

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ
ΜΗΔΕΙΣ
ΕΙΣΙΤΩ



ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΑΘΗΝΑΣ

المدرسة الثانوية
متعددة الثقافات في



Ας μελετήσουμε Μαθηματικά!

Τεύχος Γ΄

Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας



ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ

ΧΑΜΕΝΤ ΜΑΛΑΚ-ΑΛΑΣΤΑΛ ΦΑΡΑΧ

ΣΑΑΝΤ ΣΑΛΜΑ-ΕΛ ΣΑΓΕΝΤ ΝΤΑΛΙΑ- ΑΧΜΕΝΤ ΑΛΑΑ

ΑΛΣΟΥΡΑΦΑ ΚΑΡΑΜ-ΟΧΙΑΜ ΑΝΙΡ

ΣΟΧΑΪΜΠ και ΜΙΛΑΤΟΥΛ ΑΛ ΡΟΥΣΑΝ

دعونا ندرس الرياضيات

العدد ج الجزء أ

المدرسة الثانوية متعددة الثقافات في أثينا



ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ

ΧΑΜΕΝΤ ΜΑΛΑΚ-ΑΛΑΣΤΑΛ ΦΑΡΑΧ

ΣΑΑΝΤ ΣΑΛΜΑ-ΕΛ ΣΑΓΕΝΤ ΝΤΑΛΙΑ- ΑΧΜΕΝΤ ΑΛΑΑ

ΑΛΣΟΥΡΑΦΑ ΚΑΡΑΜ-ΟΧΙΑΜ ΑΝΙΡ

ΣΟΧΑΪΜΠ και ΜΙΛΑΤΟΥΛ ΑΛ ΡΟΥΣΑΝ

Αντί προλόγου...

Ευχαριστούμε πολύ

Την διευθύντρια και του Διαπολιτισμικού Γυμνάσιου Αθήνας Κα Δάφνη Γαβρίλη για την παραχώρηση του εργαστηρίου Πληροφορικής και την άψογη συνεργασία της, τους καθηγητές του σχολείου που με προθυμία μας επανειλημμένα παραχώρησαν τους μαθητές τους, στον συντάκτη του βιβλίου μας Κο Κωνσταντάκοπουλο Βασίλη με την άψογη διατύπωση των κανόνων του σε απλά ελληνικά, καθώς και όλους τους μαθητές και μαθήτριες- των οποίων τα ονόματα αναγράφονται στην πρώτη σελίδα- που με μεγάλη προθυμία, εντατική δουλειά και ανιδιοτέλεια αφιέρωσαν τον πολύτιμο χρόνο τους στη συγγραφή και διόρθωση των κειμένων

Ευχόμαστε αρχικά αυτό το βιβλίο να βοηθήσει τους μαθητές μας να μελετήσουν με μεγαλύτερη ευκολία τα μαθηματικά μαζί με τις οικογένειες τους

στη συνέχεια να διευκολύνει τα παιδιά να προσδεύσουν στα μαθήματά τους, Γλώσσα και Μαθηματικά,

και τέλος να γίνει βοηθός τους, πρακτικός και συναισθηματικός, στο άνοιγμα νέων δρόμων προς την καλλιέργειά τους καθώς και στη μετέπειτα επαγγελματική τους αποκατάσταση.

Οφείλουμε να αναφέρουμε πως μέσα στις παρακάτω σελίδες υπάρχουν αρκετές γλωσσικές και συντακτικές καθώς και επιστημονικές ατέλειες τις οποίες ευελπιστούμε να διορθώσουμε σε επόμενες χρονικές περιόδους. Προφανώς είμαστε ανοιχτοί σε

καλοπροαίρετα σχόλια και πιθανές διορθώσεις των κειμένων.

Προβλέπουμε συγγραφή του βιβλίου σε άλλες γλώσσες καθώς και συγγραφή βιβλίων της Α' και Β' Γυμνασίου, σε επόμενες σχολικές χρονιές για να βοηθηθούν τα παιδιά και οι οικογένειες τόσο του σχολείου μας όσο και των υπόλοιπων ελληνικών σχολείων με μαθητές με πολυπολιτισμικό υπόβαθρο.

Η ευχή μας είναι αυτή η προσπάθεια να είναι ένα μικρό λιθαράκι για να μην αφήνουν πίσω τα παιδιά αυτά τα όνειρό τους για καλλιέργεια και καλύτερη ζωή

Η επιμελήτρια της έκδοσης:

Παπαϊωάννου Εμμανουέλα

بدلاً من مقدمة...

نود أن نتقدم بالشكر الجزيل إلى:

مديرة المدرسة الثانوية متعددة الثقافات في أثينا، السيدة دافني غافريللي، لتوفيرها لنا مختبر تكنولوجيا المعلومات وتعاونها الممتاز، ومعلمي المدرسة الذين زدونا بطلابهم بسخاء وبشكل متكرر، ومحرر كتابنا، السيد فاسيليس كونستانتاكوبولوس، لصياغته المتقنة للقواعد باللغة اليونانية البسيطة، وكذلك جميع الطلاب - الذين ترد أسماؤهم في الصفحة الأولى - الذين كرسوا وقتهم الثمين، بكل حماس وتفان وإخلاص، لكتابة النصوص ومراجعتها.

نأمل أن يساعد هذا الكتاب طلابنا في البداية على دراسة الرياضيات بسهولة أكبر مع عائلاتهم،

ثم أن يُسهّل على الأطفال التقدم في مادتي اللغة والرياضيات، وأخيراً أن يكون عوناً لهم، عملياً ومعنوياً، في فتح آفاق جديدة لتنمية مواهبهم وتأهيلهم المهني لاحقاً.

نتقدم بالشكر الجزيل إلى:

مديرة المدرسة الثانوية متعددة الثقافات في أثينا، السيدة دافني غافريللي، لتوفيرها لنا مختبر تكنولوجيا المعلومات وتعاونها الممتاز، ومعلمي المدرسة الذين زدونا بطلابهم بسخاء وبشكل متكرر، ومحرر كتابنا، السيد فاسيليس كونستانتاكوبولوس، لصياغته المتقنة للقواعد باللغة اليونانية البسيطة، وكذلك جميع الطلاب - الذين ترد أسماؤهم في الصفحة الأولى - الذين كرسوا وقتهم الثمين لكتابة النصوص ومراجعتها.

نأمل أن يساعد هذا الكتاب طلابنا في البداية على دراسة الرياضيات بسهولة أكبر مع عائلاتهم،

أن يُسهّل على الأطفال التقدم في مادتي اللغة والرياضيات، وأخيراً أن يكون عوناً لهم، عملياً ومعنوياً، في فتح آفاق جديدة لتنمية مواهبهم وتأهيلهم المهني لاحقاً. نودّ التنويه إلى وجود بعض الأخطاء اللغوية والتحريرية والعلمية في الصفحات التالية، والتي نأمل تصحيحها في الفترة القادمة. ونرحب بكل تأكيد بالتعليقات البناءة والتصويبات اللازمة للنصوص.

نعتزم تأليف الكتاب بلغات أخرى، بالإضافة إلى تأليف كتب لطلاب الصفين الأول والثاني الثانويين خلال السنوات الدراسية المقبلة، وذلك لمساعدة الطلاب وأسرههم في مدرستنا وفي المدارس اليونانية الأخرى التي تضم طلاباً من خلفيات ثقافية متنوعة. نتمنى أن يكون هذا الجهد خطوة صغيرة نحو تحقيق أحلام هؤلاء الأطفال في التعلم وبناء

حياة أفضل.

محررة المنشور: بابايوانو إيمانويلا

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΛΓΕΒΡΑ

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς(επανάληψη)

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(N)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Z)

....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.....

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Q)

Ένας αριθμός q είναι ρητός όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$, όπου οι αριθμοί

κ, λ είναι ακέραιοι αριθμοί και ο αριθμός λ δεν είναι μηδέν(δηλαδή είναι διαφορετικός του μηδενός, $\lambda \neq 0$)

Παραδείγματα:

$7 = \frac{7}{1}$: Ρητός αριθμός

$-3 = \frac{-3}{1}$: Ρητός αριθμός

$\frac{2}{5}$: Ρητός αριθμός

$0,3 = \frac{3}{10}$

$-1,37 = -\frac{137}{100}$ Ρητός αριθμός

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(R)

Στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών υπάρχουν όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί(δηλαδή φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, ρητοί αριθμοί κ.λ.π

Παραδείγματα:

0, -3, 19,2, $\frac{-4}{5}$

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί

Παραδείγματα:

$\sqrt{2}$, π , $-\sqrt{8}$

ΠΡΟΣΗΜΑ

+(συν)

-(μείον)

الجزء أ: الجبر

عمليات على الأعداد الحقيقية (التكرار)

الأعداد الطبيعية (ن)

....6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

الأعداد الصحيحة (ز)

.....4, 3, 2, 1, 0, 1-, 2-, 3-, 4-....

الأعداد النسبية (Q)

يكون العدد q عددًا نسبيًا عندما يُكتب على الصورة $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$, حيث يكون العددان κ و λ عددًا صحيحًا والعدد λ ليس صفرًا (أي أنه يختلف عن الصفر، $\lambda \neq 0$).

أمثلة:

$\frac{7}{1} = 7$: عدد نسبي

$\frac{-3}{1} = -3$: عدد نسبي

$\frac{2}{5}$: عدد نسبي

$\frac{3}{10} = 0,3$

$-\frac{137}{100} = -1,37$: عدد نسبي

الأعداد الحقيقية (R)

تضم مجموعة الأعداد الحقيقية R جميع الأعداد المعروفة لدينا (أي الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، إلخ).

أمثلة:

0, -3, 19,2, $\frac{-4}{5}$

الأعداد غير النسبية

هي الأعداد الحقيقية غير النسبية

أمثلة:

$\sqrt{2}$, π , $-\sqrt{8}$

العلامه

+(زائد)

-(ناقص)

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο

Παραδείγματα

- +23, +17 : ομόσημοι αριθμοί
- 17, -150: ομόσημοι αριθμοί
- 9, +15: ομόσημοι αριθμοί , δηλαδή +9, +15
- 12, 18: ομόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, +18

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

Παραδείγματα

- +25, -17 : ετερόσημοι αριθμοί
- 12, -9: ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, -9

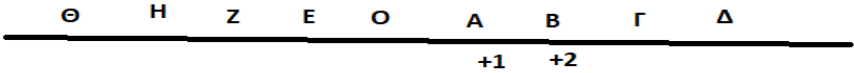
ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Να χαρακτηρίσετε τα επόμενα ζεύγη αριθμών ως ομόσημους αριθμούς ή ετερόσημους αριθμούς

- | | | |
|-------------|------------|------------|
| 1) +17, -23 | 2)-9, +11; | 3)-12, -18 |
| 4) -21, -32 | 5)7, 14 | 6)-7, 32 |

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ(ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ)

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι ίση με την απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό από την αρχή των αξόνων. Συμβολίζεται με $|x|$



Παραδείγματα

$|+2| = (OB) = 2$ $|-3| = (OH) = 3$
 $|+7| = 7$ $|-5| = 5$ $|-0,7| = 0,7$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να υπολογίσετε τις επόμενες απόλυτες τιμές:

$|+3|$ $|-19|$ $|+17|$ $|\frac{-2}{7}|$ $|43|$

تعريفات أساسية

الأعداد المتطابقة هي الأعداد التي لها نفس الإشارة.

أمثلة:

- +23, +17 : أعداد متطابقة
- 17, -150: أعداد متطابقة
- +9, +15: أعداد متطابقة ،أي +9, +15
- +12, +18: أعداد متطابقة،أي +12, +18

الأعداد غير المتطابقة هي الأعداد التي لها إشارات مختلفة.

أمثلة:

- +25, -17: أعداد متقابلة
- 9, +12: أعداد متقابلة،أي -9, +12

تمرين (مهمة)

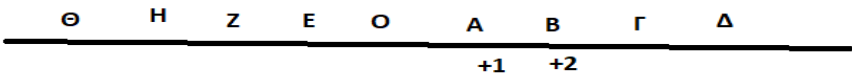
صنف أزواج الأعداد التالية كأعداد متطابقة أو متقابلة:

- | | | |
|------------|------------|------------|
| 18- ,12-(3 | ;11+ ,9-(2 | 23- ,17+(1 |
| 32 ,7-(6 | 14 ,7(5 | 32- ,21-(4 |

التعريف الأساسي (القيمة المطلقة لعدد حقيقي)

القيمة المطلقة لعدد حقيقي تساوي بُعد النقطة المقابلة لهذا العدد الحقيقي المحدد

عن أصل المحاور. ويُرمز لها بـ $|a|$



أمثلة

$2 \quad |-3| = (OH) = 3 = (OB) = |2+|$
 $0.7 = |0.7-| \quad 5 = |5-| \quad 7 = |7+|$

تمرين (مهمة): احسب القيم المطلقة التالية:

$|+3|$ $|-19|$ $|+17|$ $|\frac{-2}{7}|$ $|43|$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτε τιμές τους και στο άθροισμα που προκύπτει βάζουμε τα πρόσημα που έχουν (τοκοινό τους πρόσημο)

Παραδείγματα

- 1) $(+7)+(+13) = +20$ ή $+7+13 = +20$
- 2) $(-12)+(-10) = -22$ ή $-12-10 = -22$
- 3) $(-17)+(-19) = -36$ ή $-17-19 = -36$
- 4) $(+23)+(+157) = +180$ ή $+23+157 = +180$

2^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε την μικρότερη από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τους και στη διαφορά που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Παραδείγματα

- 1) $(-7)+(+13) = +6$ ή $-7+13 = +6$
- 2) $(-12)+(+10) = -2$ ή $-12+10 = -2$
- 3) $(+17)+(-19) = -2$ ή $+17-19 = -2$
- 4) $(+23)+(-15) = +8$ ή $+23-15 = +8$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $(+7) + (+3) = \dots$ | 5) $(-5) + (-10) = \dots$ |
| 2) $(15) + (+12) = \dots$ | 6) $(-6) + (-9) = \dots$ |
| 3) $(-7) + (+5) = \dots$ | 7) $(-6) + (+3) = \dots$ |
| 4) $(+16) + (-8) = \dots$ | 8) $(+9) + (-5) = \dots$ |

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσουμε πολλούς ρητούς αριθμούς, συνήθως προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους

Παράδειγμα:

$$(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) = (+2)+(+7)+(-3)+(-4)+(-2)+(-6) = (+9)+(-17) = -8$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

- 1) $(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) =$
- 2) $(-1)+(+4)+(+10)+(-5)+(-12)+(+32)+(-11) =$

جمع الأعداد النسبية

القاعدة الأولى: لجمع عددين نسبيين متماثلين، نجمع قيمتيهما المطلقتين ونضيف إشارتيهما إلى المجموع الناتج (إشارتهما المشتركة).

أمثلة

- 1] $(+7)+(+13) = +20$ ή $+7+13 = +20$
- 2] $(-12)+(-10) = -22$ ή $-12-10 = -22$
- 3] $(-17)+(-19) = -36$ ή $-17-19 = -36$
- 4] $(+23)+(+157) = +180$ ή $+23+157 = +180$

القاعدة الثانية: لجمع عددين نسبيين متعاكسين في الإشارة، نطرح القيمة المطلقة الأصغر من القيمة المطلقة الأكبر، وفي الفرق الناتج نضيف إشارة العدد النسبي الذي له القيمة المطلقة الأكبر.

أمثلة

- 1] $(-7)+(+13) = +6$ ή $-7+13 = +6$
- 2] $(-12)+(+10) = -2$ ή $-12+10 = -2$
- 3] $(+17)+(-19) = -2$ ή $+17-19 = -2$
- 4] $(+23)+(-15) = +8$ ή $+23-15 = +8$

تمرين (مهمة): احسب المجموع:

إضافة أرقام متعددة

لإضافة أعداد نسبية متعددة، نقوم عادة بإضافة الأعداد المتشابهة أولاً.

مثال:

$$+(9+) = (6-)+(-2-)+(-4-)+(-3-)+(+7+)+(+2+) = (7+)+(-2-)+(-6-)+(-2-)+(-4-)+(-3-)+(-8-) = (17-)$$

تمرين (مهمة): احسب المبالغ التالية

- 1) $(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) =$
- 2) $(-1)+(+4)+(+10)+(-5)+(-12)+(+32)+(-11) =$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο +

Δηλαδή : $+ \cdot + = +$ $- \cdot - = +$

2^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο -

Δηλαδή : $+ \cdot - = -$ $- \cdot + = -$

Παραδείγματα

- 1) $(-5) \cdot (+4) = -20$
- 2) $(+3) \cdot (-14) = -42$
- 3) $(+0,5)(-100) = -50$
- 4) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{+3}{4}\right) = -\frac{3}{14}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

- 1) $(+3) \cdot (+2) = \dots$
- 2) $(+40) \cdot (+1,5) = \dots$
- 3) $(-2) \cdot (-1) = \dots$
- 4) $(-25) \cdot (-10) = \dots$
- 5) $(-5) \cdot (+10)$
- 6) $(+15) \cdot (-6) \dots$
- 7) $(+100) \cdot (-0,2)$
- 8) $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{+2}{7}\right) =$

ضرب الأعداد النسبية

القاعدة الأولى: لضرب عددين نسبيين متطابقين، نضرب قيمتيهما المطلقتين ونضيف إشارة + إلى الناتج.

أي: $+ = - \cdot -$ $+ = + \cdot +$

القاعدة الثانية: لضرب عددين نسبيين متعاكسين في الإشارة، نضرب قيمتيهما

المطلقتين ونضيف إشارة - إلى الناتج. أي: $- = + \cdot -$ $- = - \cdot +$

أمثلة

- 1) $(-5) \cdot (+4) = -20$
- 2) $(+3) \cdot (-14) = -42$
- 3) $(+0,5)(-100) = -50$
- 4) $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{+3}{4}\right) = -\frac{3}{14}$

تمرين (مهمة): احسب المنتجات

- 1) $(+3) \cdot (+2) = \dots$
- 2) $(+40) \cdot (+1,5) = \dots$
- 3) $(-2) \cdot (-1) = \dots$
- 4) $(-25) \cdot (-10) = \dots$
- 5) $(-5) \cdot (+10)$
- 6) $(+15) \cdot (-6) \dots$
- 7) $(+100) \cdot (-0,2)$
- 8) $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{+2}{7}\right) =$

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι αριθμοί**.
Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Παραδείγματα αντίθετων αριθμών

- Οι αριθμοί +5 και -5 είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί (+5)+(-5) = 0 ή +5-5 = 0
- Οι αριθμοί $\left(-\frac{1}{2}\right), \left(+\frac{1}{2}\right)$ είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(+\frac{1}{2}\right) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίθετο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-17		19	
+1		-32	
$-\frac{1}{4}$		$-\frac{2}{7}$	
$+\frac{3}{5}$		0,8	

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ: Δυο αριθμοί που έχουν γινόμενο(αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού)τη μονάδα(1)λέγονται **αντίστροφοι αριθμοί**.

Παραδείγματα αντίστροφων αριθμών

- Οι αριθμοί $\frac{4}{5}$ και $\frac{5}{4}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$
- Οι αριθμοί -7 και $-\frac{1}{7}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί $(-7) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{7} = 1$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι αριθμοί
- Μόνο ο αριθμός μηδέν(0) δεν έχει αντίστροφο αριθμό

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίστροφο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-18		0	
+1		-17	
$+\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$	
23		$\frac{2}{11}$	

التعريف الأساسي

يُسمى عدداً مجموعهما صفر عدداً متضاداً.

للعدين المتضادين القيمة المطلقة نفسها ولكن بإشارات مختلفة.

