$ ή

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm $= A\Gamma$.

$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{AB}{B\Gamma}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{B\Gamma}$ ή

$\sqrt{3}B\Gamma = 10$ ή $B\Gamma = \frac{10}{\sqrt{3}}$ ή

$B\Gamma = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ ή $B\Gamma = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$ ή $B\Gamma = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.



β) $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 45^\circ$, άρα

$\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές και

$AB = A\Gamma = 7$ cm.

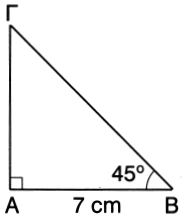
Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$:

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ ή

$B\Gamma^2 = 7^2 + 7^2$ ή $B\Gamma^2 = 98$ ή

$B\Gamma = \sqrt{98}$ cm ή $B\Gamma = \sqrt{49 \cdot 2}$

ή $B\Gamma = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2}$ ή $B\Gamma = 7 \cdot \sqrt{2}$ cm.



2. **α)** Επειδή $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ ή $13^2 = 12^2 + 5^2$ ή $169 = 144 + 25$,

από το αντίστροφο του Π.Θ. το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ($\hat{B} = 90^\circ$).

β) $\eta\mu A = \frac{B\Gamma}{A\Gamma}$ ή $\eta\mu A = \frac{5}{13}$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{AB}{A\Gamma}$ ή $\sigma\upsilon\nu A = \frac{12}{13}$.

3. **α)** $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ + \eta\mu^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} =$

$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

β) $2\eta\mu^2 30^\circ + 2\sigma\upsilon\nu^2 60^\circ - 2\eta\mu^2 45^\circ = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$

$= 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{2}{4} = 0.$

4. **α)** $A = 2\eta\mu^2 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}.$

β) $A = 2\eta\mu^2 45^\circ - \sigma\upsilon\nu 45^\circ = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

γ) $A = 2\eta\mu^2 60^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 1.$

5. $\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{AB}{\Pi B}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.500}{\Pi B}$ ή $\sqrt{3}\Pi B = 4.500$ ή $\Pi B = \frac{4.500}{\sqrt{3}}$ ή

$\Pi B = \frac{4.500\sqrt{3}}{3}$ ή $\Pi B = 1.500\sqrt{3}$ m ή $\Pi B \simeq 1.500\cdot 1{,}732$ ή $\Pi B \simeq 2.598$ m.

6. $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{AB}{A\Gamma}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{8}$ ή $\frac{8\sqrt{2}}{2} = AB$ ή $4\sqrt{2}$ m $= AB$

$\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{A\Delta}$ ή $\sqrt{3}A\Delta = 16$ ή $A\Delta = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ m

7. $\overset{\triangle}{AZB}$: $\eta\mu 45^\circ = \frac{AZ}{AB}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{AB}$ ή $\sqrt{2}AB = 6$ ή $AB = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2}$ ή

$AB = 3\sqrt{2}$ m.

$\overset{\triangle}{B\Gamma H}$: $\eta\mu 30^\circ = \frac{\Gamma H}{B\Gamma}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{3}{B\Gamma}$ ή $B\Gamma = 6$ m.

$\overset{\triangle}{\Gamma H\Delta}$: $\eta\mu 60^\circ = \frac{\Gamma H}{\Gamma\Delta}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\Gamma\Delta}$ ή $\sqrt{3}\Gamma\Delta = 6$ ή $\Gamma\Delta = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$ ή

$\Gamma\Delta = 2\sqrt{3}$ m.

Οπότε: $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = (3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{3})$ m.

8. **α)** $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $\widehat{\Gamma A\Delta} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ή $\hat{\theta} = 90^\circ - \widehat{\Gamma A\Delta} = 30^\circ$.

β) $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$: $\eta\mu 30^\circ = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{A\Gamma}{6}$ ή $2A\Gamma = 6$ ή $A\Gamma = 3$ cm, άρα $AB = 6$ cm.

$\overset{\triangle}{AEB}$: $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{AB}{AE}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{AE}$ ή $\sqrt{3}AE = 12$ ή $AE = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$ ή

$AE = 4\sqrt{3}$ cm.

γ) Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AE\Delta}$: $E\Delta^2 = AE^2 + A\Delta^2$ ή $E\Delta^2 = (4\sqrt{3})^2 + 6^2$
ή $E\Delta^2 = 16\cdot 3 + 36$ ή $E\Delta^2 = 84$ ή $E\Delta = \sqrt{84}$ cm ή $E\Delta = 9{,}1$ cm.

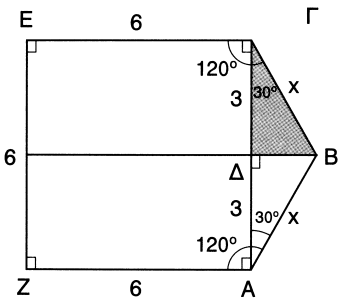
9. ΑΓΕΖ παραλληλόγραμμο, οπότε $ΑΓ = ΖΕ = 6$ και $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ισοσκελές με ΒΔ ύψος, άρα $ΑΔ = ΔΓ = 3$.

$\overset{\triangle}{ΑΒΔ}$: $συν30° = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{x}$ ή

$\sqrt{3}x = 6$ ή $x = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

$Περίμετρος_{ΑΒΓΕΖ} =$

$= 3 \cdot 6 + 2 \cdot 2\sqrt{3} = 18 + 4\sqrt{3}$.

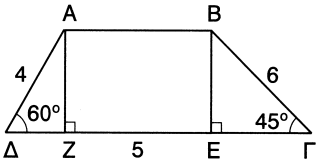


10. ΑΒΕΖ ορθογώνιο, οπότε $ΑΒ = ΖΕ = 5$.

$\overset{\triangle}{ΑΔΖ}$: $συν60° = \frac{ΔΖ}{ΑΔ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{ΔΖ}{4}$ ή

$2ΔΖ = 4$ ή $ΔΖ = 2$.

$\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$: $συν45° = \frac{ΓΕ}{ΒΓ}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ΓΕ}{6}$ ή



$2ΓΕ = 6\sqrt{2}$ ή $ΓΕ = 3\sqrt{2}$.

Άρα: $ΓΔ = ΔΖ + ΖΕ + ΕΓ = 2 + 5 + 3\sqrt{2} = 7 + 3\sqrt{2}$.

11. $\overset{\triangle}{ΑΒΡ}$: $συν60° = \frac{ΑΒ}{ΒΡ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{5}{ΒΡ}$ ή $ΒΡ = 10$ m.

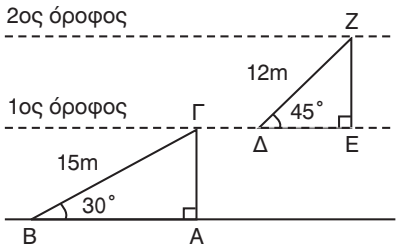
$\overset{\triangle}{ΡΓΔ}$: $συν30° = \frac{ΓΔ}{ΡΔ}$ ή $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{ΡΔ}$ ή $\sqrt{3}ΡΔ = 18$ ή $ΡΔ = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3}$ ή

$ΡΔ = 6\sqrt{3}$ m. Έχουμε $ΒΡ < ΡΔ$ επειδή $ΒΡ^2 < ΡΔ^2$ ή $100 < 108$.

Άρα το σπουργίτι από το Β θα φτάσει πρώτο τη ρώγα.

12. $ημ30° = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ή $\frac{1}{2} = \frac{ΑΓ}{15}$ ή $2ΑΓ = 15$ ή $ΑΓ = 7{,}5$ m, $ημ45° = \frac{ΖΕ}{ΔΖ}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ΖΕ}{12}$ ή

$2ΖΕ = 12\sqrt{2}$ ή $ΖΕ = 6\sqrt{2}$ m, άρα ύψος: $(7{,}5 + 6\sqrt{2})$ m $= 15{,}98$ m.



2.5 Η έννοια του διανύσματος

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ. **2.** **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ **3.** **α)** Δ, Ο, Ζ, **β)** Ο, Γ, Ο, **γ)** Ζ, Ο, Δ. **4.** **α, δ**, γιατί έχουν διεύθυνση, φορά και μέτρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{E\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma} = -\overrightarrow{EZ}, \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AZ}$.

