

## Ενδεικτικά θέματα θεωρίας

### Άλγεβρα

1

- α) Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $a$ ;  
 β) Ποιοι είναι οι ρητοί και ποιοι οι άρρητοι αριθμοί;  
 γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  αν η πρόταση είναι σωστή, ή  $\Delta$  αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Ο  $\sqrt{9}$  είναι άρρητος αριθμός

2)  $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

3)  $-\sqrt{64} = -8$

4) Η τετραγωνική ρίζα του 0 δεν ορίζεται

5)  $\sqrt{9+25} = 3+5$

6)  $\sqrt{(-7)^2} = -7$

2

α) Συμπληρώστε:

Η συνάρτηση  $y=ax+\beta$  τέμνει τον άξονα  $y$   $y'$  στο σημείο ....., έχει κλίση ..... και είναι παράλληλη στη ευθεία .....

β) Σωστό ή λάθος:

- Οι ευθείες  $y = \beta x$  και  $y = ax+\beta$  είναι παράλληλες
- Η ευθεία  $y = a x + \beta$  περνά από το σημείο  $A(0,a)$
- Η γραφική παράσταση της  $y = ax$  διέρχεται πάντοτε από την αρχή των αξόνων

### Γεωμετρία

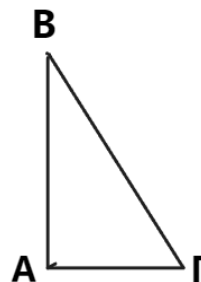
3

α) Διατυπώστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και εφαρμόστε το σε ένα τρίγωνο ΚΛΜ ( $K=90^\circ$ ) που θα σχεδιάσετε.

β) Αν ΑΒΓ είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο με **υποτείνουσα ΒΓ**, να χαρακτηρίσετε τις ισότητες που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε σχέση :

i)  $B\Gamma^2 = A\Gamma + A\beta^2$

ii)  $A\Gamma^2 = A\beta^2 - B\Gamma^2$



iii)  $AG^2 = BG^2 - AB^2$

v)  $AG^2 = AB^2 + BG^2$

iv)  $AB^2 = AG^2 - BG^2$

vi)  $AB^2 = BG^2 - AG^2$

4 **A)** Να διατυπώσετε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου.

**B)** Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $ADB$  να συμπληρωθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας  $B$ .

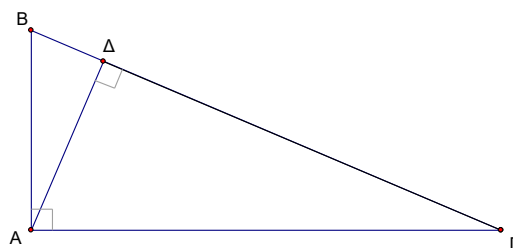
**Γ)** Να σημειώσετε με  $\Sigma$  για σωστό και  $\Lambda$  για κάθε λάθος από τα παρακάτω

i.  $\eta\mu\Gamma = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$

ii.  $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma}$

iii.  $\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma}$

iv.  $\epsilon\phi B = \frac{B\Delta}{A\Delta}$



5 **α)** Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη σε κύκλο;

**β)** Τι σχέση έχει μια εγγεγραμμένη γωνία με το αντίστοιχο τόξο;

**γ)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$ , αν η πρόταση είναι σωστή, ή  $\Lambda$  αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

2) Η επίκεντρη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.

3) Αν σε ένα κύκλο μία επίκεντρη γωνία είναι ίση με μία εγγεγραμμένη, τότε τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα.

4) Αν τριπλασιάσω την ακτίνα ενός κύκλου, τότε το μήκος του κύκλου εννεαπλασιάζεται.

5) Η εγγεγραμμένη γωνία  $\widehat{AKB} = 60^\circ$  βαίνει στο τόξο  $AB$ . Το μέτρο του τόξου  $AB$  είναι  $60^\circ$ .

6) Το εμβαδόν ημικυκλίου με ακτίνα  $\rho$  δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{\pi\rho^2}{2}$ .