أمثلة على الأعداد المتضادة

العدان +5 و-5 متضادان لأن $0 = (5-) + (5+)$ أو $0 = 5-5+$

العدان $(1/2-)$ و $(1/2+)$ متضادان لأن $0 = (1/2+) + (1/2-)$

تمرين (عمل)

في التمرين التالي

رقم	الرقم المعاكس	رقم	الرقم المعاكس
17-		19	
1+		32-	
$-\frac{1}{4}$		$-\frac{2}{7}$	
$+\frac{3}{5}$		0,8	

التعريف الأساسي: يُطلق على العددين اللذين حاصل ضربهما يساوي واحدًا (1) اسمَي

العددين المقلوبين.

أمثلة على العددين المقلوبين

العدان $\frac{4}{5}$ و $\frac{5}{4}$ مقلوبان لأن $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$. العدان 7 و- $\frac{1}{7}$ مقلوبان لأن $(-7) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{7} = 1$.

ملاحظات أساسية

- الأعداد المعكوسة هي أعداد متطابقة
- العدد صفر (0) فقط ليس لهم عكوس

تمرين (مهمة)

في الجدول التالي، اكتب مقلوب الأعداد المعطاة:

رقم	الرقم العكسي	رقم	الرقم العكسي
18-		0	
1+		17-	
$+\frac{1}{3}$		$-\frac{2}{3}$	
23		$\frac{2}{11}$	

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με το μηδέν(0), τότε τουλάχιστον ένας όρος του γινομένου θα είναι ίσος με το μηδέν (0)

Παραδείγματα: $0 \cdot 5 = 0$ $(-7) \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 0 = 0$

2. Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι διάφορο του μηδενός, τότε και οι δύο όροι του γινομένου θα είναι διάφοροι του μηδενός

Δηλαδή: Αν $\alpha \cdot \beta \neq 0$ τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Παράδειγμα : $(-3)(+5) = -15$, γινόμενο διάφορο του μηδενός και κανένας όρος δεν είναι μηδέν.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Παραδείγματα:

- 1) $(+5) - (-7) = (+5) + (+7) = +12$
- 2) $(-13) - (+8) = (-13) + (-8) = -21$
- 3) $(-14) - (-22) = (-14) + (+22) = +8$
- 4) $(+25) - (+17) = (+25) + (-17) = +8$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Να κάνετε τις αφαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τις διαφορές)

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $(-12) - (-28) =$ | 5) $(+32) - (-17) =$ |
| 2) $(+19) - (-11) =$ | 6) $(-29) - (+15) =$ |
| 3) $(-23) - (-17) =$ | 7) $(-12) - (-65) =$ |
| 4) $(-25) - (-18) =$ | 8) $(+17) - (+65) =$ |

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ): Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλίκα)

- 1) $(-27) : (+3) = -9$
- 2) $(-120) : (-10) = +12$
- 3) $(-63) : (+9) = -7$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλίκα)

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1) $(-30) : (+6) =$ | 5) $(-72) : (+8) =$ |
| 2) $(-12) : (+4) =$ | 6) $(-200) : (-50) =$ |

3) $(-16) : (-4) =$

7) $(+144) : (-12) =$

4) $(-20) : (+4) =$

8) $(+1200) : (-10) =$

ملاحظات أساسية

إذا كان حاصل ضرب عددين يساوي صفرًا (0)، فسيكون أحد حديهما على الأقل مساويًا للصفر (0).
أمثلة: $0 = 0 \cdot 0 = 0 \cdot (-7)$ $0 = 5 \cdot 0$

2. إذا كان حاصل ضرب عددين مختلفًا عن الصفر، فسيكون كلا حديهما مختلفين عن الصفر.

أي: إذا كانت $\alpha \cdot \beta \neq 0$ ، فإن $\alpha \neq 0$ و $\beta \neq 0$

مثال: $(-3)(+5) = -15$ ، حاصل الضرب مختلف عن الصفر، ولا يوجد حد يساوي الصفر.

طرح الأعداد

المعادلة صحيحة: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

أمثلة:

- 1) $(+5) - (-7) = (+5) + (+7) = +12$
- 2) $(-13) - (+8) = (-13) + (-8) = -21$
- 3) $(-14) - (-22) = (-14) + (+22) = +8$
- 4) $(+25) - (+17) = (+25) + (-17) = +8$

تمرين (عمل)

لإجراء عمليات الطرح (أو حساب الفروقات)

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $(-12) - (-28) =$ | 5) $(+32) - (-17) =$ |
| 2) $(+19) - (-11) =$ | 6) $(-29) - (+15) =$ |
| 3) $(-23) - (-17) =$ | 7) $(-12) - (-65) =$ |
| 4) $(-25) - (-18) =$ | 8) $(+17) - (+65) =$ |

قسمة الأعداد

ينطبق $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

تمرين (مثال): قم بإجراء عمليات القسمة (أو احسب الحصص)

- | | |
|------------------------|-----|
| 9- = $(+3) : (27-)$ | (1) |
| 12+ = $(10-) : (120-)$ | (2) |
| 7- = $(9+) : (63-)$ | (3) |

تمرين (مهمة): قم بإجراء العمليات القسمة (أو احسب الحصص)

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1) $(-30) : (+6) =$ | 5) $(-72) : (+8) =$ |
| 2) $(-12) : (+4) =$ | 6) $(-200) : (-50) =$ |
| 3) $(-16) : (-4) =$ | 7) $(+144) : (-12) =$ |
| 4) $(-20) : (+4) =$ | 8) $(+1200) : (-10) =$ |

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

1^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

2^ο ΒΗΜΑ: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

3^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

4^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$1) \quad 6+6 \cdot 4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34$$

$$2) \quad 2+3 \cdot (4-11):(-5+2) = 2+3 \cdot (-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

βιβλίου

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

1^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο + ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε) την παρένθεση και το πρόσημο + (αν υπάρχει) και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με τα πρόσημα που είχαν.

2^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο - ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε) την παρένθεση και το πρόσημο - και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με αντίθετα πρόσημα

Παραδείγματα:

$$1) \quad +(7-12+1-6) = 7-12+1-6$$

$$2) \quad (5-7+13) = 5-7+13$$

$$3) \quad -(4-8-3+12) = -4+8+3-12$$

$$4) \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} =$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ	3	4	12	2	2
	1	3	2	6	2
	1	3	1	3	3
	1	1	1	1	

$$\text{Άρα } \text{ΕΚΠ}(2,3,4,12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

ΑΛΟΙΦΗ ΤΩΝ ΕΠΕΡΑΤΩΝ

الخطوة الأولى: إجراء العمليات داخل الأقواس

الخطوة الثانية: حساب القوى

الخطوة الثالثة: الضرب والقسمة

الخطوة الرابعة: الجمع والطرح

أمثلة:

$$1) \quad 6+6 \cdot 4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34$$

$$2) \quad 2+3 \cdot (4-11):(-5+2) = 2+3 \cdot (-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9$$

تمرين (مهمة)

من الكتاب

حذف الأقواس

القاعدة الأولى: عند وجود إشارة + قبل الأقواس أو عدم وجود إشارة ، نحذف (نتخلص) الأقواس وإشارة + (إن وجدت) ، ونكتب الحدود التي كانت بين الأقواس مع العلامات التي كانت لديهم.

القاعدة الثانية: عند وجود إشارة - أمام القوس ، أو عدم وجود إشارة ، نحذف الأقواس وإشارة - ونكتب الحدود التي كانت بين القوسين بإشارات معاكسة.

أمثلة:

$$1) \quad +(7-12+1-6) = 7-12+1-6$$

$$2) \quad (5-7+13) = 5-7+13$$

$$3) \quad -(4-8-3+12) = -4+8+3-12$$

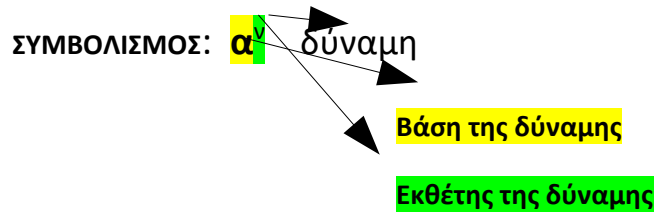
$$4) \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} =$$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

3	4	12	2	2
1	3	2	6	2
1	3	1	3	3
1	1	1	1	

$$\text{ΕΚΠ}(2,3,4,12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ: $\alpha^v = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$

v φορές (v παράγοντες)

Παραδείγματα:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. $\alpha^1 = \alpha$

Παραδείγματα:

$$5^1 = 5 \quad (-7)^1 = -7 \quad (-2/3)^1 = -2/3$$

2. $\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα:

$$15^0 = 1 \quad (-3)^0 = 1 \quad (2.35)^0 = 1$$

3. $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$ με $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$$

4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

Παραδείγματα:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{-4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-7}{4}\right)^3$$

قوى الأعداد الحقيقية

$$\alpha^v$$

$$\alpha^v = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$$

v مرة (v عامل)

أمثلة

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

الخصائص الأساسية للقوى

1. $\alpha^1 = \alpha$

أمثلة

$$5^1 = 5 \quad (-7)^1 = -7 \quad (-2/3)^1 = -2/3$$

2. $\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$

أمثلة

$$15^0 = 1 \quad (-3)^0 = 1 \quad (2.35)^0 = 1$$

3. $\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v}$ με $\alpha \neq 0$

أمثلة

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$$

4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

أمثلة

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{-4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-7}{4}\right)^3$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ): Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

I. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

II. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

III. $(-5)^1 = -5$

IV. $(-21)^0 = 1$

V. $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

VI. $(-\frac{3}{5})^{-2} = (-\frac{5}{3})^2 =$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

1) 2^3 **8) 3^4**

2) 5^3 **9) $(-4)^2$**

3) $(-8)^0$ 10) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

4) $(-7)^2$ **11) $(-6)^3$**

5) $(-\frac{4}{5})^1$ **12) $(-\frac{3}{10})^0$**

6) $(-7)^{-3}$ **13) $(-9)^2$**

7) $(-\frac{4}{5})^{-2}$

تمرین (مثال): احسب القوى التالية

I. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

II. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

III. $(-5)^1 = -5$

IV. $(-21)^0 = 1$

V. $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

VI. $(-\frac{3}{5})^{-2} = (-\frac{5}{3})^2 =$

تمرین (مهمة): احسب القوى التالية

1) 2^3 **8) 3^4**

2) 5^3 **9) $(-4)^2$**

3) $(-8)^0$ 10) $(-\frac{1}{2})^{-3}$

4) $(-7)^2$ **11) $(-6)^3$**

5) $(-\frac{4}{5})^1$ **12) $(-\frac{3}{10})^0$**

6) $(-7)^{-3}$ **13) $(-9)^2$**

7) $(-\frac{4}{5})^{-2}$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

1^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός

Παραδείγματα:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 > 0$$

2^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο(ζυγό)αριθμό είναι θετικός αριθμός

Παρατήρηση: Άρτιοι(ζυγοί)αριθμοί: 0, 2, 4, 6, 8, ...

Παραδείγματα:

$$(-2)^4 > 0 \text{ (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)}$$

$$\text{αφού } (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 > 0$$

$$(-8)^2 > 0 \text{ (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)}$$

$$\text{αφού } (-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$$

3^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό(μονό)αριθμό είναι αρνητικός αριθμός

Παρατήρηση: Περιττοί(μονοί)αριθμοί: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Παραδείγματα:

$$(-2)^3 < 0 \text{ (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)}$$

$$\text{αφού } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$$

$$(-3)^5 < 0 \text{ (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)}$$

$$\text{αφού } (-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243 < 0$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να βρείτε το πρόσημο των επόμενων δυνάμεων και στη συνέχεια

να τις υπολογίσετε:

$$(-4)^2 \quad (-5)^3$$

$$(-7)^2 \quad 2^5$$

$$(-2)^{10} \quad (-2)^5$$

ΕΛΑΜΕ ΤΗ ΔΥΝΑΜΗ

القاعدة الأولى: القوة المبنية على عدد موجب هي عدد موجب

أمثلة:

$$0 < 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

$$0 < 25 = 5 \cdot 5 = 5^2$$

القاعدة الثانية: القوة المبنية على عدد سالب وعدد زوجي كأس هي عدد موجب

ملاحظة:

الأعداد الزوجية: ٠، ٢، ٤، ٦، ٨، ...

أمثلة:

$$0 < (-2)^4 \text{ (أساس سالب وأُس زوجي)}$$

$$0 < 16 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 \text{ بما أن } (-2)^4 = 16$$

$$0 < (-8)^2 \text{ (أساس سالب وأُس زوجي)}$$

$$64 > 0 = (-8) \cdot (-8) = 64 \text{ بما أن } (-8)^2 = 64$$

القاعدة الثالثة: القوة ذات الأساس السالب والأس الفردي هي عدد سالب.

ملاحظة: الأعداد الفردية: 1، 3، 5، 7، 9، ...

أمثلة:

$$(-2)^3 < 0$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$$

$$(-3)^5 < 0$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243 < 0$$

أوجد إشارة القوى التالية ثم احسبها:

$$(-4)^2 \quad (-5)^3$$

$$(-7)^2 \quad 2^5$$

$$(-2)^{10} \quad (-2)^5$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και

προσθέτουμε τους εκθέτες, δηλαδή $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= 2^{3+4} = 2^7 \\ 7^5 \cdot 7^{-2} &= 7^{5+(-2)} = 7^3 \\ 4^{-6} \cdot 4^3 &= 4^{(-6)+3} = 4^{-3} \\ (-2)^{-7} \cdot (-2)^2 &= (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να γράψετε σαν μια δύναμη τα επόμενα γινόμενα:

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot 5^4 &= (-7)^3 \cdot (-7)^2 = \\ 9^4 \cdot 9^{-5} &= 10^{-3} \cdot 10^{-4} = \\ (-8)^5 \cdot (-8)^{-7} &= 12^3 \cdot 12^2 = \\ (-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} &= (-2)^7 \cdot (-2)^{-2} = \end{aligned}$$

2. Για να διαιρέσουμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και αφαιρούμε τους εκθέτες (εκθέτης διαιρετέου- εκθέτης διαιρέτη), δηλαδή

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

Παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 8^5 : 8^3 &= 8^{5-3} = 8^2 \\ (-7)^{12} : (-7)^8 &= (-7)^{12-8} = (-7)^4 \\ 5^{-6} : 5^3 &= 5^{-6-3} = 5^{-9} \\ (-9)^5 : (-9)^{-2} &= (-9)^{5-(-2)} = (-9)^{5+2} = (-9)^7 \\ 8^{-12} : 8^{-4} &= 8^{-12-(-4)} = 8^{-8} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):

Να γράψετε σαν μια δύναμη τις επόμενες δυνάμεις (ή τα επόμενα πηλίκα):

$$\begin{aligned} 15^3 : 15^2 &= (-7)^{13} : (-7)^{10} = \\ 7^5 : 7^{-3} &= 6^{-6} : 6^4 = \\ (-8)^{-5} : (-8)^{-7} &= (-4)^{-6} : (-4)^2 = \end{aligned}$$

خصائص القوى

لضرب القوى ذات الأساس نفسه ، نترك الأساس نفسه ونجمع الأسس، أي

$$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$

أمثلة:

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= 2^{3+4} = 2^7 \\ 7^5 \cdot 7^{-2} &= 7^{5+(-2)} = 7^3 \\ 4^{-6} \cdot 4^3 &= 4^{(-6)+3} = 4^{-3} \\ (-2)^{-7} \cdot (-2)^2 &= (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5} \end{aligned}$$

تمرين (مهمة): اكتب النواتج التالية بقوة:

$$\begin{aligned} 5^3 \cdot 5^4 &= (-7)^3 \cdot (-7)^2 = \\ 9^4 \cdot 9^{-5} &= 10^{-3} \cdot 10^{-4} = \\ (-8)^5 \cdot (-8)^{-7} &= 12^3 \cdot 12^2 = \\ (-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} &= (-2)^7 \cdot (-2)^{-2} = \end{aligned}$$

لقسمة القوى ذات الأساس نفسه ، نترك الأساس نفسه ونطرحا لأسس (أس المقسوم عليه – أس المقسوم عليه)، أي:

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$$

أمثلة:

$$\begin{aligned} 8^5 : 8^3 &= 8^{5-3} = 8^2 \\ (-7)^{12} : (-7)^8 &= (-7)^{12-8} = (-7)^4 \\ 5^{-6} : 5^3 &= 5^{-6-3} = 5^{-9} \\ (-9)^5 : (-9)^{-2} &= (-9)^{5-(-2)} = (-9)^{5+2} = (-9)^7 \\ 8^{-12} : 8^{-4} &= 8^{-12-(-4)} = 8^{-8} \end{aligned}$$

تمرين:

اكتب القوى (أو النواتج) التالية كأساس واحد:

$$\begin{aligned} 15^3 : 15^2 &= (-7)^{13} : (-7)^{10} = \\ 7^5 : 7^{-3} &= 6^{-6} : 6^4 = \\ (-8)^{-5} : (-8)^{-7} &= (-4)^{-6} : (-4)^2 = \end{aligned}$$

3. Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε έναν από τους

όρους του γινομένου στον εκθέτη αυτόν, δηλαδή $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$

Παραδείγματα:

$$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$$

$$((-7) \cdot 4)^5 = (-7)^5 \cdot 4^5$$

$$(-2)^{10} \cdot 5^{10} = (-2 \cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$$

$$(-0,5)^{-3} \cdot (-2)^{-3} = ((-0,5) \cdot (-2))^{-3} = (+1)^{-3}$$

4. Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε ορο του πηλίκου στ

ον εκθέτη αυτόν, δηλαδή $(\alpha : \beta)^v = \alpha^v : \beta^v$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Να γράψετε σαν κλάσμα δυνάμεων τις επόμενες δυνάμεις

$$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

5. Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο

γινόμενο των εκθετών, δηλαδή $(a^m)^v = a^{m \cdot v}$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

$$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

$$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$$

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$$

لرفع حاصل الضرب لقوة، نرفع كل حد من حدوده للقوة هذه، يعني:

$$(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$$

أمثلة:

$$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$$

$$((-7) \cdot 4)^5 = (-7)^5 \cdot 4^5$$

$$(-2)^{10} \cdot 5^{10} = (-2 \cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$$

$$(-0,5)^{-3} \cdot (-2)^{-3} = ((-0,5) \cdot (-2))^{-3} = (+1)^{-3}$$

٤. لرفع ناتج قسمة إلى أس، نرفع كل حد من حدوده إلى ذلك الأس، أي:

$$(\alpha : \beta)^v = \alpha^v : \beta^v$$

أمثلة للتمرين:

اكتب ما يلي على صورة كسر قوى:

$$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$$

$$\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$$

احسب القوى

$$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

لرفع قوة إلى أس، نرفع أساس القوة إلى حاصل ضرب الأسس، أي

$$(a^m)^v = a^{m \cdot v}$$

مثال تدريبي: احسب القوى التالية

$$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

$$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$$

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑ:

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α') $2^4 = \dots$

(γ') $(-2)^4 = \dots$

(β') $2^3 = \dots$

(δ') $(-2)^3 = \dots$

$(-3)^2 = \dots$

$5^3 = \dots$

$(-3)^3 = \dots$

$(-1)^9 = \dots$

$-3^2 = \dots$

$(-1)^{10} = \dots$

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α') $4^{-2} = \dots$

(ε') $-4^{-2} = \dots$

(β') $(-4)^{-2} = \dots$

(ς') $4^0 = \dots$

(γ') $4^{-3} = \dots$

(ζ') $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots$

(δ') $(-4)^{-3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $6^{-21} \cdot 6^{19} = \dots$