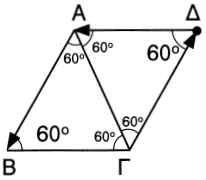
2. $\overrightarrow{AB} = \vec{\theta} = \vec{\zeta} = -\vec{\lambda} = -\vec{\varepsilon}$.

3. Όχι, γιατί δεν έχουν την ίδια διεύθυνση.

4. **α)** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\delta}|, |\vec{\kappa}| = |\vec{\iota}|, |\vec{\gamma}| = |\vec{\varepsilon}| = |\vec{\zeta}|$. **β)** $\vec{\gamma} = \vec{\zeta}$, **γ)** $\vec{\kappa} = -\vec{\iota}$.

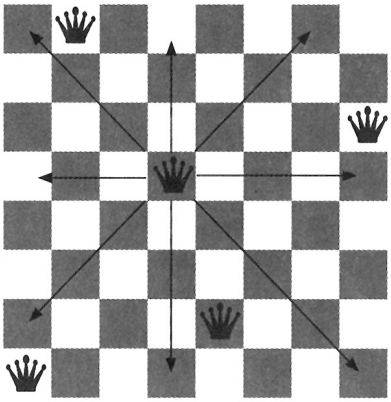
5. Με Π.Θ.: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, |\vec{\beta}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, |\vec{\gamma}| = 4,$
$|\vec{\delta}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$

6. Επειδή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
Άρα $\overrightarrow{\Delta A} = -\overrightarrow{B\Gamma}$.



7. **α)** $\vec{F}_1, \vec{F}_3, \vec{F}_5$ και $\vec{F}_2, \vec{F}_4, \vec{B}$, **β)** $\vec{F}_1$ με $\vec{F}_3, \vec{F}_5$ και $\vec{F}_2$ με $\vec{F}_4, \vec{B}$,
γ) $\vec{F}_2 = -\vec{F}_4$, **δ)** $\vec{F}_3 = \vec{F}_5$, **ε)** $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_5|, |\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_4|$.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ



2.6 Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

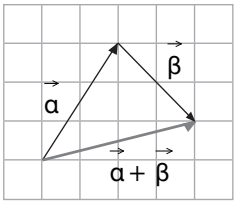
1. **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Γ, **δ)** Β, **ε)** Α. **2.** **α)** Δ, **β)** Δ, Γ, **γ)** Β, Α, **δ)** Β, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

3. Β. **4.** **α)** Δ, **β)** Γ, **γ)** Α, **δ)** Β.

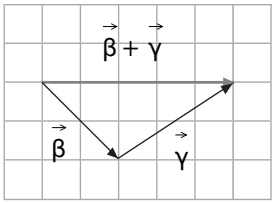
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

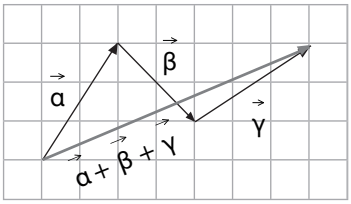
α)



β)



γ)



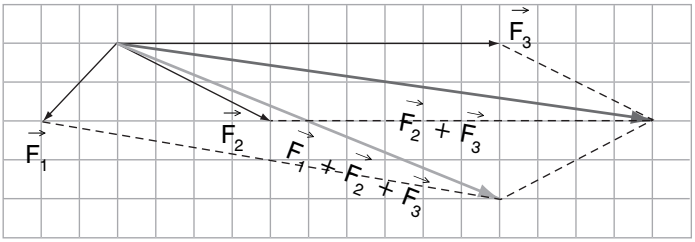
2. **α)** $\overrightarrow{A\Delta}$, **β)** $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, **γ)** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

3. **α)** $\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$, **β)** $\overrightarrow{\Gamma\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{B\Delta}$,
γ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta M}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

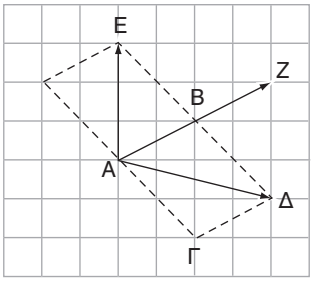
4. **α)** $\overrightarrow{AO}$, **β)** $\overrightarrow{O\Gamma}$, **γ)** $\overrightarrow{AO}$, **δ)** $\overrightarrow{O\Gamma}$ και, επειδή $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{O\Gamma}$, είναι όλα ίσα.

5. **α)** $\overrightarrow{A\Gamma}$, **β)** $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{EB}$ **γ)** $\overrightarrow{A\Gamma}$,
δ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ZE}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}$.

6.



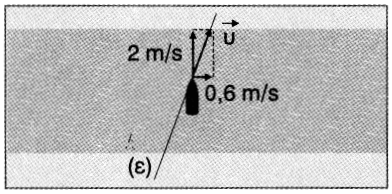
7.



$\overrightarrow{AΘ} = \vec{0}$

8. $\overrightarrow{ΓB} - \overrightarrow{ΓA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MΓ} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

9. **α)**



β) Η διεύθυνση που θα πάρει η βάρκα είναι η ευθεία (ε).

10. $\overrightarrow{MΓ} + \overrightarrow{MΔ} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NΓ} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NΔ} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NΓ} - \overrightarrow{NΓ} = 2\overrightarrow{MN}$,

$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MN}$.

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

$\overrightarrow{AO}$	+	$\overrightarrow{OB}$	=	$\overrightarrow{AB}$
+		+		+
$\overrightarrow{ON}$	+	$\overrightarrow{BΛ}$	=	$\overrightarrow{BΓ}$
=		=		=
$\overrightarrow{AN}$	+	$\overrightarrow{OΛ}$	=	$\overrightarrow{AΓ}$

Τα διανύσματα στο χάος της κυκλοφορίας

α) $\overrightarrow{Z_2Δ_3} = \overrightarrow{Z_2B_7} + \overrightarrow{B_7B_4} + \overrightarrow{B_4A_3} + \overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2Δ_3}$.

β) $\overrightarrow{A_4Γ_3} = \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_3Γ_4} + \overrightarrow{Γ_4Γ_3}$

γ) $\overrightarrow{E_3A_7} = \overrightarrow{E_3A_3} + \overrightarrow{A_3A_7}$ ή $\overrightarrow{E_3A_7} = \overrightarrow{E_3B_4} + \overrightarrow{B_4B_7} + \overrightarrow{B_7A_6} + \overrightarrow{A_6A_7}$

$\overrightarrow{Δ_4Z_1} = \overrightarrow{Δ_4A_2} + \overrightarrow{A_2A_6} + \overrightarrow{A_6Z_1}$ ή $\overrightarrow{Δ_4Z_1} = \overrightarrow{Δ_4Γ_2} + \overrightarrow{Γ_2Γ_6} + \overrightarrow{Γ_6Z_1}$

$\overrightarrow{Γ_8A_1} = \overrightarrow{Γ_8Γ_6} + \overrightarrow{Γ_6A_6} + \overrightarrow{A_6A_1}$ ή $\overrightarrow{Γ_8A_1} = \overrightarrow{Γ_8Γ_2} + \overrightarrow{Γ_2A_2} + \overrightarrow{A_2A_1}$.

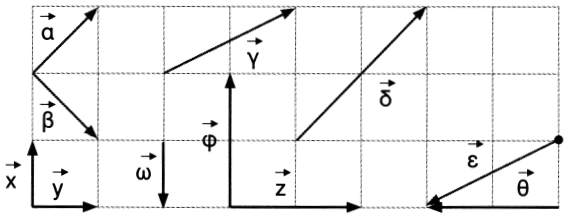
2.7 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Β, **β)** Γ, **γ)** Α. **2.** Γ. **3.** Β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\vec{\alpha} = \vec{x} + \vec{y}$,
$\vec{\beta} = \vec{\omega} + \vec{y}$,
$\vec{\gamma} = = \vec{x} + \vec{z}$,
$\vec{\delta} = \vec{\varphi} + \vec{z}$,
$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega} + \vec{\theta}$.



