

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ένα βοήθημα που παρέχει στους μαθητές του γυμνασίου

- ΘΕΩΡΙΑ
- ΣΧΟΛΙΑ
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
- ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μπέκας Χρήστος
Μαθηματικός

Α' ΜΕΡΟΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

0.1 - Απόλυτη τιμή - πράξεις ρητών αριθμών

0.2 - Δυνάμεις ρητών αριθμών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1.1 - Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

1.2 - Εξισώσεις α' βαθμού

1.3 - Επίλυση τύπων

1.4 - Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

1.5 - Ανισώσεις α' βαθμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 - Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

2.2 - Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί

2.3 - Προβλήματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 - Η έννοια της συνάρτησης

3.2 - Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

3.3 - Η συνάρτηση $y=ax$

3.4 - Η συνάρτηση $y=ax + \beta$

3.5 - Η συνάρτηση $y=a/x$

Β' ΜΕΡΟΣ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΜΒΑΔΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

1.1 - Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

1.2 - Μονάδες μέτρησης επιφανειών

1.3 - Εμβαδά επίπεδων σχημάτων .

1.4 - Πυθαγόρειο θεώρημα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2.1 - Εφαπτομένη οξείας γωνίας

2.2 - Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

2.3 - Μεταβολές ημιτόνου, συνημιτόνου και εφαπτομένης

2.4 - Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60°

2.5 - Η έννοια του διανύσματος

2.6 - Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

2.7 - Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

3.1 - Εγγεγραμμένες γωνίες

3.2 - Κανονικά πολύγωνα

3.3 - Μήκος κύκλου

3.4 - Μήκος τόξου

3.5 - Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

3.6 - Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Α' Μέρος

Άλγεβρα



0.1 (ΑΠΟΛΥΤΑ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους
- ✚ Θυμάμαι ποιοι αριθμοί λέγονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί και τι ονομάζεται απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού.
 - ✚ Εμπεδώνω τις τεχνικές των τεσσάρων πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών και τις βασικές ιδιότητές τους.

1^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΘΕΤΙΚΟΙ : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο +

ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο -

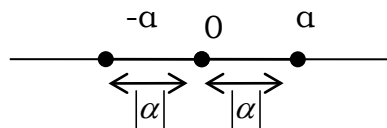
ΤΟ ΜΗΔΕΝ : δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός

ΟΜΟΣΗΜΟΙ : είναι οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο

ΕΤΕΡΟΣΗΜΟΙ : είναι οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a ονομάζεται η απόσταση του σημείου που παριστάνει τον αριθμό a από την αρχή του άξονα και συμβολίζεται με $|a|$.



$$\text{Π.χ. } |-5| = 5, | +5| = 5, |0| = 0, \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}, \left| +\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΟΜΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσω δύο ομόσημους αριθμούς, γράφω το πρόσημό τους και προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους.

$$\text{Π.χ. } (-3) + (-2) = -5.$$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς, γράφω το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη.

$$\text{Π.χ. } (-7) + (+3) = -4.$$

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (+), απαλείφουμε το (+) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς ως έχουν.

Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (-) τότε απαλείφουμε το (-) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με αλλαγμένα πρόσημα.

$$\text{Π.χ. } -(2 + 4 + 5) + (1 - 7 + 2) = -2 - 4 - 5 + 1 - 7 + 2 = -16 + 1 = -15$$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός

$$\text{Π.χ. } (-3)(-2) = +6$$

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΕΤΕΡΟΣΗΜΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι πάντα αρνητικός αριθμός.

$$\text{Π.χ. } (-7)(+3) = -21$$

Γινόμενο ομόσημων	Γινόμενο ετερόσημων
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) \cdot (+) = (-)$

Σχόλια

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

✚ Θετικός αριθμός με άρτιο πλήθος αρνητικών παραγόντων

✚ Αρνητικός αριθμός με περιττό πλήθος αρνητικών παραγόντων

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού :

Ιδιότητες πρόσθεσης		Ιδιότητες πολλαπλασιασμού
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Αντιμεταθετική	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	Προσεταιριστική	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
$\alpha + 0 = \alpha$	Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
$\alpha + (-\alpha) = 0$	Αντίθετο στοιχείο	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ όταν $\alpha \neq 0$
Επιμεριστική ιδιότητα		
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$		

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Η διαίρεση των ρητών αριθμών βασίζεται στους ίδιους κανόνες με το γινόμενο.

$$\text{Π.χ. } (-8) : 2 = -4, \quad \frac{-12}{-4} = 3$$

Σχόλια

✚ Αντίθετοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν.

✚ Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα.

Παράδειγμα 1ο : Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K = -5 + 3 - (-2) \cdot (-3) - (-5 - 7) : (-3)$$

Λύση

$$\begin{aligned} K &= -5 + 3 - (-2) \cdot (-3) - \underbrace{(-5 - 7)} : (-3) = -5 + 3 - \underbrace{(-2) \cdot (-3)} - \underbrace{(-12) : (-3)} = \\ &= -5 + 3 - (+6) - (+4) = -5 + 3 - 6 - 4 = 3 - 15 = -12 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2ο : Να γίνουν οι ακόλουθες πράξεις:

$$\frac{5}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5}$$

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} &= \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(\frac{\overset{3}{1}}{4} - \frac{\overset{1}{5}}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \\ &= \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(\frac{3}{12} - \frac{5}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{12} \right) - \frac{1}{6} : \frac{2}{5} = \frac{5}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{2}{12} \right) - \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{2} = \\ &= \frac{5}{3} - \frac{6}{12} - \frac{5}{12} = \frac{20}{12} - \frac{6}{12} - \frac{5}{12} = \frac{20 - 6 - 5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ο : Να υπολογίσετε την παράσταση: $\Lambda = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{2 - \frac{7}{2}}$

Λύση

$$\Lambda = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{2 - \frac{7}{2}} = 1 - \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{1} - \frac{7}{2}} = 1 - \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4-7}{2}} = 1 - \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{3}{2}} = 1 - \left(+\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9-4}{9} = \frac{5}{9}$$

Παράδειγμα 4ο : Να βρεθεί η τιμή της παράστασης:

$\Delta = 2 \cdot (3\alpha + 2\delta) - 3 \cdot (\beta + \gamma - 5)$, όταν $2\alpha - \beta = 7$ και $3\gamma - 4\delta = -5$.

Λύση

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2 \cdot (3\alpha + 2\delta) - 3 \cdot (\beta + \gamma - 5) = 6\alpha + 4\delta - 3\beta - 3\gamma + 15 = \\ &= (6\alpha - 3\beta) + (4\delta - 3\gamma) + 15 = 3 \cdot (2\alpha - \beta) - (3\gamma - 4\delta) + 15 = 3 \cdot 7 - (-5) + 15 = \\ &= 21 + 5 + 15 = 41 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΠΟΛΥΤΑ

1) Να βρείτε τις απόλυτες τιμές των παρακάτω αριθμών:

i. 2 ii. -3 iii. 2,3 iv. $-\frac{1}{2}$ v. -0,7

2) Να βρείτε τους αντίθετους των παρακάτω αριθμών:

i. 2 ii. -3 iii. 2,3 iv. $-\frac{1}{2}$ v. -0,7

3) Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο αριθμός x σε κάθε περίπτωση:

i. $|x| = 7$ ii. $|x| = \frac{1}{2}$ iii. $|x| = 2,5$
 iv. $|x| = 0$ v. $|x| = 3\frac{1}{4}$ vi. $|x| = -3$

4) Να συμπληρώσετε τον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός	-3,13	+5,65	-1,03	0	+7,08	-3
Απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί από την αρχή του άξονα						

5) Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση

		Σωστό	Λάθος
(α)	Ισχύει η ανισότητα: $-3 < 2$		
(β)	Ισχύει η ανισότητα: $-3 > -2$		
(γ)	Στην ανισότητα $2,4 < x < 5,7$ ο x μπορεί να πάρει 2 ακέραιες τιμές		
(δ)	Υπάρχουν 7 ακριβώς ακέραιοι που αληθεύουν τη σχέση: $-3 \leq x \leq +3$		
(ε)	Δύο ακέραιοι με ίδιο πρόσημο είναι αντίθετοι.		

6) Να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ	ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ
-5			
	$+\frac{5}{7}$		
0,3			
		-13	
$.3\frac{2}{7}$			

7) Αν μια από τις παρακάτω φράσεις είναι σωστή κυκλώστε το γράμμα Σ, αν πάλι είναι λάθος, κυκλώστε το Λ.

- | | | |
|---|---|---|
| i) Ο αριθμός -21 είναι φυσικός. | Σ | Λ |
| ii) Δύο αντίθετοι αριθμοί είναι ομόσημοι. | Σ | Λ |
| iii) Δύο αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο λέγονται ετερόσημοι. | Σ | Λ |
| iv) Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με μηδέν. | Σ | Λ |
| v) Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. | Σ | Λ |
| vi) Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός. | Σ | Λ |
| vii) Το γινόμενο δύο αντίθετων αριθμών είναι ίσο με +1. | Σ | Λ |
| viii) Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών μεγαλύτερος είναι εκείνος με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. | Σ | Λ |

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ

8) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

- | | | |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| i) $(+5) + (+7)$ | ii) $(-8) + (-6)$ | iii) $(+6) + (-4)$ |
| iv) $(-9) + (+5)$ | v) $(+15) + (-15)$ | vi) $(-17) + 0$ |
| vii) $0 + (+15)$ | viii) $13 + (-14)$ | ix) $12 + (-16)$ |

9) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

- | | |
|--|---|
| i) $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$ | ii) $\left(+7\frac{1}{2}\right) + \left(-3\frac{1}{4}\right)$ |
| iii) $\left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)$ | iv) $\left(-2\frac{1}{5}\right) + \left(-4\frac{1}{4}\right)$ |

10) Να υπολογιστεί το άθροισμα $x = \alpha + \beta$.

i) Αν $\alpha = +3$ και $\beta = -12$

ii) Αν $\alpha = -9$ και $\beta = -64$

iii) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = -17$

iv) Αν $\alpha = +15$ και $\beta = 24$

11) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $(+4) + (-5) + (+8) + (-7) + (-8) + (-9)$

ii) $(+8) + (-12) + (+25) + (-70) + (+60) + (-10)$

iii) $(-15) + (-20) + (-30) + (+40) + (+65) + (-12)$

iv) $\left(-\frac{5}{3}\right) + \left(+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + (+5) + \left(-\frac{1}{4}\right)$

v) $\left(+\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{7}{10}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right)$

12) Να υπολογιστεί το άθροισμα $x = \alpha + \beta + \gamma + \delta$.

i) Αν $\alpha = -2$ $\beta = +8$ $\gamma = -7$ $\delta = -24$

ii) Αν $\alpha = +24$ $\beta = -3,5$ $\gamma = -4,25$ $\delta = -5,6$

iii) Αν $\alpha = -\frac{2}{3}$ $\beta = +\frac{4}{5}$ $\gamma = -\frac{1}{2}$ $\delta = +\frac{3}{4}$

13) Να υπολογιστούν τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $[(+3) + (+7)] + [(-5) + (+8) + (-12)]$

ii) $[(-9) + (+10)] + (-11) + [(-17) + (-11) + (+35)]$

iii) $[(+5) + (-7)] + [(-9) + (+14)] + [(-9) + (+18) + (-20)]$

14) Να απλοποιηθεί η γραφή των παρακάτω αθροισμάτων και να υπολογιστούν έπειτα τα αθροίσματα:

i) $(+4) + (-9) + (-5) + (+8) + (+5) + (+4) + (-1)$

ii) $(-2) + (-8) + (+6) + (-7) + (-4) + (+3) + (+9)$

iii) $(+2,6) + (+4,5) + (-8,6) + (-5) + (+9,75)$

iv) $\left(-\frac{5}{2}\right) + \left(+\frac{4}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + (+8) + \left(-\frac{3}{4}\right)$

15) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

+	+4	-8	-11	+17
-5				
+9				
-4				
-21				

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

16) Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές:

- i. $(+5) - (+7)$ ii. $(-8) - (-6)$ iii. $(+6) - (-4)$
 iv. $(-9) - (+5)$ v. $(+15) - (-15)$ vi. $(-17) - 0$
 vii. $0 - (+15)$ viii. $13 - (-14)$ ix. $12 - (-16)$

17) Να υπολογιστούν οι παρακάτω διαφορές:

- i. $\left(+\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{1}{2}\right)$ ii. $\left(+7\frac{1}{2}\right) - \left(-3\frac{1}{4}\right)$
 iii. $\left(-\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)$ iv. $\left(-2\frac{1}{5}\right) - \left(-4\frac{1}{4}\right)$
 v. $\left(+\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{5}{6}\right)$ vi. $\left(+5\frac{1}{3}\right) - \left(+7\frac{1}{2}\right)$
 vii. $\left(-\frac{7}{10}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right)$ viii. $\left(-8\frac{1}{2}\right) - \left(+5\frac{2}{3}\right)$

18) Να υπολογιστούν η διαφορά $x = \alpha - \beta$.

- i) Αν $\alpha = +3$ και $\beta = -12$
 ii) Αν $\alpha = -9$ και $\beta = -64$
 iii) Αν $\alpha = 0$ και $\beta = -17$
 iv) Αν $\alpha = +15$ και $\beta = 24$

19) Να γίνουν οι παρακάτω αφαιρέσεις:

- i. $8-25$ ii. $1-37$ iii. $54-59$ iv. $0-67$

20) Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω αλγεβρικών αθροισμάτων:

- i) $(+4) + (-5) - (+8) + (-7) - (-8) + (-9)$
- ii) $(+8) - (-12) + (+25) - (-70) + (+60) - (-10)$
- iii) $(-15) + (-20) - (-30) + (+40) - (+65) + (-12)$
- iv) $\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(+\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) - (+5) + \left(-\frac{1}{4}\right)$

21) Να υπολογιστεί η αριθμητική τιμή του αλγεβρικού αθροίσματος $x = \alpha - \beta + \gamma - \delta$.

i) Αν $\alpha = -2$, $\beta = +8$, $\gamma = -7$, $\delta = -24$.

ii) Αν $\alpha = -\frac{2}{3}$, $\beta = +\frac{4}{5}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $\delta = +\frac{3}{4}$

22) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

- i) $100 + (-4 + 25 - 37)$
- ii) $(-4 + 12) + (-7 + 3 - 6)$
- iii) $-5 + (7 - 38 + 12)$
- iv) $(2 - 4 + 8) + (-9 - 7 + 10)$

23) Συμπληρώστε τον πίνακα με τους κατάλληλους αριθμούς:

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$
+3		-5	
	-8	+10	
-2	-5		
-9		+6	

24) Τοποθέτησε ένα x στην αντίστοιχη θέση

Σωστό Λάθος

(α) Στους ρητούς αριθμούς η αφαίρεση σημαίνει πάντα ελάττωση.

☐ ☐

(β) Αν το διαφορά δυο ρητών αριθμών είναι αρνητικός, τότε και οι δυο ρητοί αριθμοί είναι αρνητικοί αριθμοί.

☐ ☐

(γ) Ισχύει στην αφαίρεση η αντιμεταθετική ιδιότητα: $\alpha - \beta = \beta - \alpha$.

☐ ☐

(δ) Ισχύει ότι: $6 - (+8) + (+5) + (-3) + 2 + (-1) = 0$.

☐ ☐

- (ε) Λύση της εξίσωσης $x + (-3) = -2$ είναι ο αριθμός
+1.
- (στ) Οι εξισώσεις $x - (-2) = 5$ και $x - (+7) = -10 + (+5)$
έχουν την ίδια λύση.
- (ζ) Λύση της εξίσωσης $x - (-2) = -8 + (+7) - (-4)$ είναι
ο αριθμός +1

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ

25) Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:

- i) $(+5) \cdot (+7)$ ii) $(-8) \cdot (+9)$ iii) $(+10) \cdot (-4)$
iv) $(-3,5) \cdot (-0,6)$ v) $(+1,4) \cdot (+2,3)$ vi) $(-0,7) \cdot (+0,8)$

26) Να υπολογιστούν τα παρακάτω γινόμενα:

- i) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$ ii) $(-9) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)$
iii) $\left(+\frac{1}{5}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right)$ iv) $\left(+9\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)$

27) Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις:

- i) $(+2) \cdot (-3) - (+5) \cdot (-8) + (-9) \cdot (-6) - 3 \cdot (-10)$
ii) $(+5) \cdot (-2) + (-9) \cdot (-1) - (+8) \cdot (-3) - (-7) \cdot 4$
iii) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \left(+\frac{5}{8}\right)$

28) Να υπολογισθούν τα παρακάτω γινόμενα:

- i) $(+3) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (+4) \cdot (-7)$
ii) $(-6) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (+1) \cdot (-10)$
iii) $(-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot (-1)$

29) Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις:

- i) $(+2) \cdot (-3) \cdot (-5) - (+1) \cdot (-7) \cdot (+2) + (-2) \cdot (-4) \cdot (+6)$
ii) $(-5) \cdot (-1) \cdot (+10) - (+2) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (+5)$
iii) $\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{5}{6}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$

30) Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις:

i) $[(-4) \cdot (+9) \cdot (-2)] \cdot (-7)$

ii) $[(-5) \cdot (+7) \cdot (-10)] \cdot [(-1) \cdot (+2) \cdot (-8)]$

iii) $[2 \cdot (-8) \cdot (+3)] \cdot [(-5) \cdot (-1) \cdot (+4)] \cdot [(+4) \cdot (+1) \cdot (-10)]$.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΡΗΤΩΝ

31) Να εκτελεστούν οι παρακάτω διαιρέσεις:

i) $(+30) \div (+5)$

ii) $(-20) \div (-4)$

iii) $(-32) \div (+8)$

iv) $(+45) \div (-9)$

v) $(-75) \div (+6)$

vi) $(+87) \div (-3)$

vii) $(+4,5) \div (-0,9)$

viii) $(-8,75) \div (+0,25)$

ix) $(-1,25) \div (+0,25)$

32) Να υπολογιστούν τα παρακάτω πηλίκα:

i) $\left(+\frac{3}{4}\right) \div \left(+\frac{5}{6}\right)$

ii) $\left(-\frac{1}{5}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right)$

iii) $\left(-\frac{7}{8}\right) \div \left(+\frac{3}{4}\right)$

iv) $\left(+\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{1}{3}\right)$

v) $\left(-2\frac{1}{2}\right) \div \left(+1\frac{1}{4}\right)$

vi) $(-3) \div \left(+4\frac{3}{5}\right)$

33) Να υπολογιστούν τα παρακάτω πηλίκα:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

i) $\frac{-\frac{4}{7}}{-\frac{3}{14}} =$

$\frac{8}{3}$

ii) $\frac{-\frac{7}{9}}{\frac{14}{3}} =$

$-\frac{1}{6}$

$$\text{iii)} \quad \frac{1 - \frac{7}{4}}{\frac{3}{-\frac{22}{2}}} = \frac{11}{2}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{1 - \frac{1}{4}}{-1 - \frac{3}{2}} = -\frac{3}{10}$$

$$\text{v)} \quad \frac{-2 + \frac{8}{5}}{\left(-\frac{9}{4}\right) : \left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{4}{15}$$

$$\text{vi)} \quad \frac{-3 + \frac{1}{2}}{\left(-\frac{25}{3}\right) \cdot \left(-\frac{6}{15}\right)} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{vii)} \quad -\frac{-3 + \frac{1}{2}}{\left(-\frac{25}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{viii)} \quad \frac{-1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{3}{2}} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{ix)} \quad -1 - \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

34) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

$$\text{i)} \quad [(-24) \div (+3)] - [(-18) \div (-6)] + [(+36) \div (-9)]$$

$$\text{ii)} \quad [(+5) \cdot (-4)] - [(-375) \div (-25)] + (-4 + 12 - 7)$$

$$\text{iii)} \quad (-8 + 12 - 24 + 2 - 10) \div (+2)$$

$$\text{iv)} \quad (-24 + 15 - 27 + 18 - 30) \div (-3)$$

$$\text{v)} \quad \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} - 1 + \frac{7}{8}\right) \div \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{vi)} \quad (-16 + 24 - 40) \div (-4) - (-27 + 12 - 30) \div (-3)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**35)** Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- | | | |
|-----|--|-----|
| 1) | $+3 - 4 - (-1 - 6) + 4 + (-2 - 8) =$ | 0 |
| 2) | $-13 + (-1 + 6) - (2 - 8) + 2 - 2 - (3 - 4) =$ | -1 |
| 3) | $-2 - 4 + (-1 + 6) + 4 + (2 - 8) - 2 + 2 + (3 - 4) =$ | -4 |
| 4) | $(+3) - (-10) - (+2) + (-4) + (-5) =$ | +2 |
| 5) | $-6 - [(-32) : (-8) + (-4) : (-2)] : (-2) =$ | -3 |
| 6) | $(+3) + (-6) + (-2) + (+4) + (-5) =$ | -6 |
| 7) | $(-5) + (-3) + (+5) + (+6) + (-3) =$ | 0 |
| 8) | $-8 - (+2 + 3) - (-14) =$ | 1 |
| 9) | $-5 + (-60 + 17 + 51) + (+12 - 20) =$ | -5 |
| 10) | $-2 - (+14 - 8 + 3 - 5) - (-17 + 8 - 5) =$ | 8 |
| 11) | $-2 - (+14 - 8 + 3 - 5) + (-17 + 8 - 5) =$ | -20 |
| 12) | $15 - (7 - 5 - 3) + (-2 + 4 - 5) - (10 - 9 + 12) =$ | 0 |
| 13) | $-15 - (-10 + 4 - 9) - (-18 + 24) + (-10 + 9 - 12) =$ | -19 |
| 14) | $-23 - (+13 - 15 - 4) - (-16 + 20) + (-11 + 9) =$ | -23 |
| 15) | $-(+23 - 21 - 4) + 5 + (10 - 20) - (9 - 10) =$ | -3 |
| 16) | $2 \cdot (-21 - 5 + 27) - 5 \cdot (9 - 11) - 3 \cdot (-15 + 18) =$ | +3 |
| 17) | $(2 - 9 + 21) : (-7) - (22 - 3) \cdot (-7 + 5) =$ | 36 |
| 18) | $-6[-4 + (-5 + 7 - 7) + 1] + (-4 + 13 - 8) =$ | -13 |
| 19) | $-6 - [(-32) : (-8) + (-20 + 9 + 7) : (-10 + 8)] : (-6 + 4) =$ | -3 |
| 20) | $24 - \{[(8 + 3) - (5 - 8)] - [4 - (6 - 13) - (2 + 16) - (7 + 8)]\} =$ | -12 |
| 21) | $-6 + [-4 + (-5 + 7 - 8) + 1] + (-6 - 4 + 13) =$ | -12 |

- 22) $(+12) : (-2) + [-4 + (-5 + 7 - 8) + 1] : (-2 + 8 - 7 + 4) = -9$
- 23) $-(-6) : (-3) + (+14 - 8 + 3 - 5) : (-2) + (-17 + 8 - 5) : (-7) = -2$
- 24) $-3 - [-(+2) \cdot (+7) + (+16) : (-2) + 3 - (-3 - 2) - (-7) \cdot (+2)] : (-2) = -3$
- 25) $[-2 \cdot (-2) + 1 + 2 \cdot (-2)] \cdot 10 + [-5 \cdot (-8) - 5 \cdot 4] - 15 = 15$
- 26) $- (+2) + (6 + 3 - 5) : (-2) + (-9 - 5) : (-7) = -2$
- 27) $3 \cdot 2 + (8 : 4 - 9 : 3) \cdot 5 - (-6 : 2 - 44 : 4) : (-7) = -1$
- 28) $(-3) \cdot (-2) \cdot (6 - 8) - 9 \cdot (+2)(-2) + (-7 + 5) \cdot (+6) = 12$
- 29) $-8 + (-2) \cdot (-5) - (+7) - (+3) \cdot (-4 + 1) - (-24) : (+3) = 12$

36) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις:

- i) $-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + 2 = 0$
- ii) $\left(3 - \frac{1}{2} + \frac{6}{3}\right) - \left(6 - \frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$
- iii) $5 - \left(\frac{6}{10} - \frac{2}{5} + \frac{7}{10}\right) - \frac{1}{2} = \frac{18}{5}$
- iv) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8}$
- v) $1 + \frac{5}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6} + 2\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{3}\right) = \frac{31}{6}$
- vi) $-\frac{5}{7} - \left(\frac{3}{7} - \frac{1}{35} + 1\right) - \left(\frac{6}{7} - 2 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{27}{35}$
- vii) $\left[3 \cdot \left(-\frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{3}{4}\right)\right] : \left[2 \cdot \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{39}{17}$
- viii) $\frac{23}{5} - \frac{13}{5} + \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} + \frac{17}{20}\right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{5}\right) = \frac{42}{25}$

$$\begin{array}{ll}
 \text{ix)} & \left[\left(\frac{4}{3} - 2 \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right] : \left[\left(-\frac{1}{2} - 4 \right) : \left(-2 + \frac{5}{7} \right) \right] = \frac{1}{7} \\
 \text{x)} & \frac{3}{8} - \left[\frac{6}{10} - \left(\frac{7}{10} - 1 - \frac{6}{8} \right) + \left(-\frac{7}{20} + \frac{1}{2} \right) - 1 \right] + \frac{17}{40} = 0 \\
 \text{xi)} & \frac{13}{4} - \frac{29}{6} - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{3}{8} - \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{4} \right) - \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{8} \right) = -\frac{9}{2} \\
 \text{xii)} & 1 - \left[\frac{4}{5} + \left(-\frac{2}{21} - \frac{8}{14} \right) - \left(\frac{4}{3} - \frac{11}{5} + 1 \right) \right] + \frac{15}{6} - \left(3 + \frac{7}{9} - \frac{5}{3} \right) - \frac{7}{18} = 1 \\
 \text{xiii)} & \left[\left(\frac{13}{3} + \frac{3}{2} \right) : \left(-\frac{5}{3} \right) \right] \cdot \left(\frac{6}{7} - 1 \right) = \frac{1}{2} \\
 \text{xiv)} & 1 + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) : \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{9} \right) \cdot \frac{9}{2} - \frac{5}{8} = 0 \\
 \text{xv)} & \left[\frac{3}{2} - \left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{7} \right) + \left(-\frac{5}{2} + \frac{7}{3} \right) - \left(-\frac{5}{6} + \frac{7}{3} \right) \right] - \frac{22}{21} = -\frac{1}{42}
 \end{array}$$

0.2 (ΔΥΝΑΜΕΙΣ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Δυνάμεις πραγματικών αριθμών
 - ✚ Εμπεδώνω τις ιδιότητες των δυνάμεων.
 - ✚ Χρησιμοποιώ τις ιδιότητες των δυνάμεων στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.
 - ✚ Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων

1^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό a και εκθέτη τον φυσικό αριθμό n ονομάζουμε ένα γινόμενο από n παράγοντες ίσους με a , δηλαδή :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι επιπλέον ισχύει : $a^0 = 1$, $a^1 = a$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό a και εκθέτη τον ακέραιο αριθμό $-n$ ονομάζουμε την παρακάτω μετατροπή :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Σχόλιο

Με βάση τον παραπάνω ορισμό ισχύει $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΑ</u>	<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>
1) $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$	$2^5 \cdot 2^7 = 2^{12}$
2) $\alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$	$5^{100} : 5^{98} = 5^2 = 25$
3) $(\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu\mu}$	$(3^4)^5 = 3^{20}$
4) $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$	$7^5 \cdot 3^5 = 21^5$
5) $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$	$\frac{100^3}{25^3} = \left(\frac{100}{25}\right)^3 = 4^3 = 64$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός
- 2) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός
- 3) Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

Προσοχή !!!!

- ✚ Δεν υπάρχουν οι ιδιότητες για τις παραστάσεις : $\alpha^{\mu} + \alpha^{\nu}$ και $\alpha^{\mu} - \alpha^{\nu}$.
- ✚ Υπάρχει διαφορά μεταξύ των συμβολισμών : $(-\alpha)^{\nu}$ και $-\alpha^{\nu}$.