(γ') $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \dots$

(β') $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \dots$

(δ') $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \dots$

(γ') $\frac{(-14)^5}{7^5} = \dots$

(β') $2^6 \cdot 5^6 = \dots$

(δ') $\frac{(-63)^3}{21^3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \dots$

(δ') $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \dots$

(β') $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \dots$

(ε') $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \dots$

(γ') $\frac{9^5}{3^{10}} = \dots$

(ς') $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \dots$

الواجب المنزلي

احسب، قدر الإمكان، بشكل أفضل باستخدام خصائص القوى

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α') $2^4 = \dots$

(γ') $(-2)^4 = \dots$

(β') $2^3 = \dots$

(δ') $(-2)^3 = \dots$

$(-3)^2 = \dots$

$5^3 = \dots$

$(-3)^3 = \dots$

$(-1)^9 = \dots$

$-3^2 = \dots$

$(-1)^{10} = \dots$

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α') $4^{-2} = \dots$

(ε') $-4^{-2} = \dots$

(β') $(-4)^{-2} = \dots$

(ς') $4^0 = \dots$

(γ') $4^{-3} = \dots$

(ζ') $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots$

(δ') $(-4)^{-3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $6^{-21} \cdot 6^{19} = \dots$

(γ') $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \dots$

(β') $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \dots$

(δ') $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \dots$

(γ') $\frac{(-14)^5}{7^5} = \dots$

(β') $2^6 \cdot 5^6 = \dots$

(δ') $\frac{(-63)^3}{21^3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α') $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \dots$

(δ') $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \dots$

(β') $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \dots$

(ε') $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \dots$

(γ') $\frac{9^5}{3^{10}} = \dots$

(ς') $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \dots$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

1^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

2^ο ΒΗΜΑ: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

3^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

4^ο ΒΗΜΑ: Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A. \quad 3 \cdot 6 + 6 - 4 - 8^2 = 3 \cdot 6 + 6 - 4 - 64 = 18 - 24 - 64 = 18 - 88 = -70$$

$$B. \quad (-2)^3 - (-5)^2 + 7 \cdot 3 = (-8) - (+25) + 21 = -8 - 25 + 21 = -33 + 21 = -12$$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 6 \cdot 10$$

$$B = (-3) \cdot (-5) + (-6) \cdot (-4) + 19$$

$$\Gamma = (-2)^3 - (-5)^2 + 8 \cdot (-2) - 15$$

$$\Delta = (2^3 - 5 \cdot 2) + 7^2 - 6 \cdot 4$$

$$E = (8^2 - 5 \cdot 3) + (-4)^3$$

$$\Omega = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 - 8 : 2 - 6 : 3$$

$$\Psi = 4 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (8 - 6) : (5 + 1)$$

$$\Phi = 2^3 : 4 + 4^2 : 8 + 3 \cdot (5^2 - 4 \cdot 6)$$

$$\Upsilon = 3^2 - 2^3 + 4^2 - 3 \cdot (10 - 3 \cdot 3) + 5^2$$

$$\Upsilon = 4^3 - 5 \cdot (3^3 - 2^3 \cdot 3) + 2^4 : 8$$

$$\Sigma = 3^4 : (2^3 + 1) + 4^2 : (5 \cdot 3 - 7)$$

$$P = 3 \cdot (5^2 - 2^2 \cdot 3) : (5 \cdot 2 + 3) - (10^5 - 10^4)^0$$

$$\Pi = 2 \cdot 10^3 + 4^2 - 5^3 : 5^2 + 2$$

$$\Xi = (4^3 : 2^3 + 2)^3 \cdot (17 - 3 \cdot 5) + 2^3 \cdot 2 - 2$$

أولوية العمليات

الخطوة الأولى: إجراء العمليات داخل الأقواس

الخطوة الثانية: حساب القوى

الخطوة الثالثة: إجراء عمليات الضرب والقسمة

الخطوة الرابعة: إجراء عمليات الجمع والطرح

أمثلة على التمارين: احسب قيم التعبيرات:

$$A. \quad 3 \cdot 6 + 6 - 4 - 8^2 = 3 \cdot 6 + 6 - 4 - 64 = 18 - 24 - 64 = 18 - 88 = -70$$

$$B. \quad (-2)^3 - (-5)^2 + 7 \cdot 3 = (-8) - (+25) + 21 = -8 - 25 + 21 = -33 + 21 = -12$$

تمرين (مهمة): احسب قيم التعبيرات

$$A = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 6 \cdot 10$$

$$B = (-3) \cdot (-5) + (-6) \cdot (-4) + 19$$

$$\Gamma = (-2)^3 - (-5)^2 + 8 \cdot (-2) - 15$$

$$\Delta = (2^3 - 5 \cdot 2) + 7^2 - 6 \cdot 4$$

$$E = (8^2 - 5 \cdot 3) + (-4)^3$$

$$\Omega = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 - 8 : 2 - 6 : 3$$

$$\Psi = 4 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (8 - 6) : (5 + 1)$$

$$\Phi = 2^3 : 4 + 4^2 : 8 + 3 \cdot (5^2 - 4 \cdot 6)$$

$$\Upsilon = 3^2 - 2^3 + 4^2 - 3 \cdot (10 - 3 \cdot 3) + 5^2$$

$$\Upsilon = 4^3 - 5 \cdot (3^3 - 2^3 \cdot 3) + 2^4 : 8$$

$$\Sigma = 3^4 : (2^3 + 1) + 4^2 : (5 \cdot 3 - 7)$$

$$P = 3 \cdot (5^2 - 2^2 \cdot 3) : (5 \cdot 2 + 3) - (10^5 - 10^4)^0$$

$$\Pi = 2 \cdot 10^3 + 4^2 - 5^3 : 5^2 + 2$$

$$\Xi = (4^3 : 2^3 + 2)^3 \cdot (17 - 3 \cdot 5) + 2^3 \cdot 2 - 2$$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ: Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ορίζουμε να είναι $\sqrt{0} = 0$

Παραδείγματα

$$\sqrt{25} = 5 \text{ γιατί } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25, \quad \sqrt{49} = 7 \text{ γιατί } 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{676} = 26$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{729} = 27$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{784} = 28$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{841} = 29$

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

A. για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει $\sqrt{x^2} = |x|$

παραδείγματα

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5 \quad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

B. Αν $x \geq 0$, τότε $(\sqrt{x})^2 = x$

παραδείγματα

$$(\sqrt{8})^2 = 8, \quad (\sqrt{15})^2 = 15 \quad (\sqrt{11})^2 = 11$$

Εργασία

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16}, \sqrt{1600}, \sqrt{0,16} \quad \beta) \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{100}{81}}, \sqrt{\frac{144}{169}}$$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16} \quad \beta) \sqrt{8+8} \quad \gamma) \sqrt{8 \cdot 8} \quad \delta) (\sqrt{8})^2$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}} \quad B = \sqrt{96 + \sqrt{25 + \sqrt{121}}}$$

4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{1089} \quad \beta) \sqrt{484} \quad \gamma) \sqrt{11025}$$

الجذر التربيعي لعدد حقيقي

التعريف الأساسي: يُرمز للجذر التربيعي لعدد موجب x بالرمز $\sqrt{x}$, وهو العدد الموجب

الذي عند تربيعه حصل على العدد. التعريف الأساسي: $\sqrt{0} = 0$ أمثلة

$$\sqrt{25} = 5 \quad 49 = 7^2 \quad 7 = \sqrt{49}, \quad 25 = 5 \cdot 5 = 5^2$$

الجذور التربيعية الأساسية

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{676} = 26$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{729} = 27$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{784} = 28$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{841} = 29$

خصائص الجذور التربيعية

$\sqrt{x^2} = |x|$ لكل عدد حقيقي

$$\frac{1}{4} = \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \left|\frac{-1}{4}\right| \quad 7 = \sqrt{(-7)^2} = |-7| \text{ أمثلة}$$

$(\sqrt{x})^2 = x$

إذا كان $x \geq 0$, فإن

أمثلة

$$(\sqrt{8})^2 = 8, \quad (\sqrt{15})^2 = 15 \quad (\sqrt{11})^2 = 11$$

الحل حساب الجذور التربيعية

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16}, \sqrt{1600}, \sqrt{0,16} \quad \beta) \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{100}{81}}, \sqrt{\frac{144}{169}}$$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16} \quad \beta) \sqrt{8+8} \quad \gamma) \sqrt{8 \cdot 8} \quad \delta) (\sqrt{8})^2$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}} \quad B = \sqrt{96 + \sqrt{25 + \sqrt{121}}}$$

4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{1089} \quad \beta) \sqrt{484} \quad \gamma) \sqrt{11025}$$

$$2. \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

δηλαδή το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών είναι ίσον με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους

παραδείγματα

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25$$

3. το πηλίκο το τετραγωνικών ριζών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου

$$\text{δηλαδή } \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$$

παραδείγματα

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Σημαντική παρατήρηση:

$$\alpha, \beta > 0 \rightarrow \sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

παραδείγματα :

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \quad \text{ενώ} \quad \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Σημαντική παρατήρηση (Ρητοποίηση παρανομαστών)

Άσκηση: παράδειγμα

Να μετατραπούν τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρανομαστή:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Ασκήσεις:

Βιβλίο..και

2. $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \sqrt{\beta} \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ أي أن حاصل ضرب الجذرين التربيعيين يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضربهما.

أمثلة

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25$$

3. حاصل قسمة الجذرين التربيعيين يساوي الجذر التربيعي لحاصل القسمة، أي $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

أمثلة

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

ملاحظة مهمة:

$$\alpha, \beta > 0 \rightarrow \sqrt{\alpha + \beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7, \quad \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

ملاحظة مهمة (ترشيد المقامات)

تمرين: مثال

حوّل الكسور التالية إلى كسور متكافئة بمقامات نسبية:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

التمارين:

الكتاب ... و

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, β) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, γ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, δ) $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, ε) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$ β. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

γ. $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$ δ. $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

ε. $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ στ. $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{200}+\sqrt{288}$

β) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$

γ) $\sqrt{20}-\sqrt{210}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$ β. $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$

γ. $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$ δ. $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$

ε. $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ στ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

ζ. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ η. $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

θ. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ι. $\sqrt{\frac{\alpha}{7}}\cdot\sqrt{14\alpha}$

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, β) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, γ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, δ) $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, ε) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$ β. $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

γ. $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$ δ. $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

ε. $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ στ. $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{200}+\sqrt{288}$

β) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$

γ) $\sqrt{20}-\sqrt{210}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$ β. $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$

γ. $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$ δ. $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$

ε. $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ στ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

ζ. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ η. $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

θ. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ι. $\sqrt{\frac{\alpha}{7}}\cdot\sqrt{14\alpha}$

Μονώνυμα -Πράξεις με μονώνυμα

Βασικός ορισμός: Αριθμητικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και πράξεις.

παραδείγματα:

$$A = 2^3 + 5 \cdot 2 - 4 \quad B = (2^3 + 5 \cdot 2) - 7 \cdot 4 \quad \Gamma = [(2^3 + 5 \cdot 2) - 7^2 - 4 \cdot 5] + 7 \cdot 4$$

Βασικός ορισμός: Αλγεβρικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν αριθμούς, πράξεις και μεταβλητές.

παραδείγματα:

$$A = 2^4 + 3 \cdot 2 - 7^2 + 6x + 12 \quad B = x^2 - 5x + 6 \quad \Gamma = x^3 - 5x^2 + 4x - 10$$

Βασικός ορισμός: Ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται μία παράσταση όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ακέραιοι (δηλαδή φυσικοί αριθμοί).

Παραδείγματα

$$A = 5x^2 + 6x \quad B = 5x^3 + 2x$$

Βασικός ορισμός: αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις τότε το αποτέλεσμα που θα προκύψει ονομάζεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Άσκηση- παράδειγμα: βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

$$A = 3x^2 + 2x \text{ για } x = 4$$

$$B = 6x + 12, \text{ για } x = -2$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12, \text{ για } x = -3$$

Λύση

$$A = 3x^2 + 2x \quad 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 48 + 8 = 56 \text{ άρα } \underline{A = 56}$$

$$B = 6x + 12 = 6 \cdot (-2) + 12 = -12 + 12 = 0, \text{ άρα } \underline{B = 0}$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12 = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 12 = 9 + 5(-3) + 12 = 9 - 15 + 12 = 21 - 15 = 6 \text{ άρα } \underline{\Gamma = 6}$$

άσκηση-εργασία: να υπολογίσετε την τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

$$A = 5x + 2 \quad \text{για } x = 7$$

$$B = x^2 - 5x + 2, \quad \text{για } x = -2$$

$$\Gamma = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad \text{για } x = -1$$

Βασικός ορισμός: Μονώνυμα ονομάζονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και τον μεταβλητών σημειώνεται (γράφεται) μόνο οι πράξη του πολλαπλασιασμού

Παραδείγματα:

$$5x^3, \quad -6x, \quad 2x^2y^3\omega^5, \quad -3xy^3, \quad -\frac{3}{7}x^3y$$

المصطلحات الأحادية — العمليات باستخدام المصطلحات الأحادية

التعريف الأساسي: التعبيرات الحسابية هي تعبيرات تحتوي فقط على أرقام وعمليات حسابية.

$$A = 2^3 + 5 \cdot 2 - 4 \quad B = (2^3 + 5 \cdot 2) - 7 \cdot 4 \quad \Gamma = [(2^3 + 5 \cdot 2) - 7^2 - 4 \cdot 5] + 7 \cdot 4$$

التعريف الأساسي: التعبيرات الجبرية هي تعبيرات تحتوي على أرقام وعمليات حسابية ومتغيرات.

$$A = 2^4 + 3 \cdot 2 - 7^2 + 6x + 12 \quad B = x^2 - 5x + 6 \quad \Gamma = x^3 - 5x^2 + 4x - 10$$

التعريف الأساسي: يُطلق على التعبير اسم تعبير جبري صحيح عندما تُدرج عمليات الجمع والضرب فقط ضمن متغيراته، وتكون أسه أعدادًا صحيحة موجبة (أي أعدادًا طبيعية).

أمثلة

$$A = 5x^2 + 6x \quad B = 5x^3 + 2x$$

التعريف الأساسي: إذا استبدلنا المتغيرات في تعبير جبري بأعداد وأجرينا العمليات الحسابية، فإن النتيجة تُسمى القيمة العددية، أو ببساطة قيمة التعبير الجبري.

مثال تمرين: أوجد القيمة العددية للمعادلات:

$$A = 3x^2 + 2x, \quad x = 4$$

$$B = 6x + 12, \quad x = -2$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12, \quad x = -3$$

حل

$$A = 3x^2 + 2x \quad 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 48 + 8 = 56, \quad \underline{A = 56}$$

$$B = 6x + 12 = 6 \cdot (-2) + 12 = -12 + 12 = 0, \quad \underline{B = 0}$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12 = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 12 = 9 + 5(-3) + 12 = 9 - 15 + 12 = 21 - 15 = 6, \quad \underline{\Gamma = 6}$$

مهمة تمرين: احسب قيمة المعادلات الجبرية:

$$A = 5x + 2, \quad x = 7$$

$$B = x^2 - 5x + 2, \quad x = -2$$

$$\Gamma = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad x = -1$$

التعريف الأساسي: تُسمى التعبيرات الجبرية الصحيحة التي تُدوّن فيها عملية الضرب فقط بين العامل العددي والمتغير أحاديات الحدود.

أمثلة:

$$5x^3, \quad -6x, \quad 2x^2y^3\omega^5, \quad -3xy^3, \quad -\frac{3}{7}x^3y$$

Βασικός ορισμός(Συντελεστής μονωνύμου)

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονώνυμου

Παραδείγματα:

- Στο μονώνυμο 5x³ ο συντελεστής είναι 5
- Στο μονώνυμο -3xy³ ο συντελεστής είναι -3

Βασικός ορισμός (Κύριο μέρος):

Σε κάθε μονώνυμο το γινόμενο όλων των μεταβλητών του υψωμένο στους αντίστοιχους εκθέτες λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου

Παραδείγματα

- Στο μονώνυμο 5x³το κύριο μέρος είναι x³
- Στο μονώνυμο - $\frac{3}{7}x^3y$ το κύριο μέρος είναι x³y

Άσκηση παράδειγμα : Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
13x ⁵ γ ³	13	x ⁵ γ ³
$-\frac{1}{2}x^3\gamma^6\omega^2$	- $\frac{1}{2}$	x ³ γ ⁶ ω ²

Άσκηση εργασία : Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
-13x ⁵ γ ² ω		
14x ² γ ³ ω ⁶		
$-\frac{2}{3}x$		
-2x		

Βασικός ορισμός(Βαθμός μονωνύμου)

Βαθμός ενός μονωνύμου ως μία μεταβλητή ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του ονομάζεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του

Παραδείγματα

- A) το μονώνυμο 8x³γ⁴ έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό, ως προς ψ 4, βαθμό προς x και ψ το μονώνυμο έχει βαθμό 3+4 = 7
- B) το μονώνυμο $-\frac{1}{2}x^3\gamma^6\omega^2$ έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό ως προς ψ 6, βαθμό ως προς ω 2, βαθμό προς x και ψ και ω 3+6+2 = 11

άσκηση εργασία: να βρείτε το βαθμό του μονωνύμου $\frac{3}{2}x^5\gamma^3\omega^2$

ως προς χ , ως προς ψ, ως προς ω ως προς x και ψ και ω

التعريف الأساسي (معامل أحادي الحد)

في كل أحادي حد، يُسمى العامل الحسابي معامل أحادي الحد.

أمثلة:

- في أحادي الحد 5x³، يكون المعامل 5.
- في أحادي الحد -3xy³، يكون المعامل -3.

التعريف الأساسي (الجزء الرئيسي):

في كل أحادي حد، يُسمى حاصل ضرب جميع متغيراته مرفوعاً إلى الأسس المقابلة الجزء الرئيسي من أحادي الحد.

أمثلة:

- في أحادي الحد 5x³، يكون الجزء الرئيسي هو x³.
- في أحادي الحد - $\frac{3}{7}x^3y$ ، يكون الجزء الرئيسي هو x³y.

تمرين مثال: أكمل الجدول التالي.

الجزء الرئيسي	إحداثي	اسم واحد
x ⁵ γ ³	13	13x ⁵ γ ³
x ³ γ ⁶ ω ²	- $\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}x^3\gamma^6\omega^2$

تمرين: أكمل الجدول التالي.

الجزء الرئيسي	إحداثي	اسم واحد
		-13x ⁵ γ ² ω
		14x ² γ ³ ω ⁶
		$-\frac{2}{3}x$
		-2x

التعريف الأساسي (درجة أحادية الحد)

تُسمى درجة أحادية الحد بالنسبة لمتغير واحد بأُس ذلك المتغير. تُسمى درجة أحادية الحد بالنسبة لجميع متغيراتها مجموع أسِّها.

أمثلة

- أ) أحادية الحد 8x³y4 لها درجة بالنسبة إلى x 3، ودرجة بالنسبة إلى y 4، درجة بالنسبة إلى x وy، أحادية الحد لها درجة 7 = 4+3.
- ب) أحادية الحد - $\frac{2}{1}x^3y6\omega^2$ لها درجة بالنسبة إلى x 3، ودرجة بالنسبة إلى y 6، ودرجة بالنسبة إلى ω 2، ودرجة بالنسبة إلى x وy وω 3+6+2 = 11.

مهمة تدريبية: أوجد درجة أحادية الحد $3/2x^5y^3\omega^2$

بالنسبة إلى x ، بالنسبة إلى y، بالنسبة إلى ω بالنسبة إلى x وy وω.