## Ενδεικτικά θέματα ασκήσεων

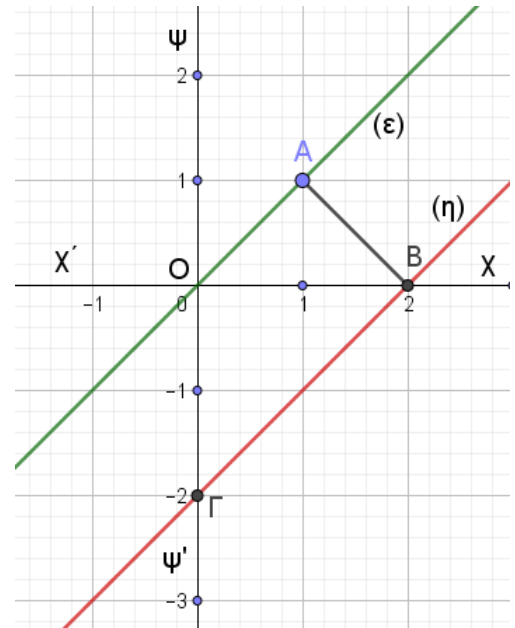
1 i. Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x+2}{3} + 1 \right) - \frac{6-x}{5} + \frac{5x+1}{6} = x$  (μονάδες 3,3)

ii. Σ' ένα τρίγωνο η γωνία  $A$  είναι κατά  $5^\circ$  μεγαλύτερη της  $B$  και η  $B$  είναι τριπλάσια της  $\Gamma$ . Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου. (μονάδες 3,3)

- 2 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά 12 cm. Με κέντρο τα  $A, B, \Gamma$  και ακτίνα 6 cm φέρουμε τόξα που τέμνουν τις  $AB, A\Gamma, B\Gamma$  στα σημεία  $K, \Lambda, M$  αντίστοιχα.
- Να βρείτε το εμβαδόν του  $AB\Gamma$ . ( $\sqrt{108} = 10,4$ )
  - Να βρείτε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τμήματος  $K\Lambda M$  που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.
  - Να βρείτε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος  $K\Lambda M$  που βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο.

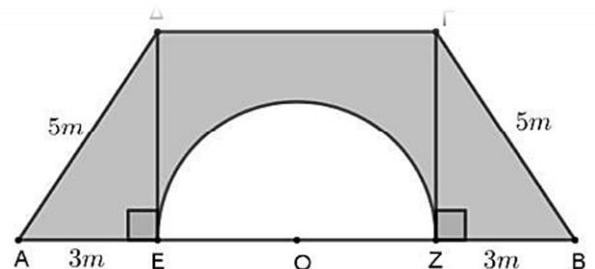
- 3 Με τη βοήθεια του διπλανού συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων:

- Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon)$  που περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο  $A(1,1)$ . (1μ)
- Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας  $(\eta)$ , που τέμνει τον  $y'y$  στο  $\Gamma(0,-2)$ , τον  $x'x$  στο  $B(2,0)$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\epsilon)$ . (2μ)
- Υπολογίστε τα μήκη  $(OA), (AB)$  και να δείξετε ότι το τρίγωνο  $OAB$  είναι ορθογώνιο. (2μ)
- Υπολογίστε το εμβαδόν του τραπεζίου  $OAB\Gamma$ . (2μ)



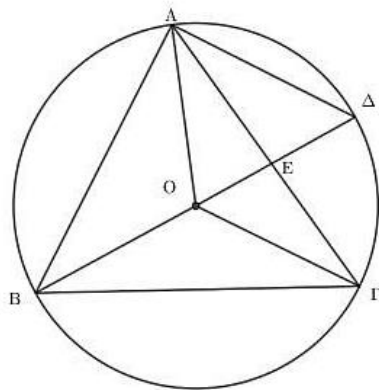
- 4 Το τραπέζιο του διπλανού σχήματος έχει περίμετρο 28 μέτρα.

- Υπολογίστε το ύψος  $\Delta E$  και το εμβαδόν του τραπεζίου.
- Υπολογίστε το εμβαδόν του ημικυκλίου με προσέγγιση εκατοστού.
- Να υπολογίσετε πόσο θα μας κοστίσει να βάψουμε κόκκινη την γκρίζα επιφάνεια αν το βάψιμο κάθε τετραγωνικού μέτρου κοστίζει 6€.