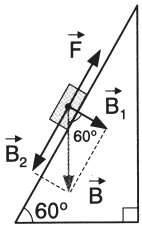
2. $|\vec{B}| = 270$ N.

$$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|} \text{ ή } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\vec{B}_2|}{270} \text{ ή } |\vec{B}_2| = 270 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } |\vec{B}_2| = 135\sqrt{2} \text{ N.}$$

3. $|\vec{B}| = 30.000$ N. Αναλύοντας το βάρος $\vec{B}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, τότε η γωνία των $\vec{B}$, $\vec{B}_1$ είναι 60°. Άρα $\eta\mu 60^\circ = \frac{|\vec{B}_2|}{|\vec{B}|}$ ή

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\vec{B}_2|}{30.000}$ ή $|\vec{B}_2| = \frac{30.000\sqrt{3}}{2}$

ή $|\vec{B}_2| = 15.000\sqrt{3}$ N.



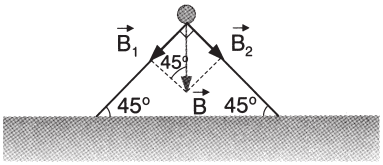
Άρα το συρματόσχοινο πρέπει να ασκεί δύναμη $\vec{F}$ με $|\vec{F}| = 15.000\sqrt{3}$ N, για να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

4. Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$\eta\mu 45^\circ = \frac{|\vec{B}_1|}{|\vec{B}|}$ ή $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|\vec{B}_1|}{200}$ ή

$\frac{200\sqrt{2}}{2} = |\vec{B}_1|$, άρα $|\vec{B}_1| =$

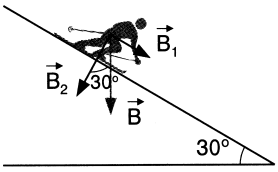
$|\vec{B}_2| = 100\sqrt{2}$ N.



5. Αναλύουμε το βάρος σε δύο κάθετες συνιστώσες οπότε:

$$ημ30° = \frac{|\vec{B}_1|}{|\vec{B}|} \quad ή \quad \frac{1}{2} = \frac{|\vec{B}_1|}{800} \quad ή$$

$$|\vec{B}_1| = 400 \text{ N}.$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Εγγεγραμένες: $\hat{\alpha}$, $\hat{\eta}$, επίκεντρες: $\hat{\gamma}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\theta}$.

2. **α)** Β, **β)** Α. **3.** **α)** Α, **β)** Β, **γ)** Β, **δ)** Γ.

4. Γ. **5.** **α)** Γ, **β)** Γ, **γ)** Β, **δ)** Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** $\hat{\varphi} = 2 \cdot 55^\circ = 110^\circ$, $\hat{\omega} = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$, **β)** $\hat{\omega} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$, $\hat{\varphi} = 30^\circ$, **γ)** $\hat{\omega} = 60^\circ$, $\hat{\varphi} = 90^\circ - \hat{\omega} = 30^\circ$.

2. $\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$, άρα $A\hat{M}B = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$.

3. $\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - (\overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{A\Gamma}) = 130^\circ$ ή $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$ ή $\overset{\frown}{BN} = \overset{\frown}{N\Gamma} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, άρα $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN} = 95^\circ$.

4. $2\varphi + 90^\circ + 2\varphi + 30^\circ + 120^\circ = 360^\circ$ ή
$2\varphi + 2\varphi = 360^\circ - 90^\circ - 30^\circ - 120^\circ$ ή $4\varphi = 120^\circ$ ή $\varphi = \frac{120^\circ}{4} = 30^\circ$.

5. $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Delta B} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$, $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Delta} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Gamma} = 135^\circ$.

6. Επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = 2\overset{\frown}{B\Gamma}$, έχουμε $\widehat{AO\Gamma} = 2\widehat{BO\Gamma}$ και $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma} = 180^\circ$, άρα $2\widehat{BO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma} = 180^\circ$ ή $3\widehat{BO\Gamma} = 180^\circ$ ή $\widehat{BO\Gamma} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

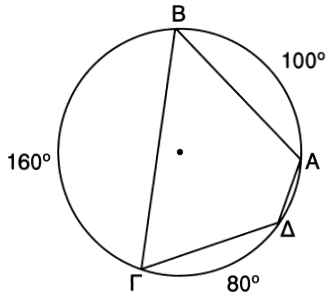
Οπότε το ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{BO\Gamma}$ είναι και ισόπλευρο με $B\Gamma = O\Gamma = 3$ cm και $\hat{B} = 60^\circ$.

Το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ($\hat{\Gamma}$ εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο), άρα $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, οπότε $\hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 30^\circ$.

Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$: $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = AB^2$ ή $A\Gamma^2 + 3^2 = 6^2$ ή $A\Gamma^2 + 9 = 36$ ή $A\Gamma^2 = 36 - 9$ ή $A\Gamma^2 = 27$ ή $A\Gamma = \sqrt{27}$ cm.

7. $\hat{\Delta} = 100^\circ$, άρα $\overset{\frown}{AB\Gamma} = 200^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{AB\Gamma} - \overset{\frown}{AB} = 200^\circ - 70^\circ = 130^\circ$.
Οπότε $\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 360^\circ - \overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{B\Gamma} = 80^\circ$. Επειδή $\overset{\frown}{B\Gamma} = 130^\circ$, έχουμε $\widehat{BA\Gamma} = \hat{x} = 65^\circ$ και $\overset{\frown}{A\Delta\Gamma} = 80^\circ + 80^\circ = 160^\circ$, άρα $\widehat{AB\Gamma} = \hat{y} = 80^\circ$.

8. $\overset{\frown}{A\Delta} = 360^\circ - (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta}) = 20^\circ$.
$\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} = 240^\circ$, άρα $\hat{A} = 120^\circ$,
$\overset{\frown}{\Gamma\Delta A} = 100^\circ$, άρα $\hat{B} = 50^\circ$,
$\overset{\frown}{\Delta AB} = 120^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και
$\overset{\frown}{AB\Gamma} = 260^\circ$, άρα $\hat{\Delta} = 130^\circ$.



9. Επειδή $\overset{\frown}{A\Gamma} = 50^\circ$, έχουμε $\hat{B} = 25^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Delta} = 70^\circ$, άρα $\hat{\Gamma} = 35^\circ$.
Στο $\overset{\triangle}{PB\Gamma}$: $\widehat{\Gamma PB} + \hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ$ ή $\hat{\Gamma} + \hat{B} = 180^\circ - \widehat{\Gamma PB}$ ή $35^\circ + 25^\circ = \hat{\varphi}$ ή $\hat{\varphi} = 60^\circ$.

3.2 Κανονικά πολύγωνα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Β, **δ)** Β, **ε)** Γ. **2.** **α)** Γ, **β)** Α, **γ)** Α.

3. **α)** Β, **β)** Β, **γ)** Γ, **δ)** Β, **ε)** Β, **στ)** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

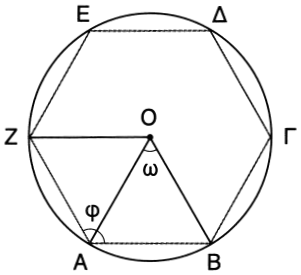
πλήθος πλευρών	γωνία κανονικού πολυγώνου	κεντρική γωνία
3	60°	120°
5	108°	72°
6	120°	60°
10	144°	36°

κεντρική γωνία	γωνία κανονικού πολυγώνου
15°	165°
30°	150°
72°	108°
20°	160°

2. $\widehat{\varphi} = 4\widehat{\omega}$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180°$, άρα $4\widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180°$ ή $5\widehat{\omega} = 180°$ ή $\widehat{\omega} = \frac{180°}{5} = 36°$. Έχουμε $\widehat{\omega} = \frac{360°}{v}$ ή $36° = \frac{360°}{v}$ ή $36°v = 360°$ ή $v = \frac{360°}{36°} = 10$ πλευρές.

3. $\widehat{\omega} = \frac{360°}{6} = 60°$. Άρα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AOB}$ και $\overset{\triangle}{AOZ}$ είναι ισόπλευρα, οπότε $\widehat{\varphi} = 60° + 60° = 120°$

Άρα $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 120° + 60° = 180°$.



4. $\widehat{\varphi} = \frac{5}{3} \cdot 90° = \frac{450°}{3} = 150°$, άρα $\widehat{\omega} = 180° - \widehat{\varphi} = 30°$ και $\frac{360°}{v} = 30°$ ή $360° = 30°v$ ή $v = \frac{360°}{30°} = 12$ πλευρές.