Βασικός ορισμός (όμοια μονώνυμα)

τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια

παραδείγματα

- ☐ τα μονώνυμα $2x^2y^3$ και $-5x^2y^3$ είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος
- ☐ τα μονώνυμα $2xy^3\omega^2$, $\frac{3}{2}xy^3\omega^2$ είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος

άσκηση εργασία να εξετάσετε αν τα επόμενα μονώνυμα είναι όμοια

- a) $2x^2y^3$, $-5x^2y^3$, $7x^2y^3$
- b) $8xy$, $-17xy$
- c) $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$, $x^5y^3\omega^2$

Βασικός ορισμός(ίσα μονώνυμα)

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα μονώνυμα

Βασικός ορισμός αντίθετα μονώνυμα

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται αντίθετα μονώνυμα

παραδείγματα

- A) τα μονώνυμα $-5x^2y^3$, $5x^2y^3$ είναι αντίθετα μονώνυμα
- B) τα μονώνυμα $8xy$, $-8xy$, είναι αντίθετα μονώνυμα

Βασικός ορισμός οι αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα και ονομάζεται σταθερά μονώνυμα

παραδείγματα

- α) 17 σταθερό μονώνυμο
- β) -23 σταθερό μονώνυμο
- γ) 0 σταθερό μονώνυμο

Βασική παρατήρηση

Κάθε σταθερό μονώνυμο ($\neq 0$) έχει βαθμό μηδέν

Βασικός ορισμός:

Το σταθερό μονώνυμο 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό

άσκηση εργασία

α) ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 12 και μεταβλητές x , y να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός ω προς x είναι 4 και ως προς y και ψ είναι 7

β) ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 5 και μεταβλητές α , β , γ να προσδιορίσετε το μονώνυμο αν ο βαθμός προς α είναι 2, ο βαθμός ως β είναι 3, ο βαθμός ως προς α , β και γ είναι 9

Ορισμός (Αحادیات الحدود المتشابهة)

أحادیات الحدود التي لها نفس الجزء الرئيسي تسمى متشابهة.

أمثلة

أحادیات الحدود $2x^2y^3$ و $-5x^2y^3$ متشابهة لأنها تحتوي على نفس الجزء الرئيسي.

أحادیات الحدود $2xy^3\omega^2$ و $\frac{3}{2}xy^3\omega^2$ متشابهة لأنها تحتوي على نفس الجزء الرئيسي.

واجب منزلي لاختبار ما إذا كانت أحاديات الحدود التالية متشابهة:

- a) $2x^2y^3$, $-5x^2y^3$, $7x^2y^3$
- b) $8xy$, $-17xy$
- c) $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$, $x^5y^3\omega^2$

Ορισμός (أحادیات الحدود المتشابهة)

أحادیات الحدود المتطابقة التي لها نفس المعامل تسمى أحادیات الحدود المتشابهة.

التعريف الأساسي لأحادیات الحدود المتضادة

أحادیات الحدود المتطابقة التي لها معاملات متضادة تسمى متضادة. أمثلة على أحادیات الحدود

(أ) أحادیات الحدود $-5x^2y^3$, $5x^2y^3$ أحادیات حدود متعاكسة

(ب) أحادیات الحدود $8xy$, $-8xy$ أحادیات حدود متعاكسة

التعريف الأساسي: تُعتبر الأعداد أحادیات حدود وتسمى أحادیات حدود ثابتة

أمثلة

- (أ) أحادي حد ثابت 17
- (ب) أحادي حد ثابت -23
- (ج) أحادي حد ثابت 0

ملاحظة أساسية

كل أحادي حد ثابت ($0 \neq$) له درجة صفر

التعريف الأساسي:

يُسمى أحادي الحد الثابت 0 أحادي الحد الصفرى وليس له درجة

تمارين

(أ) أحادي حد لهم عامل 12، والمتغيران x و y يحددان أحادي الحد، إذا كانت درجة ω إلى x هي 4، وإلى y هي 7

(ب) أحادي حد لهم عامل 5، والمتغيرات α و β و γ تحددان أحادي الحد إذا كانت درجة α هي 2، ودرجة β هي 3، والدرجة لـ a و b و c هي 9

Πράξεις με μονώνυμα (πρόσθεση μονωνύμων)

βασικός κανόνας: το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους

παρατήρηση δηλαδή για να προσθέσουμε όμοια μονώνυμα πρέπει να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

παραδείγματα

$$\begin{array}{ll} \text{A. } 2x^3+5x^3 = 7x^3 & \text{C. } 9x^2y+5x^2y = 14x^2y \\ \text{B. } 7x^2-2x^2 = 5x^2 & \text{D. } 8a^4+5a^4-2a^4 = 11a^4 \end{array}$$

άσκηση εργασία

να βρείτε τα αθροίσματα ή να κάνετε τις προσθέσεις

$$\begin{array}{ll} \text{A. } +4x+5x = ... & \text{E. } -2x^3-7x^3 = ... \\ \text{B. } 10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2 = ... & \text{F. } 2x^8-3x^8 = ... \\ \text{C. } -x^2-3x^2 = ... & \\ \text{D. } -19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega & \end{array}$$

πολλαπλασιασμός μονωνύμων(βασικός κανόνας)

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της

παρατήρηση για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα πολλαπλασιάζουμε αριθμούς με αριθμούς και μεταβλητές με μεταβλητές δηλαδή γράμματα με γράμματα

παρατήρηση

πρέπει να θυμάμαι ότι $\alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l}$

παραδείγματα

$$\begin{array}{ll} \text{A. } +4x^2 \cdot 3x^3 = +12x^5 & \text{C. } -4\omega^2 \cdot (-3\omega^4) = 12\omega^6 \\ \text{B. } 12x^3y \cdot (-3x^5y^2) = -36x^8y^3 & \end{array}$$

άσκηση εργασία

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x^3 \cdot x^2 = = ... & \text{C. } x \cdot 2x^2 \cdot x^3 \cdot 0.5x^4 \\ \text{B. } -2x^3 \cdot (-5x) = ... & \text{D. } -3xy^2 \cdot 3x^2y \cdot \frac{1}{9}x^3y \\ \text{E. } \frac{1}{3}x^3cv^2 \cdot (-3x^2c^3v) = ... & \text{F. } \sqrt{3}\Psi^4 \cdot \sqrt{012}\Psi^3 \end{array}$$

العمليات على أحاديات الحدود (جمع أحاديات الحدود)

القاعدة الأساسية: مجموع أحاديات الحدود المتشابهة هو أحادي حد مماثل لها وله معامل مجموع معاملاتها.

ملاحظة: لجمع أحاديات حدود متشابهة، يجب اختزال الحدود المتشابهة.

أمثلة:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } 2x^3+5x^3 = 7x^3 & \text{C. } 9x^2y+5x^2y = 14x^2y \\ \text{B. } 7x^2-2x^2 = 5x^2 & \text{D. } 8a^4+5a^4-2a^4 = 11a^4 \end{array}$$

مهمة تدريبية

أوجد المجاميع أو قم بالجمع.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } +4x+5x = ... & \text{E. } -2x^3-7x^3 = ... \\ \text{B. } 10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2 = ... & \text{F. } 2x^8-3x^8 = ... \\ \text{C. } -x^2-3x^2 = ... & \\ \text{D. } -19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega & \end{array}$$

ضرب أحاديات الحدود (قاعدة أساسية)

حاصل ضرب أحاديات الحدود هو أحادي حد له معامل (حاصل ضرب معاملاتها وجزء رئيسي) (حاصل ضرب جميع متغيراتها في أس كل متغير) (مجموع أسسه).

ملاحظة: لضرب أحاديات الحدود، نضرب الأعداد بالأعداد والمتغيرات بالأحرف، أي نضرب الأحرف بالأحرف.

ملاحظة:

يجب أن نتذكر أن $\alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l}$

أمثلة

$$\begin{array}{ll} \text{A. } +4x^2 \cdot 3x^3 = +12x^5 & \text{C. } -4\omega^2 \cdot (-3\omega^4) = 12\omega^6 \\ \text{B. } 12x^3y \cdot (-3x^5y^2) = -36x^8y^3 & \end{array}$$

تمارين

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x^3 \cdot x^2 = = ... & \text{C. } x \cdot 2x^2 \cdot x^3 \cdot 0.5x^4 \\ \text{B. } -2x^3 \cdot (-5x) = ... & \text{D. } -3xy^2 \cdot 3x^2y \cdot \frac{1}{9}x^3y \\ \text{E. } \frac{1}{3}x^3cv^2 \cdot (-3x^2c^3v) = ... & \text{F. } \sqrt{3}\Psi^4 \cdot \sqrt{012}\Psi^3 \end{array}$$

Διαίρεση μονωνύμων(βασικός κανόνας)

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα διαιρούμε τους συντελεστές και τις μεταβλητές χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των δυνάμεων $\alpha^k : \alpha^{\lambda} = \alpha^{k-\lambda}$

άσκηση παράδειγμα να γίνουν οι επόμενες διαιρέσεις

A. $+12\chi^3 : (3\chi^2) = +4\chi$ C. $-4\omega^3 : (-2\omega) = 2\omega^2$
B. $10\alpha^3 : (-5\alpha^3) = -2$ D. $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

βασική παρατήρηση το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι απαραίτητα μονώνυμο, μπορεί να είναι άλλα σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι μονώνυμο

άσκηση εργασία να κάνετε τις πράξεις

I. $20\chi^3 : 10\chi^2 = \dots$
II. $-25\zeta^2 : (-5\zeta) = \dots$
III. $\frac{1}{3}\chi^2 : (-\frac{1}{6}\chi) = \dots$
IV. $0,5\alpha^3 : 0,5\alpha^4 = \dots$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2$, β) $12\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3 + 3\beta^3\alpha$
γ) $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3$, δ) $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(2x^5y^2) \cdot (-3x^4y^2) \cdot \left(\frac{1}{6}x^2y\omega^2\right)$, β) $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2 \cdot (2xy\omega)^3$
γ) $5x^2y \cdot (-2xy^2) \cdot \left(\frac{1}{10}xy\right)$, δ) $-4\alpha^2\beta \cdot 3\alpha\beta^2\gamma^3 \cdot \frac{1}{6}\alpha\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\left(\frac{1}{3}x^2y^4\right) : \left(-\frac{1}{6}xy^2\right)$, β) $(-2x^4y^3\omega^2) : (-3x^2y^3\omega)$, γ) $(-6x^5y^2)^2 : (-12x^8y^3)$

قسمة أحاديّات الحدود (القاعدة الأساسية)

لقسمة أحاديّتي حدود، نقسم المعاملات والمتغيرات باستخدام خاصية الأس

$$\alpha^k : \alpha^{\lambda} = \alpha^{k-\lambda}$$

مثال تدريبي لإجراء عمليات القسمة التالية:

A. $+12\chi^3 : (3\chi^2) = +4\chi$ C. $-4\omega^3 : (-2\omega) = 2\omega^2$
B. $10\alpha^3 : (-5\alpha^3) = -2$ D. $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

ملاحظة أساسية: حاصل قسمة أحاديّتي حدود ليس بالضرورة أحادي حد، بل قد يكون كذلك في بعض الحالات، وفي بعض الحالات لا يكون أحادي حد.

واجب تدريبي: حل العمليات:

I. $20\chi^3 : 10\chi^2 = \dots$
II. $-25\zeta^2 : (-5\zeta) = \dots$
III. $\frac{1}{3}\chi^2 : (-\frac{1}{6}\chi) = \dots$
IV. $0,5\alpha^3 : 0,5\alpha^4 = \dots$

تكرار مفرد: حل العمليات:

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2$, β) $12\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3 + 3\beta^3\alpha$
γ) $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3$, δ) $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $(2x^5y^2) \cdot (-3x^4y^2) \cdot \left(\frac{1}{6}x^2y\omega^2\right)$, β) $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2 \cdot (2xy\omega)^3$
γ) $5x^2y \cdot (-2xy^2) \cdot \left(\frac{1}{10}xy\right)$, δ) $-4\alpha^2\beta \cdot 3\alpha\beta^2\gamma^3 \cdot \frac{1}{6}\alpha\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\left(\frac{1}{3}x^2y^4\right) : \left(-\frac{1}{6}xy^2\right)$, β) $(-2x^4y^3\omega^2) : (-3x^2y^3\omega)$, γ) $(-6x^5y^2)^2 : (-12x^8y^3)$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Βασικός ορισμός: το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια μονώνυμα είναι μία αλγεβρική παράσταση που ονομάζεται **πολυώνυμο**.

Παραδείγματα:

- A. $2x^3+6x$ C. $3xy+6x^3y+8xy^2$
B. x^2+5x+6 D. $8x^3+7x^2-6x+5$

Βασική παρατήρηση: αν το πολυώνυμο έχει

- ☐ δύο όρους ονομάζεται διώνυμο
☐ τρεις όρους ονομάζεται τριώνυμο

Βασικός ορισμός: κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο ονομάζεται όρος του πολυωνύμου. Για παράδειγμα στο πολυώνυμο $8x^3+7x^2-6x+5$, οι όροι είναι τα μονώνυμα $8x^3$, $7x^2$, $-6x$, 5 ,

άσκηση εργασία: Να γράψετε τους όρους στα επόμενα πολυώνυμα:

- α) $4x^2-35x+6$ β) $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ γ) $3xy+6x^3y+8xy^2$

Βασικός ορισμός: Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Παραδείγματα

- A) το πολυώνυμο $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ είναι τρίτου βαθμούς προς x
B) το πολυώνυμο $8x^4+4x^2-6x^3+5x^5$ είναι 5ου βαθμούς προς x

Βασικός ορισμός: Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του (δηλαδή το μεγαλύτερο άθροισμα εκθετών στις μεταβλητές του)

παραδείγματα

- A) Το πολυώνυμο $6x^2y+2xy^3-4x^4y^2$ είναι
☐ 4^{ου} βαθμού ως προς x ,
☐ 3^{ου} βαθμού προς y
☐ 6^{ου} βαθμού ως προς x και y .
B) το πολυώνυμο $3x^5y^2+7x^2y^6-4x^3y^3$ είναι
☐ 5^{ου} βαθμού ως προς x
☐ 6^{ου} βαθμού ως προς y
☐ 8^{ου} βαθμού ως προς x και y

Κθιρارات الءءوء

التعريف الأساسي: مجموع أحاديات الءءوء غير المتطابقة هو تعبى رءبرى يُسمى كثريرة

ءءوء.

أمثلة:

- A. $2x^3+6x$ C. $3xy+6x^3y+8xy^2$
B. x^2+5x+6 D. $8x^3+7x^2-6x+5$

ملاحظة أساسية: إذا كانت كثريرة الءءوء تحتوي على ءءين، تُسمى ذات ءءين، وإذا كانت تحتوي على ثلاثة ءءوء، تُسمى ثلاثية ءءوء.

التعريف الأساسي: كل أحاءى ءءوء موجود فى كثريرة ءءوء يُسمى ءءًا من كثريرة الءءوء. على سبيل المثال، فى كثريرة الءءوء $8x^3 + 7x^2 - 6x + 5$ الءءوء هى أحاديات الءءوء $8x^3$ ، $7x^2$ ، $-6x$ ، 5

واجب منزلى: اءءب ءءوء كثريرات الءءوء التالية:

- α) $4x^2-35x+6$ β) $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ γ) $3xy+6x^3y+8xy^2$

التعريف الأساسي: ءرءة كثريرة الءءوء بالنسبة لأءء متءيراتها هى أكبر أسٍ لءلك المتءير.

أمثلة

- أ) كثريرة الءءوء $3x^2 + 2x - 7$ من ءرءة الثالثة فى س.
ب) كثريرة الءءوء $3x^3 + 2x^2 - 6x + 5$ من ءرءة الخامسة فى س.
ت)

التعريف الأساسي: ءرءة كثريرة الءءوء هى أكبر ءرءات ءءوءها (أى أكبر مجموع للأسس فى متءيراتها).

أمثلة

- ء) كثريرة الءءوء $3x^2 + 2x - 7$ من ءرءة الرابعة فى س، وءرءة الثالثة فى ص، وءرءة السادسة فى س و ص.

ء)

- ء) كثريرة الءءوء $3x^3 + 2x^2 - 6x + 5$ من ءرءة الخامسة فى س، وءرءة السادسة فى ص، وءرءة الثامنة فى س و ص.

άσκηση εργασία: στα επόμενα πολυώνυμα να βρείτε

1. $3xy+2x^3y+5xy^4$

2. $5x^2y+9xy+12x^6y^2$

3. $-\frac{3}{4}x^2y^3+2xy^3-4x^5y^2$

α) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς x

β) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς y

γ) του βαθμό των πολυωνύμων ως προς x και y

Βασικός ορισμός: κάθε αριθμός ονομάζεται σταθερό πολυώνυμο.

Βασικός ορισμός: ο αριθμός μηδέν (0) λέγεται μηδενικό πολυώνυμο

Βασική παρατήρηση: όλα τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν (0). Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Βασική παρατήρηση: όταν γράφουμε ένα πολυώνυμο κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο βαθμός του προηγούμενου όρου να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του επόμενου όρου τότε λέμε ότι έχουμε το πολυώνυμο κατά φθίνουσες δυνάμεις του x

Παραδείγματα

$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$

$B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$

άσκηση εργασία: να γράψετε τα επόμενα πολυώνυμα κατά φθίνουσες δυνάμεις του x:

$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$

$B(x) = x^2+3x^5-14x^3-35x+6x^7$

$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+5x^6$

Βασικός ορισμός: αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο έναν αριθμό.

άσκηση παράδειγμα:

Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

A. $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$, για $x = 1$

Λύση

$P(1) = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 7$ άρα $P(1) = 4 - 5 + 7$, $P(1) = 6$

B. $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$, για $x = -2$

Λύση

$Q(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 3$ άρα $Q(-2) = 8 + 8 + 3$, $Q(-2) = 19$

άσκηση εργασία: να βρείτε την αριθμητική τιμή των πολυωνύμων

$A(x) = 3x + 12$, για $x = 2$

$B(x) = x^2 + 3x - 5$, για $x = 2$

$\Gamma(x) = 8x^5 + 4x^2 - 6x^3 + 1$, για $x = -1$

واجب منزلي: في كثيرات الحدود التالية، أوجد:

1. $3xy+2x^3y+5xy^4$

2. $5x^2y+9xy+12x^6y^2$

3. $-\frac{3}{4}x^2y^3+2xy^3-4x^5y^2$

x (أ) درجة كثيرات الحدود بالنسبة إلى

y (ب) درجة كثيرات الحدود بالنسبة إلى

x و y (ج) درجة كثيرات الحدود بالنسبة إلى

التعريف الأساسي: يُسمى كل عدد كثيرة حدود ثابتة.

التعريف الأساسي: يُسمى العدد صفر (0) كثيرة حدود صفرية

ملاحظة أساسية: جميع كثيرات الحدود الثابتة لها درجة صفرية (0). لا توجد درجة محددة لكثيرة الحدود الصفرية.

ملاحظة أساسية: عند كتابة كثيرة حدود بحيث تكون درجة الحد السابق أكبر من درجة الحد

التالي، نقول إن لدينا كثيرة حدود متناقصة لـ x.

أمثلة:

$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$

$B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$

واجب منزلي: اكتب كثيرات الحدود التالية متناقصة لـ x:

$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$

$B(x) = x^2+3x^5-14x^3-35x+6x^7$

$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+5x^6$

التعريف الأساسي: القيمة العددية لكثيرة الحدود هي النتيجة الناتجة عن استبدال رقم فيها.