- 5 Δίνεται η ευθεία  $\epsilon: y = \lambda x + 3$  που διέρχεται από το σημείο  $M(-1,5)$

- Να αποδείξετε ότι η ευθεία έχει εξίσωση  $\epsilon: y = -2x + 3$  και στην συνέχεια να την σχεδιάσετε.
- Να βρείτε τα σημεία  $A, B$  που η ευθεία  $(\epsilon)$  τέμνει τους άξονες  $x'x, y'y$  αντίστοιχα.
- Δίνεται το σημείο  $\Gamma(2,-1)$ . Να εξετάσετε αν τα σημεία  $A, B, \Gamma$  είναι συνευθειακά.



6

Στο παραπάνω σχήμα είναι  $\angle A\Gamma B = 120^\circ$ ,  $\angle B\Delta\Gamma = 120^\circ$  και  $B\Delta = 10\text{cm}$  διάμετρος του κύκλου.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

β) Να αποδείξετε ότι το  $\triangle A\hat{O}\Delta$  είναι ισόπλευρο και στη συνέχεια ότι  $AB = 5\sqrt{3}\text{cm}$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $\triangle A\hat{B}\Delta$  και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι το ύψος  $AE$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι  $AE = \frac{AB}{2}$

7

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ )

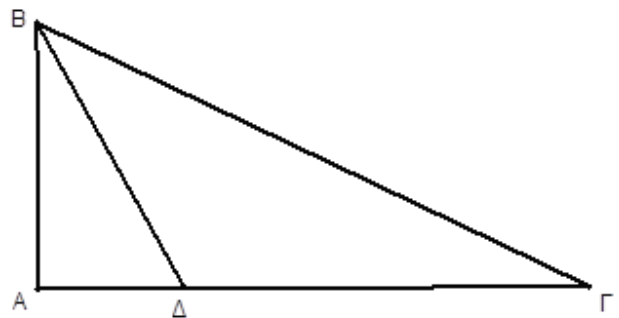
δίνεται ότι η γωνία  $\Gamma=30^\circ$ , η πλευρά  $AB=8\text{cm}$  και

ότι η πλευρά  $B\Delta=10\text{cm}$ . Να υπολογίσετε :

α) Το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$

β) Το μήκος της πλευράς  $A\Delta$ .

γ) Το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$ .



8

Στο διπλανό κύκλο κέντρου  $O$  το εγγεγραμμένο σε αυτόν

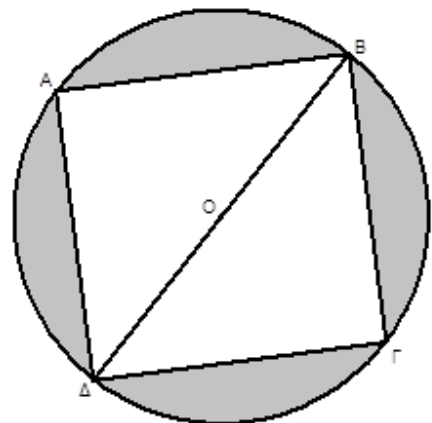
τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $5\text{cm}$ . Να βρείτε :

α) Τη διάμετρο  $B\Delta$  του κύκλου.

β) Το μήκος του κύκλου.

γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

δ) Το εμβαδόν της γκριζαρισμένης περιοχής.



- 9 Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος  $(O, \rho)$  και  $B\Gamma$  μια διάμετρος του. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο, το μήκος της πλευράς  $AB$  είναι:  $AB = 8\sqrt{3}\text{cm}$  και το τόξο  $AB \cong 120^\circ$

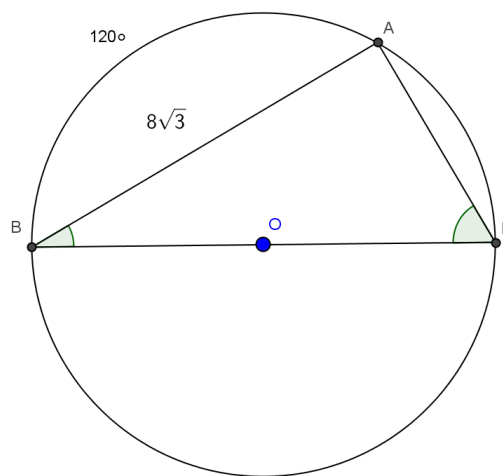
A) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ .