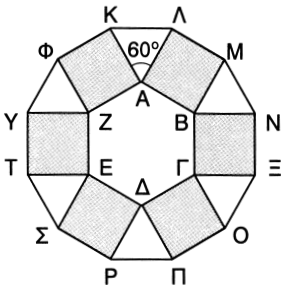
5. **α)** $\widehat{\omega} = \frac{360°}{v}$ ή $16° = \frac{360°}{v}$ ή $16°v = 360°$ ή $v = \frac{360°}{16°}$ ή $v = 22{,}5$, δεν είναι φυσικός, άρα δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο.

β) $\widehat{\omega} = 180° - \widehat{\varphi}$ ή $\widehat{\omega} = 180° - 130°$, οπότε ή $\widehat{\omega} = 50°$ ή $\frac{360°}{v} = 50°$ ή $360° = 50° \cdot v$ ή $v = \frac{360°}{50°}$ ή $v = 7{,}2$, δεν είναι φυσικός, άρα δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο.

6. Γράφουμε κύκλο (Ο, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = \frac{360°}{8} = 45°$. Με το διαβήτη θεωρούμε διαδοχικά τόξα ίσα με το $\overset{\frown}{AB}$. .Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων, και σχηματίζουμε το κανονικό οκτάγωνο.

7. $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$ και $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} = 180°$ ή $2\widehat{\omega} = 180°$, οπότε $\widehat{\omega} = 90°$ ή $\frac{360°}{v} = 90°$ ή $360° = 90°v$ ή $v = \frac{360°}{90°} = 4$, **άρα το τετράγωνο** έχει γωνία ίση με την κεντρική του γωνία.

8. Τα τρίγωνα ΚΛΑ, ΒΜΝ, ΓΟΞ, ΔΡΠ, ΕΤΣ, ΦΥΖ είναι ισόπλευρα με πλευρά x και τα ΚΑΖΦ, ΛΜΒΑ, ΝΞΓΒ, ΔΓΟΠ, ΕΔΡΣ, ΖΕΤΥ είναι τετράγωνα πλευράς x. Οπότε:



- $ΚΛ = ΛΜ = ΜΝ = ΝΞ = ΞΟ =$
  $= ΟΠ = ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ =$
  $= ΤΥ = ΥΦ = ΦΚ = x$ και
- $\widehat{Κ} = \widehat{Λ} = \widehat{Μ} = \widehat{Ν} = \widehat{Ξ} = \widehat{Ο} = \widehat{Π} =$
  $= \widehat{Ρ} = \widehat{Σ} = \widehat{Τ} = \widehat{Υ} = \widehat{Φ} = 60° + 90° = 150°$, άρα το ΚΛΜΝΞΟΠΡΣΤΥΦ είναι κανονικό δωδεκάγωνο.

3.3 Μήκος κύκλου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

Ακτίνα ρ	5 cm	6 cm	4 cm	3 cm	2 cm	9 cm
Μήκος κύκλου L	31,4 cm	37,68 cm	25,12 cm	18,84 cm	12,56 cm	56,52 cm

2. Β.

3.

$\frac{L_1}{L_2}$	$\frac{L_2}{L_3}$	$\frac{L_3}{L_1}$	$\frac{L_1}{2ρ}$	$\frac{L_2}{4ρ}$	$\frac{L_3}{6ρ}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	3	π	π	π

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $L_2 = L_1 + 20$ ή $2 \cdot 3{,}14ρ_2 = 2 \cdot 3{,}14ρ_1 + 20$ ή $6{,}28ρ_2 - 6{,}28ρ_1 = 20$ ή

$6{,}28(ρ_2 - ρ_1) = 20$ ή $ρ_2 - ρ_1 = \frac{20}{6{,}28}$ ή

$ρ_2 - ρ_1 = \frac{10}{3{,}14}$ ή $ρ_2 - ρ_1 = \frac{10}{π}$ cm.

2. $L = 2\pi\rho$ ή $3{,}5 = 2 \cdot 3{,}14\rho$ ή $3{,}5 = 6{,}28\rho$ ή $\frac{3{,}5}{6{,}28} = \rho$ ή $\rho \simeq 0{,}56$ cm.

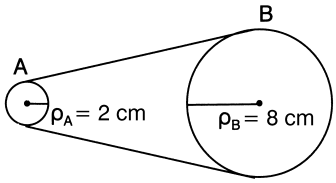
3. **α)** $\rho_2 - \rho_1 = \frac{1}{2}\delta_2 - \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{2}(\delta_2 - \delta_1) = \frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$ cm.

β) $L_2 - L_1 = 3{,}14\delta_2 - 3{,}14\delta_1 = 3{,}14(\delta_2 - \delta_1) = 3{,}14 \cdot 5 = 15{,}7$ cm.

4. $\frac{L_2}{L_1} = \frac{3{,}14\delta_2}{3{,}14\delta_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, άρα $\frac{2}{1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\frac{L_2}{L_1} = \frac{2 \cdot 3{,}14\rho_2}{2 \cdot 3{,}14\rho_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, άρα $\frac{2}{1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$.

5. Σε 12 ώρες θα έχει διαγράψει 12 κύκλους και μήκος $12L = 12 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 = 188{,}4$ cm.

6. Σε 1 στροφή της τροχαλίας Β, πάνω στον ιμάντα διανύεται μήκος $2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 50{,}24$ cm.



Σε 1 στροφή της τροχαλίας Α, διανύεται μήκος $2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$ cm.

Οπότε $\frac{50{,}24}{12{,}56} = 4$ στροφές. Άρα 4 στροφές θα κάνει η Α αν η Β κάνει μια στροφή.

7. $L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 188{,}4$ m $= 0{,}1884$ km.

Σε 1 ώρα κάνει 20 km.

Σε 3 ώρες κάνει 60 km.

Άρα $\frac{60}{0{,}1884} \simeq 318{,}47$ στροφές.

8. $L = 2\pi\rho$ ή $40.000 = 2 \cdot 3{,}14\rho$ ή $40.000 = 6{,}28\rho$ ή $\frac{40.000}{6{,}28} = \rho$ ή $\rho \simeq 6.369{,}43$ km.

3.4 Μήκος τόξου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. $90° \to \frac{\pi}{2}$, $60° \to \frac{\pi}{3}$, $180° \to \pi$, $270° \to \frac{3\pi}{2}$, $45° \to \frac{\pi}{4}$, $360° \to 2\pi$.

2. Α.

3.

Τόξο σε μοίρες	30°	90°	135°	225°	100°	210°	60°	270°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Τόξο σε μοίρες	60°	15°	120°	270°	180°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	π

2. $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360^\circ}$ ή $\ell = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ}$ ή $\ell = 12{,}56$ cm.

3. $\ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = L \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = 188{,}4 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ} = 15{,}7$ cm.

4. Το τετράγωνο χωρίζει τον κύκλο σε 4 ίσα τόξα, με μέτρο $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

Τότε: $\ell = 2\pi\rho\frac{\mu}{360^\circ}$ ή $\ell = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ}$ ή $\ell = 15{,}7$ cm.

5. $15{,}7 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho\frac{45^\circ}{360^\circ}$ ή $15{,}7 = 3{,}14 \cdot \rho \cdot \frac{1}{4}$ ή $62{,}8 = 3{,}14\rho$ ή $\frac{62{,}8}{3{,}14} = \rho$ ή $\rho = 20$ cm.

6. Όχι. Για να είναι ίσα πρέπει να είναι τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων.

7. $\ell_{\widehat{AB}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = 0{,}785$ cm,

$\ell_{\widehat{\Gamma\Delta}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = 1{,}1775$ cm,

$\ell_{\widehat{ZE}} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} = 1{,}57$ cm.

3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Β.

2. Β.

3. Δ.

4.

Ακτίνα κύκλου ρ	5 cm	3 cm	2,5 cm	17,32 cm
Εμβαδόν κύκλου Ε	78,5 cm^2	28,26 cm^2	19,625 cm^2	942 cm^2

5.

Ακτίνα ρ	Μήκος L	Εμβαδόν Ε
1 cm	6,28 cm	3,14 cm^2
2 cm	12,56 cm	12,56 cm^2
3 cm	18,84 cm	28,26 cm^2
4 cm	25,12 cm	50,24 cm^2
ρ cm	6,28ρ cm	$3{,}14\rho^2$ cm^2
2ρ cm	12,56ρ cm	$12{,}56\rho^2$ cm^2
3ρ cm	18,84ρ cm	$28{,}26\rho^2$ cm^2
4ρ cm	25,12ρ cm	$50{,}24\rho^2$ cm^2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $E_2 = 4E_1$ ή $3{,}14\rho_2^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2$ ή $\rho_2^2 = 4 \cdot 25$ ή $\rho_2^2 = 100$ ή $\rho_2 = \sqrt{100} = 10$ cm.