مثال تمرين:

أوجد القيمة العددية لكثيرة الحدود

A. $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$ ، حيث $x = 1$

الحل

$P(1) = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 7$ ، إذًا، $P(1) = 4 - 5 + 7$ ، $P(1) = 6$

B. $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ ، حيث $x = -2$

الحل

$Q(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 3$ ، إذًا، $Q(-2) = 8 + 8 + 3$ ، $Q(-2) = 19$

مهمة تمرين: أوجد القيمة العددية لكثيرة الحدود

$A(x) = 3x + 12$ ، حيث $x = 2$

$B(x) = x^2 + 3x - 5$ ، حيث $x = 2$

$\Gamma(x) = 8x^5 + 4x^2 - 6x^3 + 1$ ، حيث $x = -1$

Βασικός ορισμός: αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν μονώνυμα που είναι όμοια τότε τα αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο με το άθροισμά τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων

παραδείγματα να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στο επόμενο πολυώνυμο

A. $P(x) = x^3 + 2x + 3x^2 + 5x + 6x^2 + 8$ άρα $P(x) = x^3 + 9x^2 + 7x + 8$
 B. $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$ άρα $Q(x) = -3x^3 + 7x^2 + 6$

άσκηση εργασία: να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στα επόμενα πολυώνυμα

A. $P(x) = 2x^3 + 6x - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 5$ C. $R(x) = x^4 + 9x^2 + 7x^4 + 8x^2 - x^3 + 4x^2 + x^3$
 B. $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$ D. $S(x) =$
 $-x^3 + 7x^2 + 6x^3 - 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x^2 + 3$

Πράξεις με πολυώνυμα

α) Πρόσθεση πολυωνύμων: χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Άσκηση παράδειγμα:

1. Να προσθέσετε τα πολυώνυμα $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$, $Q(x) = x^2 + 6x + 3$

Λύση:

$$P(x) + Q(x) = (4x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 6x + 3) = 4x^2 - 5x + 7 + x^2 + 6x + 3 = 5x^2 + x + 10$$

2. Να προσθέσετε τα πολυώνυμα $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

Λύση:

$$A(x) + B(x) = (4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) + (-3x^3 - x^2 + 6x - 3) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 - 3x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

Άσκηση εργασία: να κάνετε τις προσθέσεις των επόμενων πολυωνύμων

I. $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$
 II. $G(x) = 2x^2 - 2x + 6$, $E(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
 III. $S(x) = x^3 - x^2 - 2$, $H(x) = 5x^2 - x + 1$

β) Αφαίρεση πολυωνύμων: χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

άσκηση παράδειγμα: να βρείτε τη διαφορά $A(x) - B(x)$ όταν

$$A(x) = 4x^2 - 3x + 2, B(x) = -5x^2 + 6x - 3$$

λύση

$$A(x) - B(x) = (4x^2 - 3x + 2) - (-5x^2 + 6x - 3) = 4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 6x + 3 = 9x^2 - 9x + 5$$

ασκήσεις σχολικού βιβλίου και να γίνουν οι πράξεις:

I. $(2x^3 + 3x^2 - 5x - 5) + (4x^3 - 5x^2 + 7x + 3) - (3x^3 + 4x^2 - 6x - 4) + 8x^2 - 5 =$
 II. $(2\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 - 7) - (3\alpha^4 + 4\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 + 5) - (2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6) =$
 III. $2\omega^2 - (2\omega^3 + 3\omega^2 - 4\omega - 9) + (2\omega^3 + 4\omega^2 - 4\omega + 3) - 5\omega^2 + 3\omega =$

التعريف الأساسي: إذا كان هناك حدود أحادية متطابقة في كثير الحدود فإننا نستبدلها في كثير الحدود بمجموعها.

تسمى هذه العملية اختزال الحدود المتشابهة.

أمثلة اختزال الحدود المتشابهة إلى كثيرة الحدود التالية:

أ. $P(x) = x^3 + 2x + 3x^2 + 5x + 6x^2 + 8$, إذا $P(x) = x^3 + 9x^2 + 7x + 8$

ب. $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$, إذا $Q(x) = -3x^3 + 7x^2 + 6$

واجب منزلي: اختزال الحدود المتشابهة إلى كثيرات الحدود التالية:

A. $P(x) = 2x^3 + 6x - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 5$ C. $R(x) = x^4 + 9x^2 + 7x^4 + 8x^2 - x^3 + 4x^2 + x^3$
 B. $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$ D. $S(x) =$
 $-x^3 + 7x^2 + 6x^3 - 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x^2 + 3$

العمليات على كثيرات الحدود

أ) جمع كثيرات الحدود: نستخدم خصائص الأعداد الحقيقية

مثال:

1. اجمع كثيرات الحدود $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$, $Q(x) = x^2 + 6x + 3$

الحل:

$$P(x) + Q(x) = (4x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 6x + 3) = 4x^2 - 5x + 7 + x^2 + 6x + 3 = 5x^2 + x + 10$$

2. اجمع كثيرات الحدود $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

الحل:

$$A(x) + B(x) = (4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) + (-3x^3 - x^2 + 6x - 3) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 - 3x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

مهمة تدريبية: احسب عمليات جمع كثيرات الحدود التالية:

I. $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$, $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$
 II. $G(x) = 2x^2 - 2x + 6$, $E(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
 III. $S(x) = x^3 - x^2 - 2$, $H(x) = 5x^2 - x + 1$

ب) طرح كثيرات الحدود: نستخدم خصائص الأعداد الحقيقية

مثال تدريبي: أوجد الفرق $A(x) - B(x)$ عندما

$$A(x) = 4x^2 - 3x + 2, B(x) = -5x^2 + 6x - 3$$

الحل

$$A(x) - B(x) = (4x^2 - 3x + 2) - (-5x^2 + 6x - 3) = 4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 6x + 3 = 9x^2 - 9x + 5$$

تمارين الكتاب المدرسي وحل العمليات:

I. $(2x^3 + 3x^2 - 5x - 5) + (4x^3 - 5x^2 + 7x + 3) - (3x^3 + 4x^2 - 6x - 4) + 8x^2 - 5 =$
 II. $(2\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 - 7) - (3\alpha^4 + 4\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 + 5) - (2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6) =$
 III. $2\omega^2 - (2\omega^3 + 3\omega^2 - 4\omega - 9) + (2\omega^3 + 4\omega^2 - 4\omega + 3) - 5\omega^2 + 3\omega =$

γ) Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Βασικός κανόνας: Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Άσκηση παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

- A. $2x \cdot (x^2 - 5x + 7) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 7 = 2x^3 - 10x^2 + 14x$
B. $-3x \cdot (x^3 - 6x + 12) = -3x \cdot x^3 + 3x \cdot 6x - 3x \cdot 12 = -3x^4 + 12x^2 - 36x$
C. $5x^2 \cdot (2x^2 - 6x + 3) = 5x^2 \cdot 2x^2 - 5x^2 \cdot 6x + 5x^2 \cdot 3 = 10x^4 - 30x^3 + 15x^2$

Άσκηση εργασία: Να κάνετε τις πράξεις:

- A. $3x \cdot (4x^2 - 2x + 3)$ E. $4x \cdot (3x^2 - 6x + 9)$
B. $2x^3 \cdot (x^2 + 3x - 2)$ F. $-3x^3 \cdot (2x^3 - x^2 + x + 5)$
C. $-2x^4 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 6)$ G. $4xy(3x^2 + 2xy^2 - 4x^2y)$
D. $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x^2 + x - 3)$ H. $5x^3y^2(x^2y^3 + 2x^3y^2 - 4x^2y)$

Βασικός κανόνας: Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο με ένα πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πρώτου πολυωνύμου με κάθε όρο του δεύτερου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Άσκηση παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

- A. $(3x^2 + 4) \cdot (2x - 7) =$
 $3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 7 + 4 \cdot 2x - 4 \cdot 7 =$
 $6x^3 - 21x + 8x - 28 =$
 $6x^3 - 13x - 28$
B. $(4x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 3) =$
 $4x^2 \cdot x^2 + 4x^2 \cdot 6x + 4x^2 \cdot 3 - 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 6x - 5x \cdot 3 + 7x^2 + 7 \cdot 6x + 7 \cdot 3 =$
 $4x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 5x^3 - 30x^2 - 15x + 7x^2 + 42x + 21 =$
 $4x^4 + 19x^3 - 11x^2 + 27x + 21$

Άσκηση Εργασία: Να κάνετε τις πράξεις:

1. $(x + 3)(x - 5) =$
2. $(x + 7)(x - 2) =$
3. $(3x + 10)(x - 4) =$
4. $(2 - x)(-4x - 3) =$
5. $(-5x^2 + 1)(4x + 3) =$
6. $(2a + 3b)(2a - 3b) =$
7. $(5x - 6y)(5x + 6y) =$
8. $(10x - 5y)(10x - 5y) =$
9. $(2x - 7y)(2x - 7y) =$
10. $(3y + x)(x + 3y) =$
11. $(5 + 3x)(5 + 3x) =$

ζ) ضرب كثيرات الحدود

القاعدة الأساسية: لضرب حد واحد في كثير حدود واحد ، نضرب الحد الواحد في كل حد من حدود كثيرة الحدود،

ثم نجمع حاصل الضرب الناتج . مثال على التمرين: نَفِّذِ العمليات التالية:

- A. $2x \cdot (x^2 - 5x + 7) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 7 = 2x^3 - 10x^2 + 14x$
B. $-3x \cdot (x^3 - 6x + 12) = -3x \cdot x^3 + 3x \cdot 6x - 3x \cdot 12 = -3x^4 + 12x^2 - 36x$
C. $5x^2 \cdot (2x^2 - 6x + 3) = 5x^2 \cdot 2x^2 - 5x^2 \cdot 6x + 5x^2 \cdot 3 = 10x^4 - 30x^3 + 15x^2$

تمرين عملي: نَفِّذِ العمليات التالية:

- A. $3x \cdot (4x^2 - 2x + 3)$ E. $4x \cdot (3x^2 - 6x + 9)$
B. $2x^3 \cdot (x^2 + 3x - 2)$ F. $-3x^3 \cdot (2x^3 - x^2 + x + 5)$
C. $-2x^4 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 6)$ G. $4xy(3x^2 + 2xy^2 - 4x^2y)$
D. $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x^2 + x - 3)$ H. $5x^3y^2(x^2y^3 + 2x^3y^2 - 4x^2y)$

القاعدة الأساسية: لضرب كثيرة حدود في كثيرة حدود أخرى ، نضرب كل حد من كثيرة الحدود الأولى في كل حد من كثيرة الحدود الثانية، ثم نجمع حاصلًا لضرب.

مثال على التمرين: حلّ العمليات الحسابية

- A. $(3x^2 + 4) \cdot (2x - 7) =$
 $3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 7 + 4 \cdot 2x - 4 \cdot 7 =$
 $6x^3 - 21x + 8x - 28 =$
 $6x^3 - 13x - 28$
B. $(4x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 3) =$
 $4x^2 \cdot x^2 + 4x^2 \cdot 6x + 4x^2 \cdot 3 - 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 6x - 5x \cdot 3 + 7x^2 + 7 \cdot 6x + 7 \cdot 3 =$
 $4x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 5x^3 - 30x^2 - 15x + 7x^2 + 42x + 21 =$
 $4x^4 + 19x^3 - 11x^2 + 27x + 21$

العملية: حلّ العمليات الحسابية:

1. $(x + 3)(x - 5) =$
2. $(x + 7)(x - 2) =$
3. $(3x + 10)(x - 4) =$
4. $(2 - x)(-4x - 3) =$
5. $(-5x^2 + 1)(4x + 3) =$
6. $(2a + 3b)(2a - 3b) =$
7. $(5x - 6y)(5x + 6y) =$
8. $(10x - 5y)(10x - 5y) =$
9. $(2x - 7y)(2x - 7y) =$
10. $(3y + x)(x + 3y) =$
11. $(5 + 3x)(5 + 3x) =$

Βασική παρατήρηση: Ισότητα πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα $A(x)$ και $B(x)$ είναι ίσα όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των αντίστοιχων όρων είναι ίσοι.

Παράδειγμα:

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα, όπου $P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1)$, $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Λύση:

$$P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1) = (-3x \cdot 2x + 3x \cdot 4) \cdot (x-1) = (-6x^2 + 12x) \cdot (x-1) = -6x^2 \cdot x + 6x^2 \cdot 1 + 12x \cdot x - 12x \cdot 1 = -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x,$$

$$\text{Άρα } P(x) = -6x^3 + 18x^2 - 12x.$$

$$\text{Θέλω } P(x) = Q(x), \text{ δηλαδή: } -6x^3 + 18x^2 - 12x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\text{Πρέπει: } \alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12, \delta = 0$$

Άσκηση Εργασία:

Βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα:

$$P(x) = 2 \cdot (-4x+1) \cdot (x+3), \quad Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες:

Βασικός Ορισμός: Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει (δηλαδή ισχύει) για όλες τις τιμές των μεταβλητών.

Παραδείγματα:

- ☐ Η ισότητα $a^2 \cdot a = a^3$ είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής a .
- ☐ Η ισότητα $0 \cdot x = 0$ είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής x .
- ☐ Η ισότητα $x+y = 0$ δεν είναι ταυτότητα γιατί δεν ισχύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών x, y (γιατί πχ για $x = 5$ και $y = 3$ $x+y = 0, 5+3 = 0, 8=0$ δεν ισχύει)

1. Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Άσκηση παράδειγμα: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- I. $(x+3)^2 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- II. $(y+5)^2 = y^2 + 2y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$
- III. $(\omega+4)^2 = \omega^2 + 2\omega \cdot 4 + 4^2 = \omega^2 + 8\omega + 16$
- IV. $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$
- V. $(3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$
- VI. $(x+x^3)^2 = x^2 + 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$

Μلاحظة أساسية: تساوي كثيرات الحدود

تتساوى كثيرات حدود $A(x)$ و $B(x)$ إذا كانتا من نفس الدرجة، وكانت معاملات الحدود المتناظرة متساوية.

مثال:

أوجد قيم $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بحيث تكون كثيرات الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين، حيث $P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1)$, $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

الحل:

$$P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1) = (-3x \cdot 2x + 3x \cdot 4) \cdot (x-1) = (-6x^2 + 12x) \cdot (x-1) = -6x^2 \cdot x + 6x^2 \cdot 1 + 12x \cdot x - 12x \cdot 1 = -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x,$$

$$P(x) = -6x^3 + 18x^2 - 12x.$$

$$\text{أريد أن تكون } P(x) = Q(x), \text{ أي: } -6x^3 + 18x^2 - 12x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\text{يجب أن تكون: } \alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12, \delta = 0$$

التدريب:

أوجد قيم $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بحيث تكون كثيرات الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ متساوية:

$$P(x) = 2 \cdot (-4x+1) \cdot (x+3), \quad Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

متطابقات مهمة:

التعريف الأساسي: المتطابقة هي أي متباينة تحتوي على متغيرات وتكون صحيحة (أي صالحة) لجميع قيم هذه المتغيرات.

أمثلة:

- المساواة $\alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$ هي متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير α .
- المساواة $x = 0 \cdot 0$ هي متطابقة لأنها صحيحة لجميع قيم المتغير x .
- المساواة $x+y = 0$ ليست متطابقة لأنها غير صحيحة لجميع قيم المتغيرين x و y (لأنه على سبيل المثال، بالنسبة $x=5$ و $y=3$ فإن $x+y = 0, 5+3 = 0, 8=0$ غير صحيحة).

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ 1.

البرهان:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

مثال: أوجد المفكوكات:

$$\text{I. } (x+3)^2 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\text{II. } (y+5)^2 = y^2 + 2y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$\text{III. } (\omega+4)^2 = \omega^2 + 2\omega \cdot 4 + 4^2 = \omega^2 + 8\omega + 16$$

$$\text{IV. } (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\text{V. } (3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$\text{VI. } (x+x^3)^2 = x^2 + 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$$

Άσκηση εργασία: να βρείτε τα αναπτύγματα

- A. $(x+2)^2$ E. $(y+4)^2$
 B. $(\omega+3)^2$ F. $(3x+1)^2$
 C. $(2x+5y)^2$ G. $(x+\frac{1}{2})^2$
 D. $(2+y^3)^2$ H. $(x^3+x^2)^2$

2. Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη:

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Άσκηση παράδειγμα: Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

$$(x-3)^2 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(y-6)^2 = y^2 - 2y \cdot 6 + 6^2 = y^2 - 12y + 36$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$(2x-x^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = 4x^2 - 4x^4 + x^6$$

Άσκηση εργασία: Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

- A. $(x-4)^2$ E. $(4-2x)^2$
 B. $(x^2-2)^2$ F. $(6x-5)^2$
 C. $(3x-4y)^2$ G. $(2x^2-7x)^2$
 D. $(x^3-2x^2)^2$ H. $(\sqrt{x}-3)^2$

A. Κύβος αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta \cdot \beta + \beta^3 = \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

3B. Κύβος διαφοράς: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

(χωρίς απόδειξη)

تمرين: أوجد التوسعات

- A. $(x+2)^2$ E. $(y+4)^2$
 B. $(\omega+3)^2$ F. $(3x+1)^2$
 C. $(2x+5y)^2$ G. $(x+\frac{1}{2})^2$
 D. $(2+y^3)^2$ H. $(x^3+x^2)^2$

2. $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

دليل:

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

مثال للتمرين: ابحث عن التوسعات التالية:

$$(x-3)^2 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(y-6)^2 = y^2 - 2y \cdot 6 + 6^2 = y^2 - 12y + 36$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$(2x-x^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = 4x^2 - 4x^4 + x^6$$

تمرين: أوجد المفكوكات التالية:

- A. $(x-4)^2$ E. $(4-2x)^2$
 B. $(x^2-2)^2$ F. $(6x-5)^2$
 C. $(3x-4y)^2$ G. $(2x^2-7x)^2$
 D. $(x^3-2x^2)^2$ H. $(\sqrt{x}-3)^2$

أ. مكعب المجموع: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

دليل:

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta \cdot \beta + \beta^3 = \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

(بدون دليل)

άσκηση παράδειγμα Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

- I. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- II. $(x-2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
- III. $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- IV. $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

άσκηση εργασία Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

- A. $(x+2)^3$ C. $(2x^2+3x)^3$
- B. $(y-1)^3$ D. $(2y-1)^3$

3. **Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha+\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \beta^2$**

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

Άσκηση παράδειγμα: να βρείτε τα αναπτύγματα

- I. $(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- II. $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2 - 2^2 = \omega^2 - 4$
- III. $(x+4)(4-x) = (4+x)(4-x) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$
- IV. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2 - 5^2 = x - 25$
- V. $(x^2-2)(x^2+2) = (x^2)^2 - 4 = x^4 - 4$
- VI. $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2 - 2^2 = 36\omega^2 - 4$

Άσκηση εργασία: Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(x+3)(x-3)$	ii) $(x-1)(x+1)$
iii) $(2x-5)(2x+5)$	iv) $(1-3x)(1+3x)$
v) $(2x+5\psi)(2x-5\psi)$	vi) $(3\kappa-2\lambda)(3\kappa+2\lambda)$
vii) $(x^2+1)(x^2-1)$	viii) $(x^3-2)(x^3+2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right) \left(\frac{x^5}{5} - \frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\psi\right) \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\psi\right)$

مثال على التمرين: أوجد المفكوكات التالية:

- I. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- II. $(x-2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
- III. $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- IV. $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

واجب التمرين: أوجد المفكوكات التالية:

- A. $(x+2)^3$ C. $(2x^2+3x)^3$
- B. $(y-1)^3$ D. $(2y-1)^3$

حاصل ضرب مجموع الفرق الزمني: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha+\beta)$