B) Να υπολογίσετε τις πλευρές  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  και το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Γ) Να υπολογίσετε: i) Την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου.

ii) Το μήκος του κύκλου.

iii) Το εμβαδόν του **κυκλικού δίσκου**.



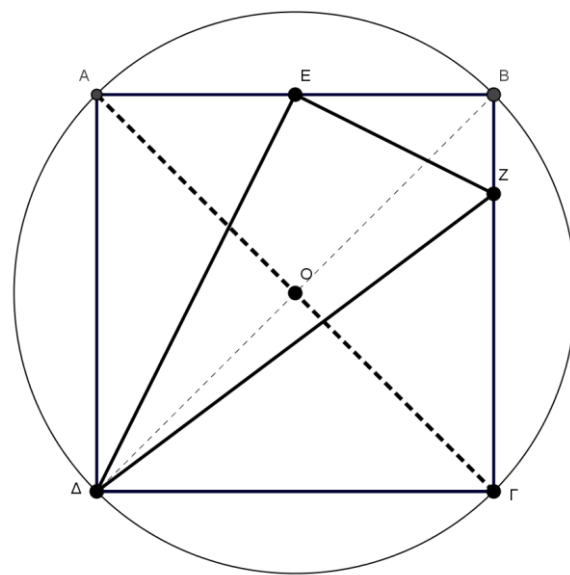
- 10 Δίνετε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρά  $A\Delta = 8\text{ cm}$ . Το σημείο  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$  και  $Z$  είναι σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  με  $BZ = 2\text{ cm}$ . (σχήμα)

A) Να υπολογίσετε τα :  $ED^2$ ,  $EZ^2$ ,  $\Delta Z^2$

B) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta EZ$  είναι ορθογώνιο. Ποια είναι η ορθή γωνία;

Γ) Να υπολογίσετε την διαγώνιο  $A\Gamma$  του τετραγώνου.

Δ) Να υπολογίσετε την ακτίνα και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, ο οποίος έχει κέντρο  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου και διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου.



**11** Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα 5 cm.

α) Να υπολογίσετε πόσες μοίρες είναι κάθε

μία από τις γωνίες  $\hat{A}B\Gamma$  και  $\hat{A}\Delta\Gamma$ .

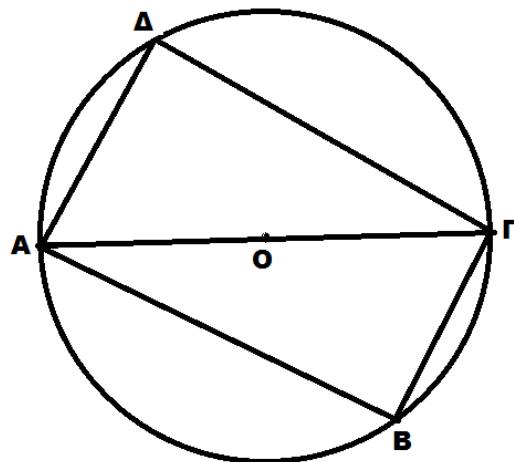
β) Αν η γωνία  $\hat{A}B\Gamma = 5x + 15$  μοίρες, πόσο είναι το x σε μοίρες;

γ) Αν το τόξο AB είναι  $130^\circ$  και το τόξο AΔ είναι  $60^\circ$ , ναδειχτεί ότι το τόξο BΓ είναι  $50^\circ$  και το τόξο ΔΓ είναι  $120^\circ$ .

δ) Να βρεθούν (σε μοίρες), τα μέτρα όλων των γωνιών του σχήματος.

ε) Να γράψετε πόσο είναι το ημίτονο και πόσο το συνημίτονο των γωνιών του τριγώνου ΔΑΓ και είναι οξείες.

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΑΓ;



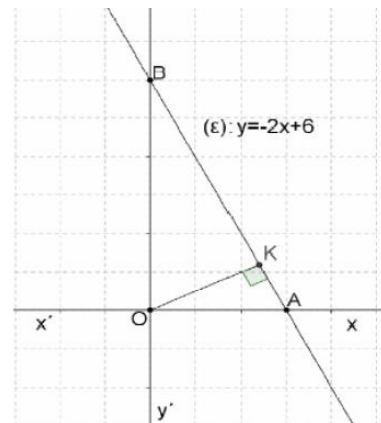
**12** Δίνεται η ευθεία (ε):  $y = (\lambda - 2) \cdot x + 6 - 2\lambda$  που διέρχεται από το σημείο  $(4, -2)$ .