2. $E_{\delta\alpha\kappa\tau\upsilon\lambda\acute{\iota}o\upsilon} = E_{\mu\varepsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda o\upsilon} - E_{\mu\iota\kappa\rho o\acute{\upsilon}} = 3{,}14 \cdot 3^2 - 3{,}14 \cdot 2^2 =$
$= 3{,}14 \cdot 9 - 3{,}14 \cdot 4 = 28{,}26 - 12{,}56 = 15{,}7$ cm^2.

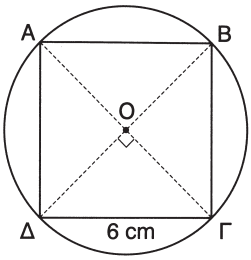
3. Το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο, επειδή η $\widehat{A}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο, άρα με Π.Θ.: $B\Gamma^2 = 8^2 + 6^2$ ή $B\Gamma^2 = 100$ ή $B\Gamma = 10$ cm. Οπότε $2R = 10$, δηλαδή $R = 5$ cm και $L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$ cm, $E = 3{,}14 \cdot 5^2 = 78{,}5$ cm^2.

4. $E_2 = 2E_1$ ή $3{,}14\rho_2^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2$ ή $\rho_2^2 = 2 \cdot 10^2$ ή $\rho_2 = 10\sqrt{2}$ cm ή $\rho_2 = 14{,}14$ cm. Οπότε κατασκευάζουμε κύκλο με ακτίνα 14,14 cm.

5. $E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\ \delta\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} = E_{\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon}$ ή $3{,}14 \cdot \rho^2 = 3^2$ ή $\rho^2 = \dfrac{9}{3{,}14}$ ή $\rho^2 \simeq 2{,}87$ ή $\rho \simeq \sqrt{2{,}87} \simeq 1{,}69$ cm.

6. $L = 1{,}256$ ή $2 \cdot 3{,}14\rho = 1{,}256$ ή $6{,}28\rho = 1{,}256$ ή $\rho = \dfrac{1{,}256}{6{,}28}$ ή $\rho = 0{,}2$ m, άρα $E = 3{,}14 \cdot 0{,}2^2$ ή $E = 0{,}1256$ m^2.

7. Το $\overset{\triangle}{O\Delta\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $\eta\mu\widehat{O\Delta\Gamma} = \dfrac{O\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ή $\eta\mu 45^\circ = \dfrac{R}{6}$ ή $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{R}{6}$ ή $R = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm και $E = 3{,}14 \cdot (3\sqrt{2})^2 = 56{,}52$ cm^2.



8. $E = 144\pi$ ή $\pi \cdot \rho^2 = 144\pi$ ή $\rho^2 = 144$ ή $\rho = \sqrt{144}$ ή $\rho = 12$ cm.
$\ell = \frac{1}{6}L$ ή $2 \cdot 3{,}14 \cdot 12 \cdot \frac{\mu}{180^\circ} = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 12$ ή $\frac{\mu}{180^\circ} = \frac{2}{6}$ ή $6\mu = 360^\circ$ ή
$\mu = \frac{360^\circ}{6}$ ή $\mu = 60^\circ$.

3.6 Εμβαδόν κυκλικού τομέα

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

ακτίνα κύκλου	γωνία κυκλ. τομέα	εμβαδόν κυκλ. τομέα
$\rho = 2$ cm	$\mu = 60^\circ$	$E = \frac{2\pi}{3}$ cm^2
$\rho = 8$ cm	$\mu = 45^\circ$	$E = 8\pi$ cm^2
$\rho = 3$ cm	$\mu = 120^\circ$	$E = 3\pi$ cm^2

2. $\rho = 9$ cm, $E = 27\pi$ cm. **3.** Α. **4.** Β. **5.** Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $E_{\text{κυκλ. τομέα}} = \frac{1}{8}E$ ή $\pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ} = \frac{1}{8}\pi\rho^2$ ή $8\pi\rho^2\mu = \pi\rho^2 \cdot 360^\circ$ ή
$\mu = \frac{\pi\rho^2 \cdot 360^\circ}{8\pi\rho^2}$ ή $\mu = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

2. $E_{\text{κυκλ. τομέα}} = \pi\rho^2 \cdot \frac{\mu}{360^\circ}$ ή $1 = 3{,}14 \cdot \rho^2 \cdot \frac{30^\circ}{360^\circ}$ ή $360^\circ = 3{,}14\rho^2 \cdot 30^\circ$ ή
$\rho^2 = \frac{360^\circ}{3{,}14 \cdot 30^\circ}$ ή $\rho^2 = 3{,}82$ ή $\rho = \sqrt{3{,}82} \simeq 1{,}95$ m.

3. $1.256 = 3{,}14\rho^2$ ή $\rho^2 = \frac{1.256}{3{,}14} = 400$ ή $\rho = \sqrt{400} = 20$ cm, άρα
$E = 3{,}14 \cdot 20^2 \cdot \frac{36^\circ}{360^\circ}$ ή $E = 125{,}6$ cm^2.

4. $20{,}25\pi = \pi\rho^2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ}$ ή $20{,}25\pi \cdot 360^\circ = \pi\rho^2 \cdot 45^\circ$ ή $\rho^2 = \frac{20{,}25\pi \cdot 360^\circ}{\pi \cdot 45^\circ}$ ή
$\rho^2 = 162$, άρα $E = 3{,}14 \cdot 162$ ή $E = 508{,}68$ cm^2.

5. $E = E_{\text{μεγάλου τομέα}} - E_{\text{μικρού τομέα}} = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} =$

$= 3{,}14 \cdot 16 \cdot \frac{1}{4} - 3{,}14 \cdot 9 \cdot \frac{1}{4} = \frac{50{,}24 - 28{,}26}{4} = 5{,}495 \text{ cm}^2.$

6. $E = E_{\text{μεγάλου τομέα}} - E_{\text{μικρού τομέα}} =$

$= 3{,}14 \cdot (55 + 15)^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} - 3{,}14 \cdot 15^2 \cdot \frac{120^\circ}{360^\circ} =$

$= 3{,}14 \cdot 4.900 \cdot \frac{1}{3} - 3{,}14 \cdot 225 \cdot \frac{1}{3} = \frac{15.386 - 706{,}5}{3} \simeq 4.893{,}17 \text{ cm}^2.$

7. **α)** $E = E_{\text{τετραγώνου}} - 2 \cdot E_{\text{κυκλ. τομέα}} = 8^2 - 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} =$

$= 64 - 25{,}12 = 38{,}88 \text{ cm}^2.$

β) $E = E_{\text{τετραγώνου}} - E_{\text{ημικυκλίου}} = 8^2 - \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 64 - 25{,}12 =$

$= 38{,}88 \text{ cm}^2.$

γ) $E = 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} = 50{,}24 \text{ cm}^2.$

δ) $E = E_{\text{τετραγώνου}} - 4 \cdot E_{\text{κυκλ. τομέα}} = 8^2 - 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} =$

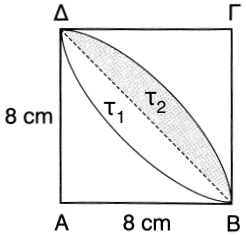
$= 64 - 50{,}24 = 13{,}76 \text{ cm}^2.$

ε) $E = \tau_1 + \tau_2 = 2\tau_1 =$

$= 2(E_{\text{κυκλ. τομέα}} - E_{\text{τριγώνου}}) =$

$= 2\left(3{,}14 \cdot 8^2 \cdot \frac{90^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\right) =$

$= 2(50{,}24 - 32) = 36{,}48 \text{ cm}^2.$



8. $\tau_1 = E_{\text{κυκλ. τομέα}} - E_{\text{ισόπλευρ. τριγώνου}} =$

$= 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{3^2 \cdot 1{,}73}{4} =$

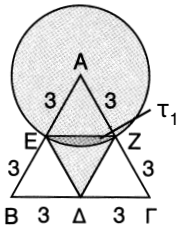
$= 4{,}71 - 3{,}8925 = 0{,}8175 \text{ cm}^2.$

$E_{\text{γραμμ. επιφάνειας}} =$

$= E_{\text{κ. δίσκου}} + E_{\Delta EZ} - \tau_1 =$

$= 3{,}14 \cdot 3^2 + \frac{3^2 \cdot 1{,}73}{4} - 0{,}8175 =$

$= 28{,}26 + 3{,}8925 - 0{,}8175 = 31{,}335 \text{ cm}^2.$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

4.1 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σ. **2.** Λ. **3.** Σ. **4.** Λ.