Παράδειγμα 5ο : Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των δυνάμεων :

$$\alpha) 2^5 \cdot 2^3 \quad \beta) (-3)^2 \cdot (-3)^3 \quad \gamma) (-3)^2 : (-3)^3 \quad \delta) [(-3)^9]^3$$

Λύση

$$\alpha) 2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$$

$$\beta) (-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -3^5$$

$$\gamma) (-3)^2 : (-3)^3 = (-3)^{2-3} = (-3)^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\delta) [(-3)^9]^3 = (-3)^{9 \cdot 3} = (-3)^{27} = -3^{27}$$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

Οι πράξεις γίνονται με την εξής σειρά:

1^{ον} : οι πράξεις σε παρενθέσεις και αγκύλες

2^{ον} : υπολογισμοί δυνάμεων

3^{ον} : πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

4^{ον} : οι προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

Παράδειγμα 6ο : Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = (-2)^3 - 5^2 + [(3^2 - 4) : 5 - 11]$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= (-2)^3 - 5^2 + \left[\underbrace{(3^2 - 4)} : 5 - 11 \right] = (-2)^3 - 5^2 + [(9 - 4) : 5 - 11] = \\ &= (-2)^3 - 5^2 + \left(\underbrace{5 : 5} - 11 \right) = (-2)^3 - 5^2 + (\underbrace{1 - 11}) = \underbrace{(-2)^3} - \underbrace{5^2} + (-10) = \\ &= -8 - 25 - 10 = -43 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ**

1) Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

- | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|
| i. $(-12)^2$ | ii. $(+10)^3$ | iii. $(-2)^5$ |
| iv. $-(-3)^3$ | v. $(-5)^2$ | vi. $-(-1)^6$ |
| vii. $(-0,5)^4$ | viii. $(+3,2)^2$ | ix. $(0,001)^6$ |

2) Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| i. $(-2007)^0$ | ii. $(-7)^2$ | iii. $(-2,5)^3$ |
| iv. $(+0,003)^4$ | v. $(-1)^{2007}$ | vi. $(-1)^{2008}$ |

3) Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

- | | |
|-------------------------------|------------------------------------|
| i. $(-2)^3 - (+3)^3$ | ii. $(-5)^1 + (-2)^4$ |
| iii. $(+10)^2 - (-100)^3$ | iv. $(-1)^5 - (-2)^4 - (-3)^3$ |
| v. $(+1)^3 + (-3)^2 - (-5)^2$ | vi. $(0,5)^2 - (1,2)^3 - (0,25)^4$ |

4) Να υπολογιστούν τα εξαγόμενα των παρακάτω πράξεων:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------|
| i. $2^3 \cdot 3^2$ | ii. $(-5)^2 \cdot (-1)^5$ |
| iii. $(-10)^3 \cdot (-1)^5$ | iv. $(-2)^2 \cdot (-3)^2$ |

5) Να γίνουν οι παρακάτω πράξεις :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| i. $3^2 - 4(-2)^2(-1)$ | ii. $2(-3)^2(-1)^4 + 3(-5)^2 2^3$ |
| iii. $3(-4)^2 + (-5)(-1)^4 - 6(-2)^4$ | iv. $6^2 - 3 \cdot 2^3(-3)^2 - 2007^0$ |

6) Εκφράστε τα παρακάτω εξαγόμενα σε μορφή μιας δύναμης :

- | | |
|---------------------------|---|
| i. $(-2)^2 \cdot (-2^2)$ | ii. $2^3 \cdot 2^2$ |
| iii. $2^2 \cdot 3^2$ | iv. $2007^3 \cdot (-2007)^2$ |
| v. $12^2(-2)^2$ | vi. $\frac{2^4}{2^3}$ |
| vii. $\frac{(-2)^3}{2^2}$ | viii. $\frac{24^3}{6^3}$ |
| ix. $((-2)^4)^2$ | x. $2^{-3} \cdot 2^4 \cdot (-2)^6 \cdot 2^{-2}$ |

- 7)** Ελέγξτε αν καθεμιά απ' τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ). Βάλτε σε κύκλο το αντίστοιχο γράμμα, όπως δείχνει το παράδειγμα :

1.	Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ ισχύει: $\left[(-\alpha)^1\right]^0 = 1$	☒ Σ	Λ
2.	Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ ισχύει: $\left[(-\alpha)^1\right]^2 = -1$	Σ	Λ
3.	Αν $\alpha\beta \neq 0$, τότε ισχύει: $\left[(\alpha\beta)^v\right]^{-1} = \left[(\beta\alpha)^{-1}\right]^v$	Σ	Λ
4.	Αν $\alpha\beta \neq 0$ και v φυσικός αριθμός, τότε: $\left[(\alpha\beta)^v\right]^{-1} = \left[(\beta\alpha)^{-1}\right]^v$	Σ	Λ
5.	Αν k περιττός αριθμός με $a \neq 0$ και $a \neq \pm 1$, τότε: $a^k = a^{-k}$	Σ	Λ
6.	Αν k άρτιος αριθμός και $a \neq 0$, τότε: $-a^k = (-a)^k$	Σ	Λ

- 8)** Να γίνουν οι πράξεις :

i) $16 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$ ii) $(-16)^3 : (4^{-2})^{-3}$ iii) $9 \cdot 27^{-1} \cdot (3^2)^3 : \left(\frac{1}{3^{-2}} : \frac{1}{81}\right)$

- 9)** Αν $x = 3$ και $y = 6$, να υπολογιστεί η παράσταση:

$$A = (x^{-2} \cdot y^3)^2 \cdot (x \cdot y^{-2})^2$$

- 10)** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

α) $\alpha^3 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha =$ β) $x^5 : x^3 =$ γ) $(-2)^3 \cdot (-2)^{-4} =$

δ) $(-0,2)^5 \cdot (-0,5)^5 =$ ε) $\alpha^{-4} \cdot (\alpha^2)^{-4} \cdot \alpha =$

- 11)** Υπολογίστε τις παραστάσεις

α) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} =$ β) $(-2)^3 \cdot (-0,5)^{-2} =$ γ) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot (0,1)^{-3}\right] : (-10)^2 =$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**12)** Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = 4 + 3 \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) : \frac{5}{2} \text{ και } B =$$

$$2^5 - 29 \cdot 1^{29} + (6^2 - 4 \cdot 9) \cdot 29 + 5^2 \div (2^2 + 1^{20})$$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{9}{2}$ και $B = 8$ β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\Gamma = 4 \cdot A - 2 \cdot B$ **13)** Αν $A = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (4^2 - 2 \cdot 5) + 1^{10}$ και $B = 2^2 + 18 : (-2) - (-4) \cdot (-5)$

α) Να υπολογίσετε τα A, B.

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $\Gamma = 2A - \frac{1}{5}B$.**14)** Αν $A = 2(4 + 1)^2 - (8 - 6)^3 : 2$ και $B = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{5} : \frac{2}{3}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = A - 2B$ **15)** Αν $A = 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot (3^2 - 7) - 3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) + 1^7$ και

$$B = -42 : (-7) - 4 \cdot (+2) - (-3) \cdot (-5) - (-10)$$

α) Να υπολογίσετε τα A και B

β) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $\Gamma = 2A - 3B$ **16)** Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot (2^3 - 8) + 1^2$$

17) Α) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = -3 \cdot (7^0 - 2^1) - (-78) \quad \text{και} \quad B = (4 - 2)^2 + 2^3$$

Β) Αν $A = 81$ και $B = 12$ i) να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\Gamma = 10 \cdot A + 100 \cdot B$

ii) να γραφεί ο αντίστροφος του A και ο αντίθετος του B.

18) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : $A = (15 : 3 - 1^2) : 2 + 7 \cdot (4^2 - 3^2)$

$$\text{και } B = 2^2 \cdot (2^2 + 3 \cdot 1) + 4^2 - 2 \cdot 5.$$

Να υπολογίσετε την παράσταση $\Gamma = (A - B)^2 - 1^{2024}$.

19) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i. } A = 3^2 - 2(2^3 - 7) - 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{ii. } B = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - \frac{3}{2}}$$

$$\text{iii. } \Gamma = A \cdot B$$

20) Αν $A = (2^3 \cdot 4 - 2 \cdot 3^2) : 7 + (3^3 + 16 : 2^4 - 5^2)$ και

$B = 3 \cdot (-2 - 8) - 12 : [-18 - 2 \cdot (-8)]$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων A και B και να δείξετε ότι $2 \cdot A + B + 14 = 0$.

1.1 (ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ – ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Θα μάθουμε

- ✚ Να εκφράζουμε με μεταβλητές διάφορες καταστάσεις της καθημερινής ζωής
- ✚ Να απαλείφουμε παρενθέσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας και να κάνουμε αναγωγές ομοίων όρων.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Αριθμητική παράσταση λέγεται, μια μαθηματική έκφραση που η οποία περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Π.χ. $A = 2 \cdot 3 + 5$, $B = 3 \cdot 2^3 - 7$, $\Gamma = 4 \left(2 - \frac{3}{5} \cdot 3^2 \right)$

ΤΙΜΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Τιμή μιας αριθμητικής παράστασης λέγεται, ο αριθμός που βρίσκουμε μετά την εκτέλεση όλων των πράξεων της παράστασης

Π.χ.

➤ $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 5 = 11$, ο αριθμός 11 είναι η τιμή της αριθμητικής παράστασης $2 \cdot 3 + 5$

➤ $3 \cdot 2^3 - 7 = 3 \cdot 8 - 7 = 24 - 7 = 17$, ο αριθμός 17 είναι η τιμή της αριθμητικής παράστασης $3 \cdot 2^3 - 7$

➤ $4 \left(2 - \frac{3}{5} \cdot 3^2 \right) = 4 \left(2 - \frac{3}{5} \cdot 9 \right) = 4 \left(2 - \frac{27}{5} \right) = 4 \left(\frac{10}{5} - \frac{27}{5} \right) = 4 \left(-\frac{17}{5} \right) = -\frac{68}{5}$,

ο αριθμός $-\frac{68}{5}$ είναι η τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$4 \left(2 - \frac{3}{5} \cdot 3^2 \right)$$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Αλγεβρική παράσταση λέγεται, μια μαθηματική έκφραση η οποία περιέχει πράξεις με αριθμούς και γράμματα.

Π.χ. $2 \cdot x + 5$, $3 \cdot y^2 - 7$, $4 \left(2 - \frac{3}{5}x + y \right)$, $\frac{3x^2 - 7}{4x + 8}$

ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ Η ΑΓΝΩΣΤΟΣ

Μεταβλητή ή άγνωστος λέγεται, ένα οποιοδήποτε γράμμα που εμφανίζεται σε μια αλγεβρική παράσταση.

Π.χ.

- Στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot x + 5$ το x λέγεται μεταβλητή.
- Στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot y^4 - 7$ το y λέγεται μεταβλητή.
- Στην αλγεβρική παράσταση $4 \left(2 - \frac{3}{5}x + y \right)$ τα x και y λέγονται μεταβλητές.

ΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης λέγεται, η τιμή της αριθμητικής παράστασης που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε της μεταβλητές με κάποιο αριθμό.

Π.χ.

- Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $2 \cdot x + 5$ για $x = -3$ είναι $2(-3) + 5 = -6 + 5 = -1$
- Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $3 \cdot y^2 - 7$ για $y = -1$ είναι $3 \cdot (-1)^2 - 7 = 3 \cdot 1 - 7 = 3 - 7 = -4$
- Η τιμή της αλγεβρικής παράστασης $4 \left(2 - \frac{3}{5}x + y \right)$ για $x = 5$ και $y = -3$ είναι $4 \left[2 - \frac{3}{5} \cdot 5 + (-3) \right] = 4(2 - 3 - 5) = 4(-8 + 2) = 4(-6) = -24$

ΌΡΟΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Όροι μιας αλγεβρικής παράστασης λέγονται, οι προσθετέοι της.

Π.χ.

- Στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot x + 5$, οι όροι είναι $2x$ και 5 .
- Στην αλγεβρική παράσταση $2 \cdot y^4 - 7$, οι όροι είναι $2y^4$ και -7 .
- Στην αλγεβρική παράσταση $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha + \beta + 1$, οι όροι είναι α^2 , β^2 , $-\alpha$, β και 1 .

ΓΝΩΣΤΟΙ ΟΡΟΙ

Γνωστοί όροι μιας αλγεβρικής παράστασης λέγονται οι προσθετέοι που δεν περιέχουν γράμμα.

ΑΓΝΩΣΤΟΙ ΟΡΟΙ

Άγνωστοι όροι μιας αλγεβρικής παράστασης λέγονται οι προσθετέοι που περιέχουν γράμμα.

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

Λέγεται ο αριθμός που πολλαπλασιάζει το γράμμα σε ένα άγνωστο όρο.

Π.χ.

- Στην αλγεβρική παράσταση $2x + 5$, ο όρος $2x$ είναι άγνωστος ενώ ο όρος 5 είναι γνωστός. Για τον άγνωστο όρο $2x$ ο αριθμός 2 είναι ο συντελεστής του αγνώστου x .
- Στην αλγεβρική παράσταση $x - \frac{5}{2}$, ο όρος x είναι άγνωστος ενώ ο όρος $-\frac{5}{2}$ είναι γνωστός. Για τον άγνωστο όρο x ο αριθμός 1 είναι ο συντελεστής του αγνώστου x .

Σχόλιο

Μπορούμε να γράφουμε :

$$1.x=x, -1.x=-x, 2.x=2x, -3.x=3x, 2.(x-1)=2(x-1)$$

ΑΚΕΡΑΙΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Λέγεται η αλγεβρική παράσταση η οποία μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ

λέγεται, η διαδικασία με την οποία μια αλγεβρική παράσταση γράφεται σε απλούστερη μορφή.

Π.χ.

- $3x + 5x = 8x$,
- $4y - 7y = -3y$,
- $2\alpha - 4\alpha + 3\alpha = -4\alpha + 6\alpha = 2\alpha$
- $6x + 3x - 10x = -10x + 9x = -x$

Σχόλιο

Πολλές φορές για την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων, πριν κάνουμε την αναγωγή ομοίων όρων είναι απαραίτητη η απαλοιφή των παρενθέσεων ή ακόμα και των αγκυλών με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

Π.χ.

$$3(x + 2y) + 2(3x + y) + y = 3x + 6y + 6x + 2y + y = 9x + 9y$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
- i) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 4.
 - ii) Η διαφορά δυο αριθμών διαιρούμενη με 3.
 - iii) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το πλάτος του είναι 3 m μικρότερο από το μήκος του.
- 2) Να εκφράσετε συμβολικά:
- i) Το εξαπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά πέντε.
 - ii) Το αυξημένο κατά 5 ενός αριθμού.
 - iii) Το 4% ενός αριθμού.
- 3) Να εκφράσετε συμβολικά:
- i) Τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς.
 - ii) Τρεις διαδοχικούς άρτιους αριθμούς.
 - iii) Το διάστημα που διάνυσε ένα αυτοκίνητο σε t ώρες με μέση ταχύτητα 60 km/h.
 - iv) Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά $\frac{1}{3}$ ισούται με τον αριθμό αυξημένο κατά $\frac{2}{3}$.
 - v) Την τιμή x kg ενός εμπορεύματος, αν το 1 kg κοστίζει 3 €.
- 4) Με τη βοήθεια μιας μεταβλητής να γράψετε συμβολικά:
- i) Την πρόταση: «Από έναν αριθμό αφαιρούμε το διπλάσιο του και κατόπιν προσθέτουμε τα $\frac{2}{3}$ του αριθμού.
 - ii) Τον ένα από τους δύο αριθμούς που έχουν γινόμενο 30 όταν ο άλλος είναι x .
 - iii) Το γινόμενο δύο αριθμών που διαφέρουν κατά 5.
 - iv) Την περίμετρο ενός τετραγώνου, αν γνωρίζουμε την πλευρά του.
 - v) Την ηλικία της Δήμητρας που είναι 25 χρόνια μικρότερη από την μητέρα της, αν γνωρίζουμε την ηλικία της μητέρας της.
 - vi) Το πλήθος των μαθητών της Β' Γυμνασίου, αν γνωρίζουμε ότι είναι το $\frac{1}{4}$ των μαθητών του σχολείου αυξημένο κατά 25.
- 5) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
- i) $17x - 3x + x$
 - ii) $-3x - 4x - x$
 - iii) $15\alpha + 13\alpha + \alpha$
 - iv) $16y - 14y - y + 5y$

v) $-7\omega + 5 + 3\omega - 4$

vi) $\gamma - 3\gamma + 4\gamma - 5\gamma$

6) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $2\alpha - 3\beta + 3\alpha + 5\beta$

ii) $7x - 3x + 5y + 4x + y$

iii) $\omega + 3\varphi - 3\omega - 5\varphi$

iv) $-5x + y + 4y + 2x - x$

7) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:

i) $A = 2(\alpha + 3\beta) - 3(\alpha - 2\beta)$, όταν $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

ii) $B = 3(x - 3y) + 2(5y - x)$, όταν $x = -2$, $y = 3$

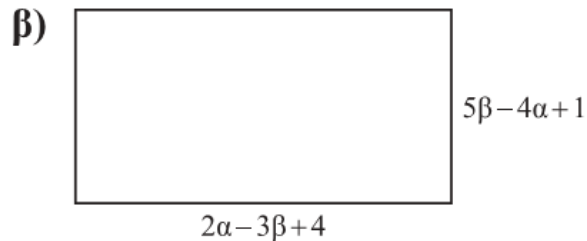
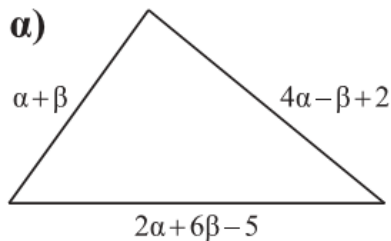
8) Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

i) $A = 3(2x - 4y) + 2(3x + 6y)$, όταν $x = 0,01$ και $y = 2007$

ii) $B = 2(\alpha + 3\beta) + 3(2\alpha + \beta) - \beta$, όταν $\alpha + \beta = \frac{1}{8}$

iii) $\Gamma = 3(x + 2y) - 5(2x - 3y) - 14y - 2$, όταν $y - x = \frac{2}{7}$

9) Να βρείτε την περίμετρο των παρακάτω σχημάτων:



1.2 (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- 1) Να κατανοούμε την έννοια της εξίσωσης και τη σχετική ορολογία.
- 2) Διαδικασία επίλυσης
 - ✚ Να επιλύουμε εξισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο
 - ✚ Να διακρίνουμε πότε μια εξίσωση είναι αδύνατη ή ταυτότητα.

1^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Σχόλιο

Οι τρεις πιθανές σχέσεις που συνδέουν δύο αλγεβρικές παραστάσεις A , B είναι: $A=B$, $A<B$, $A>B$

Ειδικότερα

- ✚ Ανισότητα λέγεται μια οποιαδήποτε έκφραση $A<B$ (A μικρότερο του B) ή $A>B$ (A μεγαλύτερο του B).
- ✚ Ισότητα λέγεται, μια οποιαδήποτε έκφραση $A=B$, όπου A , B αλγεβρικές ή αριθμητικές παραστάσεις

ΜΕΛΕΤΗ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

Πρώτο μέλος της **ισότητας** $A = B$ λέγεται η παράσταση A .

Δεύτερο μέλος της **ισότητας** $A = B$ λέγεται η παράσταση B .

Αληθής ισότητα λέγεται αυτή της οποίας η αξία του πρώτου μέλους είναι ίδια με την αξία του δεύτερου μέλους.

Ψευδής ισότητα λέγεται αυτή της οποίας η αξία του πρώτου μέλους δεν είναι ίδια με την αξία του δεύτερου μέλους.

Ιδιότητες ισοτήτων	Ιδιότητες διαγραφής
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$	Αν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ τότε $\alpha = \beta$
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$	Αν $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$ τότε $\alpha = \beta$
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$	Αν $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ τότε $\alpha = \beta$
Αν $\alpha = \beta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$	Αν $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma \neq 0$ τότε $\alpha = \beta$

ΕΞΙΣΩΣΗ (ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ)

Εξίσωση λέγεται, μια ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή η οποία καλείται και άγνωστος

Π.χ.

1. Η εξίσωση $3x + 2 = x + 6$ έχει άγνωστο το x
2. Η εξίσωση $2(x - 1) + 3(2 - x) = 4(x + 2)$ έχει άγνωστο το x
3. Η εξίσωση $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$ έχει άγνωστο το y

ΛΥΣΗ / ΡΙΖΑ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Λύση ονομάζεται ο αριθμός που πρέπει να βάλουμε στη θέση του αγνώστου, ώστε η ισότητα να είναι αληθής.

π.χ.

- Για την εξίσωση $3x + 2 = x + 6$ ο αριθμός 2 είναι λύση ή ρίζα
- Για την εξίσωση $2(x - 1) + 3(2 - x) = 4(x + 2)$ ο αριθμός $-\frac{4}{5}$ είναι λύση
- Για την εξίσωση $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$ ο αριθμός 3 είναι λύση

Σχόλιο

Επαλήθευση, λέγεται η διαδικασία με την οποία διαπιστώνουμε ότι ένας αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης.

π.χ.

Για την εξίσωση $3x + 2 = 17 - 2x$ ο αριθμός $x = 3$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

Επαλήθευση: $3 \cdot 3 + 2 = 17 - 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 9 + 2 = 17 - 6 \Leftrightarrow 11 = 11$

2^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΕΠΙΛΥΣΗ

ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης της λύσης (ή λύσεων) μια εξίσωσης

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ

σε μια εξίσωση, ονομάζεται η διαδικασία μετατροπής της εξίσωσης σε ισοδύναμη χωρίς παρόνομαστες.

π.χ.

$$\frac{x+1}{2} + x = \frac{2x+3}{3} + 2$$

$$\cancel{3} \frac{x+1}{\cancel{2}} + 6x = \cancel{2} \frac{2x+3}{\cancel{3}} + 6 \cdot 2$$

$$3(x+1) + 6x = 2(2x+3) + 6 \cdot 2$$

ΓΕΝΙΚΑ ΒΗΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. ΑΝ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΧΕΙ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΕΣ ΤΟΥΣ ΑΠΑΛΟΙΦΟΥΜΕ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΟΝΤΑΣ ΚΑΘΕ ΟΡΟ ΜΕ ΤΟ Ε.Κ.Π ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΚΑΙ ΟΤΙ ΜΕΝΕΙ ΑΠΟ ΚΑΘΕ ΚΛΑΣΜΑ ΤΟ ΒΑΖΟΥΜΕ ΣΕ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ.
2. ΚΑΝΩ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΜΕ ΕΠΙΜΕΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ Η ΑΠΛΗ ΑΠΑΛΟΙΦΗ.
3. ΧΩΡΙΖΟΥΜΕ ΓΝΩΣΤΟΥΣ ΑΠΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ. ΟΙ ΑΓΝΩΣΤΟΙ ΠΑΝΕ ΣΤΟ 1^ο ΜΕΛΟΣ ΚΑΙ ΓΝΩΣΤΟΙ ΣΤΟ 2^ο ΜΕΛΟΣ.
ΠΡΟΣΟΧΗ !!!! ΏΤΑΝ ΑΛΛΑΖΩ ΜΕΛΟΣ ΣΕ ΚΑΠΟΙΟΝ ΟΡΟ ΤΟΥ ΑΛΛΑΖΩ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΣΗΜΟ .
4. ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
5. ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΜΕ ΤΟΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΟΤΑΝ ΑΥΤΟΣ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ

Παράδειγμα 7ο : Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x+1}{2} + x = \frac{2x+3}{3} + 2$

Λύση

(ΕΚΠ (2,3)=6)

$$\frac{x+1}{2} + x = \frac{2x+3}{3} + 2$$

$$\cancel{6}^3 \frac{x+1}{\cancel{2}} + 6x = \cancel{6}^2 \frac{2x+3}{\cancel{3}} + 6 \cdot 2 \quad (\text{Απαλοιφή των παρονομαστών})$$

$$3(x+1) + 6x = 2(2x+3) + 6 \cdot 2 \quad (\text{Απαλοιφή των παρενθέσεων})$$

$$3x + 3 + 6x = 4x + 6 + 12 \quad (\text{Χωρισμός γνωστών από άγνωστων όρων})$$

$$3x + 6x - 4x = 6 + 12 - 3 \quad (\text{Αναγωγή ομοίων όρων})$$

$$-4x + 9x = -3 + 18$$

$$5x = 15 \quad (\text{Διαίρεση με τον συντελεστή του αγνώστου})$$

$$\cancel{5}x = \frac{15}{\cancel{5}}$$

$$x = 3 \quad (\text{Λύση της εξίσωσης})$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

1. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $0x=0$ ΕΧΕΙ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Η ΑΟΡΙΣΤΗ
2. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $0x = b$ ($b \neq 0$) ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ ΑΔΥΝΑΤΗ

Παράδειγμα 8ο : Να λυθεί η εξίσωση $\frac{3}{5} - \frac{2x+1}{10} = \frac{5-2x}{10}$

Λύση

$$2 \cdot 3 - (2x+1) = 5 - 2x$$

$$6 - 2x - 1 = 5 - 2x$$

$$-2x + 2x = 5 - 6 + 1$$

$$0x = 0 \quad , \text{ Αόριστη ή Ταυτότητα}$$

Παράδειγμα 9ο : Να λυθεί η εξίσωση $2(3 - x) + 4(x - 1) = 2x + 5$

Λύση

$$6 - 2x + 4x - 4 = 2x + 5$$

$$-2x + 4x - 2x = 5 - 6 + 4$$

$$-4x + 4x = -6 + 9$$

$$0x = 3, \text{ Αδύνατη}$$

Σχόλια

Για να ελέγξουμε εάν πράγματι λύσαμε σωστά μια εξίσωση κάνουμε επαλήθευση. Βάζουμε δηλαδή στη θέση του αγνώστου τον αριθμό που βρήκαμε ως λύση και εξετάζουμε αν αληθεύει η ισότητα που προκύπτει.

Παράδειγμα

Αν λύσουμε την εξίσωση $30 - 2x = 3x + 5$ βρίσκουμε $x = 5$. Βάζουμε λοιπόν όπου x το 5, έχουμε $30 - 2 \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 5$ που πράγματι ισχύει. Αν όμως βρίσκαμε π.χ. $x = 2$, τότε θα ήταν $30 - 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 5$ που δεν ισχύει.

Σε μια εξίσωση που υπάρχουν παρονομαστές με την απαλοιφή τους η γραμμή κλάσματος γίνεται παρένθεση.

Παράδειγμα

Στην εξίσωση $\frac{3x-5}{5} = 3 - \frac{-x+1}{10}$ έχουμε διαδοχικά:

$$10 \frac{3x-5}{5} = 10 \cdot 3 - 10 \frac{-x+1}{10}$$

$$2(3x-5) = 10 \cdot 3 - (-x+1) \text{ κ.λπ.}$$

Σε μια εξίσωση που έχει τη μορφή δύο ίσων κλασμάτων η απαλοιφή των παρονομαστών γίνεται και όταν πολλαπλασιάσουμε «χιαστί».

Παράδειγμα

Στην εξίσωση $\frac{4x-1}{5} = \frac{x+2}{4}$ έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{x+2}{4} \Leftrightarrow 4(4x-1) = 5(x+2) \Leftrightarrow 16x-4 = 5x+20 \Leftrightarrow 11x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{11}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι λύση της εξίσωσης:

- i) $-3x + 2 = -7$ $x = 3$
- ii) $2x + 3 = 6$ $x = 1,5$
- iii) $-2x + 3 = 5x - 6$ $x = 1$

2) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- i) $6x - 6 = 2x + 18$
- ii) $-9x + 12 = 36$
- iii) $7x = 0$
- iv) $48 - x = 3x - 4$
- v) $-3x + 15 = -4x = 3$
- vi) $-7x + 2 = 3x + 2$
- vii) $2\varphi - 4 = 3\varphi - 4$
- viii) $4\omega - 3 = -3 + \omega$
- ix) $1,5y - 2,3 = 1,7 + 3,5y$
- x) $-x + 2 = -2x + 0,5$
- xi) $4,6 + x = 5,6 - 3x$
- xii) $7x - 15 = 3x + 19$
- xiii) $3x - 4 = 5x + 2$

3) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- i) $5(x - 3) + 10(2 - 5x) + 10x = -(15 + 10x)$
- ii) $9(8 - x) - 10(9 - x) - 4(x - 1) = 1 - 8x$
- iii) $3(x - 2) + 2(1 + x) = 3(2x - 1)$
- iv) $-5(-2x + 1) = -45$
- v) $2(3x + 2) = 4 - x$
- vi) $5 + 6(x + 3) = 4(x - 1) + 7$
- vii) $10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$
- viii) $x + 3 + 3(x + 2) = 9 - 2x$
- ix) $16(x + 1) - 2(3 - x) = -3(x + 6)$
- x) $2(3z + 4) + 5(3z - 5) = 3(z - 7) + 8$
- xi) $-15 + 24(x + 2) = 2(5x + 9) - x$
- xii) $4x - 1 = 2(2x + 4) + 3$
- xiii) $-2(-3x + 1) = 6(x + 3) - 12$

4) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$i) \frac{7x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}$$

$$ii) \frac{2x-5}{3} - \frac{5x-3}{4} + \frac{8}{3} = 0$$

$$iii) \frac{5y-3}{2} - \frac{3y}{4} = y - 5$$

$$iv) \frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$$

$$v) \frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$$

$$vi) \frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{4+x}{4}$$

$$vii) \frac{1}{6}(8-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}$$

$$viii) 2x - \frac{1}{2}(19-2x) = \frac{1}{2}(2x-11)$$

$$ix) \frac{5x}{7} = 10 \left(\frac{x}{14} + 1 \right)$$

$$x) \frac{6(9+8x)}{2} - 27 = 24x$$

$$xi) \frac{3x+2}{5} - \frac{4x-3}{7} = 4 + \frac{x-2}{35}$$

$$xii) \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$$

$$xiii) \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} = \frac{x-3}{4} + 1$$

$$xiv) \frac{3x}{4} - \frac{16+7x}{20} = \frac{2(x-2)}{5}$$

$$xv) 2x - 5 = \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{2}$$

$$xvi) \frac{3x}{2} - 5 + x = \frac{x-10}{2} + 2x$$

$$xvii) \frac{x+6}{2} + \frac{2(x+17)}{3} + \frac{5(x-10)}{6} = 2x + 6$$

$$xviii) \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20}$$

5) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$i) \frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \frac{x - \frac{2x+3}{9}}{8} - \frac{x - \frac{1}{3}}{2} = \frac{2x - \frac{5(x+3)}{6}}{4} - \frac{x+1}{3} \\ \text{iii)} \quad & \frac{x - \frac{2(x-6)}{3}}{8} + \frac{x+3}{5} = x - 10 + \frac{x - \frac{3x-6}{5}}{3} \\ \text{iv)} \quad & \frac{x - \frac{5}{3}}{2} - \frac{1 - \frac{x}{3}}{4} + \frac{\frac{x}{2}}{6} - \frac{x+1}{3} = \frac{5x+8}{12} \\ \text{v)} \quad & \frac{\frac{3x-5}{2} - 1}{4} = \frac{4(2x-7)}{9} + \frac{3 - \frac{5(x-2)}{3}}{3} + \frac{13}{24} \end{aligned}$$

6) Να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει η ισότητα $A=B$ όταν:

- i) $A = 2(7x - 4) - 0,3 - 5,4x$, $B = 5 + 2,5(x + 2)$
- ii) $A = 0,3(x - 6) - 0,9(x - 2)$, $B = 6,6 - 2(x + 3,3)$

7) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- i) $3[2(x + 5) - 1] - x + 2(x + 6) = 20x$
- ii) $2\{x + 3[-(x + 1) + 2]\} = 6(x + 1)$
- iii) $1 + 5\{3[5 - (7 + x) \div 9] - 7\} = 26$

8) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

- i) $(3x - 8)(2x + 12) = 0$
- ii) $(x - 1)(4 + x) = 0$

9) Για ποια τιμή του x είναι $A=B$;

- i) Αν $A = 3x + 2$ $B = 9 - 4x$
- ii) Αν $A = 3(1 - x) + \frac{2}{3}$ $B = -23 - \frac{x}{2}$

10) Δίνεται η εξίσωση: $\kappa(3 - \chi) - 1 = (3\kappa + 1)\chi + 5$

- i) Αν $\kappa = -1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 3$.
- ii) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 0$, να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

1.3 (ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Θα μάθουμε

-  Να διακρίνουμε τα δεδομένα από τα ζητούμενα του προβλήματος.
-  Να κάνουμε εισαγωγή του αγνώστου.
-  Να καταστρώνουμε την εξίσωση, δηλαδή να «μεταφράζουμε» το πρόβλημα σε μαθηματική γλώσσα.
-  Να επιλύουμε την εξίσωση και να ελέγχουμε αν το αποτέλεσμα είναι «συμβατό» με το πρόβλημα.
-  Να καταγράφουμε την απάντηση.

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξισώσεων γενικά ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα και διακρίνουμε δεδομένα από ζητούμενα.
2. Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.
3. Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x .
4. Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.
5. Λύνουμε την εξίσωση.
6. Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

Παράδειγμα 10ο : Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου;

Λύση

$$44 + x = 3(8 + x)$$

$$44 + x = 24 + 3x$$

$$x - 3x = 24 - 44$$

$$-2x = -20$$

$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-20}{-2}$$

$$x = 10$$

Έστω ότι μετά από x χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου. Τότε μετά από x χρόνια η ηλικία του πατέρα θα είναι $44 + x$ και η ηλικία του γιού θα είναι $8 + x$. Δημιουργούμε την εξίσωση και την λύνουμε κατά τα γνωστά.