دليل:

$$(\alpha+\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

مثال للتمرين: العثور على التوسعات

- I. $(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- II. $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2 - 2^2 = \omega^2 - 4$
- III. $(x+4)(4-x) = (4+x)(4-x) = 4^2 - x^2 = 16 - x^2$
- IV. $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2 - 5^2 = x - 25$
- V. $(x^2-2)(x^2+2) = (x^2)^2 - 4 = x^4 - 4$
- VI. $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2 - 2^2 = 36\omega^2 - 4$

تمرين: أوجد المفكوكات

i) $(x+3)(x-3)$	ii) $(x-1)(x+1)$
iii) $(2x-5)(2x+5)$	iv) $(1-3x)(1+3x)$
v) $(2x+5\psi)(2x-5\psi)$	vi) $(3\kappa-2\lambda)(3\kappa+2\lambda)$
vii) $(x^2+1)(x^2-1)$	viii) $(x^3-2)(x^3+2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right) \left(\frac{x^5}{5} - \frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\psi\right) \left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}\psi\right)$

مراجعة المتطابقات

1. أوجد التوسعات

$$\alpha) (x + 5)^2 =$$

$$\beta) (3\alpha - \beta)^2 =$$

$$\gamma) (5x + 4)(5x - 4) =$$

$$\delta) (\psi + 2)^3 =$$

$$\varepsilon) (2x - 3)^3 =$$

$$\eta) (3\alpha^2 - \beta^3)(\beta^3 + 3\alpha^2) =$$

2. لتنفيذ الإجراءات التالية

$$\alpha. (1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$$

$$\beta. (x^2 - 1)^2 - 1$$

$$\gamma. (4\alpha - 3\beta)^2 - 16\alpha^2 - 9\beta^2 + 24\alpha\beta$$

$$\delta. 2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$$

$$\varepsilon. 2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$$

$$\sigma\tau. 2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$$

$$\zeta. -9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$$

$$\eta. (4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$$

$$\iota\alpha. 2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$$

$$\iota\beta. (x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$$

$$\iota\gamma. (\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$$

3. املأ الفراغات حتى تكون الهويات صالحة

$$(a) (\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$$

$$\beta. (\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$$

$$\gamma. (\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$$

$$\delta. (\dots -)^2 = 16x^4 - 4x + \dots$$

$$\varepsilon. (2\beta - \dots)^2 = \dots - \dots + 36\gamma^2$$

$$\sigma\tau. (+ \dots)^2 = \dots - \dots + 9x^2y^4$$

$$\zeta. (5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$$

$$\eta. (2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3\dots + 3\dots + 27$$

$$\theta. x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$$

$$\iota. \dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$$

$$\iota\alpha. \dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$$

$$\iota\beta. \alpha^2x^4 + \dots + \dots = (\dots + \beta y)^2$$

$$\iota\gamma. x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$$

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Βασικός ορισμός: Η διαδικασία με την οποία μία αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα ή διαφορά σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται παραγοντοποίηση

Παραδείγματα:

- $3x+3y = 3(x+y)$
- $5\alpha-5\beta = 5(\alpha-\beta)$

Βασικοί τρόποι παραγοντοποίησης:

1^{ος} τρόπος: κοινός παράγοντας

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κοινού παράγοντα λαμβάνουμε υπόψη τους κανόνες:

1^{ος} κανόνας: Από τους συντελεστές (αριθμούς) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των όρων (δηλαδή των αριθμών).

2^{ος} κανόνας: Από τις μεταβλητές (γράμματα) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα μόνο την κοινή (ίδια) μεταβλητή (γράμμα) στο μικρότερο εκθέτη.

Παραδείγματα:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- $4x^2+6x^3 = 2x^2(2+3x)$
- $4x^2y+8x = 4x(xy+2)$

Ασκήσεις:

Σχολικού βιβλίου και...

- $kx-2x$ $kx+2x$ $-kx+2x$ $-kx-2x$ $2x+8xy$ $5xy-10y$ $3x-3$ x^4+x^3 x^3-x^2+x
- $5x^2-10x+5xy$ $2x^2+4y+10$ $x^2y+x^2y^2-xy^2$ $\kappa(x+y)+\lambda(x+y)$ $\kappa(x+y)-\lambda(x+y)$
- $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$ $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$ $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

2^{ος} τρόπος (κοινός παράγοντας κατά ομάδες-ομαδοποίηση)

Παραδείγματα

- a) $\alpha\chi+\alpha\psi+2\chi+2\psi = \alpha(\chi+\psi)+2(\chi+\psi) = (\chi+\psi)(\alpha+2)$
 β) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2+5)$
 γ) $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta-3) - 3(\beta-3) = (\beta-3)(\alpha-3)$

Ανάλυση των αλγεβρικών παραστάσεων

Ορισμός:

Η διαδικασία με την οποία μία αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα ή διαφορά σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται ανάλυση των αλγεβρικών παραστάσεων

Παραδείγματα:

$$3x + 3y = 3(x + y)$$

$$5\alpha - 5\beta = 5(\alpha - \beta)$$

Βασικοί τρόποι ανάλυσης:

1^{ος} τρόπος: κοινός παράγοντας

Για να ανάλυσουμε μία αλγεβρική παράσταση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κοινού παράγοντα λαμβάνουμε υπόψη τους κανόνες:

1^{ος} κανόνας: Από τους συντελεστές (αριθμούς) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των όρων (δηλαδή των αριθμών).

2^{ος} κανόνας: Από τις μεταβλητές (γράμματα) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα μόνο την κοινή (ίδια) μεταβλητή (γράμμα) στο μικρότερο εκθέτη.

Παραδείγματα:

- $kx-2x$ $kx+2x$ $-kx+2x$ $-kx-2x$ $2x+8xy$ $5xy-10y$ $3x-3$ x^4+x^3 x^3-x^2+x
- $5x^2-10x+5xy$ $2x^2+4y+10$ $x^2y+x^2y^2-xy^2$ $\kappa(x+y)+\lambda(x+y)$ $\kappa(x+y)-\lambda(x+y)$
- $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$ $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$ $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

Ανάλυση των αλγεβρικών παραστάσεων

Ορισμός:

Παραδείγματα:

- a) $\alpha\chi+\alpha\psi+2\chi+2\psi = \alpha(\chi+\psi)+2(\chi+\psi) = (\chi+\psi)(\alpha+2)$
 β) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2+5)$
 γ) $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta-3) - 3(\beta-3) = (\beta-3)(\alpha-3)$

Άσκηση- εργασία:

Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες αλγεβρικές παραστάσεις:

1) $14x + 14y + kx + ky$ $xy + 3yz + 5x + 15z$ $\alpha x - \beta y - \beta x + \alpha y$ $10x + x^2 - 120y - 12xy$

2) $3x^2 - 3y^2 - 9xy + xy$ $1 + x^2 - xy + x^2y$ $15x^2y - 20x^2z - 18y^2z + 24z^2$

3) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$ $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$ $(\alpha - \beta)^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma$ $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$

ممارسة العمل:

1) $14x + 14y + kx + ky$ $xy + 3yz + 5x + 15z$ $\alpha x - \beta y - \beta x + \alpha y$ $10x + x^2 - 120y - 12xy$

2) $3x^2 - 3y^2 - 9xy + xy$ $1 + x^2 - xy + x^2y$ $15x^2y - 20x^2z - 18y^2z + 24z^2$

3) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$ $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$ $(\alpha - \beta)^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma$ $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων με διαφορά τετραγώνων

Ισχύει:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \text{ή} \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Άσκηση-παράδειγμα:

Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

- $x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$
- $\omega^2 - 7^2 = (\omega-7)(\omega+7)$
- $x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$
- $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$
- $\omega - 100 = \omega^2 - 10^2 = (\omega-10)(\omega+10)$
- $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$

Άσκηση επανάληψης:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$a^2 - \gamma^2$ $x^2 - 1$ $x^2 - 4$ $x^2 - 9$ $x^2 - 64$ $1 - 4x^2$ $4x^2 - 9y^2$ $a^2\beta^2 - 9$ $81a^2 - 49\beta^2$

$16a^2 - x^2y^2\omega^2$ $(x-2y)^2 - 4y^2$ $x^4 - y^4$ $16 - x^4$ $x^6 - y^6$ $3a^3\beta - 27a\beta^3$

تحليل العبارات الجبرية على أساس فرق المربعين

صحيح

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

- $x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$
- $\omega^2 - 7^2 = (\omega-7)(\omega+7)$
- $x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$
- $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$
- $\omega - 100 = \omega^2 - 10^2 = (\omega-10)(\omega+10)$
- $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$

تمرين مراجعة: قم بتحليل التعابير

$a^2 - \gamma^2$ $x^2 - 1$ $x^2 - 4$ $x^2 - 9$ $x^2 - 64$ $1 - 4x^2$ $4x^2 - 9y^2$ $a^2\beta^2 - 9$ $81a^2 - 49\beta^2$

$16a^2 - x^2y^2\omega^2$ $(x-2y)^2 - 4y^2$ $x^4 - y^4$ $16 - x^4$ $x^6 - y^6$ $3a^3\beta - 27a\beta^3$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 \text{ και } \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$$

Άσκηση – Παράδειγμα:

- $\chi^2-2\chi+1 = \chi^2-2\cdot\chi\cdot 1+1^2 = (\chi-1)^2$
- $\gamma^2+4\gamma+4 = \gamma^2+2\cdot\gamma\cdot 2+2^2 = (\gamma+2)^2$
- $4\gamma^2-12\gamma+9 = (2\gamma)^2-2\cdot 2\gamma\cdot 3+3^2 = (2\gamma-3)^2$
- $9\alpha^2-24\alpha\beta+16\beta^2 = (3\alpha)^2-2\cdot 3\alpha\cdot 4\beta+(4\beta)^2 = (3\alpha-4\beta)^2$

Άσκηση εργασία:

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $\chi^2 + 2\chi + 1$

β. $\chi^2 - 4\chi - 4$

γ. $-4\chi^2 - 4\chi - 1$

δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$

στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$

ζ. $16\chi^2 + 40\chi\gamma + 25\gamma^2$

η. $-25\chi^2 + 40\chi\gamma - 16\gamma^2$

θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$

ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

2. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις :

α. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$

β. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$

γ. $\chi^4 - 4\chi^2\gamma^2 + 4\gamma^4$

δ. $\chi^4 - 2\chi^2\gamma^3 + \gamma^6$

ε. $\chi^6 - 2\chi^3 + 1$

στ. $100\chi^4\gamma^6 - 40\chi^2\psi^3$

ζ. $\chi^2 + \chi + 1/4$

η. $25\chi^2\gamma^2 - 20\chi\gamma + 4$

توسيع المربع

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 \quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$$

تمرین – مثال:

- $\chi^2-2\chi+1 = \chi^2-2\cdot\chi\cdot 1+1^2 = (\chi-1)^2$
- $\gamma^2+4\gamma+4 = \gamma^2+2\cdot\gamma\cdot 2+2^2 = (\gamma+2)^2$
- $4\gamma^2-12\gamma+9 = (2\gamma)^2-2\cdot 2\gamma\cdot 3+3^2 = (2\gamma-3)^2$
- $9\alpha^2-24\alpha\beta+16\beta^2 = (3\alpha)^2-2\cdot 3\alpha\cdot 4\beta+(4\beta)^2 = (3\alpha-4\beta)^2$

تمارين

1. تمرین مراجعة: قم بتحليل التعابير

α. $\chi^2 + 2\chi + 1$

β. $\chi^2 - 4\chi - 4$

γ. $-4\chi^2 - 4\chi - 1$

δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$

στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$

ζ. $16\chi^2 + 40\chi\gamma + 25\gamma^2$

η. $-25\chi^2 + 40\chi\gamma - 16\gamma^2$

θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$

ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

2. لتصبح التعابير مضاعفات عوامل:

α. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$

β. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$

γ. $\chi^4 - 4\chi^2\gamma^2 + 4\gamma^4$

δ. $\chi^4 - 2\chi^2\gamma^3 + \gamma^6$

ε. $\chi^6 - 2\chi^3 + 1$

στ. $100\chi^4\gamma^6 - 40\chi^2\psi^3$

ζ. $\chi^2 + \chi + 1/4$

η. $25\chi^2\gamma^2 - 20\chi\gamma + 4$

Σημαντικές Παρατηρήσεις

A. Η παραγοντοποίηση συνεχίζεται πάντα μέχρι να φτάσουμε σε «γινόμενο πρώτων παραγόντων».

Άσκηση-Παράδειγμα:

- $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)$
- $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2)$
- $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$
- $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

Άσκηση – Εργασία:

- α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ β. $6x^2 - 24$
- γ. $15x^2 - 15$ δ. $x^4 - 64x^2y^2$
- ε. $\kappa^5 - \kappa$ στ. $16\alpha^5 - \alpha$
- ζ. $x^7 - x^3$ η. $6x^2 - 96$

B. Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και με άλλους τρόπους, όπως

- **η διάσπαση:**
 - $2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(2\alpha + 3\beta)$
 - $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$
- **Οι ομάδες της ομαδοποίησης μπορεί να περιέχουν 3-1 προσθετέους:**

$$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y)$$

Ασκήσεις:

1. $x^2 + 2x + 1 - a^2 =$
2. $x^2 - 2ax + a^2 - 16 =$
3. $1 - x^2 + 2ax - a^2 =$
4. $9a^2 - 4x^2 - 4x - 1 =$
5. $25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^6 =$
6. $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 =$

Μلاحظات هامة

أ. تستمر عملية التحليل إلى العوامل دائماً حتى نصل إلى «حاصل ضرب العوامل الأولية».

تمرين-مثال:

- $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)$
- $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2)$
- $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$
- $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

تمرين – عمل:

- α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ β. $6x^2 - 24$
- γ. $15x^2 - 15$ δ. $x^4 - 64x^2y^2$
- ε. $\kappa^5 - \kappa$ στ. $16\alpha^5 - \alpha$
- ζ. $x^7 - x^3$ η. $6x^2 - 96$

ب. يمكن أن تتم عملية التحليل إلى عوامل بطرق أخرى، مثل

• التفكير:

- $2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(2\alpha + 3\beta)$
- $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

• قد تحتوي مجموعات التجميع على 3-1 مضافات:

$$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y)$$

تمرين – عمل:

1. $x^2 + 2x + 1 - a^2 =$
2. $x^2 - 2ax + a^2 - 16 =$
3. $1 - x^2 + 2ax - a^2 =$
4. $9a^2 - 4x^2 - 4x - 1 =$
5. $25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^6 =$
6. $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 =$

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και μέγιστος κοινός διαιρέτης ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

1^{ος} κανόνας: Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινό παραγόντων τους με εκθέτη καθενός στο μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

2^{ος} κανόνας: Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερο αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα:

- $\text{ΕΚΠ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 72x^3y^2\omega^3$, γιατί

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
1	1	1	

$$\text{ΕΚΠ}(12,18,24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

$$\text{ΜΚΔ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 6xy\omega, \text{ γιατί}$$

12	2	18	2	24	2
6	2	9	3	12	2
3	3	3	3	6	2
1		1		3	3
1					

$$\text{ΜΚΔ}(12,18,24) = 2 \cdot 3 = 6$$

- Να βρείτε το ΕΚΠ που και τον ΜΚΔ των παραστάσεων $6(x^2-y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$

Λύση:

$$6(x^2-y^2) = 2 \cdot 3(x-y) \cdot (x+y)$$

$$4(x-y)^2 = 2^2 \cdot (x-y)^2$$

$$12(x-y)^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot (x-y)^3$$

$$\text{Οπότε ΕΚΠ} = 12 \cdot (x-y)^3 \cdot (x+y) \quad \text{και} \quad \text{ΜΚΔ} = 2(x-y)$$

Αصغر مضاعف مشترك وأكبر قاسم مشترك للتعبيرات الجبرية الصحيحة

القاعدة الأولى: يُسمى أصغر مضاعف مشترك لعددتين أو أكثر من التعبيرات الجبرية التي تم تحليلها إلى عوامل، حاصل ضرب عواملها المشتركة وغير المشتركة بحيث يكون الأس لكل عامل هو الأكبر بين أسه.

القاعدة الثانية: يُسمى أكبر قاسم مشترك لعددتين أو أكثر من التعبيرات الجبرية التي تم تحليلها إلى عوامل، حاصل ضرب عواملها المشتركة بحيث يكون الأس لكل عامل هو الأصغر بين أسه.

أمثلة:

- $\text{ΕΚΠ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 72x^3y^2\omega^3$ لماذا

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
1	1	1	

$$\text{ΕΚΠ}(12,18,24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$$

- $\text{ΜΚΔ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 6xy\omega$, لماذا

12	2	18	2	24	2
6	2	9	3	12	2
3	3	3	3	6	2
1		1		3	3
				1	

$$\text{ΜΚΔ}(12,18,24) = 2 \cdot 3 = 6$$

- اعثر على القاسم المشترك الأصغر والمضاعف المشترك الأكبر للتعبيرات

$$4(x-y)^2, 12(x-y)^3, (x^2-y^2)6$$

الحل:

$$2 \cdot 3(x-y) \cdot (x+y) = (x^2-y^2)6$$

$$6(x^2-y^2) = 2 \cdot 3(x-y) \cdot (x+y)$$

$$4(x-y)^2 = 2^2 \cdot (x-y)^2$$

$$12(x-y)^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot (x-y)^3$$

$$\text{ΜΚΔ} = 2(x-y) \quad \text{و} \quad \text{ΕΚΠ} = 12 \cdot (x-y)^3 \cdot (x+y) \quad \text{إذن}$$

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Βασικός ορισμός: Μία αλγεβρική παράσταση στην οποία και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμα ονομάζεται **ρητή αλγεβρική παράσταση**.

Υπενθύμιση:

μονώνυμα: $3x^2y, -x^4$

πολυώνυμα: $x^2 + 2x + 1$

$-3x+5$

$7x^5+6x^2-4x+3$

Παραδείγματα ρητών αλγεβρικών παραστάσεων

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2}, \quad \frac{3}{x - 5}, \quad \frac{\alpha^2 - 2\beta}{\alpha + \beta}$$

Βασικές υπενθυμίσεις-παρατηρήσεις:

- Το κλάσμα $5/0$ δεν ορίζεται γιατί η διαίρεση $5:0$ δεν γίνεται
- Μία ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται όταν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν(0)
- Ο συμβολισμός $\alpha \neq \beta$ σημαίνει ότι ο αριθμός α δεν είναι ίσος με τον αριθμό β .

Παραδείγματα :

Για ποιες τιμές του x ορίζονται τα κλάσματα:

- $4/x$ πρέπει $x \neq 0$

- $\frac{2x}{x-4}$ πρέπει $x-4 \neq 0$ οπότε $x \neq 4$

- $\frac{2x+5}{3x-6}$ πρέπει $3x-6 \neq 0$ $3x \neq 6$ οπότε $x \neq 2$

التعابير الجبرية الكسرية

التعريف الأساسي: يُطلق على التعبير الجبري الذي يكون فيه البسط والمقام كثيري حدود اسم التعبير الجبري الكسر.

تذكير:

جدية: $3x^2y, -x^4$

كثيرات الحدود: $x^2 + 2x + 1$

$3x+5-$

$7x^5+6x^2-4x+3$

أمثلة على التعابير الجبرية الكسرية

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2}, \quad \frac{3}{x - 5}, \quad \frac{\alpha^2 - 2\beta}{\alpha + \beta}$$

تذكيرات وملاحظات أساسية:

→ الكسر $5/0$ غير معرف لأن عملية القسمة $5:0$ لا تتم

→ التعبير الجبري الكسري يُعرف عندما لا يكون المقام صفرًا (0)

→ الرمز $\alpha \neq \beta$ يعني أن الرقم α ليس مساويًا للرقم β .