5. Σ. **6.** Σ. **7.** Σ. **8.** Β. **9.** Δ.

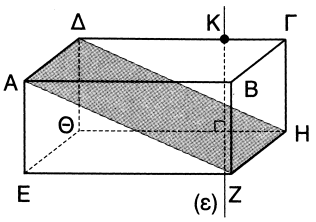
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **α)** ΕΘ, ΑΒ, ΑΔ, ΕΖ, **β)** ΕΖ, ΗΘ, ΓΔ, **γ)** ΕΘ, ΗΖ, ΕΑ, ΒΖ.

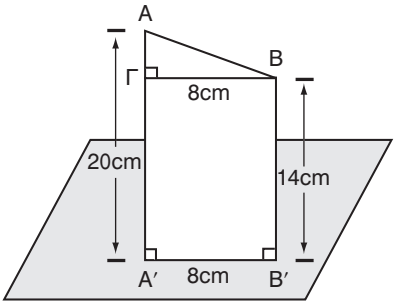
2. **α)** Το επίπεδο που διέρχεται από τα Γ, Δ, Ζ.

β) Το ΕΔΖΗ με κοινή την ΕΗ, το ΖΗΘ με κοινή τη ΘΗ, το ΑΕΔ με κοινή την ΑΕ και το ΒΓΔΕ με κοινή τη ΒΕ.

3.



4. Φέρνουμε $ΒΓ \perp ΑΑ'$. Τότε το $Α'Β'ΒΓ$ παραλληλόγραμμο, άρα $ΒΓ = Α'Β' = 8$ και $ΒΒ' = Α'Γ = 14$, άρα $ΑΓ = 6$.
Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $ΑΒ^2 = 6^2 + 8^2$ ή $ΑΒ^2 = 100$ ή $ΑΒ = \sqrt{100} = 10$.



5. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{ΕΗΖ}$: $ΕΗ^2 = 12^2 + 3^2$ ή $ΕΗ^2 = 144 + 9$ ή $ΕΗ^2 = 153$ και στο $\overset{\triangle}{ΑΕΗ}$: $ΑΗ^2 = ΑΕ^2 + ΕΗ^2$ ή $ΑΗ^2 = 4^2 + 153$ ή $ΑΗ^2 = 16 + 153$ ή $ΑΗ^2 = 169$ ή $ΑΗ = \sqrt{169} = 13$ cm.

6. **α)** ΗΓ $\perp$ ΓΒ, ΗΓ $\perp$ ΓΔ, άρα ΗΓ κάθετο στην έδρα ΑΒΓΔ.
ΚΛ $\perp$ ΑΓ, ΚΛ $\perp$ ΒΔ, άρα ΚΛ κάθετο στην έδρα ΑΒΓΔ.

β) Το $\overset{\triangle}{\text{ΓΚΔ}}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, αφού δημιουργείται από τις διαγώνιες του τετραγώνου ΑΒΓΔ και με Π.Θ.: $\text{ΚΔ}^2 + \text{ΚΓ}^2 = \text{ΓΔ}^2$ ή $2\text{ΓΚ}^2 = 12^2$ ή $2\text{ΓΚ}^2 = 144$ ή $\text{ΓΚ}^2 = 72$ ή $\text{ΓΚ} = \sqrt{72}$ ή $\text{ΓΚ} = 6\sqrt{2}$ cm.

7. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{\text{ΑΚΓ}}$: $\text{ΑΓ}^2 = 12^2 + 5^2$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 144 + 25$ ή $\text{ΑΓ}^2 = 169$ ή $\text{ΑΓ} = \sqrt{169} = 13$ m, άρα συνολικό μήκος $3 \cdot 13 = 39$ m.

4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. **α)** Γ, **β)** Β, **γ)** Β. **2.** **α)** Β, **β)** Β. **3.** **α)** Γ, **β)** Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Π	8	7	4	5	0,5
υ	5	10	6	2,8	10
$E_Π$	40	70	24	14	5

2. $E_Π = Π_Β \cdot υ = (30 + 50 + 60) \cdot 0{,}8 = 140 \cdot 0{,}8 = 112$ cm^2.

3.

α	2	3	2	3	5
β	3	5	5	2	2
γ	4	2	13	5	2
υ	5	4	4	8	5
$E_Π$	45	40	80	80	45

4. $E_{ολ} = 2(4 \cdot 3 + 3 \cdot 5) = 54$ m^2. Οπότε $54 : 9 = 6$ κιλά χρώμα πρέπει να αγοράσουμε για να βάψουμε το δωμάτιο.

5. $E_π = π_Β \cdot υ = 3 \cdot 4 \cdot 20 = 240$ cm^2. $E_Β = \dfrac{α^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ cm^2.
$E_{ολ} = 240 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = (240 + 8\sqrt{3})$ cm^2.

6. $E_{\pi} = \pi_B \cdot \upsilon = (1{,}6 + 2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}7) \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12\ m^2$.

$E_B = 2 \cdot \dfrac{2 + 0{,}5}{2} \cdot 0{,}8 = 2\ m^2$.

$E_{ολ} = 12 + 2 \cdot 2 = 16\ m^2$.

7. **α)** $E_{\Pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 5 = 94{,}2\ cm^2$,

$E_{ολ} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 + 94{,}2 = 150{,}72\ cm^2$.

β) $E_{\Pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 6 = 75{,}36\ cm^2$,

$E_{ολ} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 + 75{,}36 = 100{,}48\ cm^2$.

γ) $L = 15{,}7$ ή $2 \cdot 3{,}14 \cdot \rho = 15{,}7$ ή $6{,}28\rho = 15{,}7$ ή $6{,}28\rho = 15{,}7$ ή

$\rho = \dfrac{15{,}7}{6{,}28} = 2{,}5\ cm$.

$E_{\Pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 32$ ή $E_{\Pi} = 502{,}4\ cm^2$.

$E_{ολ} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 + 502{,}4$ ή $E_{ολ} = 541{,}65\ cm^2$.

δ) $E_B = 50{,}24$ ή $3{,}14\rho^2 = 50{,}24$ ή $\rho^2 = \dfrac{50{,}24}{3{,}14} = 16$ ή $\rho = \sqrt{16} = 4\ cm$.

$E_{\Pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 20 = 502{,}4\ cm^2$ ή $E_{ολ} = 2 \cdot 50{,}24 + 502{,}4$ ή

$E_{ολ} = 602{,}88\ cm^2$

8.

ρ	3	2	10	10	1
υ	5	4	1	2	9
E_{Π}	94,2	50,24	62,8	125,6	56,52
$E_{ολ}$	150,72	75,36	690,8	753,6	62,8

9. $E_{\Pi} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \cdot 12 = 226{,}08\ cm^2$, $E_B = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26\ cm^2$,

άρα τα 1.000 κουτιά έχουν εμβαδόν βάσεων

$2 \cdot 28{,}26 \cdot 1.000 = 56.520\ cm^2 = 5{,}65\ m^2$ και παράπλευρων

$226{,}08 \cdot 1.000 = 226.080\ cm^2 = 22{,}608\ m^2$ με συνολικό κόστος

$5{,}65 \cdot 0{,}5 + 22{,}608 \cdot 0{,}3 = 2{,}825 + 6{,}7824$,

δηλαδή $2{,}83 + 6{,}78 = 9{,}61$ €.

4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

E_B	12	8	5
υ	3	7	6
V	36	56	30

2.

E_B	22	9	20
υ	4	8	6
V	88	72	120

3.