Επαλήθευση: Μετά από 10 χρόνια ο πατέρας θα είναι $44 + 10 = 54$ χρονών και ο γιος $8 + 10 = 18$ χρονών. Όντως $54 = 3 \cdot 18$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν η μια είναι τριπλάσια της άλλης.
- 2) Να βρεθεί ένας αριθμός που το εξαπλάσιο του αυξημένο κατά 1, είναι ίσο με το αριθμό αυξημένο κατά 9.
- 3) Τρεις διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν άθροισμα 33. Να βρεθούν οι αριθμοί.
- 4) Σ' ένα ισοσκελές τρίγωνο η κάθεμιά από τις ίσες γωνίες του είναι 15° μικρότερη από την τρίτη γωνία. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου.
- 5) Ο πατέρας του Κωνσταντίνου έχει την τριπλάσια ηλικία από τον γιο του. Ο Κωνσταντίνος υπολογίζει ότι μετά από 15 χρόνια ο πατέρας του θα έχει διπλάσια χρόνια από αυτόν. Πόσο χρονών είναι σήμερα ο Κωνσταντίνος και πόσο ο πατέρας του.
- 6) Η γιαγιά μου στο χωριό έχει κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 160 πόδια, να βρεθούν πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.
- 7) Η Ιλάρια ψάχνοντας σ' ένα παλιό κασόνι του παππού της, βρήκε παλιά βιβλία. Τα μισά από αυτά και 3 είναι αστυνομικά. Τα μισά από τα υπόλοιπα και 2 είναι αισθηματικά και τα υπόλοιπα 2 είναι επιστημονικής φαντασίας. Πόσα βιβλία βρήκε η Ιλάρια;
- 8) Η Βερόνικα λέει ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός του οποίου το επταπλάσιο μειωμένο κατά 2 είναι ίσο με το τριπλάσιο του μειωμένο κατά 6. Να εξεταστεί αν έχει δίκαιο η Βερόνικα.
- 9) Δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 7 και ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου. Ποιοι είναι αυτοί οι αριθμοί;
- 10) Ο Απόστολος εντυπωσιάζει τον φίλο του Παναγιώτη με το παρακάτω μαθηματικό παιχνίδι.
Λέει στον Παναγιώτη
 - Σκέψου έναν αριθμό
 - Πρόσθεσε τον αριθμό 8
 - Τριπλασίασε τον
 - Βγάλε 6
 - Διάρεσε με το 3
 - Αφαίρεσε τον αριθμό που σκέφτηκες.
 - Βρήκες 6!Μπορείς να εξηγήσεις πως ο Απόστολος ξέρει το αποτέλεσμα;

- 11)** Μια παρέα έχει παραγγείλει σουβλάκια, αν όλοι έτρωγαν από 4 σουβλάκια θα περίσσευαν 2, αλλά επειδή ένας από την παρέα νήστευε, μοιράστηκαν οι υπόλοιποι από 6 και δεν περίσσεψε κανένα. Να βρεις πόσα άτομα είναι η παρέα και πόσα σουβλάκια παράγγειλαν.
- 12)** Ένα κινητό κινείται πάνω στον άξονα $x'Ox$. Αρχίζει την κίνησή του από την αρχή του άξονα κινείται προς τα δεξιά 8 μονάδες. Κατόπιν αλλάζοντας την κίνησή του κινείται προς τα αριστερά 15 μονάδες. Μετά αλλάζει πάλι την φορά της κίνησής του και κινείται προς τα δεξιά 6 μονάδες.
- α) Βρείτε τους αριθμούς του άξονα στους οποίους το κινητό άλλαξε την κίνησή του.
- β) Η τελική θέση του κινητού πόσο μακριά από την αρχική του θέση είναι;
- γ) Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που έκανε το κινητό;
- 13)** Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11. Να υπολογίσετε το άθροισμα αυτού του διψήφιου και του διψήφιου που προκύπτει, από αυτόν, αν αλλάξουμε την θέση των ψηφίων του.
- 14)** Κάποιος μαθητής έχει υπολογίσει ότι το 2016 θα έχει διπλάσια ηλικία από αυτή που έχει το 2003. Να υπολογίσετε το έτος της γέννησής του.
- 15)** Η ηλικία του Γιάννη το 2010 χρόνια θα είναι ίση με τα $\frac{3}{2}$ της ηλικίας του το 2002. Να βρείτε την ηλικία του Γιάννη το 2004.
- 16)** Το $\frac{1}{9}$ της δύναμης του 3 με εκθέτη τον αριθμό x είναι ίσο με το 9 – πλάσιο της δύναμης του 27 με εκθέτη τον αριθμό x .
- α) Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να δείξετε ότι η εξίσωση που θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το x είναι $2 + 3x = x - 2$.
- β) Να υπολογίσετε την δύναμη του -2 με εκθέτη τον αριθμό $\frac{3}{2}x$.
- 17)** Αν στο τετραπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 10 βρίσκουμε το πενταπλάσιό του. Να βρείτε τον αριθμό.
- 18)** Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 16. Να βρείτε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι η μία είναι τριπλάσια της άλλης.

- 19) Αν στο τετραπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 10 βρίσκουμε το πενταπλάσιό του. Να βρείτε τον αριθμό.
- 20) Σε ένα τρίγωνο έχουμε $A=90^\circ$, ενώ η B γωνία είναι πενταπλάσια από τη Γ . Να βρείτε τις γωνίες B και Γ .
- 21) Ο πατέρας της Αλεξάνδρας έχει τετραπλάσια ηλικία από αυτή. Αν μετά από 5 χρόνια έχει τριπλάσια ηλικία από την κόρη του, να βρείτε πόσο χρονών είναι σήμερα η Αλεξάνδρα.
- 22) Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 35 και ο λόγος τους είναι $\frac{2}{7}$. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
- 23) Ψάχνοντας ένα παλιό μπουφό της γιαγιάς του ο Γιάννης βρήκε δίσκους γραμμοφώνου. Οι μισοί απ' αυτούς και μισός δίσκος έχουν παραδοσιακή μουσική. Οι μισοί από τους υπολοίπους και μισός δίσκος έχουν ρεμπέτικα και οι υπόλοιποι 3 έχουν λαϊκά. Πόσους δίσκους βρήκε ο Γιάννης;
- 24) Τα τμήματα της Β' Γυμνάσιου ενός σχολείου έχουν αριθμό μαθητών μεταξύ 25 και 28. Οι μαθητές ενός τμήματος χωρίζονται σε τετράδες και περισσεύουν 2 μαθητές. Πόσους μαθητές έχει το τμήμα;
- 25) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για το οποίο γνωρίζετε ότι η μία πλευρά είναι τριπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις πλευρές, αν δίνεται ότι:
- α) Η περίμετρός του είναι 40.
- β) Το εμβαδόν του είναι 48.
- 26) Ο Βασίλης έχει στην τσέπη του χαρτονομίσματα των 10 και 20 ευρώ. Αν γνωρίζετε ότι τα χαρτονομίσματα των 10€ είναι διπλάσια από αυτά των 20€ και ότι το συνολικό ποσό που έχει στην τσέπη του είναι 160€, να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 10€ και πόσα των 20€ έχει.

1.4 (ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Θα μάθουμε

-  Να λύνουμε ανισώσεις πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο και να παριστάνουμε τις λύσεις τους σε άξονα.
-  Να βρίσκουμε τις κοινές λύσεις δύο ή περισσότερων ανισώσεων α' βαθμού.
-  Να λύνουμε απλά προβλήματα που ανάγονται σε ανισώσεις α' βαθμού.

Σχόλιο

Εκτός από τα σύμβολα $<$ (μικρότερο) και $>$ (μεγαλύτερο) χρησιμοποιούμε και τα σύμβολα $\leq$ (μικρότερο ή ίσο) και $\geq$ (μεγαλύτερο ή ίσο).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

- ⊛ Μπορούμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.
- ⊛ Μπορούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό.
- ⊛ Όταν πολλαπλασιάζουμε ή διαιρούμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό αλλάζουμε τη φορά της ανισότητας.

ΕΠΙΛΥΣΗ

Για την επίλυση ανισώσεων ακολουθούμε τα ίδια βήματα που ακολουθούμε και στην επίλυση εξισώσεων

ΠΡΟΣΟΧΗ !!!! όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου και αυτός είναι αρνητικός να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης.

$$\text{Π.χ. } \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} < \frac{3}{-3} \Rightarrow x > -1$$

Σχόλιο

Η τελική λύση μιας ανίσωσης εκτός από την σχέση που προκύπτει στο τέλος, υπάρχει και ένας ακόμα τρόπος παράστασης αυτής ο οποίος καλείται γραφική λύση. Αυτό γίνεται με την βοήθεια του άξονα των αριθμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1)** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.
- i) $7x + 3 \leq 15 + 4x$
 - ii) $x + 5 > -3$
 - iii) $-(2 - x) > 3x - 2$
 - iv) $-(7 + x) < 4x - 1$
- 2)** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.
- i) $4(\omega - 2) > \omega - 2$
 - ii) $4y - 2 - (y + 3) < 3(y + 3) + 2$
 - iii) $x + 5 + \frac{x-3}{3} - \frac{x-2}{2} > 0$
 - iv) $3x + 3 - (x - 1) \geq 5 - x$
- 3)** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία τις λύσεις τους.
- i) $\frac{2x-3}{4} - \frac{3-x}{5} > 2$
 - ii) $3(1-x) - \frac{2}{3}(x+2) < \frac{x}{2}$
 - iii) $\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}\right) - \frac{x+1}{6} > 3$
 - iv) $\omega - \frac{3-\omega}{3} > \frac{\omega+1}{2} - \frac{\omega-2}{4}$
- 4)** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
- i) $x - 3 < 2$ και $4 - x < 3$
 - ii) $3(x - 1) + x > 7 - x$ και $6x - 7 \leq 2(x + 2) + 9$
 - iii) $4x - 1 > 3(1 - x) + 10$ και $2(1 - x) \geq 8$
 - iv) $2y - 8 > \frac{3}{4}(y + 1)$ και $\frac{3}{2}y + \frac{1}{12} < y - 2$
 - v) $4x - 3 < 5$ και $2(x - 3) > -4$ και $2x \geq 3(x - 1)$
- 5)** Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:
- i) $-8 < 3x + 1 \leq 22$
 - ii) $-2 < 3 - 2x < 4$

2.1 (ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Θα μάθουμε

- ✚ Να γνωρίζουμε την έννοια του συμβόλου $\sqrt{\alpha}$, με $\alpha \geq 0$
- ✚ Να υπολογίζουμε τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών με δοκιμές.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α λέγεται ο θετικός αριθμός x , ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α .

Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Δηλαδή, αν $\alpha > 0$, $x > 0$ και $\sqrt{\alpha} = x$ τότε $x^2 = \alpha$

Επίσης ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha} \geq 0$
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$
- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, τότε $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Σχόλια

- Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$
- Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha - \beta}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1)** Γνωρίζουμε ότι το τετράγωνο ενός αριθμού είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού αυτού με τον εαυτό του, δηλαδή $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.
Για παράδειγμα $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$ ή $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$.
Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
- α) $3^2 = \dots\dots\dots$ β) $7^2 = \dots\dots\dots$ γ) $1^2 = \dots\dots\dots$
 δ) $0^2 = \dots\dots\dots$ ε) $1,2^2 = \dots\dots\dots$ στ) $16^2 = \dots\dots\dots$
 ζ) $0,3^2 = \dots\dots\dots$ η) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \dots\dots\dots$ θ) $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \dots\dots\dots$
- 2)** Μερικές φορές την παραπάνω εργασία πρέπει να την κάνουμε αντίστροφα! Για παράδειγμα, μπορείτε να βρείτε ποιος αριθμός (θετικός ή μηδέν) πρέπει να τοποθετηθεί στη θέση των κενών στις παρακάτω ισότητες;
- α) $(\dots\dots)^2 = 25$ β) $(\dots\dots)^2 = 16$ γ) $(\dots\dots)^2 = 81$
 δ) $(\dots\dots)^2 = 100$ ε) $(\dots\dots)^2 = 36$ στ) $(\dots\dots)^2 = 0$
 ζ) $(\dots\dots)^2 = 1$ η) $(\dots\dots)^2 = 0,09$ θ) $(\dots\dots)^2 = \frac{9}{25}$
 ι) $(\dots\dots)^2 = \frac{1}{4}$ ια) $(\dots\dots)^2 = 4$ ιβ) $(\dots\dots)^2 = 9$
- 3)** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες, όπως φαίνεται στο παράδειγμα : $7^2 = 49$ οπότε $\sqrt{49} = 7$
- α) $(\dots\dots)^2 = 25$ οπότε $\sqrt{25} = \dots\dots\dots$
 β) $(\dots\dots)^2 = 64$ οπότε $\sqrt{64} = \dots\dots\dots$
 γ) $(\dots\dots)^2 = 1$ οπότε $\sqrt{1} = \dots\dots\dots$
 δ) $(\dots\dots)^2 = 0$ οπότε $\sqrt{0} = \dots\dots\dots$
- 4)** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες, όπως φαίνεται στο παράδειγμα : $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2 = 100$ οπότε
- α) $\sqrt{81} = \dots\dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots\dots$
 β) $\sqrt{64} = \dots\dots\dots$ γιατί $(\dots\dots)^2 = \dots\dots\dots$

γ) γιατί $(\dots)^2 = \dots$

δ) $\sqrt{36} = \dots$ γιατί $(\dots)^2 = \dots$

ε) $\sqrt{0,09} = \dots$ γιατί $(\dots)^2 = \dots$

στ) $\sqrt{\frac{36}{25}} = \dots$ γιατί $\left(\dots\right)^2 = \dots$

5) Πως ονομάζεται το σύμβολο $\sqrt{\quad}$;

.....

6) Στο συμβολισμό $\sqrt{a}$ πως ονομάζεται το a ;

.....

7) Μπορείτε να σκεφτείτε δύο αριθμούς που η τετραγωνική τους ρίζα να είναι ίση με τον εαυτό τους;

.....

8) Μπορείτε να συμπληρώσετε το κενό $(\dots)^2 = -25$;
Γιατί;

.....

9) Τι έχετε να πείτε για τη ρίζα $\sqrt{-25}$;

.....

Συμπέρασμα: ρίζα αρνητικού αριθμού.

10) Μπορεί ένας αριθμός να έχει δύο τετραγωνικές ρίζες;
Συμπέρασμα: Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι
γιατί τόσο η ρίζα, όσο και το υπόρριζο είναι θετικοί αριθμοί.

11) Είναι σωστό να γράψουμε $\sqrt{9} = -3$;

.....

12) Να υπολογιστούν τα

α) $(\sqrt{4})^2 = \dots\dots\dots$

β) $(\sqrt{49})^2 = \dots\dots\dots$

γ) $(\sqrt{9})^2 = \dots\dots\dots$

13) Από τον ορισμό της ρίζας προκύπτει ότι: Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \dots\dots$

14) Να υπολογιστούν τα:

α) $\sqrt{4^2} = \dots\dots\dots$

β) $\sqrt{(-3)^2} = \dots\dots\dots$

γ) $\sqrt{2,87^2} = \dots\dots\dots$

15) Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\sqrt{0,04} = \dots\dots$ β) $\sqrt{225} = \dots\dots$ γ) $\sqrt{10^6} = \dots\dots$ δ) $\sqrt{\sqrt{16}} = \dots\dots$

16) Συμπληρώστε τις προτάσεις:

- Αν $\sqrt{\alpha} = x$ με α, x μη αρνητικούς αριθμούς τότε ισχύει $\dots\dots\dots$
- Αν $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$, τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι $\dots\dots\dots$
- Αν $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$, τότε ο αριθμός α πρέπει να είναι $\dots\dots\dots$
- Αν α οποιοσδήποτε αριθμός τότε $\sqrt{\alpha^2} = \dots\dots\dots$
- Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \dots\dots\dots$
- Αν $\alpha \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha} = \dots\dots\dots$
- Αν $x \geq 0$ και $\sqrt{5} = x$ τότε $x^2 = \dots\dots\dots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογιστούν οι τετραγωνικές ρίζες

$\sqrt{4} =$	$\sqrt{0,04} =$	$\sqrt{400} =$
$\sqrt{81} =$	$\sqrt{0,81} =$	$\sqrt{8100} =$
$\sqrt{144} =$	$\sqrt{1,44} =$	$\sqrt{14400} =$
$\sqrt{\frac{4}{81}} =$	$\sqrt{\frac{144}{81}} =$	$\sqrt{\frac{169}{225}} =$

2) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{100}$ β) $\sqrt{49}$ γ) $\sqrt{25}$ δ) $\sqrt{169}$ ε) $\sqrt{121}$ στ) $\sqrt{36}$ ζ) $\sqrt{81}$ η) $\sqrt{64}$

3) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{9}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,000009}$, $\sqrt{0,00000009}$

β) $\sqrt{16}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,0016}$, $\sqrt{0,000016}$, $\sqrt{0,00000016}$

γ) $\sqrt{9}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{90.000}$, $\sqrt{9.000.000}$, $\sqrt{900.000.000}$

δ) $\sqrt{36}$, $\sqrt{0,36}$, $\sqrt{3.600}$, $\sqrt{0,0036}$, $\sqrt{360.000}$

4) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{\frac{36}{100}}$ β) $\sqrt{\frac{64}{81}}$ γ) $\sqrt{\frac{121}{144}}$ δ) $\sqrt{\frac{0,04}{0,09}}$ ε) $\sqrt{\frac{1,44}{2,25}}$

5) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{16} - \sqrt{100} + 5\sqrt{4}$ β) $\sqrt{\frac{25}{4}} + \sqrt{\frac{36}{16}} - \sqrt{\frac{49}{64}}$

γ) $\cdot \sqrt{(-2)(-8)} + \sqrt{(-2)(-32)}$ δ) $\sqrt{(-2)(1-3)} - 3(-4)$

ε) $\sqrt{\left(-\frac{1}{27}\right)(-16)}$ στ) $\sqrt{\left(-\frac{25}{36}\right)\left(-\frac{4}{49}\right)} \sqrt{\left(-\frac{25}{36}\right)\left(-\frac{4}{49}\right)}$

6) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

i.	$\sqrt{16}$	$\sqrt{0,16}$	$\sqrt{1600}$	$\sqrt{0,0016}$	$\sqrt{160000}$
ii.	$\sqrt{144}$	$\sqrt{1,44}$	$\sqrt{14400}$	$\sqrt{0,0144}$	$\sqrt{1440000}$
iii.	$\sqrt{49}$	$\sqrt{0,49}$	$\sqrt{4900}$	$\sqrt{0,0049}$	$\sqrt{490000}$

7) Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

i) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2} + \sqrt{49}} =$ ii) $\sqrt{7 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} =$

8) Να βρείτε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

i) $x^2 = 36$ ii) $x^2 = \frac{9}{4}$ iii) $x^2 = 0,16$ iv) $x^2 = 2500$

9) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{2\sqrt{16} - 5\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$ β) $\frac{\sqrt{169} - 2\sqrt{36}}{\sqrt{144}}$

γ) $\frac{\sqrt{49} - 5\sqrt{16}}{\sqrt{196} - \sqrt{64}}$ δ) $\frac{\sqrt{0,49} - \sqrt{0,16}}{\sqrt{1,96} - \sqrt{0,36}}$

10) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt{3\sqrt{9}}$ β) $\sqrt{8\sqrt{4}}$ γ) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}}$ δ) $\sqrt{20 + \sqrt{22 + \sqrt{3 + \sqrt{36}}}}$

ε) $\sqrt{13 - \sqrt{21 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}}}$ στ) $\sqrt{2 + \sqrt{45\sqrt{22 - \sqrt{36}}}}$

11) Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

i) $A = \sqrt{19 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}}$ ii) $B = \sqrt{8\sqrt{1 + \sqrt{9}}}$

iii) $\Gamma = \sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}}$ iv) $\Delta = \sqrt{99 + \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{25}}}$

12) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ ii) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9}$ iii) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ iv) $\frac{\sqrt{2,42}}{\sqrt{2}}$

13) Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$\text{i)} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} \quad \text{ii)} \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

14) Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$\text{i)} 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \quad \text{ii)} 3\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad \text{iii)} \sqrt{5} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

15) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i)} \sqrt{8} \quad \text{ii)} \sqrt{12} \quad \text{iii)} \sqrt{18} \quad \text{iv)} \sqrt{20} \quad \text{v)} \sqrt{24} \quad \text{vi)} \sqrt{27}$$

16) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\text{i)} \sqrt{8} - 3\sqrt{200} - \sqrt{50} \quad \text{ii)} \sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{300}$$

17) Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

$$\text{i)} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ii)} \frac{5}{\sqrt{5}} \quad \text{iii)} \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad \text{iv)} \frac{2}{\sqrt{8}}$$

18) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{i)} 5\sqrt{2} - \sqrt{50} \quad \text{ii)} \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{48} \quad \text{iii)} \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2\sqrt{12} - \sqrt{27}}$$

19) Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{2x + 14}$

α) Για ποιες τιμές του x έχει νόημα;

β) Ποια είναι η τιμή της παράστασης για $x=1$;

20) Να τοποθετήσετε σε σειρά από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:
 $-\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $4\sqrt{15}$, 4 , $\sqrt{15}$, 14 , $-\sqrt{12}$

21) Να βρεθεί το εμβαδό ενός τετραγώνου με διαγώνιο 8cm.

2.2 (ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Θα μάθουμε

- ✚ Ότι υπάρχουν αριθμοί που δε μπορούν να γράφουν με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι και $\beta \neq 0$.
- ✚ Ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- ✚ Να παριστάνουμε ένα αριθμό της μορφής $\sqrt{a}$, όπου a θετικός ακέραιος, με σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- ✚ Ότι οι άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο οι θετικές ή οι αρνητικές ρίζες θετικών ακέραιων ή ρητών.
- ✚ Να παριστάνουμε γεωμετρικά ορισμένους άρρητους.

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται ρητοί, άρρητοι, πραγματικοί;

- **Ρητοί αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ, ν ακέραιοι και $\nu \neq 0$.
- **Άρρητοι αριθμοί** ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί.
- **Πραγματικοί αριθμοί** ονομάζονται οι ρητοί και οι άρρητοι μαζί.

Πότε μια ευθεία ονομάζεται άξονας των πραγματικών αριθμών;

Άξονας πραγματικών αριθμών ονομάζεται μια ευθεία σε κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός και σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχεί ένα σημείο της ευθείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η τετραγωνική ρίζα κάθε φυσικού αριθμού ο οποίος δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού είναι άρρητος αριθμός.
2. Άρρητοι αριθμοί δεν είναι μόνο τετραγωνικές ρίζες θετικών αριθμών. Υπάρχουν άρρητοι αριθμοί που δεν είναι τετραγωνικές ρίζες. Ένας από αυτούς είναι ο αριθμός π .
3. Οι ιδιότητες των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών ισχύουν και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
4. Όταν έχουμε παραστάσεις με όμοια ριζικά μπορούμε να εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα και να τις απλοποιούμε.

$$\text{π.χ. } 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (4 - 2 + 5)\sqrt{3} = (-2 + 9)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

Συνήθως την παραπάνω απλοποίηση την κάνουμε απλούστερα

$$\text{π.χ. } 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

5. Μπορεί μια παράσταση με άρρητους να μας δώσει αποτέλεσμα ρητό αριθμό.

$$\begin{aligned}\text{π.χ. } A &= \frac{1}{2}\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 1 + \frac{3}{2}\sqrt{6} = \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2}\right)\sqrt{6} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)\sqrt{6} = \\ &= \frac{1-4+3}{2}\sqrt{6} = \frac{-4+4}{2}\sqrt{6} = 0 \cdot \sqrt{6} = 0\end{aligned}$$

Μπορεί επίσης μια πράξη μεταξύ δύο άρρητων να μας δώσει αποτέλεσμα ρητό αριθμό.

$$\text{π.χ. } (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -(\sqrt{3})^2 = -3$$

Πράξη μεταξύ ενός ρητού και ενός άρρητου δίνει πάντα αποτέλεσμα άρρητο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1)** Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:
- (α) Ένας αριθμός x για τον οποίο $x^2 = 25$ είναι ο:
- Α) 12,5 Β) 50 Γ) -5 Δ) 7
- (β) Η τετραγωνική ρίζα του 25 είναι:
- Α) 12,5 Β) -5 Γ) 5 Δ) 7
- (γ) Στον άξονα των πραγματικών αριθμών «δεξιότερα» του $\sqrt{11}$ βρίσκεται ο αριθμός:
- Α) 3 Β) $\sqrt{7}$ Γ) $\sqrt{13}$ Δ) $\sqrt{10}$
- (δ) Ο αριθμός $\sqrt{2 + \sqrt{4}}$ είναι ίσος με:
- Α) $\sqrt{6}$ Β) 4 Γ) $\sqrt{2}$ Δ) 2
- (ε) Από τους επόμενους αριθμούς, άρρητος είναι ο:
- Α) $\sqrt{16}$ Β) $\sqrt{\frac{25}{4}}$ Γ) 13,41 Δ) $\sqrt{3}$

- 2)** Να χαρακτηρίσετε ως Σ (Σωστή) ή Λ (Λανθασμένη) τις επόμενες προτάσεις:

		ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(α)	Αν $x^2 = \alpha$, τότε $\sqrt{\alpha} = x$		
(β)	Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$		
(γ)	Επειδή $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$, με προσέγγιση χιλιοστού έχουμε: $\sqrt{2} = 1,414$		

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά $a = 4 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε το ύψος του.
- 2) Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι $\delta = 10 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την πλευρά του.
- 3) Ποιοι από τους επόμενους δεκαδικούς αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;
(α) 3,1211221
(β) 3,121121121...
(γ) 3,12112211222122221
(δ) 7,07007000700007...
- 4) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με την κατάλληλη λέξη (ρητός ή άρρητος):
(α) Ο αριθμός 4,555... είναι
(β) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι
(γ) Ο αριθμός $\sqrt{5}(-\sqrt{5})$ είναι
(δ) Ο αριθμός $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ είναι
(ε) Ο αριθμός $3 + \sqrt{5}$ είναι
(στ) Ο αριθμός $(\sqrt{7})^2$ είναι
- 5) Στα παρακάτω ζευγάρια αριθμών στην θέση των τελειών να τοποθετήσετε το κατάλληλο από τα σύμβολα $>$, $<$, $=$
(α) $\sqrt{3} \dots 2$ (β) $\frac{10}{3} \dots 3,333\dots$ (γ) $\frac{3}{2} \dots \sqrt{2}$
(δ) $\sqrt{90} \dots 10$ (ε) $-4 \dots -\sqrt{12}$ (στ) $\sqrt{144} \dots 12$

6) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

- (α) Αν ένας αριθμός είναι άρρητος, τότε είναι και πραγματικός.
- (β) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι ρητός.
- (γ) Υπάρχουν περιοδικοί δεκαδικοί που είναι άρρητοι.
- (δ) Το γινόμενο δύο άρρητων μπορεί να είναι ρητός.
- (ε) Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από όλους τους ακέραιους και τους άρρητους αριθμούς.

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\sqrt{5}x = \sqrt{3}x + \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

(β) $\sqrt{2} + x = 3x - 3\sqrt{2}$

(γ) $3 + x\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3$

(δ) $x\sqrt{3} - 2 = x - 2\sqrt{3}$

(ε) $2(x + \sqrt{2}) - \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + \sqrt{2})$

8) Η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 4 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

9) Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη 5, x, x + 1.

Αν το x ικανοποιεί την σχέση $(x + 1)(x + 2) = 38 + x^2$, τότε:

(α) Να υπολογιστεί το x.

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να βρείτε και το μήκος της υποτεινουσας.

10) Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $(\sqrt{25})^2 + \sqrt{(-25)^2} + \sqrt{25^2}$

(β) $3(\sqrt{16^2} + \sqrt{16}) - \sqrt{(-\sqrt{16})^2}$

(γ) $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

(δ) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{3}$

11) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$A = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$

$$B = 3\sqrt{6} - 8\sqrt{6} + 13\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{5\sqrt{13}}{6} + \sqrt{13}$$

$$\Delta = 5 + 2\sqrt{3} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3 - 4\sqrt{3})^2}$$

12) Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

$$A = 3(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) - 2(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$$

$$B = 5\sqrt{7} - 3\sqrt{11} - 7\sqrt{7} + 8\sqrt{11}$$

13) Να συγκριθούν οι αριθμοί

(α) $\sqrt{80} - 8$ και $1 - \sqrt{5}$

(β) $\sqrt{37} - 6$ και $2 - \sqrt{5}$

(γ) $\sqrt{1 + \sqrt{8}}$ και 2

(δ) $\sqrt{63} - \sqrt{50}$ και 1

14) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$$1, -\sqrt{5}, \sqrt{18}, -2\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{50}$$

15) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$$\sqrt{8}, 3, \frac{14}{5}, 2,17, \frac{\sqrt{35}}{3}, \frac{23}{5}$$

16) Να βρεθεί το σημείο του άξονα των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{20}$ με προσέγγιση ρητού και με κανόνα και διαβήτη.

2.3 (ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

Θα μάθουμε

- ✚ Να καταστρώνουμε και να επιλύουμε προβλήματα στα οποία εμφανίζονται άρρητοι αριθμοί.
- ✚ Να επιλύουμε προβλήματα που έχουν σχέση με το Πυθαγόρειο θεώρημα.
- ✚ Ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται όχι μόνο σε γεωμετρικά προβλήματα, αλλά και σε πραγματικά προβλήματα μέτρησης.

Παράδειγμα 1ο : Ένας κεραυνός έσπασε ένα κυπαρίσσι σε σημείο που απέχει από το έδαφος 5 m . Αν η κορυφή του ακουμπάει στο έδαφος και απέχει 7 m από τη βάση του να βρεθεί πόσο ήταν το ύψος του. (Να πάρετε υπόψη ότι $\sqrt{74} = 8,6$ με προσέγγιση δεκάτου).

Λύση

$$x^2 = 5^2 + 7^2$$

$$x^2 = 25 + 49$$

$$x^2 = 74$$

$$x = \sqrt{74}$$

$$x = 8,6 \text{ m}$$

Άρα το ύψος του κυπαρισσιού ήταν:

$$5 + 8,6 = 13,6 \text{ m}$$

Παράδειγμα 2ο : Μια σκάλα μήκους 4,5 m ακουμπάει στο πάνω μέρος ενός τοίχου και η βάση της σκάλας απέχει από τον τοίχο 2 m . Να υπολογίσετε το ύψος του τοίχου. (Να πάρετε υπόψη ότι $\sqrt{16,25} = 4,03$ με προσέγγιση εκατοστού).