أمثلة:

لأي قيم من x تكون الكسور معرفة:

→ $x/4$ يجب أن يكون $x \neq 0$

→ $\frac{2x}{x-4}$ يجب أن يكون $x-4 \neq 0$ لذا $x \neq 4$

→ $\frac{2x+5}{3x-6}$ يجب أن يكون $3x-6 \neq 0$ $3x \neq 6$ لذا $x \neq 2$

Απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων:

Για να απλοποιήσουμε μία ρητή αλγεβρική παράσταση κάνουμε τα εξής:

1^ο βήμα: παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους αριθμητή και παρονομαστή της αλγεβρικής παράστασης.

2^ο βήμα: διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες που εμφανίζονται σε αριθμητή και παρονομαστή. =

Άσκηση- παράδειγμα:

Να απλοποιήσετε τις επόμενες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις:

$$a) \frac{2a^2x^3}{6a^3x^2} = \frac{2 \cdot aaxxx}{2 \cdot 3 \cdot aaxxx} = \frac{x}{3a}$$

$$b) \frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3} = \frac{36 \cdot y\omega}{25}$$

$$c) \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$d) \frac{2x-10}{x^2-25} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x+5}$$

Άσκηση-εργασία:

Ασκήσεις βιβλίου και....

Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρονομαστές να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{6\alpha}{8\alpha} \quad \beta) \frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3} \quad \gamma) \frac{\chi-1}{1-\chi} \quad \delta) \frac{2\chi-4}{\chi^2-2\chi}$$

$$\epsilon) \frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6} \quad \sigma\tau) \frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4} \quad \zeta) \frac{(2\chi+3)^2-2(2\chi+3)+1}{(2\chi+3)^2-1}$$

$$\eta) \frac{2\alpha^2+10\alpha-\alpha\beta-5\beta}{2\alpha^2+6\alpha-\alpha\beta-3\beta}$$

تبسيط المعادلات الجبرية الكسرية:

لتبسيط معادلة جبرية كسرية نقوم بالآتي:

الخطوة الأولى: نقوم بتحليل كل من البسط والمقام للمعادلة الجبرية.

الخطوة الثانية: نحذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام. =

تمرين- مثال:

قم بتبسيط المعادلات الجبرية الكسرية التالية

$$a) \frac{2a^2x^3}{6a^3x^2} = \frac{2 \cdot aaxxx}{2 \cdot 3 \cdot aaxxx} = \frac{x}{3a}$$

$$b) \frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3} = \frac{36 \cdot y\omega}{25}$$

$$c) \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$d) \frac{2x-10}{x^2-25} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x+5}$$

تمرين-عمل:

تمارين الكتاب و....

ابحث عن قيم المتغيرات التي يتم عندها تحديد المقامات لتبسيط التعابير:

$$\alpha) \frac{6\alpha}{8\alpha} \quad \beta) \frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3} \quad \gamma) \frac{\chi-1}{1-\chi} \quad \delta) \frac{2\chi-4}{\chi^2-2\chi}$$

$$\epsilon) \frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6} \quad \sigma\tau) \frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4} \quad \zeta) \frac{(2\chi+3)^2-2(2\chi+3)+1}{(2\chi+3)^2-1}$$

$$\eta) \frac{2\alpha^2+10\alpha-\alpha\beta-5\beta}{2\alpha^2+6\alpha-\alpha\beta-3\beta}$$

Πράξεις ρητών παραστάσεων

A) Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων

1ος κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο αριθμό με τον αριθμητή του κλάσματος και

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$$

παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο δηλαδή:

Παραδείγματα:

$$a) \quad 3 \cdot \frac{\chi}{\chi+2} = \frac{3\chi}{\chi+2}$$

$$b) \quad \frac{4\chi^3}{\chi^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12\chi^3}{\chi^5+2}$$

2ος βασικός κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε μία ακέραιη αλγεβρική παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:

$$\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\delta}$$

Παράδειγμα:

$$3\chi \cdot \frac{4\chi}{\chi+2} = \frac{3\chi}{1} \cdot \frac{4\chi}{\chi+2} = \frac{12\chi^2}{\chi+2}$$

3ος βασικός κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε μία ρητή παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta}$$

παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:

Παραδείγματα

$$\cdot \quad \frac{2\alpha^2 x^3}{6a^3 x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3 x} = \frac{2\alpha^2 x^3 \cdot 3\alpha x}{6a^3 x^3 \cdot 4a^3 x} = \frac{6\alpha^3 x^4}{24a^6 x^4} = \frac{x^3}{4a^3}$$

$$\cdot \quad \frac{x(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$$

عمليات التعابير الكسرية

أ) ضرب التعابير الكسرية

القانون الأول: لإجراء ضرب عدد صحيح في كسر نقوم بضرب العدد الصحيح في البسط ونترك المقام كما هو، أي:

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$$

أمثلة:

$$a) \quad 3 \cdot \frac{\chi}{\chi+2} = \frac{3\chi}{\chi+2}$$

$$b) \quad \frac{4\chi^3}{\chi^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12\chi^3}{\chi^5+2}$$

القاعدة الأساسية الثانية: لكي نضرب تعبيرًا جبريًا صحيحًا بتعبير كسري، نضرب البسط في البسط والمقام في المقام، أي:

$$\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\delta}$$

مثال:

$$3\chi \cdot \frac{4\chi}{\chi+2} = \frac{3\chi}{1} \cdot \frac{4\chi}{\chi+2} = \frac{12\chi^2}{\chi+2}$$

القاعدة الأساسية الثالثة: لكي نضرب تعبير كسر في تعبير كسر آخر، نضرب البسط في

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \gamma}{\beta \delta}$$

البسط والمقام في المقام، أي:

أمثلة

$$A) \quad \frac{2\alpha^2 x^3}{6a^3 x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3 x} = \frac{2\alpha^2 x^3 \cdot 3\alpha x}{6a^3 x^3 \cdot 4a^3 x} = \frac{6\alpha^3 x^4}{24a^6 x^4} = \frac{x^3}{4a^3}$$

$$B) \quad \frac{x(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

Β) Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Για να διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ρητή παράσταση (διααιρετέο) με την αντίστροφη παράσταση της δεύτερης ρητής παράστασης (διαιρέτης), δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma}$$

Παραδείγματα

$$A) \frac{24ax}{5ax^3} : \frac{3x^3}{4a^4x} = \frac{24ax}{5ax^3} \cdot \frac{4a^4x}{3x^3} = \frac{24ax \cdot 4a^4x}{5ax^3 \cdot 3x^3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3ax^4}{4 \cdot 5 \cdot a^5x^4} = \frac{18}{5a^4}$$

$$B) \frac{3x-3}{x-2} : \frac{x^2-1}{4x^2-16} = \frac{3x-3}{x-2} \cdot \frac{4x^2-16}{x^2-1} = \frac{(3x-3) \cdot (4x^2-16)}{(x-2)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{3(x-1) \cdot 4(x^2-4)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1) \cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3 \cdot 4(x-2)}{(x+1)} = \frac{12(x-2)}{x+1}$$

Βασική παρατήρηση- μνημονικός κανόνας:

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma}$$

Παραδείγματα:

$$A) \frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}} = \frac{x^5}{y} : \frac{x}{y^4} = \frac{x^5}{y} \cdot \frac{y^4}{x} = \frac{x^5 \cdot y^4}{y \cdot x} = x^4 \cdot y^3$$

$$B) \frac{\frac{x(x+1)}{2x}}{\frac{x^2-1}{2x}} = \frac{x(x+1)}{2x} : \frac{x^2-1}{2x} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x(x+1) \cdot 1}{(x-1)(x+1) \cdot 2x} = \frac{1}{2(x-1)}$$

ب) قسمة التعابير الكسرية

لكي نقسم تعبيرين كسريين، نضرب التعبير الكسري الأول (المقسوم) بالعكس للتعبير الكسري الثاني (المقسوم عليه)، أي أمثلة

$$\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma}$$

$$A) \frac{24ax}{5ax^3} : \frac{3x^3}{4a^4x} = \frac{24ax}{5ax^3} \cdot \frac{4a^4x}{3x^3} = \frac{24ax \cdot 4a^4x}{5ax^3 \cdot 3x^3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3ax^4}{4 \cdot 5 \cdot a^5x^4} = \frac{18}{5a^4}$$

$$B) \frac{3x-3}{x-2} : \frac{x^2-1}{4x^2-16} = \frac{3x-3}{x-2} \cdot \frac{4x^2-16}{x^2-1} = \frac{(3x-3) \cdot (4x^2-16)}{(x-2)(x^2-1)} =$$

$$= \frac{3(x-1) \cdot 4(x^2-4)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1) \cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3 \cdot 4(x-2)}{(x+1)} = \frac{12(x-2)}{x+1}$$

ملاحظة أساسية - قاعدة تذكريّة:

تحويل الكسر المركب إلى كسر بسيط

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \delta}{\beta \gamma}$$

أمثلة

$$A) \frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}} = \frac{x^5}{y} : \frac{x}{y^4} = \frac{x^5}{y} \cdot \frac{y^4}{x} = \frac{x^5 \cdot y^4}{y \cdot x} = x^4 \cdot y^3$$

$$B) \frac{\frac{x(x+1)}{2x}}{\frac{x^2-1}{2x}} = \frac{x(x+1)}{2x} : \frac{x^2-1}{2x} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1) \cdot 2x} = \frac{1}{2(x-1)}$$

Άσκηση-εργασία: Σχολικό βιβλίο και ...να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

تمرین-واجب: کتاب المدرسة و... قم بالعمليات التالية:

I)

$$(α) \frac{8}{\beta} \cdot \frac{a}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{a^2}$$

$$(β) \left(-\frac{7a^2}{16a}\right) \cdot \frac{8\beta}{a} \cdot \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(γ) \frac{10}{a^3} \cdot \frac{a^3}{2\omega^3}$$

$$(δ) -\frac{4a}{xy\omega} \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{2a}\right)^2 \cdot \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

$$(ε) \frac{7}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{14x} \cdot (3-x)$$

II)

$$(α) \frac{3a^2}{\beta} : \frac{\beta^2}{6a}$$

$$(β) \frac{a^5}{\beta^5} : \left(\frac{a}{\beta}\right)^6$$

$$(γ) \frac{x+7}{\beta^2-x^2} : \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(δ) \frac{x}{x-2} : \frac{x^2-2x}{x^2}$$

$$(ε) \frac{6}{x+y} : \frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$$

$$(στ) \frac{x^3}{x^3-1} : \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

I)

$$(α) \frac{8}{\beta} \cdot \frac{a}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{a^2}$$

$$(β) \left(-\frac{7a^2}{16a}\right) \cdot \frac{8\beta}{a} \cdot \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(γ) \frac{10}{a^3} \cdot \frac{a^3}{2\omega^3}$$

$$(δ) -\frac{4a}{xy\omega} \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{2a}\right)^2 \cdot \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

$$(ε) \frac{7}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{14x} \cdot (3-x)$$

II)

$$(α) \frac{3a^2}{\beta} : \frac{\beta^2}{6a}$$

$$(β) \frac{a^5}{\beta^5} : \left(\frac{a}{\beta}\right)^6$$

$$(γ) \frac{x+7}{\beta^2-x^2} : \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(δ) \frac{x}{x-2} : \frac{x^2-2x}{x^2}$$

$$(ε) \frac{6}{x+y} : \frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$$

$$(στ) \frac{x^3}{x^3-1} : \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

III)

$$(α) \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{2x}$$

$$(β) \frac{xy-xy^3}{xy-x^3y} : \frac{6}{12-12x}$$

$$(γ) \frac{\omega}{\omega^2+2\omega} : \frac{\omega}{\omega^2-4}$$

$$(δ) \frac{x+2}{\frac{x}{x}} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$$

$$(ε) \frac{2(x-2)}{x+2} : \frac{x+2}{(x+2)^2}$$

III)

$$(α) \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{2x}$$

$$(β) \frac{xy-xy^3}{xy-x^3y} : \frac{6}{12-12x}$$

$$(γ) \frac{\omega}{\omega^2+2\omega} : \frac{\omega}{\omega^2-4}$$

$$(δ) \frac{x+2}{\frac{x}{x}} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$$

$$(ε) \frac{2(x-2)}{x+2} : \frac{x+2}{(x+2)^2}$$

Γ) Πρόσθεση- Αφαίρεση ρητών παραστάσεων:

1η περίπτωση: για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις που έχουν **ίδιους παρονομαστές**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα πρόσθεσης-αφαίρεσης ομωνύμων κλασμάτων, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Άσκηση-

παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{x+3}{y+2} + \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3+x-2}{y+2} = \frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta) \frac{x+3}{y+2} - \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3-x+2}{y+2} = \frac{x+5}{y+2}$$

2η περίπτωση: Για να προσθέσουμε είναι αφαιρέσουμε δύο ρητές

παραστάσεις που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές κάνουμε τα εξής:

1° βήμα: Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές

2° βήμα: Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.

3° βήμα: Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

4° βήμα: Κάνουμε τις προσθέσεις-αφαιρέσεις που ζητούνται.

5° βήμα: Κάνουμε τις απλοποιήσεις που ενδεχομένως υπάρχουν

Άσκηση- παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{2x}{1} + \frac{\frac{2}{1}}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x+2-3}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta) \frac{\frac{x+1}{3}}{x} + \frac{\frac{x}{2}}{x+1} = \frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+3+2x}{x(x+1)} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

ج) الجمع - الطرح للنسببة:

الحالة الأولى: لإضافة أو طرح تعبيرين نسبين لهما نفس المقامات، نستخدم قاعدة جمع وطرح الكسور المتشابهة، أي:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

تمرين - مثال: قوموا بإجراء العمليات:

$$(\alpha) \frac{x+3}{y+2} + \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3+x-2}{y+2} = \frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta) \frac{x+3}{y+2} - \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3-x+2}{y+2} = \frac{x+5}{y+2}$$

الحالة الثانية: لإجراء الجمع أو الطرح بين كسرين لهما مقامات مختلفة، نقوم

بالخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نفكك المقامات إلى عواملها الأولية

الخطوة الثانية: نجد القاسم المشترك الأصغر للمقامات.

الخطوة الثالثة: نحول الكسور إلى كسور متشابهة.

الخطوة الرابعة: نجري عمليات الجمع أو الطرح المطلوبة.

الخطوة الخامسة: نقوم بتبسيط النتائج إذا لزم الأمر.

تمرين - مثال: قم بإجراء العمليات التالية:

$$(\alpha) \frac{2x}{1} + \frac{\frac{2}{1}}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x+2-3}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta) \frac{\frac{x+1}{3}}{x} + \frac{\frac{x}{2}}{x+1} = \frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+3+2x}{x(x+1)} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

Άσκηση - تمرين

$$\gamma) \frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3\alpha-3} + \frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6} =$$

$$\frac{3}{2(\alpha+1)} - \frac{2}{3(\alpha-1)} + \frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(\alpha+1) \\ 3(\alpha-1) \\ 2 \cdot 3(\alpha-1)(\alpha+1) \end{array} \right\} \text{ΕΚΠ} = 2 \cdot 3(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$\frac{\overbrace{3(\alpha-1)}^3}{2(\alpha+1)} - \frac{\overbrace{2(\alpha+1)}^2}{3(\alpha-1)} + \frac{\overbrace{1}^1}{6(\alpha-1)(\alpha+1)}$$

$$= \frac{3 \cdot 3(\alpha-1)}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} - \frac{2 \cdot 2(\alpha+1)}{3(\alpha-1)2(\alpha+1)} + \frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)} =$$

$$= \frac{9 \cdot (\alpha-1) - 4 \cdot (\alpha+1) + 5\alpha+3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{9\alpha - 9 - 4\alpha - 4 + 5\alpha + 3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} = \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{10(\alpha-1)}{6(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{5}{3(\alpha+1)}$$

$$1. \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = \dots\dots\dots$$

$$2. \frac{x}{x+2} - \frac{3+x}{x+2} = \dots\dots\dots$$

$$3. \frac{3x}{x-1} + \frac{3}{1-x} = \dots\dots\dots$$

$$4. \frac{x}{x-2} + \frac{x}{2-x} = \dots\dots\dots$$

$$5. 1 + \frac{2}{x} = \dots\dots\dots$$

$$6. \frac{3x}{3x-12} - \frac{4}{x-4} = \dots\dots\dots$$

$$7. \frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+3x} = \dots\dots\dots$$

$$8. \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y}} = \dots\dots\dots$$

$$9. \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-y} - 1\right) = \dots\dots\dots$$

$$10. \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) = \dots\dots\dots$$

Εξισώσεις ανισώσεις

A. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

1. Άσκηση(παράδειγμα):

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

A)

$$2x = 6$$

$$\frac{2x-6}{2-2}$$

$$x=3$$

η εξίσωση έχει μία μόνο μία μόνο(μοναδική) λύση

B) $0x = 0$ η εξίσωση έχει **άπειρες** (πάρα πολλές) λύσεις και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη** (είναι σωστή για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x)

Γ) $0x = -7$ καμία λύση (**αδύνατη**, είναι λάθος για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x)

B. Μεθοδολογία-Παράδειγμα:

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x+1}{2} - 14 = \frac{5-x}{4} - \frac{x+2}{3}$$

1. Αν έχει κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών

Η εξίσωση έχει παρονομαστές τους αριθμούς 2, 3 και 4. Το ΕΚΠ(2,3,4)=12. Θα πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το 12. Οι όροι (κομμάτια) μιας εξίσωσης "διαχωρίζονται" μεταξύ τους από τα πρόσημα + και -. Η δική μας εξίσωση έχει 4 όρους τους

$$\frac{x+1}{2}, -14, \frac{5-x}{4}, -\frac{x+2}{3}$$

. Οπότε θα έχουμε

$$12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12 \frac{5-x}{4} - 12 \frac{x+2}{3}$$

Τώρα απλοποιούμε τους παρονομαστές (γι' αυτό το λόγω βάλαμε παντού το 12) κάνοντας διαίρεση το 12 με κάθε παρονομαστή.

$$6 \cdot 12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 3 \cdot 12 \frac{5-x}{4} - 4 \cdot 12 \frac{x+2}{3}$$

المعادلات والمتباينات

أ. المعادلة $ax + \beta = 0$

1. تمرين (مثال):

جد عدد حلول المعادلة:

$$2x = 6$$

$$\frac{2x-6}{2-2}$$

(أ)

المعادلة لها حل واحد فقط (فريد)

ب) $0x = 0$ المعادلة لها عدد لا نهائي من الحلول وتسمى متطابقة أو غير محددة (صحيحة لأي قيمة للعدد x)

ج) $0x = -7$ لا توجد حلول (مستحيلة، خطأ لأي قيمة للعدد x)

ب. المنهجية - مثال:

حل المعادلة

1. إذا كان هناك كسور، نضرب كل حد من حدود المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات.