υ	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm
$E_Π$	$16π\ cm^2$	$32π\ cm^2$	$48π\ cm^2$	$64π\ cm^2$
$E_{ολ}$	$48π\ cm^2$	$64π\ cm^2$	$80π\ cm^2$	$96π\ cm^2$
V	$32π\ cm^3$	$64π\ cm^3$	$96π\ cm^3$	$128π\ cm^3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ ή $ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = \sqrt{25} = 5$ cm, άρα $υ = 5$ cm.

α) $E_Π = π_B \cdot υ = (3 + 4 + 5) \cdot 5 = 60\ cm^2$.

β) $E_B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\ cm^2$ και $E_{ολ} = 60 + 2 \cdot 6 = 72\ cm^2$.

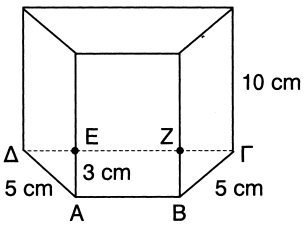
γ) $V = E_B \cdot υ = 6 \cdot 5 = 30\ cm^3$.

2. $E_π = 432$ ή $π_B \cdot υ = 432$ ή $3x \cdot 4x = 432$ ή $12x^2 = 432$ ή $x^2 = \frac{432}{12} = 36$ ή $x = 6$ cm η πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου, οπότε $υ = 4 \cdot 6 = 24$ cm.

Άρα $V = E_B \cdot υ = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot υ \simeq \frac{6^2 \cdot 1{,}73}{4} \cdot 24 = 373{,}68\ cm^3$.

3. $E_{ολ} = 3E_π$ ή $E_π + 2E_B = 3E_π$ ή $2E_B = 2E_π$ ή $E_B = E_Π$ ή $x^2 = 4 \cdot x \cdot υ$ ή $x = 4υ$.

4. Με εφαρμογή του Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AE\Delta}$:



$\Delta E^2 + 3^2 = 5^2$ ή

$\Delta E^2 = 25 - 9 = 16$ ή

$\Delta E = \sqrt{16} = 4$ cm και $ZΓ = 4$ cm.

Ακόμα, $ZE = AB = x$, άρα $ΓΔ = 8 + x$.

α) $V = 180$ ή $E_B \cdot 10 = 180$ ή

$E_B = \frac{180}{10} = 18$ cm^2,

$E_Π = 220$ cm^2 ή $π_B \cdot 10 = 220$ ή $π_B = \frac{220}{10} = 22$ cm.

β) $π_B = 22$ ή $5 + x + 5 + 8 + x = 22$ ή $x + x = 22 - 5 - 5 - 8$ ή $2x = 4$ ή

$x = \frac{4}{2} = 2$ cm, άρα $AB = 2$ cm, $ΓΔ = 10$ cm.

5. Μήκος βάσης $L = 29$ ή $2 \cdot 3{,}14ρ = 29$ ή $ρ = \frac{29}{6{,}28} \simeq 4{,}62$ cm,

$V = 3{,}14 \cdot 4{,}62^2 \cdot 21$ ή $V = 1.407{,}45$ cm^3.

6. **α)** $V = 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 1{,}2 = 376{,}8$ cm^3, **β)** $V = E_B \cdot υ = 1 \cdot 20 = 20$ cm^3.

7. Έχουμε κύλινδρο ύψους 5 cm και ακτίνας $ρ = 0{,}4$ cm.

Τότε: $V = 3{,}14 \cdot 0{,}4^2 \cdot 5 = 2{,}512$ cm^3, $E_Π = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4 \cdot 5 = 12{,}56$ cm^2.

Ο καπνός περιέχει: $2{,}512 \cdot 0{,}5 = 1{,}256$ mg πίσσας.

Το τσιγαρόχαρτο περιέχει: $12{,}56 \cdot 0{,}05 = 0{,}628$ mg πίσσας.

Άρα από ένα τσιγάρο έχουμε $1{,}256 + 0{,}628 = 1{,}884$ mg πίσσας και από 15 τσιγάρα $15 \cdot 1{,}884 = 28{,}26$ mg.

4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Λ. **2.** Σ. **3.** Λ.

4. Λ. **5.** Λ. **6.** Σ.

7. Γ. **8.** Β. **9.** Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

ύψος	8	12	6
πλευρά βάσης	12	8	12
απόστημα	10	12,65	8
E_{Π}	240	202,39	192
V	384	256	288

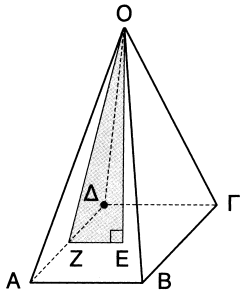
2. $V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 10$ ή $V = 480\ cm^2$.

3. $E_{\Pi} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12$ ή $E_{\Pi} = 324\ cm^2$.

4. **α)** $E_{\Pi} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 144\ cm^2$, **β)** $E_{ολ} = 9^2 + 144 = 225\ cm^2$.

5. $V = 700$ ή $\frac{1}{3}\alpha^2 \cdot 17 = 700$ ή $17\alpha^2 = 2.100$ ή $\alpha^2 = \frac{2.100}{17} = 123{,}53\ cm$,
άρα $\alpha = \sqrt{123{,}53} \simeq 11{,}11\ cm$.

6. $E_{\Pi} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10 = 320\ cm^2$.



Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{OEZ}$:
$OZ^2 = OE^2 + ZE^2$ ή $10^2 = OE^2 + 8^2$ ή
$OE^2 = 100 - 64 = 36$ ή
$OE = \sqrt{36} = 6\ cm$,
άρα $V = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 6 = 512\ cm^3$.

7. $E_{ολ} = 4\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} \simeq 6^2 \cdot 1{,}73 = 62{,}28\ cm^2$.

8. $V_2 = 9 \cdot V_1$ ή $\frac{1}{3} \cdot \alpha_2^2 \cdot υ = 9 \cdot \frac{1}{3}\alpha_1^2 \cdot υ$ ή $\alpha_2^2 = 9\alpha_1^2$, άρα $\alpha_2 = 3\alpha_1$ ή $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 3$.

9. $V_{κύβου} = 10^3 = 1.000\ cm^3$, $V_{πυραμίδας} = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 6 = 200\ cm^3$,
$V_{ολ} = 1.200\ cm^3$.

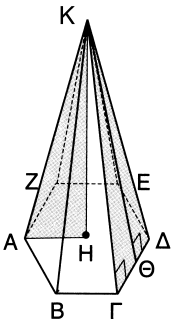
10. Εφαρμόζοντας το Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AKH}$:

$AH^2 + KH^2 = KA^2$ ή

$AH^2 + 8^2 = 10^2$ ή $AH^2 = 100 - 64$

ή $AH^2 = 36$ ή $AH = \sqrt{36} = 6$ cm,

άρα πλευρά $\alpha = 6$ cm.



Ακόμη με Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{K\Theta\Delta}$: $K\Theta^2 + \Theta\Delta^2 = K\Delta^2$

ή $K\Theta^2 + 3^2 = 10^2$ ή

$K\Theta^2 = 100 - 9$ ή $K\Theta^2 = 91$ ή

$K\Theta = \sqrt{91} \simeq 9{,}53$ cm.

α) $E_\Pi = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9{,}53 = 171{,}54$ cm^2.

β) $E_{o\lambda} = 171{,}54 + 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \simeq 171{,}54 + 93{,}42 = 264{,}96$ cm^2.

γ) $V = \frac{1}{3}E_B \cdot \upsilon = \frac{1}{3} \cdot 93{,}42 \cdot 8 = 249{,}12$ cm^3.

4.5 Ο κώνος και τα στοιχεία του

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Λ. **2.** Σ. **3.** Σ. **4.** Σ. **5.** Β.

6. Γ. **7.** Α. **8.** Β. **9.** Γ. **10.** Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

ύψος	4	8	10	6,71
ακτίνα βάσης	3	6	4	6
γενέτειρα	5	10	10,8	9
όγκος	37,68	301,44	167,47	252,83
παράπλευρη επιφάνεια	47,10	188,44	135,65	169,56

2. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \upsilon = 1$ m^3.

α) $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2\upsilon = 2$ m^3, **β)** $V_2 = \frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot \upsilon = 4$ m^3,

γ) $V_3 = \frac{1}{3}\pi(2R)^2 \cdot 2\upsilon = 8$ m^3.

3. $V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 20 \simeq 2.093{,}33\ cm^3$.

$V_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} = 20^3 = 8.000\ cm^3$, άρα $V_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} > V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon}$, οπότε δεν ξεχειλίζει.