Λύση

$$4,5^2 = 2^2 + x^2$$

$$20,25 = 4 + x^2$$

$$20,25 - 4 = x^2$$

$$16,25 = x^2$$

$$x = \sqrt{16,25}$$

Παράδειγμα 3ο : Σε ένα τετράγωνο οικόπεδο 1.800 m^2 , είναι χτισμένο ένα τετράγωνο σπίτι όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σπιτιού. (Να πάρετε υπόψη ότι $\sqrt{1.316} = 36,28$ με προσέγγιση εκατοστού).

Λύση

$$y^2 = 1.800$$

$$E = 1.800$$

$$y^2 = 22^2 + (x + 22)^2 \text{ Όμως}$$

$$1.800 = 484 + (x + 22)^2$$

$$1.800 - 484 = (x + 22)^2$$

$$1.316 = (x + 22)^2$$

$$x + 22 = \sqrt{1.316}$$

$$x + 22 = 36,28$$

$$x = 36,28 - 22$$

$$x = 14,28 \text{ m}$$

Συνεπώς το εμβαδόν του σπιτιού είναι: $E' = 14,25^2 = 203,92 \text{ m}^2$.

Παράδειγμα 4ο : Μια σκάλα έχει μήκος 2,8 m και ανοίγει σε σχήμα ισοσκελούς τριγώνου με βάση 1,6 m. Όταν ανοίγει η κορυφή της απέχει από το ταβάνι ενός δωματίου 30 cm. Να βρεθεί το ύψος x του δωματίου. (Να πάρετε υπόψη ότι $\sqrt{7,2} = 2,68$ με προσέγγιση εκατοστού).

Λύση

$$2,8^2 = 0,8^2 + x^2$$

$$7,84 = 0,64 + x^2$$

$$7,84 - 0,64 = x^2$$

$$7,2 = x^2$$

$$x = 2,68 \text{ m}$$

Συνεπώς το δωμάτιο έχει ύψος:

$$2,68 + 0,3 = 2,98 \text{ m}$$

Παράδειγμα 5ο : Ένα αυτοκίνητο έχει μήκος 4,5 m και πλάτος 1,8 m. Να εξεταστεί αν μπορεί να κάνει αναστροφή σ' ένα δρόμο πλάτους 5 m. (Να πάρετε υπόψη ότι $\sqrt{23,49} = 4,84$ με προσέγγιση εκατοστού).

Λύση

Για να μπορεί να κάνει αναστροφή, θα πρέπει η διαγώνιος του αυτοκινήτου να είναι μικρότερη από το πλάτος του δρόμου.

$$x^2 = 4,8^2 + 1,8^2$$

$$x^2 = 20,25 + 3,24$$

$$x^2 = 23,49 \quad x = 4,84 \text{ m} \quad \text{Συνεπώς μπορεί να κάνει αναστροφή.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Μια οθόνη τηλεόρασης χαρακτηρίζετε x ιντσών αν η διαγώνιος της είναι x ίντσες ($1 \text{ ίντσα} = 2,54 \text{ cm}$). Αν μια τηλεόραση έχει διαστάσεις 23 cm επί $30,4 \text{ cm}$, να βρείτε πόσων ιντσών είναι η τηλεόραση.
- 2) Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 4 m (μήκος), 3 m (πλάτος) και 6 m (ύψος). Μια ράβδος μήκους 6 m μπορεί να τοποθετηθεί διαγώνια (ολόκληρη) μέσα στη δεξαμενή;
- 3) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εμβαδόν 300 m^2 . Το ύψος AD του τριγώνου είναι 24 cm και το τμήμα $D\Gamma$ είναι 15 cm . Να υπολογίσετε:
(α) Το τμήμα BD .
(β) Την πλευρά του AB .
(γ) Το ύψος $ΓΖ$.
- 4) Οι τριγωνικές πινακίδες σήμανσης στους δρόμους είναι ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς 80 cm . Τι εμβαδόν έχουν;
- 5) Σ' ένα ρόμβο πλευράς 10 cm το μήκος της μιας διαγωνίου του είναι 12 cm . Να υπολογίσετε το μήκος της άλλης διαγωνίου του. (Γνωρίζουμε ότι στο ρόμβο οι διαγώνιοι του είναι κάθετες και τέμνονται στο μέσο τους)
- 6) Η βάση ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι τα $\frac{4}{3}$ του ύψους του και η περίμετρος του 70 cm . Να βρεθούν α) οι πλευρές του β) το εμβαδό του και γ) η διαγώνιος του.
- 7) Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο 11 cm , να υπολογιστεί η πλευρά του.
- 8) Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 5 cm να υπολογίσετε το εμβαδό του.
- 9) Ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με κάθετη πλευρά 6 cm . Να βρεθεί η υποτείνουσα του και το εμβαδό του.
- 10) Το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου είναι 7 cm . Να υπολογιστούν οι πλευρές του τριγώνου.
- 11) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB = A\Gamma = 0,5 \text{ m}$ και το ύψος του AD είναι 4 dm . Να υπολογιστεί η περίμετρος του τριγώνου και το εμβαδό του.

3.1 (Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΥ

- 1) Να μπορούν να συμπληρώνουν πίνακα τιμών
- 2) Να μπορούν να σχηματίζουν τη συνάρτηση που συνδέει δύο μεγέθη μέσα από ένα πρόβλημα

1^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Συνάρτηση** f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια αντιστοιχία των στοιχείων του A στα στοιχεία του B , κατά την οποία κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί σε ένα μόνο στοιχείο του B . Συμβολίζουμε δε $f : A \rightarrow B$.
- Το σύνολο A ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης f .
- Το σύνολο B ονομάζεται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης f .
- Κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού συμβολίζεται συνήθως με x και ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**.
- Κάθε στοιχείο του πεδίου τιμών συμβολίζεται συνήθως με y και ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Η σχέση που συνδέει την ανεξάρτητη μεταβλητή με την εξαρτημένη μεταβλητή ονομάζεται **τύπος** της **συνάρτησης**, συμβολίζεται $f(x)$ και είναι μια αλγεβρική παράσταση.
- Για μια συγκεκριμένη τιμή α της ανεξάρτητης μεταβλητής του πεδίου ορισμού, μέσου του τύπου $f(x)$ αντιστοιχεί μια τιμή β της εξαρτημένης μεταβλητής του πεδίου τιμών που λέγεται **εικόνα** της f για $x = \alpha$ και συμβολίζεται $f(\alpha)$.
- Το σύνολο όλων των εικόνων της f , συμβολίζεται $f(A)$ και ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f .
- Αν στο τύπο της συνάρτησης αντικαταστήσουμε το $f(x)$ με y , η εξίσωση που προκύπτει λέγεται **εξίσωση** της **συνάρτησης**.
- Πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f , ονομάζεται ένας πίνακας διπλής εισόδου όπως φαίνεται παρακάτω:

x	700	800	...	1.000
y	21	24	...	30

- Όταν μας δίνεται μια συνάρτηση, συνήθως μας δίνεται ο τύπος της ή η εξίσωση της. Π.χ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - 1$ ή δίνεται η συνάρτηση $y = 3x - 1$.

Σημαντικές παρατηρήσεις!!!

- 1) Σε κάθε τιμή x αντιστοιχεί μια μόνο τιμή y .
- 2) Μια τιμή y μπορεί να προκύψει από διαφορετικές τιμές x .
π.χ. στη συνάρτηση $y = x^2$ η τιμή $y = 9$ προκύπτει όταν $x = 3$ ή $x = -3$.
- 3) Όταν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν μας δίνεται είμαστε υποχρεωμένοι να το βρίσκουμε.
π.χ. στη συνάρτηση $y = \sqrt{x}$ το πεδίο ορισμού της είναι κάθε μη αρνητικός αριθμός δηλαδή: $A = [0, +\infty)$.
- 4) Σε μια συνάρτηση δεν είναι απαραίτητο να συμβολίζουμε με x την ανεξάρτητη μεταβλητή και με y την εξαρτημένη μεταβλητή της.
π.χ. στη συνάρτηση $s = 40t$ το διάστημα s εκφράζεται σαν συνάρτηση του χρόνου t δηλαδή t η ανεξάρτητη μεταβλητή και s η εξαρτημένη μεταβλητή.
- 5) Υπάρχουν συναρτήσεις που η y παίρνει πάντα την ίδια τιμή, ανεξάρτητα από ποιες τιμές παίρνει η x , τότε η συνάρτηση λέγεται **σταθερή συνάρτηση**. Π.χ. η συνάρτηση $y = 3x - \frac{6x - 8}{2}$

Παράδειγμα 1ο : Δίνεται η συνάρτηση $y = 4x - 2$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Λύση

Για $x = -2$: $y = 4 \cdot (-2) - 2 = -8 - 2 = -10$

Για $x = -1$: $y = 4 \cdot (-1) - 2 = -4 - 2 = -6$

Για $x = 0$: $y = 4 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$

Για $x = 1$: $y = 4 \cdot 1 - 2 = 4 - 2 = 2$

Για $x = 2$: $y = 4 \cdot 2 - 2 = 8 - 2 = 6$

Συνεπώς, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-10	-6	-2	2	6

2^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Παράδειγμα 2ο : Ένας οινοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό σταφύλια παράγει 0,3 λίτρα κρασί.

- (α) Πόσα λίτρα κρασί θα πάρει από παραγωγή 800 κιλών σταφύλια;
 (β) Να εκφράσετε την ποσότητα y σε λίτρα του κρασιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των σταφυλιών που παράγει.
 (γ) Πόσα κιλά σταφύλια πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 120 λίτρα κρασί.

Λύση

(α) Αφού από κάθε κιλό σταφύλια παράγει 0,3 λίτρα κρασί από παραγωγή 800 κιλών σταφύλια θα πάρει $0,3 \cdot 800 = 240$ κιλά κρασί.

(β) Από x κιλά σταφύλια θα παράγει $0,3x$ κιλά κρασί. Δηλαδή $y = 0,3x$.

(γ) Από την συνάρτηση $y = 0,3x$ για $y = 120$ έχουμε: $120 = 0,3x$ ή $\frac{120}{0,3} = \frac{0,3x}{0,3}$ δηλαδή $x = 400$ κιλά σταφύλια.

Παράδειγμα 3ο : Ο παρακάτω πίνακας είναι ο πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = (κ - 3)x + λ$. Να βρεθούν τα $κ$ και $λ$.

x	-2	-1	0	1	2
y	1	3	5	7	9

Λύση

Για $x = 0$ είναι $y = 5$, οπότε

$$5 = (κ - 3) \cdot 0 + λ$$

$$λ = 5$$

Για $x = 1$ είναι $y = 7$, οπότε

$$7 = (κ - 3) \cdot 1 + 5$$

$$7 = κ - 3 + 5$$

$$7 + 3 - 5 = κ$$

$$κ = 5$$

Επομένως η συνάρτηση είναι: $y = 2x + 5$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1) Οι συντάξεις μειώνονται κατά 350 €. Η σχέση που εκφράζει τις νέες συντάξεις y ως συνάρτηση των παλιών συντάξεων x , είναι:

(α) $y = 350x$ (β) $y = x + 350$ (γ) $y = x - 350$ (δ) $y = 350 - x$

- 2) Οι συντάξεις μειώνονται κατά 20%. Η σχέση που εκφράζει τη νέα σύνταξη y ως συνάρτηση της παλιάς σύνταξης x , είναι:

(α) $y = x + \frac{20}{100}$ (β) $y = x + 20$ (γ) $y = 1,2x$ (δ) $y = 0,2x$

- 3) Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση x και ύψος y είναι 80cm^2 . Η σχέση που εκφράζει το ύψος y ως συνάρτηση της βάσης x , είναι:

(α) $y = 80x$ (β) $y = 160 + x$ (γ) $y = \frac{160}{x}$ (δ) $y = 80 - x$

- 4) Ο πίνακας τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

μπορεί να είναι πίνακας τιμών της συνάρτησης:

(α) $y = 2x + 8$ (β) $y = x^2$ (γ) $y = x$ (δ) $y = 4$

- 5) Στη συνάρτηση $y = -\frac{6}{x+1}$, το y παίρνει την τιμή 0 όταν:

(α) $x = -2$ (β) $x = 0$ (γ) $x = 1$ (δ) ποτέ

- 6) Η Βερόνικα είναι 4 χρόνια μικρότερη από την αδελφή της Ιλάρια. Η σχέση που εκφράζει την ηλικία y της Βερόνικας συναρτήσει της ηλικίας της Ιλάριας x , είναι:

(α) $y = x + 4$ (β) $y = 4x$ (γ) $y = -4x$ (δ) $y = x - 4$

- 7) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

- (α) Η σχέση που εκφράζει την περίμετρο Π ενός τετραγώνου ως συνάρτηση της πλευράς του a , είναι $\Pi = 4a$

- (β) Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν E ενός ρόμβου ως συνάρτηση της πλευράς του a , είναι $E = a^2$

- (γ) Στη συνάρτηση $y = \frac{4x}{x+3}$, μπορούμε να δώσουμε την τιμή -3

- (δ) Στη συνάρτηση $y = \sqrt{x^2}$, μπορούμε να δώσουμε στο x την τιμή -2

- (ε) Στη συνάρτηση $y = x^2 + 4$, το y μπορεί να πάρει την τιμή -4

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $y = 4x - 1$

x	-2	-1	0	1	2
y					

(β) $y = \frac{1-3x}{2}$

x	-3	-1	0	1	3
y					

2) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $y = 4x^2 - 12$

x	-2	-1	0	1	2
y					

(β) $y = 6x^2 - 5x + 1$

x	-3	-1	0	1	3
y					

3) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων
α) $y = 2x - 3$

x	1	2	3
y			

β) $y = \frac{5x-2}{3}$

x	1	4	-2
y			

γ) $y = 3x^2 - 2$

x	-2	-1	2
y			

- 4) Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

$$y = 2x - 3$$

x		5	
y	3		-7

$$y = \frac{3x - 1}{2}$$

x	1		
y		4	0

$$y = -\frac{5}{x}$$

x		0,25	
y	0,5		$\frac{5}{3}$

- 5) Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = ax + b$ είναι ο διπλανός . Να υπολογίσετε τα a και b .

x	0	1
y	3	2

- 6) Οι τιμές των προϊόντων ενός εργοστασίου επιβαρύνονται με φόρο 9% . Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο , ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο και μετά να βρείτε την τιμή ενός προϊόντος με φόρο , όταν η τιμή του χωρίς φόρο είναι 12 ευρώ.
- 7) Οι τιμές των τροφίμων επιβαρύνονται με φόρο 13%. Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών χωρίς φόρο.

- 8) Ένας εργάτης παίρνει 600 € το μήνα και 2% του μηνιατικού για κάθε ώρα υπερωρίας. Να εκφράσετε τον συνολικό του μισθό y , ως συνάρτηση των ωρών υπερωρίας x .
- 9) Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x , y σε cm.
- Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 40 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .
 - Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 60 cm², να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .
- 10) Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x σε cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν E και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	3	4	5
E					
Π					

- 11) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 4x - 3$

x	-2		0		2
y		-7		1	

- 12) Η απόσταση Σέρρες - Λάρισα είναι 210 km. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από Σέρρες και κινείται προς Λάρισα με ταχύτητα 80 km/h. Να εκφράσετε την απόσταση του αυτοκινήτου από την Αθήνα ως συνάρτηση του χρόνου t .
- 13) Ένα κατάστημα κάνει εκπτώσεις 10% στις τιμές του. Να εκφράσετε το ποσό που πληρώνουμε για ένα εμπόρευμα ως συνάρτηση της αναγραφόμενης σ' αυτό τιμής.
- 14) Ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι τετραπλάσιος από τον παρονομαστή του. Να εκφράσετε τον αριθμητή ως συνάρτηση του παρονομαστή.
- 15) Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ο παρακάτω:

x	-4	-3	0	2
y	5	3	-3	-7

Να βρείτε τα β και γ .

3.2 (ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ – ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

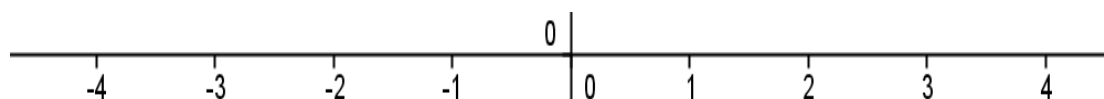
- 1) Βασικοί ορισμοί
- 2) Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων
 - ✚ Παράσταση σημείων πάνω στον
 - ✚ Εύρεση συμμετρικών σημείων
- 3) Απόσταση δύο σημείων
- 4) Γραφική παράσταση
 - ✚ Βασικοί ορισμοί
 - ✚ Να κάνουμε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης

1^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

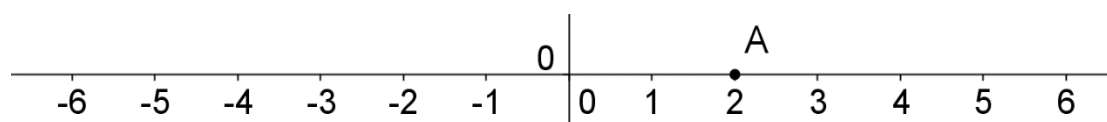
- 1) **Άξονας** χ'χ ονομάζεται μια ευθεία στην οποία έχουμε ορίσει ένα σημείο της O ως αρχή, μια θετική φορά Ox και μια μονάδα μέτρησης OI .

Π.χ.



- 2) **Τετμημένη** ενός σημείου A ενός άξονα, είναι ο αριθμός που αντιστοιχεί στον άξονα.

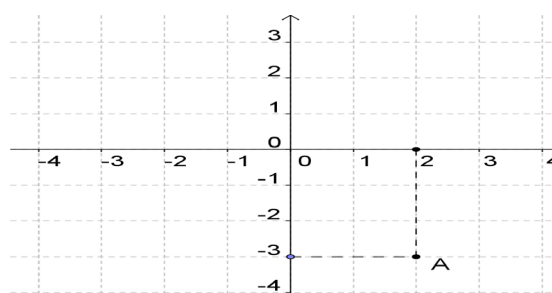
Π.χ.



Το σημείο A έχει τετμημένη 2

- 3) **Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων** xOy ονομάζεται ένα σύστημα δύο αξόνων με την ίδια μονάδα μέτρησης, που τέμνονται κάθετα, στην αρχή τους O .

Π.χ.

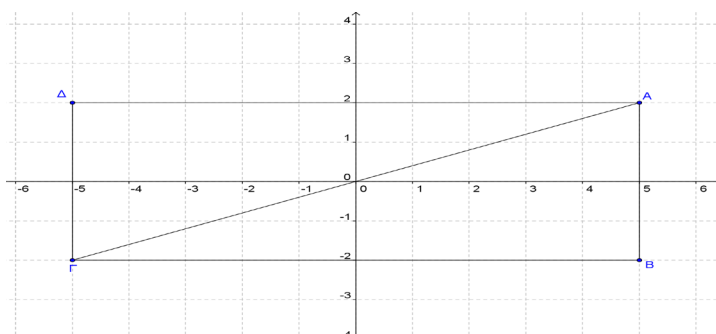
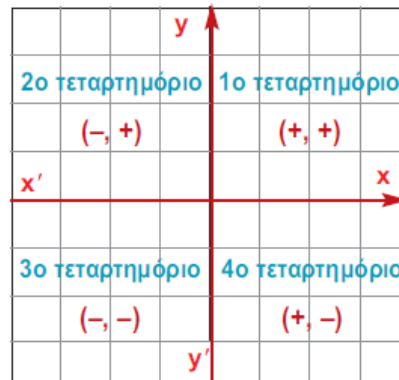


- 4) **Τετμημένη** ενός σημείου A στο επίπεδο είναι το ίχνος της καθέτου στον άξονα $x'x$
- 5) **Τεταγμένη** ενός σημείου A στο επίπεδο είναι το ίχνος της καθέτου στον άξονα $y'y$.
- 6) **Συντεταγμένες** ενός σημείου A στο επίπεδο είναι το ζεύγος (α, β) , όπου α η τετμημένη και β η τεταγμένη του.
- Π.χ. Το σημείο A έχει τετμημένη 2, τεταγμένη -3 και συντεταγμένες $(2, -3)$.

2^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και, αντιστρόφως, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.
- Το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται τεταρτημόρια. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.
- Κάθε σημείο του άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη 0.
π.χ. το σημείο $K(-2, 0)$ βρίσκεται στον άξονα $x'x$.
- Κάθε σημείο του άξονα $y'y$ έχει τετμημένη 0.
π.χ. το σημείο $K(0, 4)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$.
- Αν $A(\alpha, \beta)$ είναι σημείο του επιπέδου, τότε το συμμετρικό του A ως προς:
 - τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο: $B(\alpha, -\beta)$
 - τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο: $\Delta(-\alpha, \beta)$
 - την αρχή O των αξόνων είναι το σημείο: $\Gamma(-\alpha, -\beta)$
 Το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο



Σημείο	Συμμετρικό ως προς τον $x'x$	Συμμετρικό ως προς τον $y'y$	Συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$
$M(a,\beta)$	$M_1(a,-\beta)$	$M_2(-a,\beta)$	$M_3(-a,-\beta)$

3^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ είναι

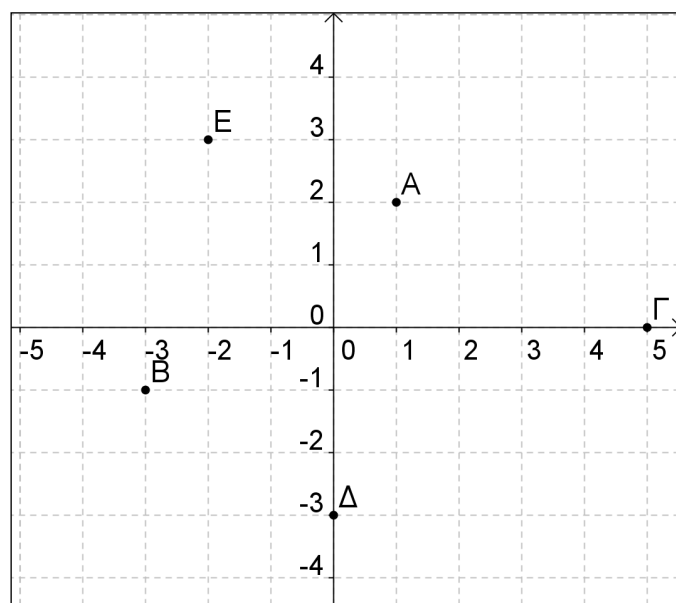
$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παράδειγμα 4ο : Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(3,5)$ και $B(2,6)$

Λύση

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Παράδειγμα 5ο : Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B , Γ και Δ του παρακάτω σχήματος:

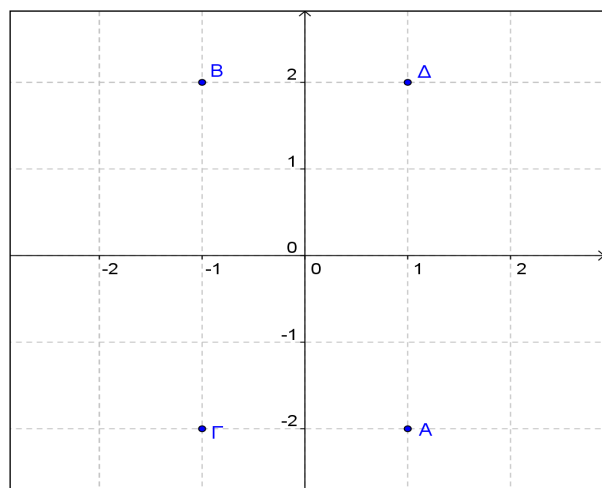


Λύση

$A(1,2)$ $B(-3,-1)$ $\Gamma(5,0)$ $\Delta(0,-3)$ $E(-2,3)$

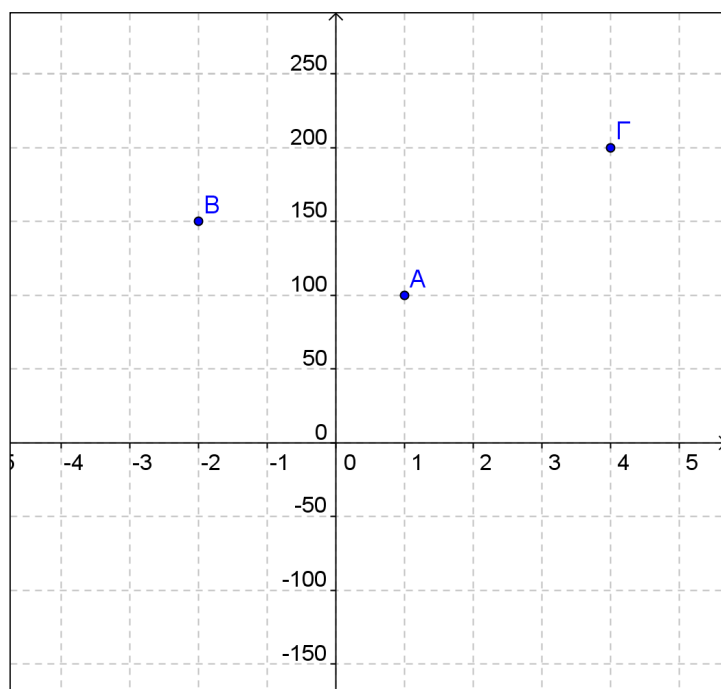
Παράδειγμα 6ο : Να τοποθετήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία: $A(1,-2)$ $B(-1,2)$ $\Gamma(-1,-2)$ $\Delta(1,2)$

Λύση



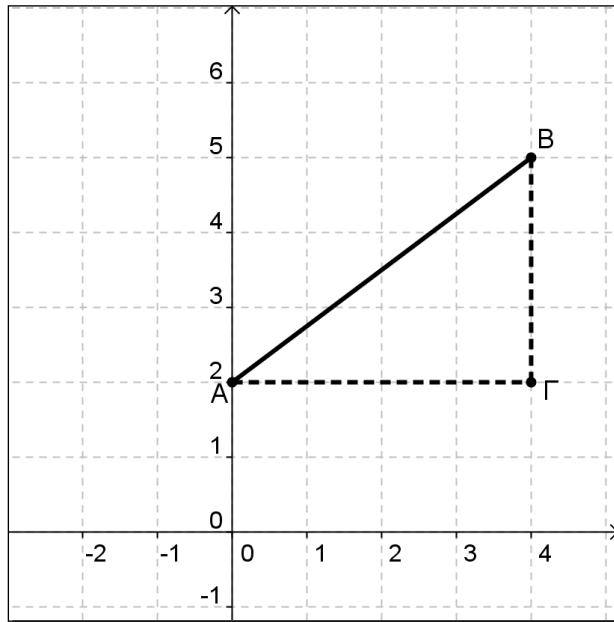
Παράδειγμα 7ο : Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων να τοποθετήσετε τα σημεία: $A(1,80)$ $B(-2,150)$ $\Gamma(4,200)$

Λύση



Παράδειγμα 8ο : Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(4,5)$. Να βρεθεί η απόσταση AB .

Λύση



Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα:

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$$

$$AB^2 = 4^2 + 3^2$$

$$AB^2 = 16 + 9$$

$$AB^2 = 25$$

$$AB = \sqrt{25}$$

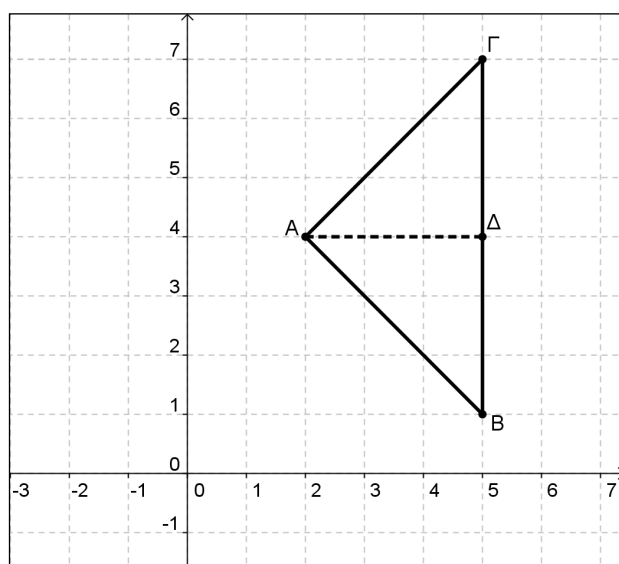
$$AB = 5$$

Παράδειγμα 9ο : Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,4)$, $B(5,1)$, $\Gamma(5,7)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Λύση

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Delta B$:

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 \Rightarrow AB^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow AB^2 = 9 + 9 \Rightarrow AB^2 = 18$$



$$AB = \sqrt{18}$$

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$:

$$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2$$

$$A\Gamma^2 = 3^2 + 3^2$$

$$A\Gamma^2 = 9 + 9$$

$$A\Gamma^2 = 18$$

$$A\Gamma = \sqrt{18}$$

Έτσι παρατηρούμε ότι $AB = AG$, δηλαδή το τρίγωνο ABG είναι ισοσκελές.

Υπολογίζουμε το μήκος της BG :

$$BG = BA + AG$$

$$BG = 3 + 3$$

$$BG = 6$$

Εξετάζουμε με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος αν το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο:

$$AB^2 + AG^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 = 18 + 18 = 36$$

$$BG^2 = 6^2 = 36$$

$$\text{Συνεπώς } AB^2 + AG^2 = BG^2$$

Άρα το τρίγωνο ABG είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την $\hat{A}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΜΕΡΟΣ 1 ΑΠΟ 2**

- 1) Να αναπαραστήσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τα σημεία $A(-4,0)$, $B(2,2)$, $\Gamma(-3,5)$, $\Delta(-4,1)$, $E(2,3)$
- 2) Να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται καθένα από τα σημεία $A(-5,1)$, $B(-2,-4)$, $\Gamma(4,5)$, $\Delta(2010,-2011)$
- 3) Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων να αναπαραστήσετε τα σημεία $A(200,200)$, $B(-300,200)$, $\Gamma(500,-200)$, $\Delta(0,400)$
- 4) Σε κατάλληλο σύστημα αξόνων να αναπαραστήσετε τα σημεία $A(2,350)$, $B(-4,200)$, $\Gamma(4,-250)$, $\Delta(-1,500)$
- 5) Σε ένα σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία :
 $A(3,2)$, $B(-3,-1)$, $\Gamma(0,3)$, $\Delta(-2,0)$
- 6) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το σημείο $A(3x-2,2x+1)$, να βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο
- 7) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(-2,3)$ ως προς
 - a) Τον άξονα $x'x$
 - b) Τον άξονα $y'y$
 - c) Την αρχή των αξόνων
- 8) Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$
 - a) $A(5,3)$
 - b) $B(-2,3)$
 - c) $\Gamma(-3,0)$
- 9) Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων
 - a) $A(5,7)$ και $B(2,3)$
 - b) $A(-7,3)$ και $B(5,-2)$
 - c) $A(5,-7)$ και $B(0,-5)$
- 10) Αν το σημείο $A(-3,15)$ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 - 3$, να βρείτε την τιμή του a .
- 11) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το σημείο $M(3\lambda-2,\lambda+1)$, να βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 5x - 3$
- 12) Αν τα σημεία $A(0,3)$ και $B(-2,1)$ βρίσκονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+b$, να βρείτε τις τιμές των a και b

- 13)** Σ' ένα σύστημα αξόνων παίρνουμε τα σημεία $A(-4,-1)$, $B(4,-1)$, $\Gamma(4,-1)$, $\Delta(-4,1)$. Να βρείτε τι τετράπλευρο είναι το $AB\Gamma\Delta$ και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- 14)** Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων $K(-9,12)$ και $\Lambda(5,-5)$:
- από τον άξονα $x'x$
 - από τον άξονα $y'y$
 - από την αρχή O των αξόνων.
- 15)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(-1,1)$, $B(3,1)$ και $\Gamma(-1,5)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
- 16)** Να βρείτε όλα τα σημεία του επιπέδου που έχουν:
- (α) τετμημένη -2 (β) τεταγμένη 7 (γ) τετμημένη ίση με τεταγμένη
- 17)** Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Σημείο	Συμμετρικό του ως προς τον $x'x$	Συμμετρικό του ως προς τον $y'y$	Συμμετρικό του ως προς το O
$(-4,2)$			
	$(-5,1)$		
		$(-2,3)$	
			$(-2,5)$

4^{ος} ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ**ΟΡΙΣΜΟΙ**

- **Γράφημα** μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, όπου $x \in A$.
- **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης $f : A \rightarrow B$ ονομάζουμε την αναπαράσταση του γραφήματος σε ένα σύστημα αναφοράς αξόνων.