1. Να αποδειχθεί ότι  $\lambda = 0$ .

2. α. Να βρεθούν τα σημεία τομής A, B της ευθείας (ε):  $y = -2x + 6$  με τον άξονα  $x'x$  και τον άξονα  $y'y$  αντίστοιχα.

β. Να βρεθεί το μήκος του AB.

γ. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου OAB και η απόσταση OK της αρχής των αξόνων από την ευθεία (ε). (Υπόδειξη: το OK είναι ύψος στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB).



**13** Δίνονται οι αριθμοί:  $\alpha = \sqrt{3 - \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$   $\beta = \sqrt{\sqrt{81}}$   $\gamma = \sqrt{9 - \sqrt{21 + \sqrt{16}}}$

i) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ.

ii) Να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο σχήμα

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου.

iv) Να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και να το υπολογίσετε.

- 14** Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = \alpha x + \beta$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ) με εξίσωση  $y = -\frac{1}{2}x$ .

**A)**

- 1) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).
- 2) Να βρείτε την εξίσωση της (ε), αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο  $M(-2, 5)$ .

**B)** Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = -\frac{1}{2}x + 4$ .

- 1) Να εξετάσετε αν τα σημεία  $K(8, 0)$  και  $\Lambda\left(1, \frac{5}{2}\right)$  ανήκουν στην ευθεία (ε).
- 2) Να σχεδιάσετε την ευθεία (ε) σε σύστημα αξόνων.
- 3) Να προσδιορίσετε το σημείο τομής  $N$  της ευθείας (ε) με τον άξονα  $y'y$ .
- 4) Αν  $O$  η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε:
  - α) το εμβαδόν του τριγώνου  $\triangle OKN$ ,
  - β) την περίμετρο του τριγώνου  $\triangle OKN$ .

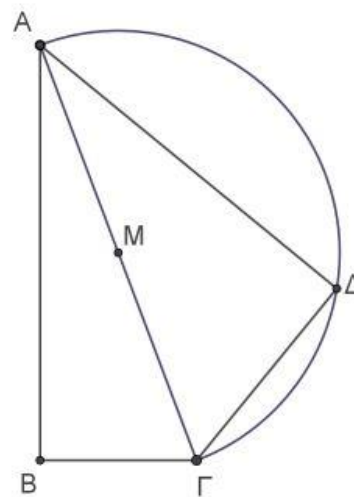
- 15** **A.** Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα μήκη των πλευρών του είναι:

$$AB = \sqrt{7} \text{ cm}, \quad B\Gamma = 1 \text{ cm} \quad \text{και} \quad A\Gamma = 2\sqrt{2} \text{ cm}.$$

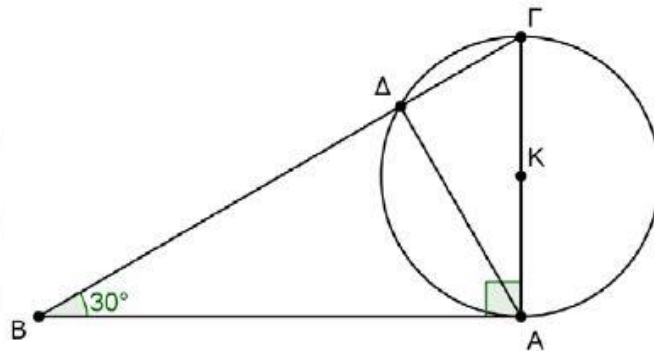
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

- B.** Αν ξέρετε ότι το τόξο  $A\Delta\Gamma$  είναι ημικύκλιο με διάμετρο την  $A\Gamma$  και το μήκος της χορδής  $\Gamma\Delta$  είναι  $\sqrt{2} \text{ cm}$ , να υπολογίσετε:

- i) τα μήκη των πλευρών και τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου  $A\Delta\Gamma$ ,
- ii) το μήκος του τόξου  $\widehat{\Gamma\Delta}$ .