4. $V = 20$ ή $\frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \rho^2 \cdot 3 = 20$ ή $\rho^2 = \frac{20}{3{,}14} \simeq 6{,}37$ ή $\rho \simeq \sqrt{6{,}37} = 2{,}52\ cm$,

άρα $\delta \simeq 5{,}04\ cm$. Πρέπει να είναι τουλάχιστον 5,04 cm.

5. $V_{\kappa\upsilon\lambda} = 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 4 = 200{,}96\ cm^3$, $V_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 6 = 100{,}48\ cm^3$

και $V_{o\lambda} = 301{,}44\ cm^3$.

$E_B = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24\ cm^2$, $E_{\pi\alpha\rho.\ \kappa\upsilon\lambda} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 4 = 100{,}48\ cm^2$,

$\lambda^2 = \rho^2 + \upsilon^2$ ή $\lambda^2 = 4^2 + 6^2$ ή $\lambda^2 = 52$ ή $\lambda = \sqrt{52} \simeq 7{,}21\ cm$,

$E_{\pi\alpha\rho.\ \kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 7{,}21 \simeq 90{,}56\ cm^2$

και $E_{o\lambda} \simeq 50{,}24 + 100{,}48 + 90{,}56$ ή $E_{o\lambda} = 241{,}28\ cm^2$.

6. $V_1 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 8 \simeq 133{,}97\ cm^3$, $V_2 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 12 = 200{,}96\ cm^3$

και $V_{o\lambda} \simeq 334{,}93\ cm^3$.

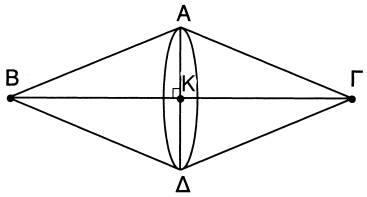
7. **α)** $\frac{E_{K_1}}{E_{K_2}} = \frac{\pi \cdot A\Gamma \cdot B\Gamma}{\pi \cdot AB \cdot B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}$, **β)** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi A\Gamma^2 \cdot AB}{\frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{AB}$.

8. Π.Θ. στο $\overset{\triangle}{AB}K$: $AK^2 + KB^2 = AB^2$

$AK^2 + 12^2 = 13^2$ ή

$AK^2 = 169 - 144 = 25$ ή

$AK = \sqrt{25} = 5\ cm$.



α) $E_{o\lambda} = E_{K_1} + E_{K_2}$ ή $E_{o\lambda} = 2E_{K_1}$ ή

$E_{o\lambda} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 \cdot 13$ ή

$E_{o\lambda} = 408{,}2\ cm^2$.

β) $V_{o\lambda} = V_1 + V_2$ ή $V_{o\lambda} = 2V_1$ ή $V_{o\lambda} = 2\frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12$ ή $V_{o\lambda} = 628\ cm^3$.

9. $\lambda^2 = \rho^2 + \upsilon^2$ ή $\lambda^2 = 20^2 + 15^2$ ή $\lambda^2 = 625$ ή $\lambda = \sqrt{625} = 25\ cm$,

$E_\pi = \pi\rho \cdot \lambda$ ή $E_\pi = 3{,}14 \cdot 20 \cdot 25$ ή $E_\pi = 1.570\ m^2$.

10. $V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 9{,}17 \simeq 239{,}95\ cm^3$. Τα $4\ cm^3$ αδειάζουν σε 1 min,

άρα $239{,}95\ cm^3$ αδειάζουν σε $\frac{239{,}95}{4} = 59{,}99$ min.

4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σ. **2.** Σ. **3.** Σ. **4.** Σ. **5.** Σ.

6. Γ. **7.** Δ. **8.** Γ. **9.** Δ. **10.** Δ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. **Α.**

ρ	1	2	10	6
Ε	4π	16π	400π	144π
V	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{32\pi}{3}$	$\frac{4.000\pi}{3}$	288π

Β.

ρ	1 m	10 cm	3,2 dm	8 dm	3 m
Ε	$4\pi\ m^2$	$400\pi\ cm^2$	$40,96\pi\ dm^2$	$256\pi\ dm^2$	$36\pi\ m^2$
V	$\frac{4}{3}\pi\ cm^3$	$\frac{4.000\pi}{3}\ cm^3$	$43,69\pi\ dm^3$	$682,67\pi\ dm^3$	$36\pi\ m^3$

2. $E = 4 \cdot 3,14 \cdot 2^2 = 50,24\ cm^2$, $V = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^3 = 33,49\ cm^3$.

3. $V_{ημισφ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3 \simeq 133,97\ m^3$,

$E_{ημισφ} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 4^2 + 3,14 \cdot 4^2 = 100,48 + 50,24 = 150,72\ m^2$.

4. $E_1 = 4E$ ή $4\pi R_1^2 = 4 \cdot 4\pi R^2$ ή $R_1^2 = 4R^2$ ή $R_1 = 2R$, άρα με το 2.

$E_2 = 36E$ ή $4\pi R_2^2 = 36 \cdot 4\pi R^2$ ή $R_2^2 = 36R^2$ ή $R_2 = 6R$, άρα με το 6.

$E_3 = 100E$ ή $4\pi R_3^2 = 100 \cdot 4\pi R^2$ ή $R_3^2 = 100R^2$ ή $R_3 = 10R$, άρα με το 10.

5. $E = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^2 = 1.256\ m^2$. Τα $8\ m^2$ χρειάζονται 1 kg χρώμα.

Τα $1.256\ m^2$ χρειάζονται $\frac{1.256}{8} = 157$ kg χρώμα.

6. ΚΙΤΡΙΝΕΣ: $E_1 = 4 \cdot 3,14 \cdot 5^2 = 314\ cm^2$, άρα $E_{ολ,1} = 4 \cdot 314 = 1.256\ cm^2$.

$V_1 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 5^3 = \frac{1.570}{3}\ cm^3$, άρα $V_{ολ,1} = 4 \cdot \frac{1.570}{3} = \frac{6.280}{3}\ cm^3$.

ΚΟΚΚΙΝΕΣ: $E_2 = 4 \cdot 3,14 \cdot 4^2 = 200,96\ cm^2$,

άρα $E_{ολ,2} = 5 \cdot 200,96 = 1.004,8\ cm^2$.

$V_2 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3 = \frac{803,84}{3}\ cm^3$, άρα $V_{ολ,2} = 5 \cdot \frac{803,84}{3} = \frac{4.019,2}{3}\ cm^3$.

Επειδή $E_{ολ,1} > E_{ολ,2}$, οι κίτρινες μπάλες έχουν μεγαλύτερο εμβαδόν και, επειδή $V_{ολ,1} > V_{ολ,2}$, οι κίτρινες έχουν και μεγαλύτερο όγκο.

7. $V_{κύβου} = 80^3 = 512.000\ cm^3$, $V_{σφ} = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 40^3 \simeq 267.946,67\ cm^3$, άρα $V = 512.000 - 267.946,67 = 244.053,33\ cm^3$.

8. $E_{ολ} = 4 \cdot 3,14 \cdot 15^2 + 4 \cdot 3,14 \cdot 20^2 = 7.850\ cm^2$, άρα $4 \cdot 3,14ρ^2 = 7.850$ ή $ρ^2 = \frac{7850}{12,56} = 625$, οπότε $ρ = \sqrt{625} = 25$ cm και $δ = 50$ cm.

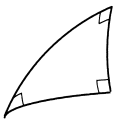
9. $V_{μεγάλης\ σφαίρας} = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 4^3 \simeq 267,95\ cm^3$,

$V_{μικρής\ σφαίρας} = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 2^3 \simeq 33,49\ cm^3$,

$V_{γραμμ} \simeq 267,95 - 2 \cdot 33,49 = 200,97\ cm^3$.

4.7 Γεωγραφικές συντεταγμένες

ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ

- Στο Βόρειο Πόλο.
- 
- Στο Βόρειο Πόλο.
- Είναι δυνατόν γιατί οι πατούσες και το κεφάλι διαγράφουν τόξα κύκλων με διαφορετικές ακτίνες.
- Άσπρη, επειδή η διαδρομή που ακολούθησε μπορεί να γίνει μόνο στο Βόρειο Πόλο, οπότε είναι πολική αρκούδα.