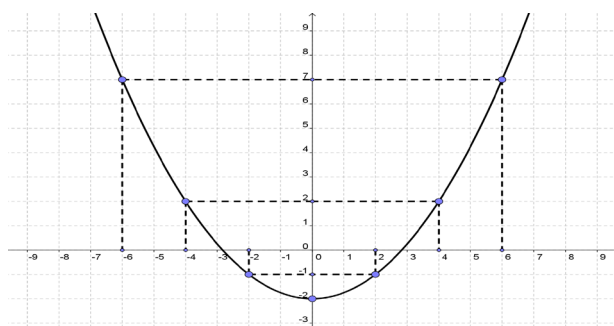
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δίνει μια εποπτική εικόνα της συνάρτησης και μας βοηθάει να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για την σχέση των μεταβλητών x και y .

Για παραδειγμα στην συνάρτηση $y = \frac{1}{4}x^2 - 2$ κάνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
y	9	4	1	-2	1	4	9

- 2) Τα σημεία του πίνακα τιμών αναπαριστάνουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- 3) Αν ενώσουμε όλα τα σημεία προκύπτει μια τεθλασμένη γραμμή που μοιάζει με καμπύλη.
- 4) Αν χρησιμοποιήσουμε έναν πίνακα τιμών με περισσότερα ζεύγη που μπορεί να μην είναι όλο το γράφημα (καθότι αυτό περιέχει άπειρα σε πλήθος ζεύγη) θα δούμε η τεθλασμένη να είναι η παρακάτω γραμμή.



- 5) Όταν αναφερόμαστε σε σύστημα αξόνων θα εννοούμε ορθοκανονικό σύστημα εκτός αν δίνεται διαφορετικά.
- 6) Κάθε κάθετη στον άξονα $x'x$ συναντάει σε ένα το πολύ σημείο τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης
- 7) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης περνάει από ένα σημείο, μόνο αν οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν την εξίσωση της.

Παράδειγμα 10ο : Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

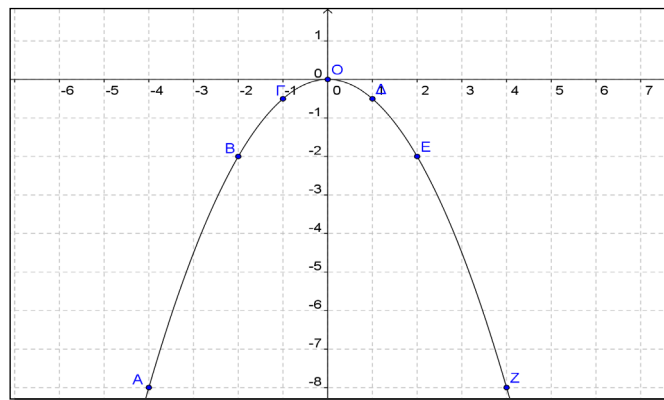
$$y = -\frac{1}{2}x^2.$$

Λύση

Κατασκευάζω ένα πίνακα τιμών δίνοντας μερικές δικές μας τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή x :

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

Παριστάνω στο επίπεδο τα σημεία και ενώνω αυτά με μια γραμμή.



Παράδειγμα 11ο : Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = (\lambda + 1)x + 2$ διέρχεται από το σημείο $A(1, 4)$.

(α) Να υπολογιστεί το λ .

(β) Να συμπληρωθεί ο πίνακας:

x			0		2
y	-2	0		4	

Λύση

(α) Οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση $y = (\lambda + 1)x + 2$.

$$\text{Άρα } 4 = (\lambda + 1) \cdot 1 + 2$$

$$4 = \lambda + 1 + 2$$

$$4 - 1 - 2 = \lambda$$

$$\lambda = 1$$

(β) Η συνάρτηση είναι $y = 2x + 2$, οπότε έχουμε:

για $y = -2$:	για $y = 0$:	για $x = 0$:	για $y = 4$:	για $x = 2$
$-2 = 2x + 2$	$0 = 2x + 2$	$y = 2 \cdot 0 + 2$	$4 = 2x + 2$	$y = 2 \cdot 2 + 2$
$-2 - 2 = 2x$	$-2 = 2x$	$y = 0 + 2$	$4 - 2 = 2x$	$y = 4 + 2$
$-4 = 2x$	$\frac{-2}{2} = \frac{2x}{2}$	$y = 2$	$2 = 2x$	$y = 6$
$\frac{-4}{2} = \frac{2x}{2}$	$x = -1$		$\frac{2}{2} = \frac{2x}{2}$	
$x = 2$			$x = 1$	

Επομένως, ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	2	-1	0	1	2
y	-2	0	2	4	6

3.3 (Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $Y=AX$)

1. Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα;

Δύο **ποσά** ονομάζονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού επί έναν αριθμό, πολλαπλασιάζονται και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου με τον ίδιο αριθμό.

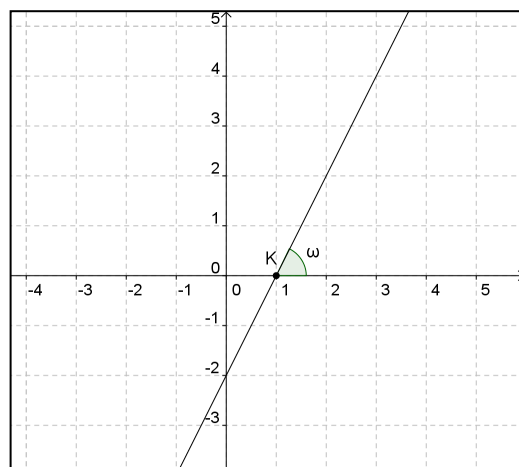
2. Ποια σχέση συνδέει δύο ανάλογα ποσά x και y ;

Αν x και y οι αντίστοιχες τιμές δύο ανάλογων ποσών, τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι σταθερός.

3. Τι ονομάζουμε γωνία ω μιας ευθείας ε με τον άξονα $x'x$;

Αν μια ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο K , τότε αν η ημιευθεία Kx αν στραφεί κατά την θετική φορά (αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου) μέχρι να συμπίψει με την ευθεία ε , διαγράφει μια γωνία ω , η οποία ονομάζεται **γωνία ευθείας με τον $x'x$** .

Αν η ευθεία δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ τότε λέμε ότι η γωνία ω είναι 0, δηλαδή $\omega = 0^\circ$.



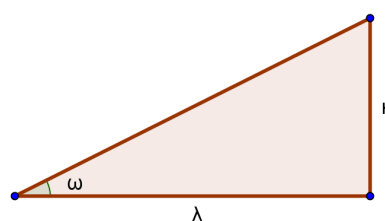
4. Πόσων μοιρών μπορεί να είναι η γωνία ευθείας με τον $x'x$;

Η γωνία ω μπορεί να είναι μεγαλύτερη ή ίση των 0° και μικρότερη των 180° , δηλαδή $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.

5. Τι ονομάζουμε εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου;

Εφαπτομένη οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζεται ο λόγος της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά και συμβολίζεται εφω δηλαδή:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\kappa}{\lambda}$$



6. Υπάρχει εφαπτομένη γωνίας 90° ;
Όχι δεν ορίζεται

7. Υπάρχει εφαπτομένη αμβλείας γωνίας;
Ναι, αλλά θα το μάθουμε σε μεγαλύτερη τάξη

8. Πως υπολογίζεται η εφαπτομένη μιας γωνίας;
Με την χρήση επιστημονικού υπολογιστή τσέπης.

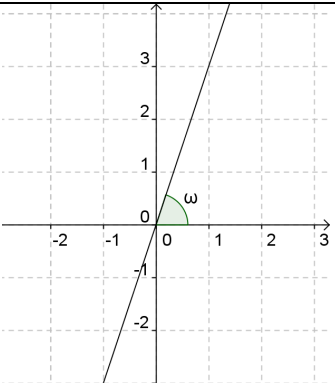
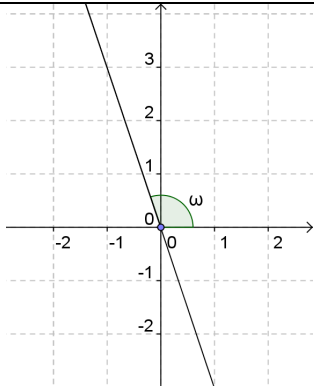
9. Τι ονομάζουμε κλίση ευθείας;
Κλίση ευθείας ονομάζεται η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει αυτή με τον άξονα $x'x$.

10. Τι εννοούμε όταν λέμε ότι ο δρόμος έχει 10% κλίση;
Εννοούμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{10}{100}$ ή $\varepsilon\varphi\omega = 0,1$

Σημαίνει δε, ότι σε κάθε 100 μέτρα που προχωρούμε οριζόντια, ανεβαίνουμε 10 μέτρα ύψος.

11. Ποια η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, όπου a πραγματικός αριθμός;
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$, είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και έχει κλίση ίση με a .

12. Ποια η συμπεριφορά της $y = ax$ για τις διάφορες τιμές του a ;

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
Παριστάνει τον άξονα $x'x$		
$\omega = 0^\circ$	$0^\circ < \omega < 90^\circ$	$90^\circ < \omega < 180^\circ$

13. Όταν μας δίνεται μια συνάρτηση της μορφής $y = ax$ πως κατασκευάζουμε την γραφική της παράσταση;

Γνωρίζοντας ότι είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων μας χρειάζεται ένα ακόμη σημείο για να χαράξουμε την ευθεία. Το δε σημείο βρίσκουμε δίνοντας μια οποιανδήποτε τιμή στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και υπολογίζοντας την εξαρτημένη μεταβλητή y από την εξίσωση της $y = ax$.

Παράδειγμα 12ο : Δίνονται οι παρακάτω πίνακες τιμών δύο ποσών:

x	3	9	2,7	-6	0,54	108
y	1	3	0,9	-2	0,18	36

x	1	2	4	6	8	10
y	2	4	6	8	10	12

Να εξεταστεί αν τα ποσά αυτά είναι ανάλογα. Στην περίπτωση που είναι να εκφραστεί το y ως συνάρτηση του x .

Λύση

(α) Από τον πρώτο πίνακα τιμών έχουμε:

$$\frac{3}{1} = 3, \frac{9}{3} = 3, \frac{2,7}{0,9} = 3, \frac{-6}{-2} = 3, \frac{0,54}{0,18} = 3, \frac{108}{36} = 3$$

Επομένως τα ποσά είναι ανάλογα. Ο λόγος των τιμών των ποσών είναι:

$$\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow 3y = x \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$$

(β) Από τον δεύτερο πίνακα τιμών έχουμε:

$$\frac{2}{1} = 2, \frac{4}{2} = 2, \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Επομένως τα ποσά δεν είναι ανάλογα.

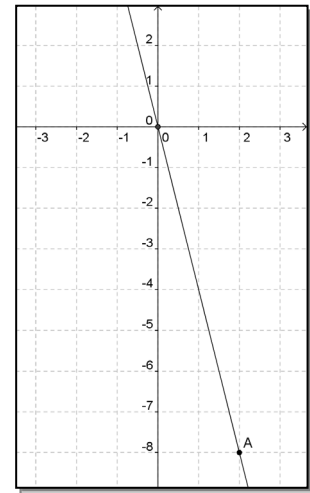
Παράδειγμα 13ο : Μια ευθεία περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2, -8)$

(α) Να σχεδιαστεί η ευθεία

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της συνάρτησης που παριστάνει την παραπάνω ευθεία.

Λύση

(α) Η ευθεία έχει σχεδιαστεί στο διπλανό σχήμα.



(β) Η συνάρτηση είναι της μορφής: $y = \alpha x$.

Οπότε επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο A, οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση $y = \alpha x$. Άρα είναι:

$$-8 = \alpha \cdot 2$$

$$\frac{-8}{2} = \frac{2\alpha}{2}$$

$$\alpha = -4$$

Συνεπώς η συνάρτηση έχει εξίσωση $y = -4x$.

Παράδειγμα 14ο : Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με κάθετες πλευρές $AB = 7\text{cm}$ και $ΑΓ = 11\text{cm}$.

(α) Να βρεθούν οι εφαπτομένες των οξείων γωνιών του τριγώνου.

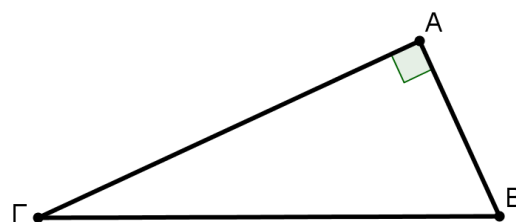
(β) Αν υπολογιστεί το γινόμενο $\varepsilon\phi B \cdot \varepsilon\phi \Gamma$ τι παρατηρείτε;

Λύση

(α) Είναι $\varepsilon\phi B = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{11}{7}$ και

$$\varepsilon\phi \Gamma = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{7}{11}$$

(β) Είναι $\varepsilon\phi B \cdot \varepsilon\phi \Gamma = \frac{11}{7} \cdot \frac{7}{11} = 1$



Παρατηρούμε ότι οι εφαπτομένες των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Παράδειγμα 15ο : Σε ένα σύστημα αξόνων xOy παίρνουμε το σημείο $A(3,4)$.

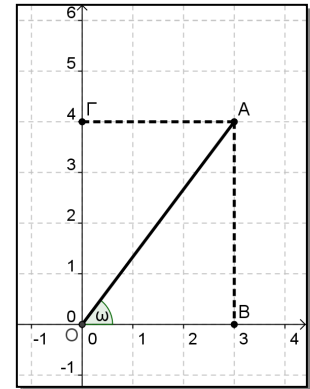
(α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της γωνίας $\hat{xOA}$.

(β) Τι εκφράζει ο λόγος $\lambda = \frac{\text{τεταγμένη του } A}{\text{τετμημένη του } A}$

Λύση

(α) Αν $\hat{AOB} = \omega$, τότε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{OB} = \frac{4}{3}$.

(β) Επειδή $\lambda = \frac{4}{3}$, εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{xOA}$.



Παράδειγμα 16ο : Στο διπλανό τρίγωνο να υπολογίσετε:

(α) την $\varepsilon\varphi\omega$

(β) την $\varepsilon\varphi\phi$

Λύση

(α) Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 15, 9, x :

$$15^2 = 9^2 + x^2$$

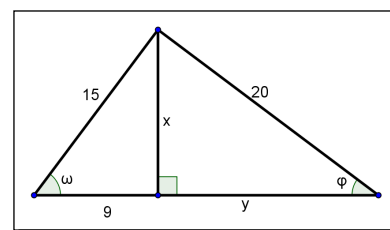
$$225 = 81 + x^2$$

$$225 - 81 = x^2$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144}$$

$$x = 12 \quad \text{Συνεπώς} \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$



(β) Εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές x , y , 20:

$$20^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow 400 = 144 + y^2 \Rightarrow 400 - 144 = y^2 \Rightarrow 256 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{256}$$

$$y = 16 \quad \text{Συνεπώς} \quad \varepsilon\varphi\phi = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	0,5	1	2	3	6
y	2,5	5	10	15	30

Να εξετάσετε αν τα ποσά είναι ανάλογα.

- 2) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	27	30	2	21	5
y	81	90	6	84	20

Να εξετάσετε αν τα ποσά είναι ανάλογα.

- 3) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

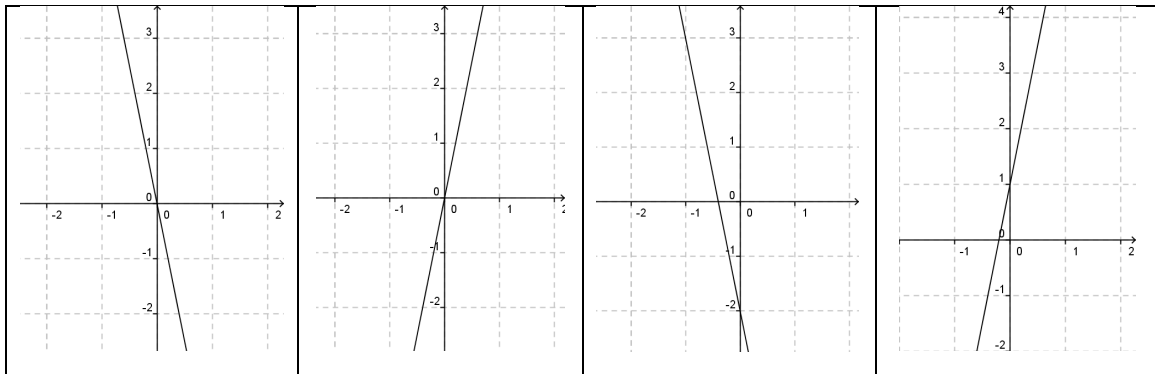
(α)	Η συνάρτηση $y = 0$ έχει γραφική παράσταση τον άξονα $y'y$.	
(β)	Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ έχει κλίση -2.	
(γ)	Η ηλικία του Απόστολου σήμερα είναι τετραπλάσια της ηλικίας της κόρης του Ιλάριας, άρα τα ποσά είναι ανάλογα.	
(δ)	Όλες οι ευθείες της μορφής $y = \lambda x$ όπου λ είναι πραγματικός αριθμός, διέρχονται από την αρχή των αξόνων.	
(ε)	Η συνάρτηση $y = (\sqrt{2} + 1)x$ δεν έχει γραφική παράσταση ευθείας.	

- 4) Σε κάθε ευθεία της Α στήλης να αντιστοιχίσετε την κλίση της στην Β στήλη.

Α		Β	
(α)	$y = 5x$	(i)	$\sqrt{2}$
(β)	$y = -\frac{1}{3}x$	(ii)	5
(γ)	$y = -\sqrt{2}x$	(iii)	$-\sqrt{2}$
(δ)	$y = -5x$	(iv)	$-\frac{1}{3}$
(ε)	$y = \sqrt{2}x$	(v)	-5

5) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Ποια από τις παρακάτω ευθείες είναι η $y = 5x$;



(β) Η ευθεία $y = -3x$ έχει κλίση:

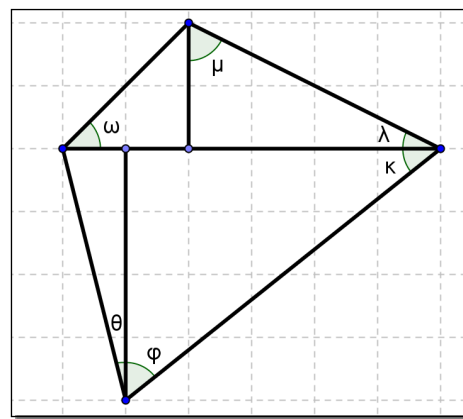
A.	$-\frac{1}{3}$	B.	-3	Γ.	3	Δ.	$\frac{1}{3}$
----	----------------	----	----	----	---	----	---------------

(γ) Οι τιμές $x = 10$ και $y = 6$ είναι τιμές των ανάλογων ποσών x και y . Ποιος από τους παρακάτω τύπους εκφράζει το y ως συνάρτηση του x ;

A.	$y = 0,6x$	B.	$y = \frac{10}{6}x$	Γ.	$y = -\frac{5}{3}x$	Δ.	$y = -\frac{3}{5}x$
----	------------	----	---------------------	----	---------------------	----	---------------------

6) Σε κάθε γωνία $\kappa, \lambda, \mu, \theta, \varphi, \omega$ του διπλανού σχήματος να αντιστοιχίσετε τη εφαπτομένη της.

A	B
(α) ω	(i) 2
(β) μ	(ii) $\frac{4}{5}$
(γ) λ	(iii) $\frac{1}{4}$
(δ) κ	(iv) 1
(ε) φ	(v) $\frac{1}{2}$
(στ) θ	(vi) $\frac{5}{4}$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	0,5	1	1,5	2	2,5
y	1,5	3	4,5	6	7,5

Να εξεταστεί αν τα ποσά είναι ανάλογα. Αν ναι, να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

- 2) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών δύο ποσών:

x	18	25	4	13	5
y	36	50	8	26	10

Να εξεταστεί αν τα ποσά είναι ανάλογα. Αν ναι, να εκφράσετε το y ως συνάρτηση του x .

- 3) Αν για 4 κιλά μανταρίνια πληρώνουμε 4,80 €, να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε για 9 κιλά μανταρίνια. Στη συνέχεια να εκφράζεται την αξία y των μανταρινιών ως συνάρτηση του βάρους x .

- 4) Με 6 κιλά αλεύρι γίνονται 24 πίτσες. Πόσα κιλά αλεύρι χρειάζονται για να γίνουν 120 πίτσες; Ποια είναι η συνάρτηση που εκφράζει την ποσότητα y των τεμαχίων της πίτσας συναρτήσει της ποσότητας x του αλευριού;

- 5) Αν σε διάστημα 4 ωρών, μια δεξαμενή δέχεται 300 λίτρα νερό, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	4		6		8
y		375		525	

- 6) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 2x$ και $y = -\frac{1}{2}x$.

- 7) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 3x$, $y = \frac{1}{3}x$ και $y = -3x$.

- 8) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -2x$ όταν $0 \leq x \leq 4$

- 9) Δίνεται η συνάρτηση $y = ax$. Να βρεθεί το a , αν η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(-2, 4)$.

- 10) Μια ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $K(3, 4)$. Να σχεδιάσετε την ευθεία αυτή και να βρείτε ποια συνάρτηση έχει την ευθεία αυτή για γραφική παράσταση.

3.4 (Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $Y=AX+B$)

1. Ποια η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + b$, όπου a, b πραγματικοί αριθμοί;

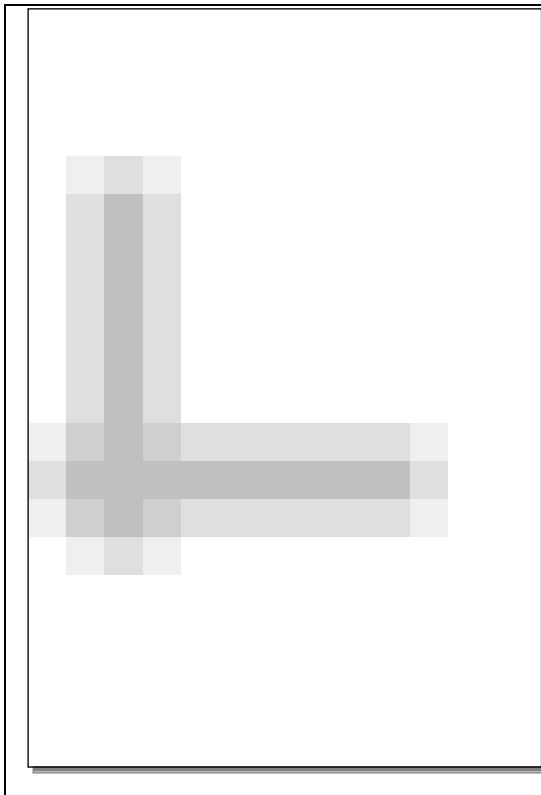
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + b$, $b \neq 0$ είναι μια ευθεία παράλληλη της ευθείας με εξίσωση $y = ax$, που διέρχεται από το σημείο $(0, b)$ του άξονα $y'y$.

2. Τι ονομάζουμε κλίση της ευθείας $y = ax + b$;

Κλίση της ευθείας $y = ax + b$ ονομάζεται ο συντελεστής a του x .

Παράδειγμα 17ο : Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -2x$, $y = -2x + 3$ και $y = -2x - 3$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.

Λύση



Η γραφική παράσταση της $y = -2x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Για να την σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε ένα ακόμη σημείο της. Δίνουμε στην εξίσωση $y = -2x$ μια τυχαία τιμή στη μεταβλητή x π.χ. $x = -1$ και υπολογίζουμε την αντίστοιχη τιμή του y : $y = -2 \cdot (-1) = 2$. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$. Ενώνουμε τα σημεία O και A και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της $y = -2x$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

	Η γραφική παράσταση της $y = -2x + 3$ είναι ευθεία παράλληλη με την $y = -2x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 3)$ Για τον σχεδιασμό της χρειαζόμαστε εκτός από το σημείο $(0, 3)$ ακόμη ένα σημείο. Αυτό μπορούμε να το βρούμε βάζοντας στη θέση της μεταβλητής y τον αριθμό 0 και λύνοντας την εξίσωση ως προς x. Έτσι: $0 = -2x + 3$ $2x = 3$ $\frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$ $x = \frac{3}{2}$ Συνεπώς η ευθεία διέρχεται εκτός του σημείου $(0, 3)$ και από το σημείο $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$. Ενώνουμε τα σημεία $(0, 3)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ και προεκτείνουμε. Η γραφική παράσταση της $y = -2x + 3$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
--	---

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1)** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:

(α)	Η ευθεία $y = -3x + 5$ είναι παράλληλη με την $y = -3x$.	
(β)	Η ευθεία $y = -3$ είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.	
(γ)	Η ευθεία $x = 4$ είναι κάθετη στον άξονα $x'x$.	
(δ)	Η ευθεία $y = \frac{2}{3}x - 1$ έχει αρνητική κλίση.	
(ε)	Το σημείο $(1, -1)$ είναι κοινό σημείο των ευθειών $y = 3x - 4$ και $y = -2x - 3$.	
(στ)	Η ευθεία $y = \sqrt{2}x - 3$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -3)$.	

- 2)** Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Η ευθεία $y = 2x - 1$ έχει κλίση:

- (α) 2 (β) -2 (γ) 1 (δ) -1 (ε) $\frac{1}{2}$

Η ευθεία με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x - 2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο:

- (α) $(1, 0)$ (β) $(0, -1)$ (γ) $(0, 1)$ (δ) $(-1, 0)$

Η ευθεία $y = 2x - 4$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο:

- (α) $(0, -4)$ (β) $(2, 0)$ (γ) $(4, 0)$ (δ) $(-4, 0)$

Μια ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$. Η εξίσωση της είναι:

- (α) $y = x$ (β) $y = 2x$ (γ) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (δ) $y = 3x - 2$

- 3)** Η ευθεία $y = -3x$ είναι παράλληλη προς την:

- (Α) $y = x - 3$ (Β) $y = x + 3$
 (Γ) $y = -3x + 7$ (Δ) $y = 3x - 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = -3x$, $y = -3x + 1$ και $y = -3x - 1$, όπου x ο πραγματικός αριθμός.
- 2) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης $y = 2x - 1$ όταν $-1 \leq x \leq 2$.
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $y = ax + b$.
(α) Να βρείτε τα a , b , αν είναι γνωστό ότι η ευθεία που την παριστάνει έχει κλίση 2 και ότι διέρχεται από το σημείο $(0, -3)$.
(β) Να βρείτε σε ποιο σημείο η παραπάνω ευθεία τέμνει τον άξονα $x'x$.
(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- 4) Να βρείτε σε ποιο σημείο τέμνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $y = 2x + 3$ και $y = -\frac{1}{2}x - 2$.
- 5) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιαστεί τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $x = -4$, $x = 1$, $y = -2$ και $y = 3$.
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.
(β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

3.5 (Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $Y=A/X$)

1. Ποια ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Δύο **ποσά** λέγονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν το γινόμενο τους είναι σταθερό.

2. Με ποια σχέση συνδέονται δύο ποσά αντιστρόφως ανάλογα.

Αν $\alpha \neq 0$ είναι το σταθερό γινόμενο δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών x και y , τότε οι τιμές του y εκφράζονται ως συνάρτηση των τιμών του x με την ισότητα $y = \frac{\alpha}{x}$

3. Τι ονομάζουμε υπερβολή;

Υπερβολή λέγεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου $\alpha \neq 0$ με $x \in \mathbb{R}^*$.

4. Ποια η γραφική παράσταση της συνάρτησης υπερβολής, όπου a πραγματικός αριθμός;

--	--

5. Πως ονομάζονται οι δύο καμπύλες της υπερβολής;

Οι δύο καμπύλες της υπερβολής ονομάζονται **κλάδοι** της **υπερβολής**.

6. Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκονται οι κλάδοι της υπερβολής;

Αν $\alpha > 0$ βρίσκονται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόρια.

Αν $\alpha < 0$ βρίσκονται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόρια.

7. Τι συμμετρίες έχει η υπερβολή;

Η υπερβολή έχει:

- ⊗ Κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
- ⊗ Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.

Παρατηρήσεις

1. Οι κλάδοι της υπερβολής δεν τέμνουν τους άξονες.
2. Οι μεταβλητές x και y δεν μπορούν να πάρουν την τιμή 0 .
3. Όσο πιο μικρό είναι το a τόσο πιο κοντά είναι η υπερβολή στην αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα 18ο : Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις υπερβολές:

$$y = \frac{3}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad y = -\frac{3}{x}, \quad x \neq 0.$$

Λύση

Σχηματίζουμε τους πίνακες τιμών:

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1	-1,5	-3	3	1,5	1

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	3	1,5	3	-3	-1,5	-1

Κατόπιν σχεδιάζουμε τις δύο υπερβολές.

Παράδειγμα 19ο : Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{2\kappa - 5}{x}$. Να βρεθεί το κ αν η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $(-3, 1)$.

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου $(-3, 1)$ επαληθεύουν την εξίσωση $y = \frac{2\kappa - 5}{x}$,
οπότε διαδοχικά έχουμε:

$$1 = \frac{2\kappa - 5}{-3}$$

$$2\kappa - 5 = -3$$

$$2\kappa = -3 + 5$$

$$2\kappa = 2$$

$$\kappa = 1$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1) Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις αντίστοιχες τιμές δύο ποσών x και y .

x	2	4	5	8	10
y	50	25	20	12,5	10

Να εξετάσετε αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

2) Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τις αντίστοιχες τιμές δύο ποσών x και y .

x	5	10	20	40	100
y	0,2	0,1	0,05	0,25	0,01

Να εξετάσετε αν τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

3) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω ερωτήσεις.