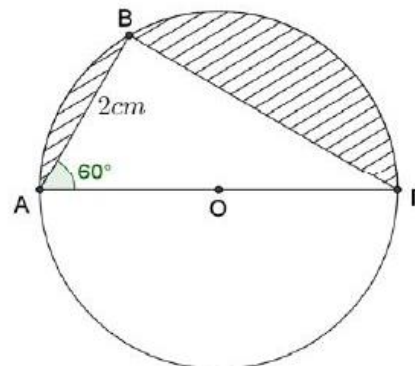


- 16 Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K$  και διάμετρο  $AG = 8\text{ cm}$ . Αν  $\hat{B} = 30^\circ$  και  $\widehat{BAG} = 90^\circ$ ,



- α) Να αποδείξετε ότι  $AB = 8\sqrt{3}\text{ cm}$ .
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της  $B\Gamma$ .
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί το  $AD$  είναι ένα ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- ε) Να δείξετε ότι  $AD = 4\sqrt{3}\text{ cm}$ .
- στ) Να δείξετε ότι  $BD = 12\text{ cm}$ .
- ζ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

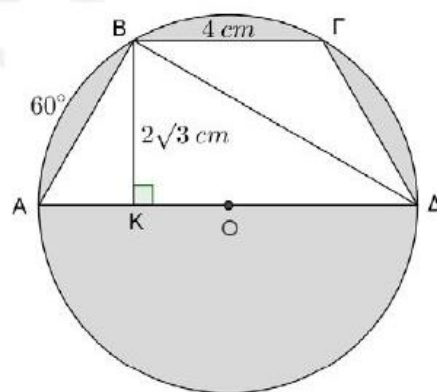
- 17 Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$  εγγράφεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρά  $AB = 2\text{ cm}$  και γωνία  $\hat{A} = 60^\circ$ .



- α) Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.
- β) Να δείξετε ότι  $B\Gamma = 2\sqrt{3}\text{ cm}$ .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

18

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με μικρή βάση  $B\Gamma = 4 \text{ cm}$  και ύψος  $BK = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ , το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AD$ . Το μέτρο του τόξου είναι  $\widehat{AB} = 60^\circ$ .



- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{B\Delta A}$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας.
- Να εξηγήσετε γιατί  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = 90^\circ$ .
- Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Delta$ .
- Να αποδείξετε ότι  $AD = 8 \text{ cm}$ .
- Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπέζιου είναι  $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.

19

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $y = \frac{2\lambda - 7}{3} \cdot x + \lambda + 3$

- Αν η ευθεία  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς την ευθεία  $x+y=1$  να βρείτε το  $\lambda$
- Για  $\lambda=2$  να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες
- Αν  $A, B$  τα παραπάνω σημεία και  $\Gamma(-3,0)$  να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$
  - Αν  $\Delta(1,3)$  να βρείτε την απόσταση  $\Gamma\Delta$ . (Απ. γι.  $E=20$  τ.μ, ii.  $\Gamma\Delta=5$ )

20

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση

$$y = \frac{3\lambda - 1}{2} \cdot x - \lambda + 2$$

- Αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο  $K(-1,5)$  να βρείτε το  $\lambda$
- Για  $\lambda=-1$  να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς την  $\varepsilon$
- Αν  $A, B$  είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες και  $O$  η αρχή των αξόνων να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ . (Απ. β.  $y=-2x$  γ.  $E=9/4$  τ.μ)

21

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $(0,-2)$  και  $(-6,1)$
- Να βρείτε την κλίση της ευθείας  $\varepsilon: x+2y=-4$
- Να βρείτε το σημείο στο οποίο η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει την ευθεία  $y=2$  και να σχεδιάσετε τις δύο ευθείες. (Απ. α.  $x+2y=-4$  β.  $\alpha=-1/2$  γ.  $(-8,2)$ )

22

Δίνεται η ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $y = (2\lambda + 1)x + 3\mu - 2$

α. Αν η  $\varepsilon$  είναι παράλληλη προς την ευθεία  $5x + y - 7 = 0$  και περνά από το σημείο  $A(-1, 6)$  να βρείτε τα  $\lambda$  και  $\mu$

β. Για  $\lambda = -3$  και  $\mu = 1$

i. Να σχεδιάσετε την ευθεία  $\varepsilon$

ii. Αν το σημείο  $M(\frac{\kappa - 1}{5}, -2)$  ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$  να βρείτε την τιμή του  $\kappa$