(α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{3}{5x}$ είναι υπερβολή.

(β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{x}{3}$ είναι υπερβολή.

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$ βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο.

(δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{-5}{x}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{3}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$.

(στ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{1}{5x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.

(ζ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{3}{x}$ τέμνει τον άξονα $y'y$.

(η) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{7}{x}$ και $y = \frac{-5}{x}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να σχεδιάσετε τις υπερβολές:

(α) $y = \frac{4}{x}$

(β) $y = \frac{4}{x}$

(γ) $y = -\frac{3}{x}$

(δ) $y = \frac{-7}{x}$

(ε) $y = \frac{1}{3x}$

(στ) $y = -\frac{4}{3x}$

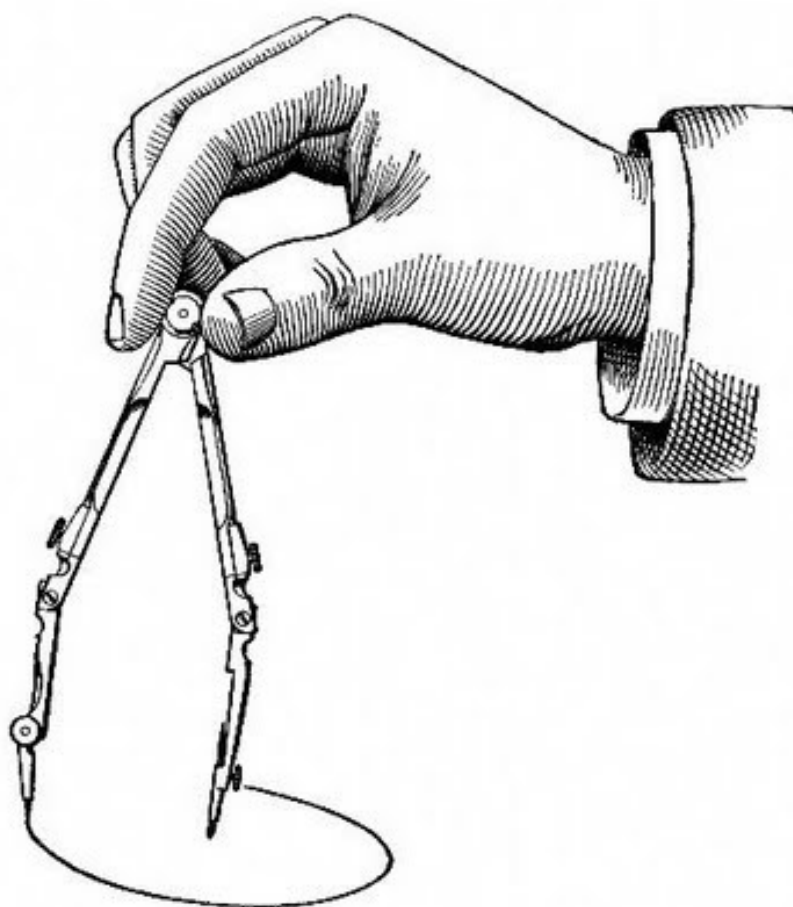
2) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{\alpha - 1}{x}$. Να βρείτε το α αν η γραφική της παράστας διέρχεται από το σημείο $(3, 1)$.

3) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$. Αν το σημείο $(5, -1)$ είναι σημείο της γραφικής της παράστασης, να βρείτε τη συνάρτηση και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

4) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{3\kappa - 1}{x}$. Να βρείτε το κ , αν η γραφική της παράσταση όταν διέρχεται από το σημείο $(2, 1)$.

Β' Μέρος

Γεωμετρία



1.2 (ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

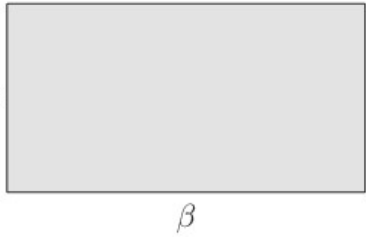
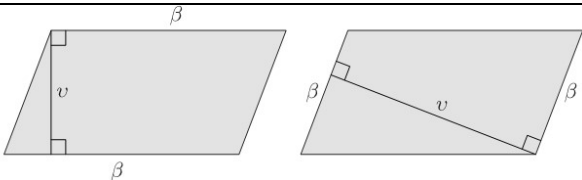
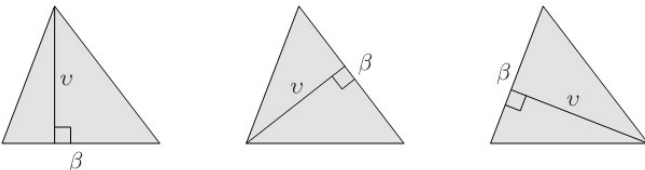
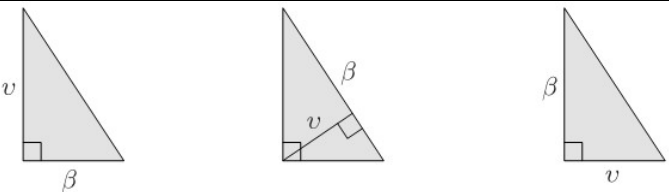
- 1) Να μετατρέψετε σε m^2 τα παρακάτω μεγέθη:
 $27cm^2$, $521km^2$, $720dm^2$, $13.760mm^2$
- 2) Να μετατρέψετε σε cm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
 $27m^2$, $521km^2$, $720dm^2$, $13.760mm^2$
- 3) Να μετατρέψετε σε mm^2 τα παρακάτω μεγέθη:
 $27cm^2$, $521km^2$, $720dm^2$, $13km^2$
- 4) Να μετατρέψετε σε Km^2 τα παρακάτω μεγέθη:
 $2.700.000cm^2$, $521.000m^2$, $720dm^2$, $13.760.000.000mm^2$
- 5) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

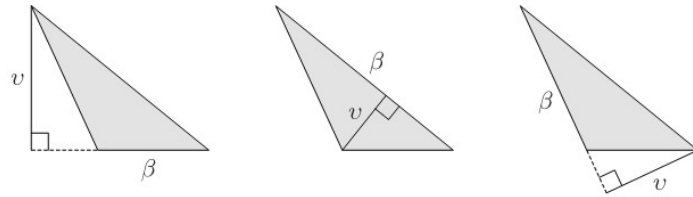
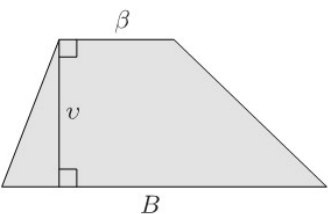
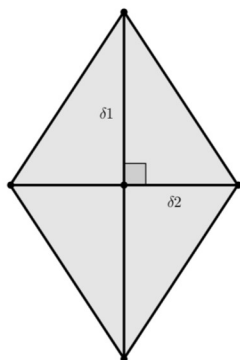
m^2	dm^2	cm^2	mm^2
2,3			
	450		
		6900	
			3902300

1.3 (ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

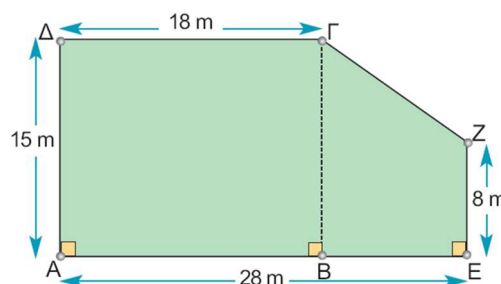
- ✚ Να γνωρίζουμε τους τύπους υπολογισμού εμβαδών επίπεδων σχημάτων
- ✚ Να μπορούμε να εφαρμόζουμε συνδυαστικά τους τύπους σε αντίστοιχα προβλήματα

Ονομασία	Σχήμα	Εμβαδόν
Τετράγωνο		$E = \alpha^2$
Ορθογώνιο		$E = \alpha \cdot \beta$
Παραλληλόγραμμο		$E = \beta \cdot v$
Οξυγώνιο τρίγωνο		$E = \frac{\beta \cdot v}{2}$
Ορθογώνιο τρίγωνο		$E = \frac{\beta \cdot v}{2}$

Αμβλυγώ- νιο τρί- γωνο		$E = \frac{\beta \cdot v}{2}$
Τραπεζίο		$E = \frac{(B + \beta) \cdot v}{2}$
Ρόμβος		$E = \frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

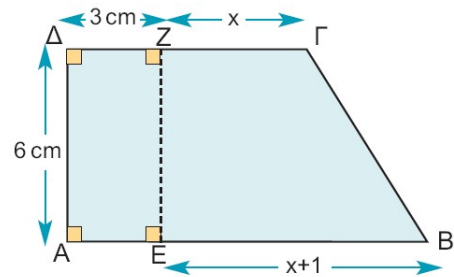
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδό 50 και το μήκος του είναι 2. Πόσο είναι το πλάτος του;
- 2) Η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 32cm . Να υπολογίσετε το εμβαδό του.
- 3) Σε ένα τρίγωνο ABΓ γνωρίζουμε ότι το μήκος της πλευράς AB ισούται με 9cm, το μήκος της πλευράς ΑΓ ισούται με 6cm, το μήκος της πλευράς ΒΓ ισούται με 5cm και το μήκος του ύψους ΓΕ είναι 3cm.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδό το τριγώνου ABΓ.
β) Να υπολογίσετε τα μήκη των υψών ΑΔ και ΒΖ.
- 4) Ένα χωράφι έχει σχήμα ορθογώνιο και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του.
α) Πόσα στρέμματα είναι το εμβαδό του αν γνωρίζουμε ότι η περίμετρός του είναι 1500m;
β) Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο ιδιοκτήτης του αν το πουλήσει προς €700 το στρέμμα;
- 5) Σε ένα τραπέζιο η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης. Αν το ύψος του τραπέζιου είναι 8cm και έχει εμβαδό 60cm², να υπολογίσετε τα μήκη των δύο βάσεων του παραπάνω τραπέζιου.
- 6) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 24cm και η υποτείνουσα του είναι 10cm. Να βρείτε το εμβαδό του αν γνωρίζετε ότι η μία κάθετη πλευρά είναι κατά 2cm μεγαλύτερη από την άλλη.
- 7) Ένα οικόπεδο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, πωλείται προς 300 ευρώ το m². Ποια είναι η αξία του οικοπέδου; (Απ: 115.500 ευρώ)



8) Στο διπλανό σχήμα:

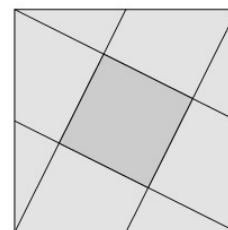
- α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x .
- β) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι το τριπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x .



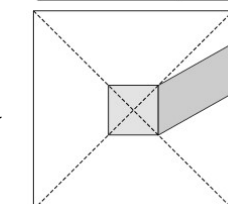
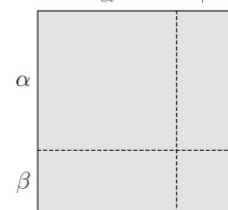
(Απ: $x=5,5$ cm)

- 9) Τραπεζίο έχει εμβαδόν 50 m^2 και ύψος 4 m . Να βρείτε τα μήκη των βάσεων του αν η μια είναι 5 m μεγαλύτερη από την άλλη.
- 10) Τετράγωνο με περίμετρο 48 cm είναι ισοδύναμο με ρόμβο που έχει μια διαγώνιο 36 cm . Να βρείτε το μήκος της άλλης του διαγωνίου.
- 11) Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο ορθογωνίου που έχει διαγώνιο 10 m και πλάτος 6 m .
- 12) Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 20 cm και η μια διαγώνιος του 8 cm . Να βρείτε το εμβαδόν του.
- 13) Τετράγωνο έχει περίμετρο 36 m και εμβαδόν μικρότερο κατά 15 m^2 από το εμβαδόν παραλληλόγραμμου. Αν το ύψος του παραλληλόγραμμου είναι τα $\frac{2}{3}$ της βάσης του να βρείτε το μήκος της βάσης του και το ύψος του.
- 14) Η περίμετρος ορθογωνίου είναι 30 cm και το μήκος του 10 cm . Το εμβαδόν τραπεζίου είναι κατά 10 cm^2 μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου. Οι βάσεις του τραπεζίου είναι 8 cm και 12 cm . Να βρείτε το ύψος του τραπεζίου.
- 15) Ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6 cm και 8 cm . Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του τριγώνου.
- 16) Τετράγωνο είναι ισεμβαδικό με ορθογώνιο που έχει μήκος 18 cm και περίμετρο 52 cm . Να βρείτε την περίμετρο του τετραγώνου.
- 17) Τετράγωνο είναι ισοδύναμο με ρόμβο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 48 m και η μια διαγώνιος του ρόμβου είναι 18 cm , να βρείτε την άλλη διαγώνιο του ρόμβου.
- 18) Ισοσκελές τραπέζιο έχει βάσεις 27 cm και 11 cm . Αν η περίμετρος του είναι 72 cm να βρείτε το εμβαδόν του.

- 19)** Τετράγωνο έχει περίμετρο 48 cm και είναι ισοδύναμο με παραλληλόγραμμο που η βάση του είναι τετραπλάσια του ύψους του. Να βρείτε τη βάση και το ύψος του παραλληλογράμμου.
- 20)** Η περίμετρος ορθογωνίου είναι 30 cm και το μήκος του 10 cm. Το εμβαδόν τραπεζίου είναι κατά 10 cm² μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου. Αν οι βάσεις του τραπεζίου είναι 9 cm και 11 cm, να βρείτε το ύψος του.
- 21)** Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10 cm και μια κάθετη πλευρά 6 m. Να βρείτε την άλλη κάθετη πλευρά, το εμβαδόν του και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του.
- 22)** Πόσο τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν ενός ορθογωνίου αν τριπλασιάσουμε τις πλευρές του;
(Απ. 800%)
- 23)** Πόσο τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν αυξήσουμε τις πλευρές του κατά 10%;
(Απ. 21%)
- 24)** Πόσο τοις εκατό θα ελαττωθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν ελαττώσουμε τις πλευρές του κατά 30%;
(Απ. 51%)
- 25)** Ενώνουμε κάθε κορυφή ενός τετραγώνου με το μέσο μιας πλευράς του έτσι ώστε να σχηματιστεί ένα μικρότερο εσωτερικό τετράγωνο:
Δείξτε ότι το μικρό τετράγωνο καλύπτει το 20% της επιφάνειας του μεγάλου τετραγώνου.



α β



- 26)** Αποδείξτε την ισότητα $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ με δύο τρόπους:
α) Πολλαπλασιάζοντας τις παρενθέσεις $(a + b)$ και $(a + b)$
β) Χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα:
- 27)** Στο διπλανό σχήμα, το εμβαδόν του μικρού τετραγώνου είναι 16 cm², και το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι 24 cm²:
Υπολογίστε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου

(Απ. 256 cm²)

- 28)** Οι διάμεσοι AM και BN ενός τριγώνου ABΓ τέμνονται στο σημείο K, το οποίο ενώνουμε με το Γ (δηλαδή φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΓ):

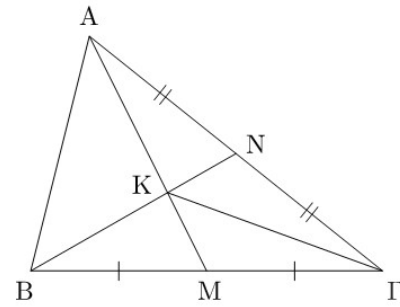
Αποδείξτε τις ισότητες:

(α) $(KMB) = (KMG)$ και $(KAB) = (KAG)$

(β) $(KNA) = (KNG)$ και $(KAB) = (KBG)$

(γ) $(KMG) = (KNG)$

(δ) $AK = 2 \cdot KM$ και $BK = 2KN$



- 29)** Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 32 cm , να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- 30)** Οι διαστάσεις ενός φύλλου A4 είναι 20 cm και 290 mm. Να υπολογίσετε πόση επιφάνεια έχει το φύλλο και πόση επιφάνεια έχει όλη η δεσμίδα των 500 φύλλων.
- 31)** Να κατασκευάσετε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να προεκτείνετε την πλευρά ΑΒ προς το Β και να πάρετε τμήμα ΒΕ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΒΓΕ έχουν το ίδιο εμβαδόν.

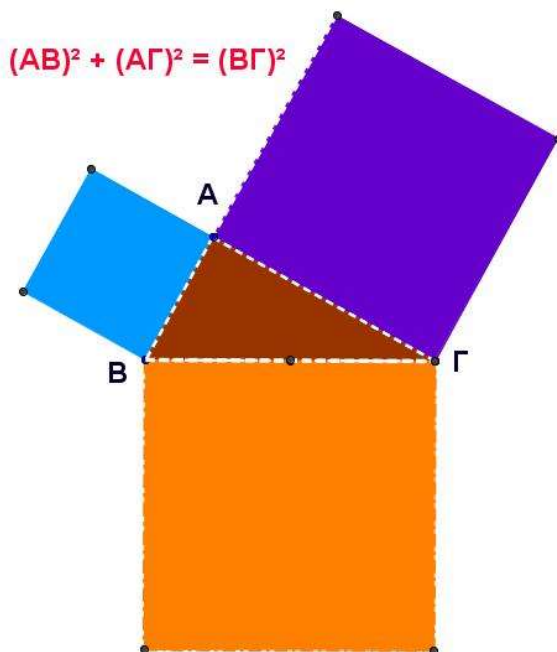
1.4 (ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ)

ΔΙΔΙΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- ✚ Η γεωμετρική ερμηνεία του του Πυθαγορείου Θεωρήματος
- ✚ Η αλγεβρική διατύπωση του ευθύ και αντίστροφο
- ✚ Εφαρμογές κάνοντας χρήση το Πυθαγόρειο Θεώρημα

ΤΟ ΕΥΘΥ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούς.

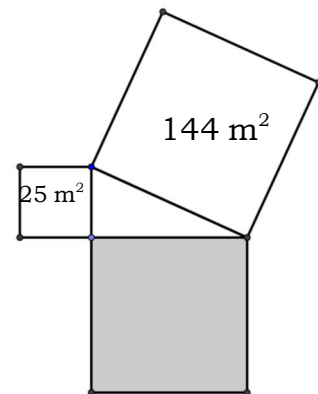


ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

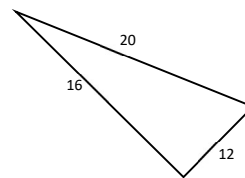
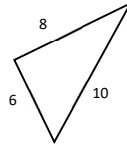
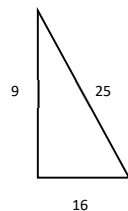
Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στο διπλανό σχήμα:

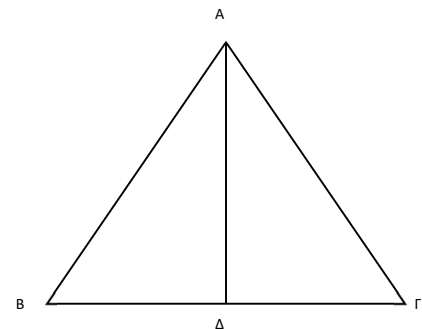


- 2) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια:



- 3) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 9, 12 και 15 cm. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει πλευρές το ένα τρίτο του ΑΒΓ αλλά και αυτό που έχει πλευρές τριπλάσιες από το ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

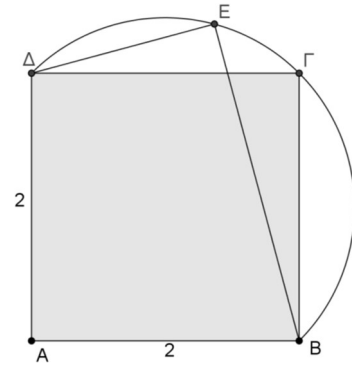
- 4) Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με $AB = AG = 15 \text{ mm}$ και $BΓ = 24 \text{ mm}$. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ του τριγώνου.



- 5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) με $AB=8\text{cm}$ και $AG=6\text{cm}$. Να υπολογίσετε:
- (α) το εμβαδόν του τριγώνου
 - (β) την υποτείνουσα ΒΓ
 - (γ) το ύψος προς την ΒΓ

- 6) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 48cm. Αν $AB = 3x - 3$, $A\Gamma = 3x + 1$ και $B\Gamma = 4x$
(α) Να βρεθεί το x (Απ. 5)
(β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο;

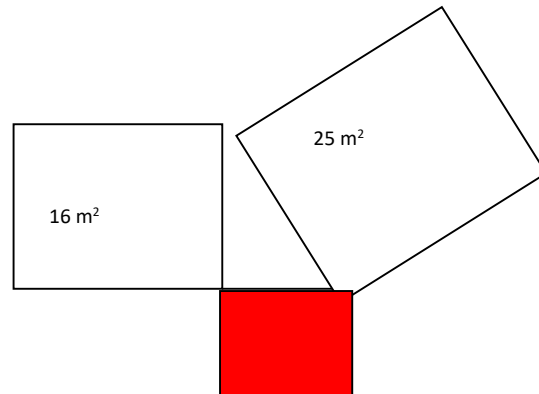
- 7) Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 2$, $\Delta E = \sqrt{3}$ και $BE = \sqrt{5}$. Να δείξετε ότι η γωνία $BE\Delta = 90^\circ$.



- 8) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) η μία κάθετη πλευρά είναι τριπλάσια της άλλης, αν η υποτείνουσα $B\Gamma = 20$ να βρεθούν:
(α) Οι κάθετες πλευρές του τριγώνου.
(β) Το ύψος προς την υποτείνουσα.
- 9) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 64cm. Αν $AB = 2x + 2$, $A\Gamma = 40 - 3x$ και $B\Gamma = 5x + 2$.
(α) Να βρεθεί το x .
(β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- 10) Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζετε ότι η υποτείνουσα είναι διπλάσια μιας κάθετης πλευράς και ότι η άλλη κάθετη πλευρά είναι 6cm.
- 11) Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 12cm, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.
- 12) Το μήκος της πλευράς ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 8cm. Να υπολογίσετε το ύψος του και το εμβαδόν του.
- 13) Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι $3\sqrt{3}$ cm. Να βρεθεί η πλευρά του και το εμβαδόν του.

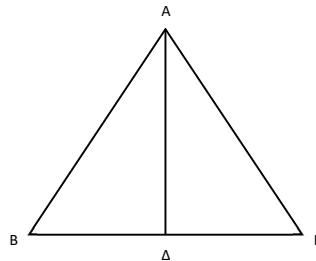
- 14)** Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ που έχει πλευρές $AB = \sqrt{8} \text{ cm}$, $A\Gamma = \sqrt{6} \text{ cm}$ και $B\Gamma = \sqrt{14} \text{ cm}$ είναι ορθογώνιο;
- 15)** Ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο 22 cm , αν η βάση του είναι 6 cm να βρεθεί το ύψος που αντιστοιχεί στην βάση του τριγώνου.
- 16)** Το ύψος ενός ισοπλεύρου τριγώνου είναι 7 cm . Να βρεθεί η πλευρά του και το εμβαδόν του.
- 17)** Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=A\Gamma=4 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τη $B\Gamma$, το ύψος AD και το εμβαδόν του.
- 18)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) είναι $a = 20 \text{ cm}$ και $\beta = \frac{4}{3}\gamma$. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές του και το εμβαδόν του.
- 19)** Να βρεθεί το εμβαδόν ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με υποτείνουσα $a = 10 \text{ cm}$.
- 20)** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 12 cm , E μέσο του AB και σημείο Z στη $B\Gamma$ ώστε $BZ = 3 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .
- 21)** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, $AB = 12 \text{ cm}$ και $A\Gamma = 9 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τη $B\Gamma$ και το εμβαδόν του.
- 22)** Δείξτε ότι το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς a είναι $u = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- 23)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) η $B\Gamma$ είναι μεγαλύτερη κατά 3 cm από την AB και η $A\Gamma = 9 \text{ cm}$. Να βρεθούν οι πλευρές του και το εμβαδόν του.
- 24)** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $AD = 12 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 16 \text{ cm}$ και $B\Delta = 9 \text{ cm}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- 25)** Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη 9 m , 15 m και 12 m . Να εξετάσετε αν το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.
- 26)** Το μήκος της πλευράς ενός ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 12 m . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το ύψος AD .

27) Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στο επόμενο σχήμα:



28) Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με μήκη πλευρών 9, 12 και 15 cm. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει πλευρές το ένα τρίτο του $AB\Gamma$ αλλά και αυτό που έχει πλευρές τριπλάσιες από το $AB\Gamma$, είναι επίσης ορθογώνιο.

29) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος είναι ισοσκελές με $AB=AG=15$ mm και $B\Gamma=24$. Να υπολογίσετε το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου.



30) Οι πλευρές ενός τριγώνου έχουν μήκη 9m, 15m και 12m. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

2.1 (ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- ✚ Τι ονομάζουμε εφαπτομένη γωνίας
- ✚ Τι ονομάζουμε κλίση ευθείας
- ✚ Τι ονομάζουμε κλίση δρόμου

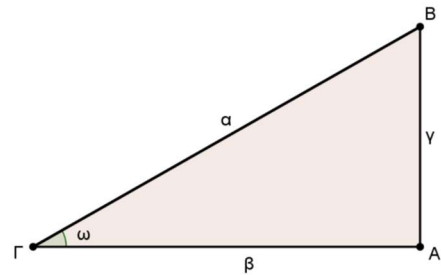
ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΛΟΓΟ ΔΥΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ;

Ονομάζουμε **λόγο** δύο **ευθυγράμμων τμημάτων**, που έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης, τον λόγο των μηκών τους.

ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑΣ;

Εφαπτομένη μιας **οξείας γωνίας** ενός ορθογωνίου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά της.

$$\text{π.χ. } \epsilon\phi\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$



ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΚΛΙΣΗ (Η ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ) ΕΥΘΕΙΑΣ;

ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΚΛΙΣΗ ΔΡΟΜΟΥ;

Κλίση δρόμου ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει ο δρόμος με την οριζόντια ευθεία και εκφράζεται επί τις εκατό.



Παράδειγμα 1ο : Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 20$ cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος $AB = 16$ cm, να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Λύση

Με το Πυθαγόρειο υπολογίζω την κάθετη πλευρά $A\Gamma$.

$$20^2 = 16^2 + A\Gamma^2$$

$$400 = 256 + A\Gamma^2$$

$$400 - 256 = A\Gamma^2$$

$$144 = A\Gamma^2$$

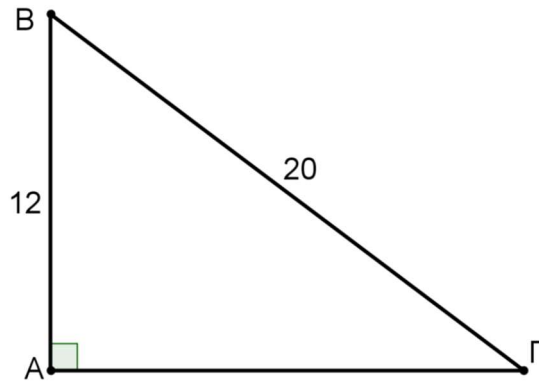
$$A\Gamma = \sqrt{144}$$

$$A\Gamma = 12$$

Έτσι:

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

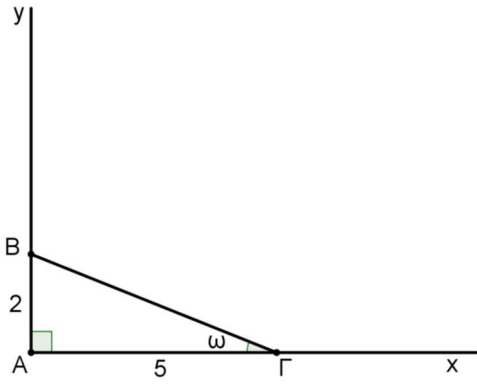
$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$



Παράδειγμα 2ο : Να σχεδιάσετε μια οξεία γωνία ω , με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2}{5}$.

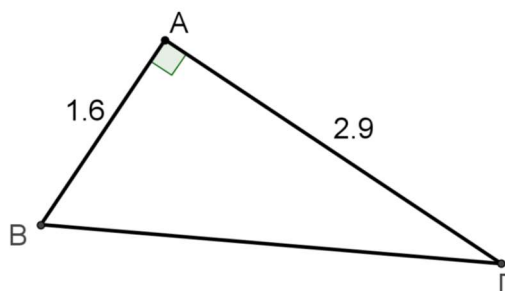
Λύση

1^ο βήμα	Κατασκευάζω μια ορθή γωνία $x\hat{A}y$.
---------------------------	---

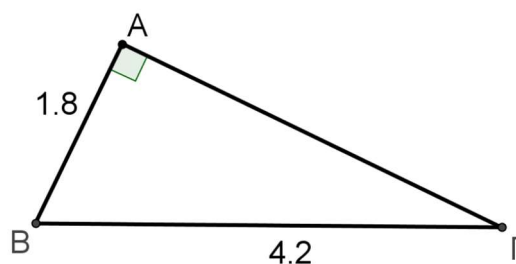
2^ο βήμα 	Στην κατακόρυφη πλευρά Ay παίρνω τμήμα AB ίσο με τον αριθμητή του κλάσματος.
3^ο βήμα 	Στην οριζόντια πλευρά Ax παίρνω τμήμα ΑΓ ίσο με τον παρονομαστή του κλάσματος. Η γωνία $\widehat{A\Gamma B}$ είναι η ζητούμενη

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

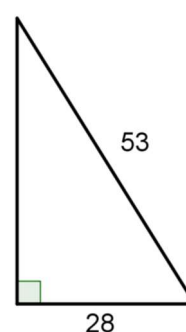
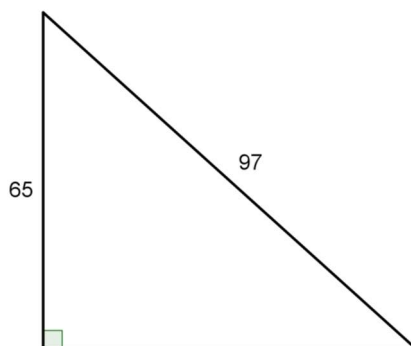
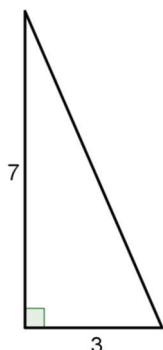
- 1) Να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των οξείων γωνιών στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο



- 2) Να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των οξείων γωνιών στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο.

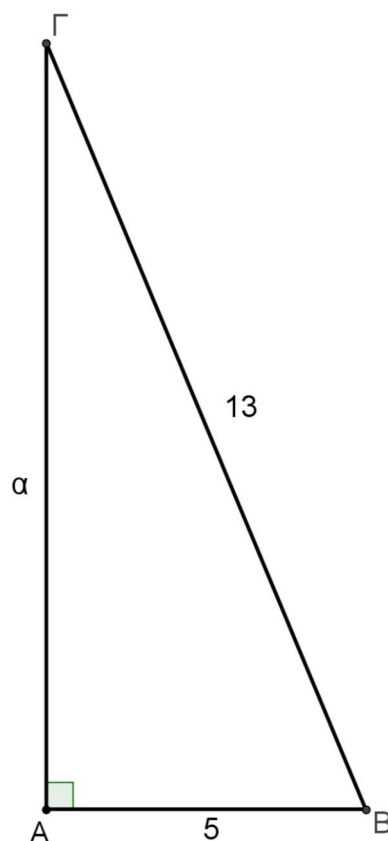


- 3) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη καθεμιάς οξείας γωνίας του καθενός από τα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:

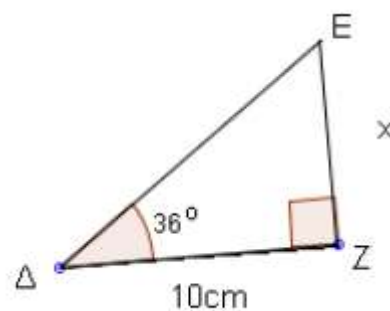


- 4) Να κατασκευάσετε μια γωνία $\hat{\omega}$ τέτοια ώστε $\text{εφ}\omega = 0,8$.
- 5) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB = 6\text{m}$ και $\text{εφ}\Gamma = 0,64$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΓ.
- 6) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ είναι $AB = 0,25\text{ΑΓ}$. Να υπολογίσετε την $\text{εφ}\text{Β}$ και την $\text{εφ}\Gamma$.

- 7) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ να υπολογίσετε την κάθετη πλευρά $A\Gamma = \beta$ και τις εφαπτομένες των οξείων γωνιών του.



- 8) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔEZ να υπολογίσετε την άγνωστη κάθετη πλευρά x κάνοντας χρήση της εφαπτομένης της οξείας γωνίας των 36° .



2.2 (ΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ)

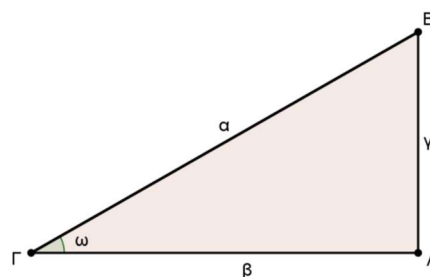
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ

- Τι ονομάζουμε ημίτονο γωνίας.
- Τι ονομάζουμε συνημίτονο γωνίας.
- Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο και συνημίτονο.
- Ποια σχέση συνδέει τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη.

ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ;

Ημίτονο μιας **οξείας γωνίας** ενός ορθογώνιου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

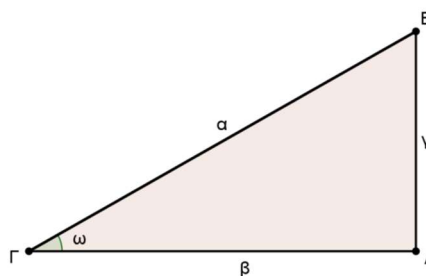
$$\text{π.χ. } \eta\mu\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$



ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΓΩΝΙΑΣ;

Συνημίτονο μιας **οξείας γωνίας** ενός ορθογώνιου τριγώνου ονομάζουμε το πηλίκο της προσκείμενης κάθετης πλευράς προς την υποτείνουσα.

$$\text{π.χ. } \sigma\upsilon\eta\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$



ΜΕΤΑΞΥ ΠΟΙΩΝ ΤΙΜΩΝ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΤΟ ΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΤΟ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΜΙΑΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ω ;

$$0 < \eta\mu\omega < 1$$

$$0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

ΠΟΙΑ ΣΧΕΣΗ ΣΥΝΔΕΕΙ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΗΜΙΤΟΝΟ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ;

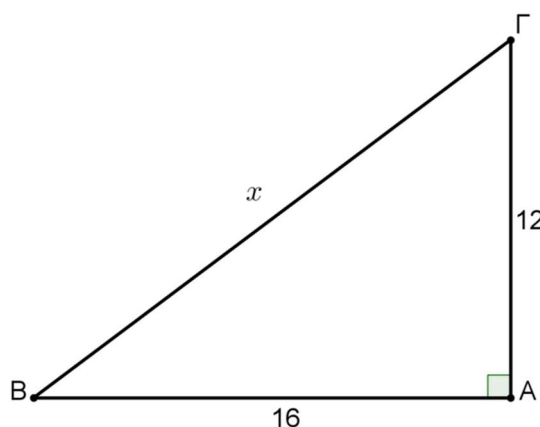
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

ΠΟΙΑ Η ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΗΜΙΤΟΝΩΝ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ) ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ;

1. Το ημίτονο μιας οξείας γωνίας ισούται με το συνημίτονο της συμπληρωματικής της.
2. Το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ισούται με το ημίτονο της συμπληρωματικής της.

Παράδειγμα 3ο : Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και κάθετες πλευρές με μήκη 12 και 16. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $\hat{B}$.

Λύση



Με το Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζω την υποτείνουσα x .

$$x^2 = 16^2 + 12^2$$

$$x^2 = 256 + 144$$

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400}$$

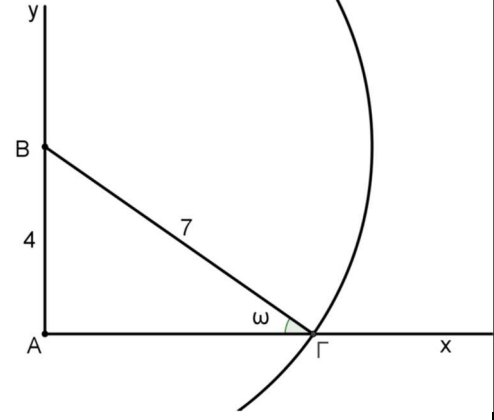
$$x = 20$$

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

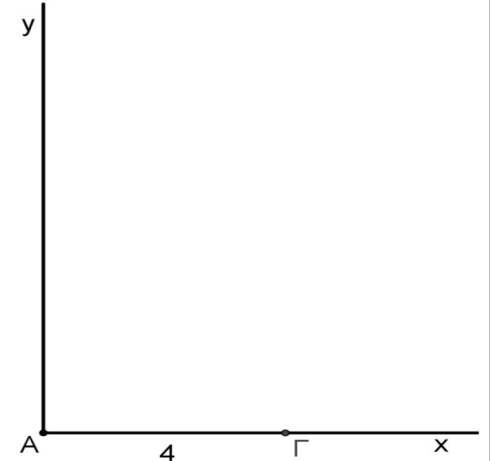
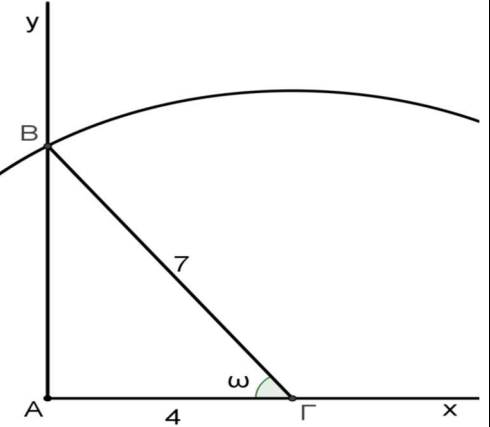
Παράδειγμα 4ο : Να σχεδιάσετε μια οξεία γωνία ω , με $\eta\mu\omega = \frac{4}{7}$.

Λύση

1^ο βήμα 	Κατασκευάζω μια ορθή γωνία $x\hat{A}y$.
2^ο βήμα 	Στην κατακόρυφη πλευρά Ay παίρνω τμήμα AB ίσο με τον αριθμητή του κλάσματος.
3^ο βήμα 	Με κέντρο το B και ακτίνα ίση με τον παρονομαστή του κλάσματος γράφω κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά Ax της γωνίας στο Γ. Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι η ζητούμενη γωνία ω.

Παράδειγμα 5ο : Να σχεδιάσετε μια οξεία γωνία ω , με $\sin \omega = \frac{4}{7}$.

Λύση

1^ο βήμα 	Κατασκευάζω μια ορθή γωνία $\hat{x}Ay$.
2^ο βήμα 	Στην οριζόντια πλευρά Ax παίρνω τμήμα $A\Gamma$ ίσο με τον αριθμητή του κλάσματος.
3^ο βήμα 	Με κέντρο το Γ και ακτίνα ίση με τον παρονομαστή του κλάσματος γράφω κύκλο, ο οποίος τέμνει την πλευρά Ay της γωνίας στο B. Η γωνία $\hat{A}\Gamma B$ είναι η ζητούμενη γωνία ω.

2.4 (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 30, 45 ΚΑΙ 60 ΜΟΙΡΩΝ)

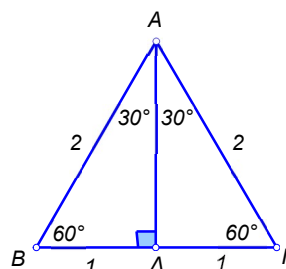
ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ

Ποιο είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30° , 45° και 60° .

ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΩΝ 30° ΚΑΙ 60° ;

Κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = B\Gamma = A\Gamma = 2$.

Φέρνουμε το ύψος $A\Delta$ που είναι και διάμεσος οπότε $B\Delta = \Delta\Gamma = 1$ και τη διχοτόμος της γωνίας A οπότε $\widehat{BA\Delta} = \widehat{GA\Delta} = 30^\circ$



Στο τρίγωνο $AB\Delta$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχουμε:

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$$

$$A\Delta^2 = 2^2 - 1^2$$

$$A\Delta^2 = 3$$

$$A\Delta = \sqrt{3}$$

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \epsilon\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

ΠΩΣ ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΩΝ 45° ;

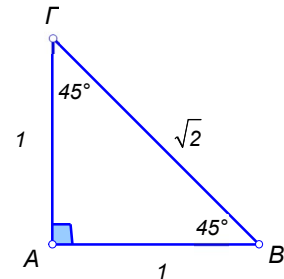
Κατασκευάζουμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 90^\circ)$, $AB = A\Gamma = 1$ τότε

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$B\Gamma^2 = 1^2 + 1^2$$

$$B\Gamma^2 = 2$$

$$B\Gamma = \sqrt{2}$$



$$\eta\mu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \epsilon\phi 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

ω	30°	45°	60°
$\eta\mu\omega$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi\omega$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Σχόλιο

Ένα από τα πιο δύσκολα προβλήματα στην εκμάθηση των Μαθηματικών στη σχολική διαδικασία είναι η απομνημόνευση των τριγωνομετρικών αριθμών των χαρακτηριστικών γωνιών 30° , 45° , 60° .

Ένα μνημονικό τέχνασμα της ανάκλησης στη μνήμη του παραπάνω πίνακα είναι :

Γράφουμε τους αριθμούς	1	2	4
Βάζουμε τετραγωνικές ρίζες	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$
Υπολογίζουμε αυτές όπου μπορούμε	1	$\sqrt{2}$	2
Διαιρούμε με το 2	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Έτσι έχουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° , 45° , 60° για το ημίτονο.

Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του συνημιτόνου απλά γράφουμε τους αριθμούς από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο, δηλαδή 1 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$

Για να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της εφαπτομένης διαιρούμε τις τιμές του ημιτόνου με τις αντίστοιχες του συνημιτόνου, δηλαδή:

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\epsilon\phi 45^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{2}} = 1$$

$$\epsilon\phi 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1) Τι ονομάζουμε κλίση ενός δρόμου; Πως εκφράζεται συνήθως η κλίση ενός δρόμου; Δώστε ένα παράδειγμα.
- 2) Ποια είναι η κλίση ενός οριζόντιου δρόμου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- 3) Τι ονομάζουμε εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ενός ορθογώνιου τριγώνου;
- 4) Τι ονομάζουμε ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογώνιου τριγώνου; Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με τι ισούται το $\eta\mu B$ και το $\eta\mu\Gamma$;
- 5) Τι ονομάζουμε συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογώνιου τριγώνου; Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Με τι ισούται το $\sigma\upsilon\nu B$ και το $\sigma\upsilon\nu\Gamma$;
- 6) Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και δικαιολογήστε τις ανισώσεις: α) $0 < \eta\mu B < 1$ β) $0 < \sigma\upsilon\nu B < 1$
- 7) Αν ω είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογώνιου τριγώνου, να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ β) $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ»

- 8) Στις παρακάτω προτάσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Ο λόγος της πλευράς a ενός τετραγώνου προς την διαγώνιό του δ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Σ Λ

β)	Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\varepsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{AB}$	Σ	Λ
γ)	Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\eta\mu B = \frac{B\Gamma}{AB}$	Σ	Λ
δ)	Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$	Σ	Λ
ε)	Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $0 < \eta\mu\omega < 1$	Σ	Λ
π)	Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega > 1$	Σ	Λ
ζ)	Για κάθε οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $0 < \varepsilon\phi\omega < 1$	Σ	Λ
η)	Αν ω είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	Σ	Λ
θ)	Αν ω είναι μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, τότε ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	Σ	Λ
ι)	Ισχύει $\varepsilon\phi 45^\circ = 1$	Σ	Λ
α)	Ισχύει $\varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	Σ	Λ

β)	Ισχύει $\epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$	Σ	Λ
γ)	Ισχύει $\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}$	Σ	Λ
δ)	Ισχύει $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$	Σ	Λ
ε)	Ισχύει $\eta\mu 60^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$	Σ	Λ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

- 9) Να συνδέσετε κάθε παράσταση της στήλης Α, με τον αριθμό της στήλης Β, με τον οποίο είναι ίση.

Στήλη Α	Στήλη Β
$\epsilon\phi 30^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\eta\mu 30^\circ$	2
$\sigma\upsilon\nu 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\eta\mu 45^\circ$	3
$\epsilon\phi 45^\circ$	$\frac{1}{2}$
$2\sqrt{3}\epsilon\phi 45^\circ \eta\mu 60^\circ$	1

$\sqrt{3}\epsilon\phi 60^{\circ}\sigma\upsilon\nu 60^{\circ}$	1,5
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

- 10)** Να διατάξετε από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη τις παραστάσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ.

$$A = \eta\mu 60^{\circ} - \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} - \epsilon\phi 60^{\circ}$$

$$B = \eta\mu^2 60^{\circ} + \sigma\upsilon\nu^2 60^{\circ}$$

$$\Gamma = \eta\mu^2 30^{\circ} - \sigma\upsilon\nu^2 30^{\circ}$$

$$\Delta = \epsilon\phi 30^{\circ}\epsilon\phi 60^{\circ} - \epsilon\phi 45^{\circ}$$

$$E = \epsilon\phi^2 60^{\circ} - \epsilon\phi^2 30^{\circ}$$

$$Z = (\epsilon\phi^2 60^{\circ} + \epsilon\phi^2 30^{\circ})^{-1}$$

ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

- 11)** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαγώνιο ΑΓ=4,5m και γωνία $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^{\circ}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.
- 12)** Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει η παράσταση: $\eta\mu 60^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^{\circ} + \eta\mu^2 45^{\circ} - 5\eta\mu^2 30^{\circ}$.
- 13)** Να υπολογιστεί ο πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει η παράσταση:
 $\epsilon\phi 45^{\circ} \cdot \epsilon\phi 30^{\circ} \cdot \epsilon\phi 60^{\circ} \cdot (\eta\mu 30^{\circ} + \eta\mu 45^{\circ} + \eta\mu 60^{\circ}) \cdot \sigma\upsilon\nu 30^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 45^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ}$.
- 14)** Παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ΑΒ=10m, περίμετρο 28m και γωνία $\hat{\Lambda} = 45^{\circ}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- 15)** Τραπεζίο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ έχει μήκη πλευρών ΑΒ= 2m, ΑΔ=3m και γωνίες $\hat{\Gamma} = 30^{\circ}$ και $\hat{\Lambda} = 60^{\circ}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

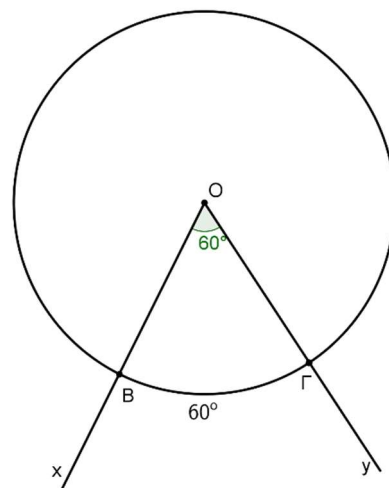
3.1 (ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

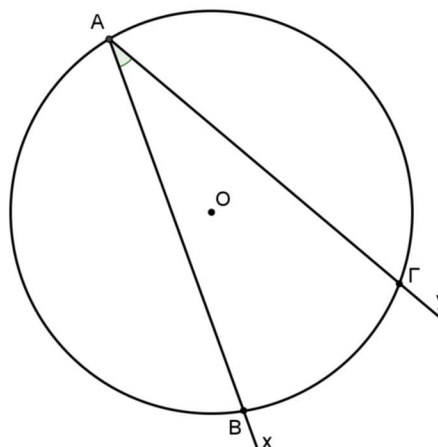
Επίκεντρη γωνία σε κύκλο (O, ρ) λέγεται μια γωνία $\widehat{xOy}$ της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο O του κύκλου.

Σημείωση

Το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου.



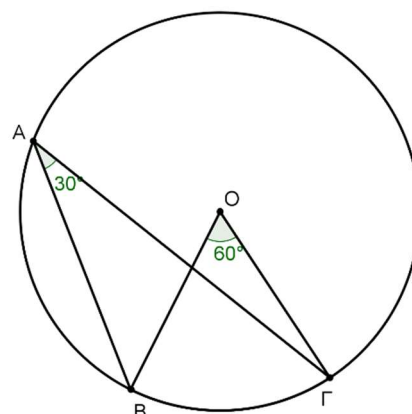
Εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο (O, ρ) λέγεται μια γωνία $\widehat{xAy}$ που η κορυφή της A ανήκει στον κύκλο (O, ρ) και οι πλευρές του Ax , Ay τέμνουν τον κύκλο.



Σημείωση

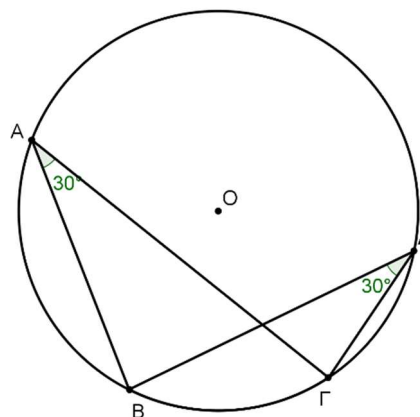
Αντίστοιχο τόξο της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{xAy}$ είναι το τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Η εγγεγραμμένη γωνίας $\widehat{xAy}$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

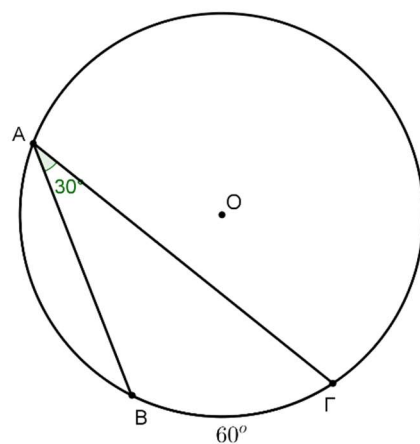


Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.

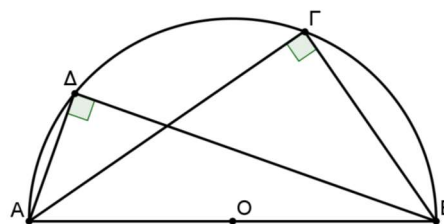
Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.



Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

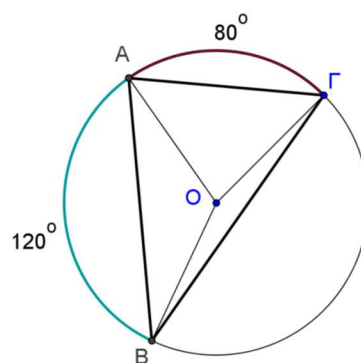
- 1) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι μικρότερη από 180° .
- 2) Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων είναι ίσες τότε και τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

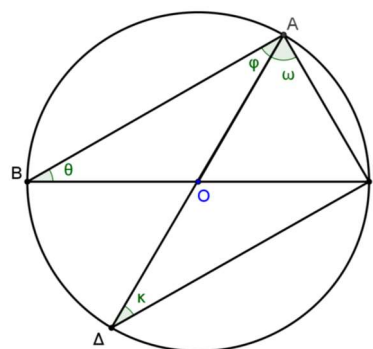
- 1) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:
- (α) Υπάρχει εγγεγραμμένη γωνία που δεν ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης
 - (β) Υπάρχουν εγγεγραμμένες γωνίες μεγαλύτερες των 180°
 - (γ) Αν σε ένα κύκλο φέρουμε δύο κάθετες χορδές τότε καθένα από τα τέσσερα τόξα είναι ίσα με 90°
 - (δ) Αν σε ένα κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους τότε κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε καθένα από τα τέσσερα ίσα τόξα είναι ίση με 45°
 - (ε) Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε τόξο 45° είναι 90° .
- 2) Να σημειώσετε Χ στο Σωστό (Σ) ή στο Λάθος (Λ), αν θεωρείτε ότι η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη
- (α) Οι πλευρές μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ακτίνες του κύκλου Σ ☐ Λ ☐
 - (β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου είναι ίση με το μισό κάθε επίκεντρης γωνίας του ίδιου κύκλου Σ ☐ Λ ☐
 - (γ) Η εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή Σ ☐ Λ ☐
 - (δ) Οι εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες Σ ☐ Λ ☐
 - (ε) Η επίκεντρη γωνία είναι ίση σε μοίρες με το μισό της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν Σ ☐ Λ ☐

ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

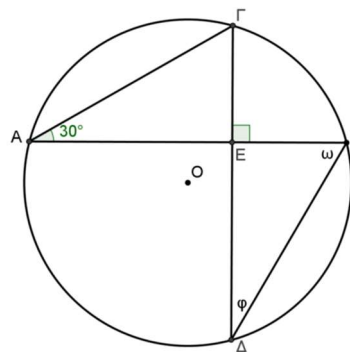
- 1) Σε κύκλο (O, ρ) έχουμε τα τόξα $\widehat{AB} = 80^\circ$ και $\widehat{AG} = 120^\circ$ όπως στο σχήμα. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου.



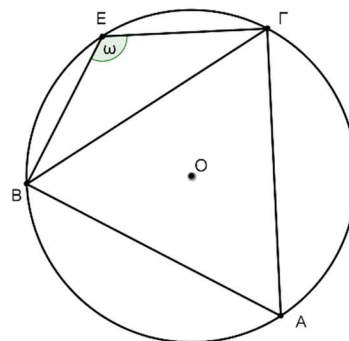
- 2) Θεωρούμε τον κύκλο (O, ρ) και την διάμετρο ΒΓ αυτού. Το σημείο Α είναι στον κύκλο. Αν το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισόπλευρο, να βρεθούν οι γωνίες φ , θ , ω και κ .



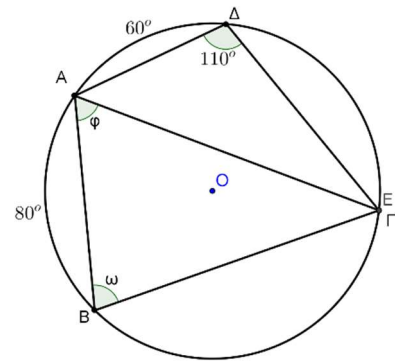
- 3) Στον κύκλο (O, ρ) έχουμε τις κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ε. Αν η εγγεγραμμένη γωνία ΓΑΒ είναι 30° να βρεθούν οι γωνίες ω , φ που είναι σημειωμένες στο σχήμα.



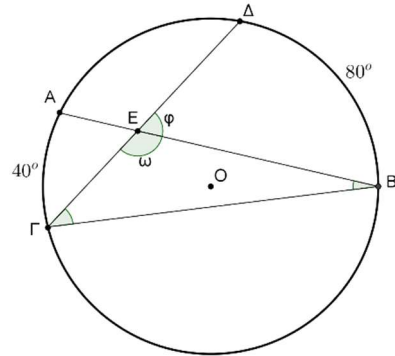
- 4) Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει τις κορυφές του στον κύκλο (O, ρ) . Το σημείο Ε είναι το μέσον του τόξου ΒΓ. Να βρεθεί το μέτρο της εγγεγραμμένης γωνίας ΒΕΓ.



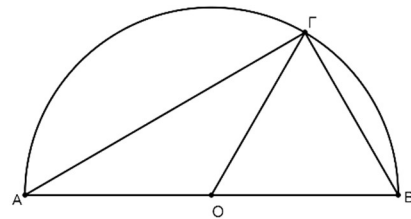
- 5) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές του στον κύκλο (O, ρ) . Αν είναι δεδομένα ότι: $\widehat{A\Delta} = 60^\circ$, $\widehat{AB} = 80^\circ$ και $\widehat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$. Να υπολογιστούν τα μέτρα των γωνιών ω , φ που είναι σημειωμένες στο σχήμα.



- 6) Στον κύκλο (O, ρ) θεωρούμε τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο E . Αν είναι γνωστό ότι: $\widehat{A\Gamma} = 40^\circ$ και $\widehat{B\Delta} = 80^\circ$ να υπολογιστούν οι γωνίες ω , φ που είναι σημειωμένες στο σχήμα.



- 7) Στο ημικύκλιο του σχήματος που έχει διάμετρο AB και κέντρο O , ισχύουν: $AB = 10$ και $\widehat{AO\Gamma} = 2\widehat{GOB}$. Να βρεθούν οι πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.

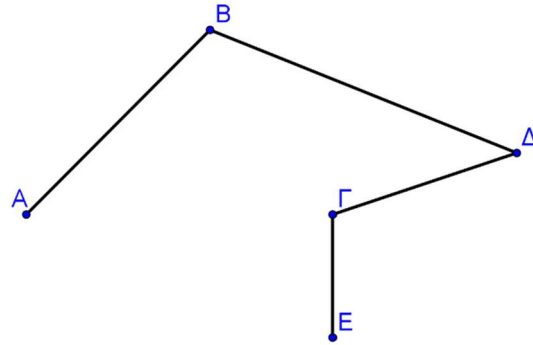


3.2 (ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ)

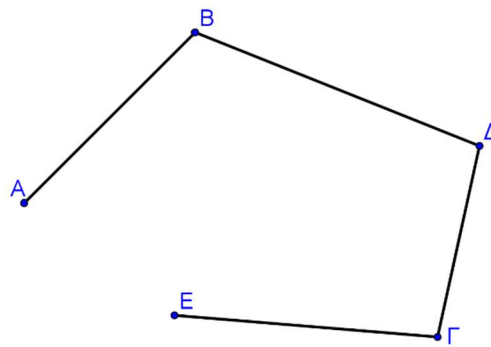
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

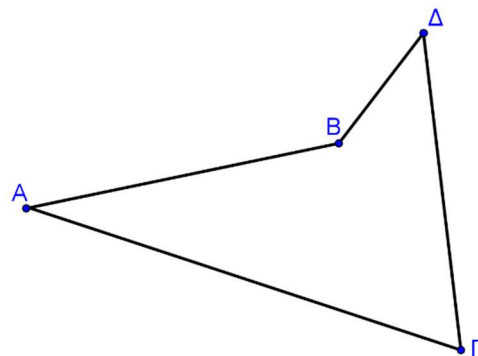
Τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία.



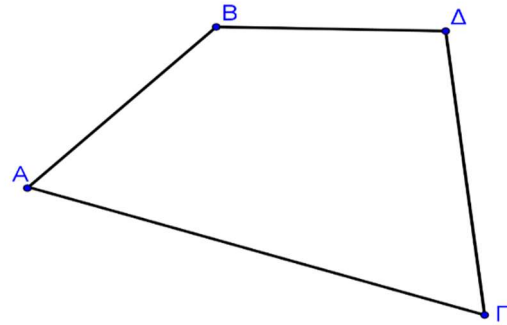
Κυρτή τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται η τεθλασμένη γραμμή όταν η προέκταση κάθε πλευράς της αφήνει όλες τις άλλες πλευρές στο ίδιο ημιεπίπεδο.



Ευθύγραμμο σχήμα ονομάζεται κάθε τεθλασμένη γραμμή, της οποίας τα άκρα συμπίπτουν.

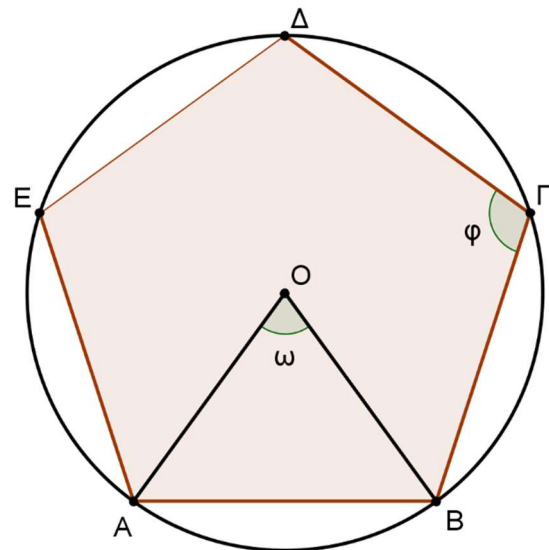


Πολύγωνο ονομάζεται το ευθύγραμμο σχήμα που είναι κυρτό.



ΟΡΙΣΜΟΙ

- 1) **ν-γωνο** ονομάζεται το πολύγωνο που έχει ν κορυφές. (π.χ τρίγωνο, πεντάγωνο, εξάγωνο, ...)
- 2) **Τετράπλευρο** ονομάζεται το πολύγωνο που έχει τέσσερις κορυφές.
- 3) **Κανονικό πολύγωνο** ονομάζεται το πολύγωνο που έχει όλες του τις πλευρές και όλες του τις γωνίες ίσες.
- 4) **Περιγεγραμμένος κύκλος κανονικού πολυγώνου** ονομάζεται ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του πολυγώνου.
- 5) **Εγγεγραμμένο πολύγωνο** ονομάζεται το πολύγωνο που όλες του οι κορυφές βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.
- 6) **Κεντρική γωνία ν-γώνου** ονομάζεται η επίκεντρη γωνία που βαίνει στο τόξο μιας οποιασδήποτε πλευράς του ν-γώνου και συμβολίζεται με το γράμμα ω .



$$\omega = \frac{360^\circ}{n}$$

- 7) **Γωνία ν-γώνου** ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του και συμβολίζεται με το γράμμα ϕ .

$$\phi = 180^\circ - \omega$$

- 8) Η γωνία ϕ ενός κανονικού ν-γώνου είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας του ν-γώνου.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

- Κατασκευάζουμε κύκλο (O, ρ) και επίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$
- Παίρνουμε διαδοχικά (με το διαβήτη) n τόξα ίσα με το $\widehat{AB}$
- Φέρουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Το κανονικό τρίγωνο είναι το ισόπλευρο τρίγωνο
- Το κανονικό τετράπλευρο είναι το τετράγωνο
- Υπάρχουν n -γωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες και δεν είναι κανονικά (π.χ. ο ρόμβος)
- Υπάρχουν n -γωνα που έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες και δεν είναι κανονικά (π.χ. το ορθογώνιο)
- Όταν έχουμε ένα κανονικό n -γωνο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό $2n$ -γωνο φέρνοντας τις διχοτόμους των κεντρικών γωνιών του n -γώνου.
- Όταν έχουμε ένα $2n$ -γωνο με $n \geq 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα n -γωνο ενώνοντας κορυφή παρά κορυφή.
- Όλα τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο αριθμό κορυφών έχουν κέντρο συμμετρίας το κέντρο του περιγεγραμμένου τους κύκλου
- Όλα τα κανονικά πολύγωνα με περιττό αριθμό κορυφών δεν έχουν κέντρο συμμετρίας.
- Όλα τα κανονικά πολύγωνα είναι εγγεγραμμένα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:
- (α) Ένα πολύγωνο που έχει όλες τις γωνίες του ίσες είναι κανονικό.
 - (β) Ένα κανονικό πολύγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες.
 - (γ) Η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου και η κεντρική του γωνία είναι συμπληρωματικές.
 - (δ) Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού n -γώνου είναι ίση με $\frac{360^\circ}{n}$.
 - (ε) Δεν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία αμβλεία.
 - (στ) Η πλευρά ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, ρ) είναι ίση με ρ .
 - (ζ) Το κανονικό πεντάγωνο έχει όλες τις γωνίες του αμβλείες.
 - (η) Υπάρχει κανονικό πολύγωνο τέτοιο, ώστε η πλευρά του να είναι ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.
 - (θ) Υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία 35° .
 - (ι) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι κανονικό πολύγωνο.

- 2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Η κεντρική γωνία ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι:

A. 30° B. 60° Γ. 120° Δ. 150°

(β) Το κανονικό πολύγωνο με γωνία 120° είναι:

A. τρίγωνο B. πεντάγωνο
Γ. εξαγώνο Δ. κανένα από τα παραπάνω

(γ) Το κανονικό πολύγωνο του οποίου η πλευρά λ είναι ίση με την ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου κύκλου είναι:

A. τρίγωνο B. τετράγωνο
Γ. πεντάγωνο Δ. Εξάγωνο

(δ) Η γωνία φ και η κεντρική γωνία ω ενός πολυγώνου είναι:

- A. παραπληρωματικές B. συμπληρωματικές
Γ. διαφέρουν κατά 180° Δ. κανένα από τα προηγούμενα

(ε) Κανονικό πολύγωνο με αμβλεία κεντρική γωνία είναι:

- A. τρίγωνο B. τετράγωνο
Γ. πεντάγωνο Δ. κανένα από τα προηγούμενα

3) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε κανονικό πολύγωνο της 1^{ης} στήλης την κεντρική του γωνία στη 2^η στήλη:

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη
(α) τρίγωνο	(1) 45°
(β) τετράγωνο	(2) 36°
(γ) εξάγωνο	(3) 120°
(δ) δεκαπεντάγωνο	(4) 24°
(ε) οκτάγωνο	(5) 90°
(στ) δεκάγωνο	(6) 60°
(ζ) εικοσάγωνο	(7) 135°
	(8) 18°

4) Να αντιστοιχίσετε σε κάθε κανονικό πολύγωνο της 1^{ης} στήλης την κεντρική του γωνία στη 2^η στήλη:

1 ^η στήλη	2 ^η στήλη
(α) 135°	(1) δωδεκάγωνο
(β) 150°	(2) οκτάγωνο
(γ) 160°	(3) δεκαοκτάγωνο

5) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

n	ω	φ
3		
4		
5		
6		

ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

- 6)** Να υπολογιστεί η κεντρική γωνία ω και η γωνία φ ενός κανονικού οκταγώνου.
- 7)** Να υπολογιστεί η κεντρική γωνία ω και η γωνία φ ενός κανονικού πενταγώνου.
- 8)** Να υπολογιστεί η κεντρική γωνία ω και η γωνία φ ενός κανονικού δεκαπενταγώνου.
- 9)** Να βρεθεί ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία:
(α) 18° (β) 42° (γ) 120° (δ) 30°
- 10)** Ένα κανονικό οκτάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\rho = 5 \text{ cm}$. Να υπολογιστούν:
(α) η πλευρά του (β) το εμβαδόν του
- 11)** Κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία $\omega = 36^\circ$. Να βρείτε:
(α) το πλήθος των κορυφών του
(β) τη γωνία φ του πολυγώνου
- 12)** Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία:
(α) 1 ορθή (β) $\frac{2}{9}$ της ορθής
- 13)** Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευαστεί κανονικό εξάγωνο
- 14)** Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευαστεί τετράγωνο
- 15)** Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευαστεί κανονικό οκτάγωνο και να υπολογιστεί η γωνία του και η κεντρική του γωνία.
- 16)** Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευαστεί ισόπλευρο τρίγωνο και να υπολογιστεί η κεντρική του γωνία και το μήκος της πλευράς του, από την ακτίνα του κύκλου.
- 17)** Σε κύκλο (O, ρ) να κατασκευαστεί κανονικό πεντάγωνο και να υπολογιστεί η γωνία του.
- 18)** Σε ένα κανονικό πολύγωνο η γωνία του φ είναι τετραπλάσια της κεντρικής του γωνίας ω . Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.

3.3 (ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ)

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

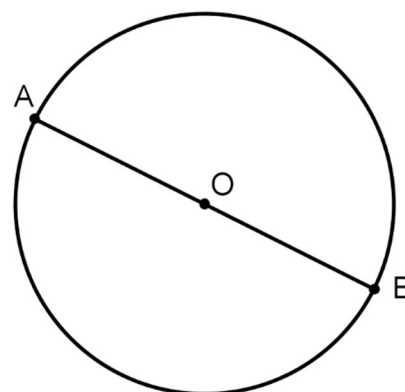
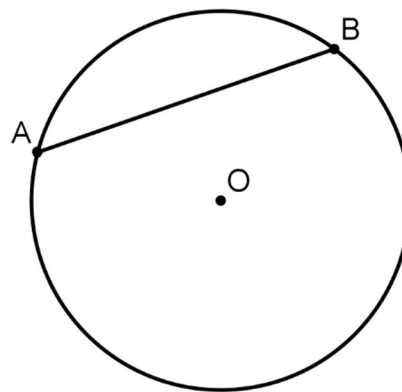
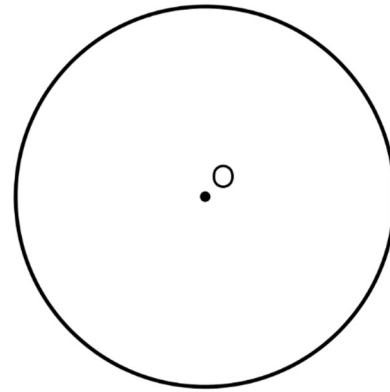
ΟΡΙΣΜΟΙ

Κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ λέγεται το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου ου απέχουν την ίδια απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο O . Συμβολίζεται με συντομία (O, ρ) .

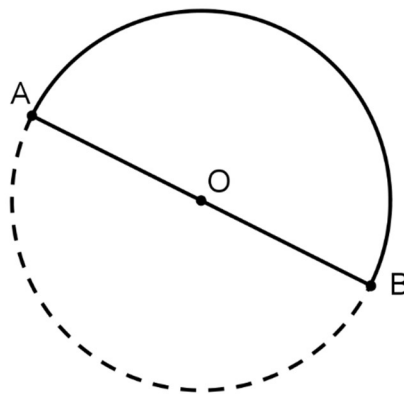
Δύο κύκλοι είναι ίση αν έχουν ίσες ακτίνες.

Χορδή κύκλου ονομάζεται κάθε ευθύγραμμο τμήμα με άκρα σημεία του κύκλου.

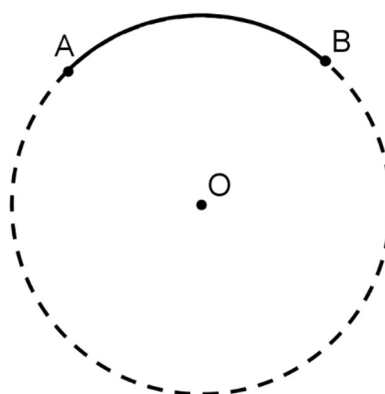
Διάμετρος κύκλου ονομάζεται κάθε χορδή του που περνάει από το κέντρο του. Έχει μήκος όσο δύο ακτίνες.



Ημικύκλιο ονομάζεται το ένα από τα δύο μέρη που χωρίζει μια διάμετρος έναν κύκλο.

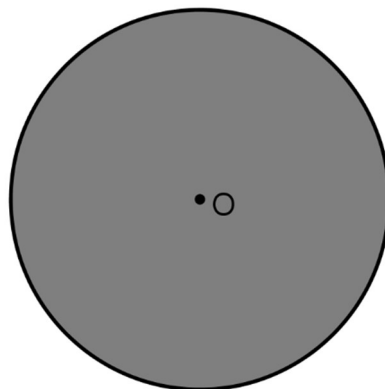


Τόξο κύκλου ονομάζεται ένα από τα δύο μέρη που χωρίζουν δύο σημεία ενός κύκλου τον κύκλο.



Κυκλικός δίσκος ονομάζεται ο κύκλος μαζί με το μέρος του επιπέδου που περικλείει.

Όλα τα σημεία του κυκλικού δίσκου απέχουν από το κέντρο του απόσταση μικρότερη ή ίση με την ακτίνα ρ .



ΟΡΙΣΜΟΣ

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τις σχέσεις: $L = \pi d$ ή $L = 2\pi r$

Παρατηρήσεις

- Θα χρησιμοποιούμε μια προσέγγιση του π στο εκατοστό, δηλαδή: $\pi = 3,14$.
- Το μήκος ενός κύκλου λέγεται και περίμετρος του κύκλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

(α) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $L = \pi\rho$.

(β) Αν L_1 και L_2 είναι τα μήκη δύο κύκλων με ακτίνες ρ και $\pi\rho$ τότε $\frac{L_1}{L_2} = \pi$

(γ) Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου τότε το μήκος του τετραπλασιάζεται.

(δ) Αν οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά π τότε τα μήκη τους διαφέρουν κατά π^2 .

2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν διπλασιάσουμε τη διάμετρο ενός κύκλου τότε το μήκος του:

- A. Διπλασιάζεται B. Τετραπλασιάζεται
Γ. Παραμένει το ίδιο Δ. Τίποτε από τα προηγούμενα

(β) Ένας κύκλος έχει μήκος 1.000 cm. Αν αυξήσουμε την ακτίνα του κατά 5 cm τότε το μήκος του αυξάνεται κατά:

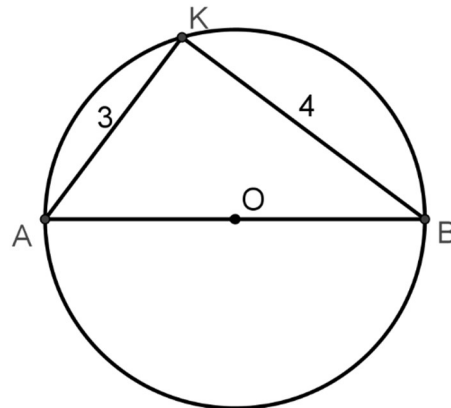
- A. 5 cm B. 31,4 cm
Γ. 62,8 cm Δ. 1.000 cm

(γ) Οι διάμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 1 m. Τα μήκη τους διαφέρουν κατά:

- A. 1 m B. 2 m
Γ. π m Δ. 2π m

ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

- 3) Ένας κύκλος έχει μήκος 624 cm. Να βρεθεί η ακτίνα του.
- 4) Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 3 : 4. Να βρεθεί ο λόγος:
(α) των διαμέτρων τους (β) των ακτινών τους
- 5) Οι ρόδες ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 5 dm. Να βρεθεί πόσες στροφές θα κάνουν αν διανύσουν διάστημα 1.570 m
- 6) Να κατασκευάσετε ένα κύκλο με διάμετρο AB και να φέρεται τις χορδές ΓΑ και ΓΒ. Αν είναι $ΓΒ = 12$ cm και $ΓΑ \cong 5$ cm να βρεθεί το μήκος του κύκλου.
- 7) Το μήκος ενός κύκλου είναι 56,52 cm. Να βρείτε την ακτίνα του.
- 8) Οι περίμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 75,36 cm. Να βρείτε πόσο διαφέρουν οι ακτίνες των κύκλων.
- 9) Σε κύκλο διαμέτρου AB φέρουμε τις χορδές KA και KB, ώστε $KA = 3$ cm και $KB = 4$ cm. Να βρείτε το μήκος του κύκλου.
- 10) Στον Αϊ Γιάννη Σερρών, υπάρχει ένας αιωνόβιος πλάτανος. Με την παλάμη του χεριού του ο Λευτέρης μέτρησε την περίμετρο του κορμού του. Τη βρήκε 32 παλάμες. Μετά μέτρησε το μήκος της παλάμης του και βρήκε 18 cm. Να βρείτε την ακτίνα του κορμού του πλάτανου.



ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.5 (ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου υπολογίζεται από τη σχέση: $E = \pi r^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Έχει επικρατήσει το εμβαδόν κυκλικού δίσκου να λέγεται και εμβαδόν κύκλου.
- 2) Κυκλικός δακτύλιος ονομάζεται το μέρος που περικλείεται από δύο ομόκεντρους κύκλους με τα σημεία των κύκλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ**ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ**

1) Να εξετάσετε αν είναι σωστές ή λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις:

(α) Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 2, αριθμητικά είναι ίσο με το μήκος του.

(β) Όταν το εμβαδόν του κύκλου διπλασιάζεται, τότε διπλασιάζεται και η ακτίνα του.

(γ) Το εμβαδόν ενός κύκλου μεταβάλλεται ανάλογα με τη διάμετρο του.

(δ) Για δύο κύκλους με ακτίνες ρ_1 και ρ_2 ισχύει: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}$.

2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

(α) Αν το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου είναι 64π , τότε η ακτίνα του είναι:

A. 64

B. 8

Γ. $\sqrt{8}$

Δ. $\frac{8}{\pi}$

(β) Αν η ακτίνα ενός κύκλου τριπλασιάζεται, τότε το εμβαδόν του:

A. Τριπλασιάζεται B. Εξαπλασιάζεται

Γ. Εννεαπλασιάζεται Δ. Δεν γνωρίζουμε
ται

(γ) Αν το μήκος ενός τεταρτοκυκλίου είναι π cm τότε το εμβαδόν του κύκλου είναι:

A. π^2 cm²

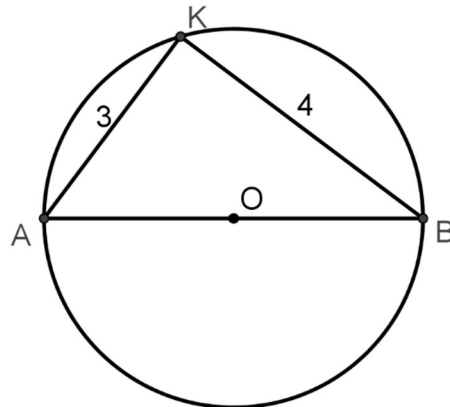
B. $2\pi^2$ cm²

Γ. $4\pi^2$

Δ. $8\pi^2$ cm

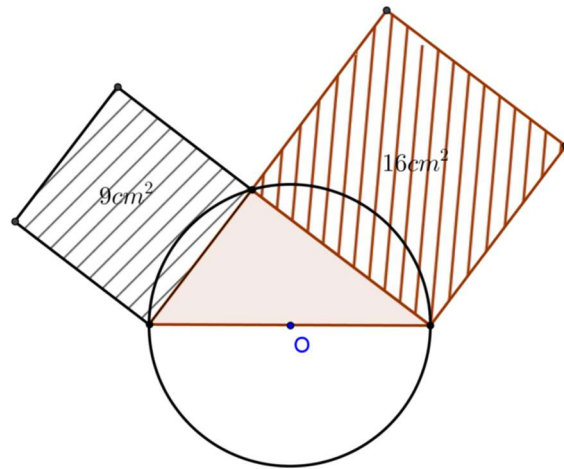
ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

- 3) Ένα DVD έχει ακτίνα 7 cm . Να υπολογίσετε την επιφάνεια του.
- 4) Ένα κυκλικό τραπέζι έχει διάμετρο 60 cm . Να βρείτε το μήκος του.
- 5) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $51,84 \text{ cm}^2$. Να βρεθεί η διάμετρος του.
- 6) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού δακτυλίου που περικλείεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων με ακτίνες $\rho_1 = 5 \text{ cm}$ και $\rho_2 = 10 \text{ cm}$.
- 7) Να κατασκευάσετε ένα κύκλο με διάμετρο AB και να φέρεται τις χορδές ΓΑ και ΓΒ. Αν είναι $\Gamma\text{B} = 12 \text{ cm}$ και $\Gamma\text{A} \cong 5 \text{ cm}$ να βρεθεί το εμβαδόν του κύκλου.
- 8) Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $56,52 \text{ cm}^2$. Να βρείτε την ακτίνα του.
- 9) Οι περιμέτροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 75,36 cm . Να βρείτε πόσο διαφέρουν τα εμβαδά των κύκλων.
- 10) Σε κύκλο διαμέτρου AB φέρουμε τις χορδές KA και KB, ώστε $\text{KA} = 3 \text{ cm}$ και $\text{KB} = 4 \text{ cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου.
- 11) Στον Αϊ Γιάννη Σερρών, υπάρχει ένας αιωνόβιος πλάτανος. Με την παλάμη του χεριού του ο Λευτέρης μέτρησε την περίμετρο του κορμού του. Τη βρήκε 32 παλάμες. Μετά μέτρησε το μήκος της παλάμης του και βρήκε 18 cm . Να βρείτε το εμβαδόν της τομής του κορμού του πλάτανου.



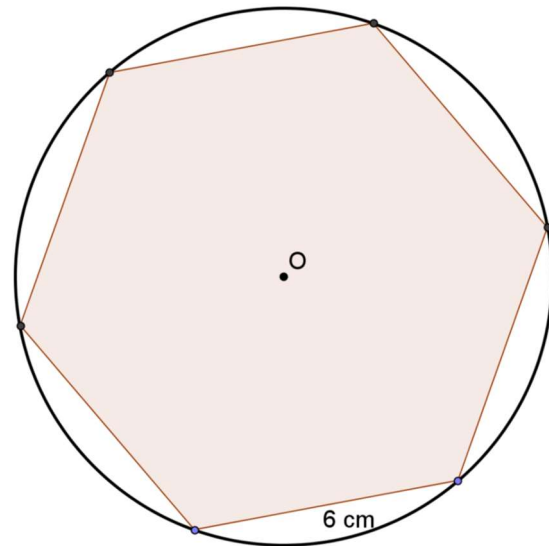
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

- 1) Να υπολογίσετε το μήκος L του κύκλου και το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου.



Απ. $E = 6,25 \text{ cm}^2$

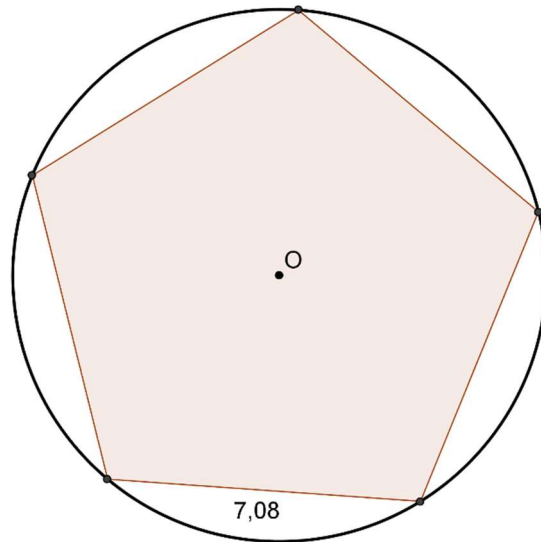
- 2) Το πολύγωνο στο διπλανό σχήμα είναι κανονικό εξάγωνο και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) . Η πλευρά του κανονικού εξαγώνου έχει μήκος 6 cm. Να υπολογίσετε το μήκος L και το εμβαδόν E του κύκλου.



Απ. $L = 12\pi \text{ cm}$

$E = 36\pi \text{ cm}^2$

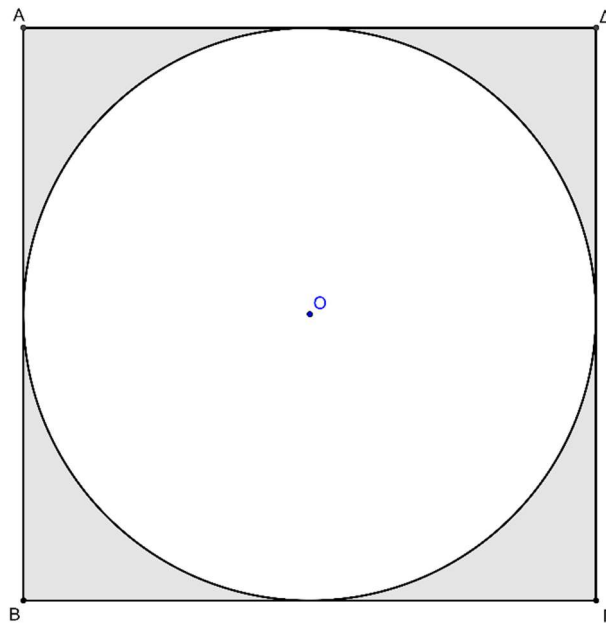
- 3) Το μήκος της πλευράς του διπλανού κανονικού πενταγώνου είναι $7,08 \text{ cm}$. Αν γνωρίζετε ότι $\eta\mu 36^\circ = 0,59$, να υπολογίσετε το μήκος L και το εμβαδόν E του περιγεγραμμένου του κύκλου.



Απ. $L = 12\pi \text{ cm}$

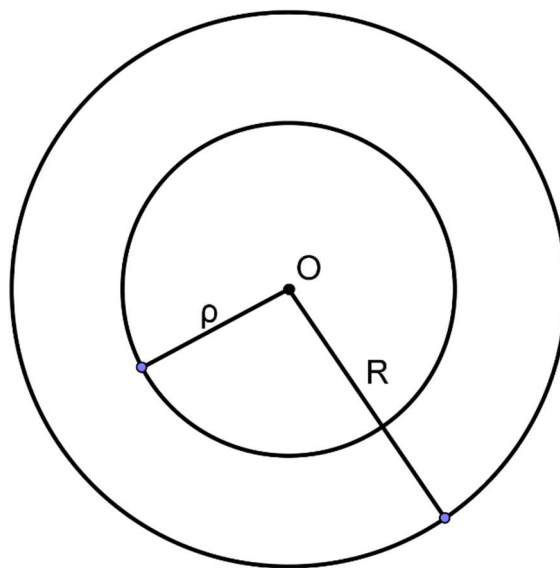
$E = 36\pi \text{ cm}^2$

- 4) Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που βρίσκεται μεταξύ τετραγώνου και κύκλου στο διπλανό σχήμα, γνωρίζοντας ότι το τετράγωνο έχει πλευρά μήκους 3 cm .



Απ. $E = 9 - 2,25\pi \text{ cm}^2$

- 5) Στο δακτύλιο του διπλανού σχήματος ο κυκλικός δίσκος (O, R) έχει πενταπλάσιο εμβαδόν από τον κυκλικό δίσκο (O, ρ) . Αν ο δακτύλιος έχει εμβαδόν 5.024 cm^2 να υπολογίσετε τα μήκη των ακτινών R και ρ .



Απ. $R = 20\sqrt{5} \text{ cm}$

$\rho = 20 \text{ cm}$

- 6) Σε ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΒΓ φέρουμε τις χορδές ΑΒ και ΑΓ. Αν είναι $AB = 6 \text{ cm}$ και $AG = 8 \text{ cm}$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του ημικυκλίου. Απ. $12,5\pi \text{ cm}^2$

- 7) Να εξετάσετε αν μια τούρτα κυκλικού σχήματος με επιφάνεια $706,5 \text{ cm}^2$ χωράει σε ένα τετράγωνο κουτί με βάση εμβαδού 900 cm^2 .

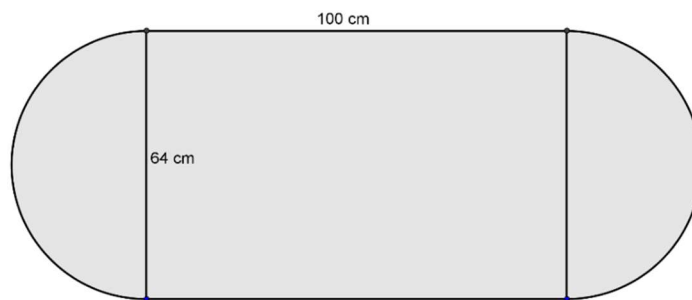
- 8) Να αποδείξετε ότι το τετραπλάσιο του εμβαδού ενός κύκλου προς το μήκος του, είναι ίσο με τη διάμετρο του.

- 9) Το εμβαδόν ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο είναι 225 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

Απ. $\frac{225\pi}{2}$

- 10) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου που είναι περιγεγραμμένος σε τετράγωνο πλευράς 5 cm . Απ. $\frac{25\pi}{2}$

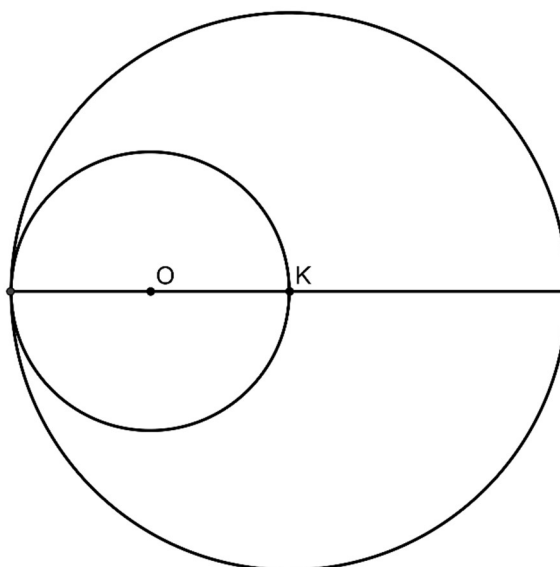
- 11)** Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



Απ. $L = 64\pi + 200 \text{ cm}$

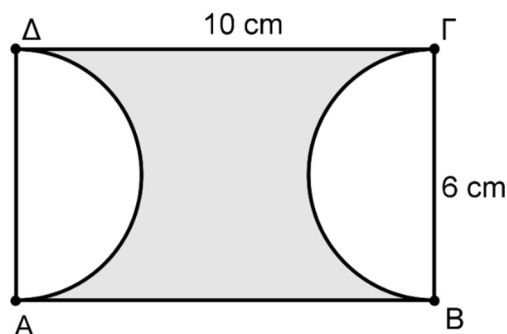
$$E = 1.024\pi + 640 \text{ cm}^2$$

- 12)** Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος με κέντρο O εφάπτεται του κύκλου με κέντρο K και διέρχεται από το K . Αν το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με κέντρο O είναι 4 cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου με κέντρο K .



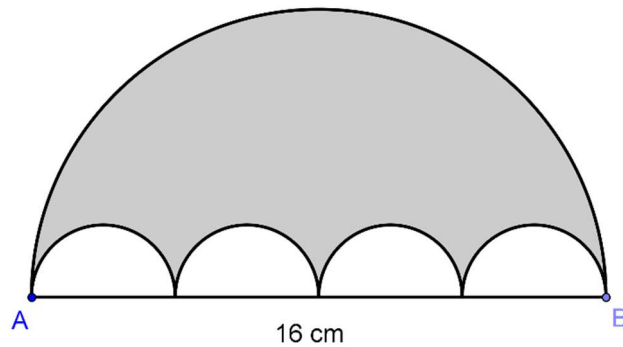
Απ. 16 cm^2

- 13)** Στο σχήμα οι πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$ είναι διάμετροι ημικυκλίων. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.



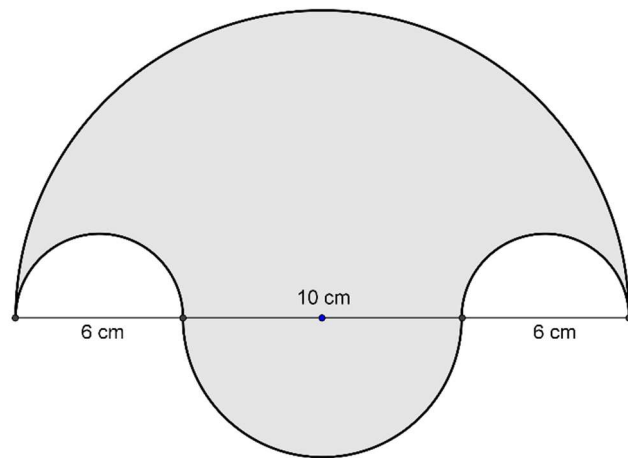
Απ. $60 - 9\pi \text{ cm}^2$

- 14)** Στο διπλανό σχήμα τα μικρά σχεδιασμένα ημικύκλια έχουν ίσες διαμέτρους. Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής.



Απ. $E = 24\pi \text{ cm}^2$

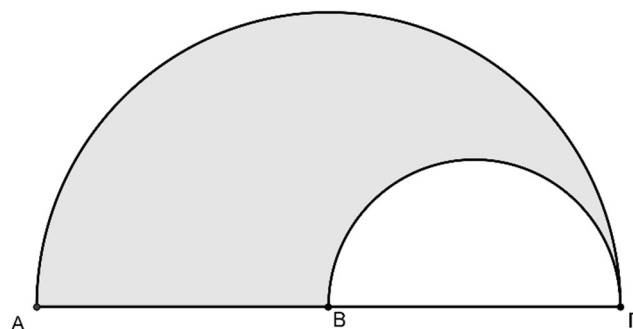
- 15)** Στο διπλανό σχήμα είναι σχεδιασμένα ημικύκλια. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.



Απ. $E = 64\pi \text{ cm}^2$

$L = 22\pi \text{ cm}$

- 16)** Αν $AB = BG = 10 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μέρους.



Απ. $E = \frac{75\pi^2}{2} \text{ cm}^2$