المعادلة لها مقامات الأعداد 2 و 3 و 4. المضاعف المشترك الأصغر $(2,3,4) = 12$. سنضرب جميع حدود المعادلة في 12. الحدود (الأجزاء) في المعادلة "مفصلة" بين بعضها بواسطة الرموز + و -. معادلتنا لها 4 حدود.

$$\frac{x+1}{2}, -14, \frac{5-x}{4}, -\frac{x+2}{3}$$

لذا سيكون لدينا

$$12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12 \frac{5-x}{4} - 12 \frac{x+2}{3}$$

الآن نيسط المقامات (لهذا السبب وضعنا 12 في كل مكان) بقسمة 12 على كل مقام.

$$6 \cdot 12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 3 \cdot 12 \frac{5-x}{4} - 4 \cdot 12 \frac{x+2}{3}$$

Καθαρογράφουμε ότι απέμεινε έχοντας στο μυαλό μας το εξής: Όποιος αριθμητής αποτελείται από δύο κομμάτια θα μπει υποχρεωτικά σε παρένθεση.

$$6(x+1) - 168 = 3(5-x) - 4(x+2)$$

2. Διώχνουμε τις παρενθέσεις από την εξίσωση εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται έξω από την παρένθεση και με τους δύο όρους που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση:

$$6(x+1) - 168 = 3(5-x) - 4(x+2) \rightarrow$$

$$6 \cdot x + 6 \cdot 1 - 168 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot x - 4 \cdot x - 4 \cdot 2 \rightarrow$$

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

3. Χωρίζουμε γνωστούς – άγνωστους: Εδώ θα πρέπει να θυμόμαστε ότι:

“Όποιος όρος αλλάξει μέλος θα πρέπει να αλλάξει και το πρόσημό του

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8 \rightarrow$$

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

4. “Συμμαζεύουμε” δηλαδή κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη.

(Αναγωγή Όμοιων Όρων)

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8 \rightarrow$$

$$13x = 169 \rightarrow$$

$$\frac{13x}{13} = \frac{169}{13} \text{ ή αλλιώς } x = 13$$

5. Πρέπει το x να μείνει μόνο του, άρα πρέπει να φύγει από δίπλα του ο αριθμός 13 (Συντελεστής λέγεται). Για το λόγο αυτό “Διαιρώ με τον Συντελεστή του άγνωστου” και τα δύο μέλη απαραίτητα.

6. Αν έχουμε $0x = 0$ η εξίσωσή είναι **αόριστη** και αν έχουμε $0x = 169$ (κάποιον αριθμό διαφορετικό του 0) η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

Ασκήσεις-Εργασία: Από το βιβλίο

نكتب ما تبقى مع وضع ما يلي في الاعتبار: أي بسط يتكون من جزأين يجب أن يوضع بالضرورة بين قوسين.

$$6(x+1) - 168 = 3(5-x) - 4(x+2)$$

2. نقوم بإزالة الأقواس من المعادلة بتطبيق الخاصية التوزيعية، أي بضرب الرقم الموجود خارج القوس مع كلا المصطلحين الموجودين داخل القوس:

$$6(x+1) - 168 = 3(5-x) - 4(x+2)$$

$$6 \cdot x + 6 \cdot 1 - 168 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot x - 4 \cdot x - 4 \cdot 2$$

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

3. نقسم المعروفات عن المجهولات: هنا يجب أن نتذكر أن:

“أي مصطلح يتغير جانبه يجب أن يتغير علامته أيضًا.”

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

4. “نرتب الأمور” أي نقوم بالعمليات على كلا الجانبين.

(جمع المصطلحات المتشابهة)

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

$$13x = 169$$

5. يجب أن يبقى x بمفرده، لذلك يجب إزالة الرقم 13 من جانبه (ويُسمى المعامل).

$$x = 13 \rightarrow =$$

لهذا السبب “نقسم على معامل المجهول” وكلا الجانبين ضروري.

6. إذا كان لدينا $0x = 0$ فالمعادلة غير محددة وإذا كان لدينا $0x = 169$ (أي رقم

مختلف عن 0) فالمعادلة مستحيلة.

تمارين-واجب: من الكتاب

Εξισώσεις 2ου βαθμού

Βασικός ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (α διαφορετικό του μηδενός) λέγεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση).

Βασικός ορισμός: οι αριθμοί α , β , γ στη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης ειδικά ο αριθμός γ (δηλαδή ο συντελεστής γ) ονομάζεται **σταθερός όρος** της εξίσωσης.

Άσκηση παράδειγμα: Στις επόμενες εξισώσεις να προσδιορίσετε τους συντελεστές α , β , γ των δευτεροβάθμιων εξισώσεων:

- $3x^2 + 5x + 2 = 0$ οπότε $\alpha = 3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$
- $2x^2 + 6x + 9 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 9$
- $5x^2 + 6x + 7 = 0$ οπότε $\alpha = 5$ $\beta = -6$ $\gamma = 7$
- $-3x^2 + 6x - 9 = 0$ οπότε $\alpha = -3$ $\beta = 6$ $\gamma = -9$
- $x^2 - 5x - 2 = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = -5$ $\gamma = -2$
- $x^2 + 4x = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = 4$ $\gamma = 0$
- $-x^2 + 4 = 0$ οπότε $\alpha = -1$ $\beta = 0$ $\gamma = 4$
- $x^2 + 5x + 0 = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = 5$ $\gamma = 0$

المعادلات التربيعية

التعريف الأساسي: كل معادلة على الشكل $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (مختلف عن الصفر) تُسمى معادلة تربيعية لمجهول واحد.

التعريف الأساسي: الأعداد α , β , γ في المعادلة التربيعية

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ تُسمى معاملات المعادلة، وخصوصًا العدد γ (أي المعامل γ) يُسمى الحد الثابت للمعادلة.

مثال تدريبي: في المعادلات التالية حددوا معاملات α , β , γ للمعادلات التربيعية:

- $\beta = 5$ $\alpha = 3$ إذن a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ $\gamma = 2$
- $2x^2 + 6x + 9 = 0$ إذن $\alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 9$
 - $5x^2 + 6x + 7 = 0$ إذن $\alpha = 5$ $\beta = -6$ $\gamma = 7$
 - $-3x^2 + 6x - 9 = 0$ إذن $\alpha = -3$ $\beta = 6$ $\gamma = -9$
 - $x^2 - 5x - 2 = 0$ إذن $\alpha = 1$ $\beta = -5$ $\gamma = -2$
 - $x^2 + 4x = 0$ إذن $\alpha = 1$ $\beta = 4$ $\gamma = 0$
 - $-x^2 + 4 = 0$ إذن $\alpha = -1$ $\beta = 0$ $\gamma = 4$
 - $x^2 + 5x + 0 = 0$ إذن $\alpha = 1$ $\beta = 5$ $\gamma = 0$

Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων

1^η περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx = 0$

Μέθοδος επίλυσης: παραγοντοποίηση.

(παρατήρηση $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$)

Άσκηση-παράδειγμα: να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

• $x^2 - 6x = 0$ οπότε

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x-6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 6$$

• $2x^2 + 12x = 0$ οπότε

$$2x(x+6) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } x+6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -6$$

• $-4x^2 + 6x = 0$ οπότε

$$2x(-2x+3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } -2x+3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } -2x = -3$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 3/2$$

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

• $x^2 - 3x = 0$

• $x^2 + 8x = 0$

• $3x^2 - 15x = 0$

• $-3x^2 + 12x = 0$

• $4x^2 + x = 0$

حل المعادلات التربيعية

الحالة الأولى: المعادلات من الشكل $ax^2 + bx = 0$

طريقة الحل: التحليل إلى عوامل.

(ملاحظة: إذا $\alpha \cdot \beta = 0$ إذن $\alpha = 0$ أو $\beta = 0$)

تمرين-مثال: حل المعادلات التالية:

إذن $x^2 - 6x = 0$

$$x(x-6) = 0$$

$$x-6 = 0 \text{ أو } x = 0$$

$$x = 6 \text{ أو } x = 0$$

إذن $2x^2 + 12x = 0$ •

$$2x(x+6) = 0$$

$$x+6 = 0 \text{ أو } 2x = 0$$

$$x = -6 \text{ أو } x = 0$$

إذن $4x^2 + 6x = 0$ •

$$2x(-2x+3) = 0$$

$$2x+3 = 0 \text{ أو } 2x = 0$$

$$2x = -3 \text{ أو } x = 0$$

$$x = 3/2 \text{ أو } x = 0$$

• **تمرين عمل:** حل المعادلات التالية

$$x^2 - 3x = 0 \bullet$$

$$x^2 + 8x = 0 \bullet$$

$$3x^2 - 15x = 0 \bullet$$

$$3x^2 + 12x = 0 \bullet$$

$$4x^2 + x = 0 \bullet$$

Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

2η περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$ - Μέθοδος :

1ος τρόπος: παραγοντοποιούμε την εξίσωση και καταλήγουμε σε γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν

2ος τρόπος: χρησιμοποιούμε τον ορισμό τετραγωνικής ρίζας.

Προσοχή: το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού δεν είναι αρνητικός αριθμός!!

Άσκηση παράδειγμα : Να λύσετε την εξίσωση:

A) $x^2 - 16 = 0$

1ος τρόπος

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow (x-4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x+4 = 0, \text{ οπότε } x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

2ος τρόπος

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}, \text{ οπότε } x = +4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

B) $4x^2 - 100 = 0$

1ος τρόπος

$$4x^2 - 100 = 0 \rightarrow (2x-10) \cdot (2x+10) = 0$$

$$2x-10 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x+10 = 0$$

$$2x = 10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \text{ οπότε } x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

2ος τρόπος

$$4x^2 - 100 = 0 \rightarrow 4x^2 = 100$$

$$2x = , \text{ άρα } 2x = +10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \text{ οπότε } x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις (όσες γίνεται με δύο τρόπους):

A) $x^2 - 9 = 0$

B) $x^2 - 64 = 0$

Γ) $x^2 = 144$

Δ) $x^2 - 256 = 0$

Ε) $x^2 - 256 = 0$

Α) $x^2 - 9 = 0$

Β) $x^2 - 64 = 0$

Γ) $x^2 = 144$

Ε) $9x^2 - 16 = 0$

Ζ) $x^2 = -36$

Η) $x^2 + 4 = 0$

Θ) $4x^2 + 100 = 0$

Ε) $9x^2 - 16 = 0$

Ζ) $x^2 = -36$

Η) $x^2 + 4 = 0$

Θ) $4x^2 + 100 = 0$

Ι) $3 \cdot (x+2)^2 = 12$

Ι) $3 \cdot (x+2)^2 = 12$

حل المعادلة التربيعية

الحالة الثانية: المعادلات من الشكل $ax^2 + \gamma = 0$ - الطريقة:

الطريقة الأولى: نقوم بتحليل المعادلة إلى عوامل ونتوصل إلى حاصل ضرب العوامل يساوي صفر

الطريقة الثانية: نستخدم تعريف الجذر التربيعي.

تحذير: مربع أي عدد حقيقي ليس رقماً سالباً!!

مثال تمرين: حل المعادلة:

A) $x^2 - 16 = 0$

الطريقة الأولى

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow (x-4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x+4 = 0, \text{ إذن } x = 4 \quad \text{أو} \quad x = -4$$

الطريقة الأولى

$$\rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{16}, \text{ إذن } x = +4 \quad \text{أو} \quad x = -4$$

B) $4x^2 - 100 = 0$

الطريقة الأولى

$$4x^2 - 100 = 0 \rightarrow (2x-10) \cdot (2x+10) = 0 \rightarrow 2x-10 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x+10 = 0$$

$$2x = 10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \text{ إذن } x = 5 \quad \text{أو} \quad x = -5$$

الطريقة الثانية

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$4x^2 = 100$$

$$2x = , \rightarrow 2x = +10 \quad \text{أو} \quad 2x = -10, \text{ إذن } x = 5 \quad \text{أو} \quad x = -5$$

تمرين عمل: حل المعادلات التالية (كلما أمكن بطريقتين)

A) $x^2 - 9 = 0$

B) $x^2 - 64 = 0$

Γ) $x^2 = 144$

Ζ) $x^2 = -36$

Η) $x^2 + 4 = 0$

Θ) $4x^2 + 100 = 0$

Ι) $3 \cdot (x+2)^2 = 12$

Επίλυση εξισώσεων δεύτερου βαθμού με χρήση τύπου

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού: $ax^2 + bx + c = 0$ με $a \neq 0$

Άσκηση παράδειγμα: Να προσδιορίσετε τους συντελεστές α , β , γ στις επόμενες εξισώσεις:

- $2x^2 + 5x + 6 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 5$ $\gamma = 6$
- $x^2 - 4x + 3 = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = -4$ $\gamma = 3$
- $2x^2 - 50 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 0$ $\gamma = -50$

Βασική παρατήρηση:

Στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής $ax^2 + bx + c = 0$ μας βοηθάει η **Διακρίνουσα** τις εξίσωσης, η οποία υπολογίζεται από τον τύπο: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Άσκηση-παράδειγμα: Να υπολογίστε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

- $2x^2 + 6x + 4 = 0 \rightarrow \alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 4$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$
- $-3x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow \alpha = -3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25 + 24 = 49$
- $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$
- $-x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = -3$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 1 - 12 = -12$

Άσκηση εργασία: Να υπολογίστε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

- $3x^2 + 12x + 1 = 0$
- $x^2 - 2x + 3 = 0$
- $3x^2 - 12x = 0$

حل المعادلات التربيعية باستخدام الصيغة

المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$ مع $a \neq 0$

تمرين مثال: حدد المعاملات α , β , γ في المعادلات التالية:

- A. $2x^2 + 5x + 6 = 0$ إذن $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 6$
- B. $x^2 - 4x + 3 = 0$ إذن $\alpha = 1$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$
- C. $2x^2 - 50 = 0$ إذن $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = -50$

ملاحظة أساسية:

في حل المعادلة التربيعية من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ تساعدنا المحددة للمعادلة

والتي تُحسب وفق الصيغة: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

تمرين-مثال: احسب المحددة للمعادلات التالية:

- $2x^2 + 6x + 4 = 0 \rightarrow \alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 4$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$
- $-3x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow \alpha = -3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25 + 24 = 49$
- $x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow \alpha = 1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$
- $-x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow \alpha = -1$ $\beta = 1$ $\gamma = -3$
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 1 - 12 = -12$

تمرين عمل: احسب المحددة للمعادلات التالية:

$$3x^2 + 12x + 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

Βασική παρατήρηση:

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$,

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

Παράδειγμα Λύσης:

Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

A) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

- Βρίσκουμε τους Συντελεστές:

$\alpha = 2 \quad \beta = 5 \quad \gamma = -3$

- Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$

Επειδή $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

- Εύρεση Ριζών ($x_{1,2}$)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

- Υπολογισμός των δύο λύσεων:

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

- Απάντηση: Οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$x_1 = 1/2, x_2 = -3$

ملاحظة أساسية:

المعادلة $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ مع $\alpha \neq 0$

→ إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة لها حلان مختلفان
→ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة لها حل مزدوج
→ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل (معادلة مستحيلة)

مثال للحل

حل المعادلات التالية:

A) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ (أ)

1. نجد المعاملات:

$\alpha = 2 \quad \beta = 5 \quad \gamma = -3$

2. حساب المميز (Δ)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$

لأن $\Delta > 0$ ، فإن المعادلة لها جذور حقيقية وغير متساوية.

3. إيجاد الجذور ($x_{1,2}$)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

4. حساب الحلين:

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

5. الجواب: حلول المعادلة هي:

$x_1 = 1/2, x_2 = -3$

$$B) x^2 - 6x + 9 = 0$$

• Προσδιορισμός Συντελεστών:

$$a=1 \quad \beta=-6 \quad \gamma=9$$

• Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

Επειδή $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα.

• Εύρεση Ρίζας (x)

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

• Απάντηση: Η διπλή λύση (ρίζα) της εξίσωσης είναι

$$x = 3$$

$$\Gamma) x^2 - x + 2 = 0$$

• Προσδιορισμός Συντελεστών:

$$a=1 \quad \beta=-1 \quad \gamma=2$$

• Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

Επειδή $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση).

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

- | | |
|--------------------------------|----------------------------------|
| 1. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ | 2. $x^2 + 5x - 6 = 0$ |
| 2. $x^2 - 4x + 4 = 0$ | 4. $-3x^2 + 5x - 8 = 0$ |
| 3. $x^2 + 5x + 7 = 0$ | 6. $x^2 + x - 1 = 0$ |
| 4. $x^2 = 7x + 3$ | 8. $-10x + 1 + 25x^2 = 0$ |
| 5. $(x + 2)^2 + 5 = 0$ | 10. $(3x - 1)^2 = 9$ |
| 6. $(x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$ | 12. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = -8$ |

$$B) x^2 - 6x + 9 = 0$$

1. تحديد المعاملات:

$$\gamma=9 \quad \beta=-6 \quad a=1$$

2. حساب المميز (Δ)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

بما أن $\Delta = 0$ ، فإن المعادلة لها جذر واحد (مزدوج).

3. إيجاد الجذر (x)

$$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

4. إجابة: الحل المزدوج (الجذر) للمعادلة هو

$$x = 3$$

$$\Gamma) x^2 - x + 2 = 0$$

1. تحديد المعاملات:

$$\gamma=2 \quad \beta=-1 \quad a=1$$

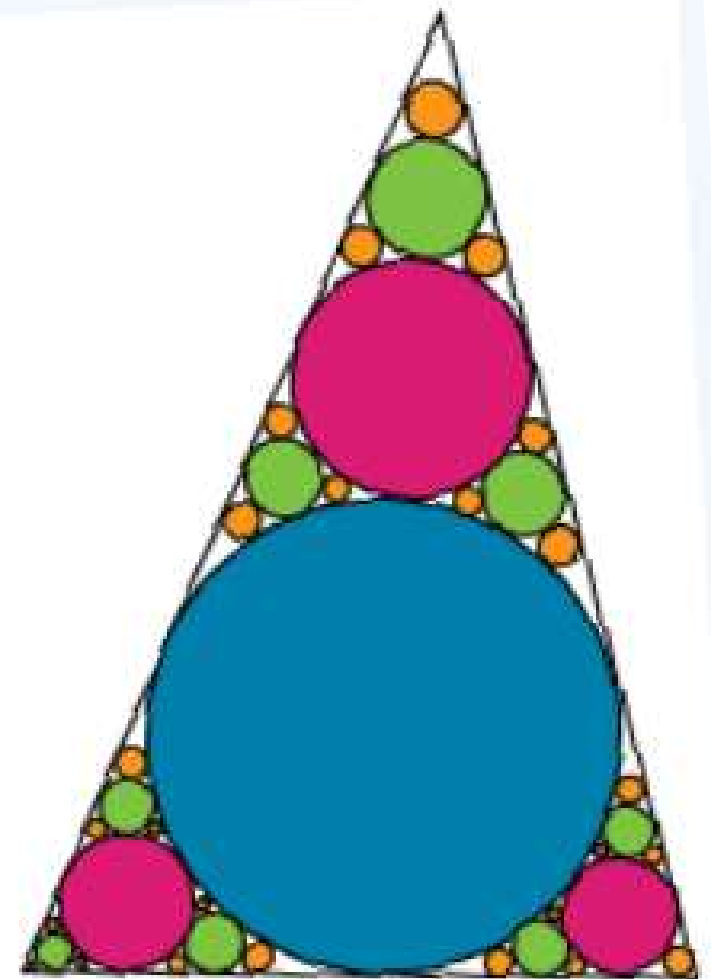
2. حساب المميز (Δ)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7$$

بما أن $\Delta < 0$ ، فإن المعادلة ليس لها حل (معادلة مستحيلة).

تمرين الواجب: حل المعادلات التالية:

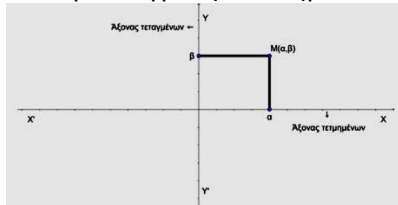
- | | |
|----------------------------------|-----------------------|
| 1. $2x^2 - 5x + 2 = 0$ | 2. $x^2 + 5x - 6 = 0$ |
| 4. $-3x^2 + 5x - 8 = 0$ | 6. $x^2 + x - 1 = 0$ |
| 8. $-10x + 1 + 25x^2 = 0$ | 10. $(3x - 1)^2 = 9$ |
| 12. $(x + 4)^2 - (x + 6)^2 = -8$ | |



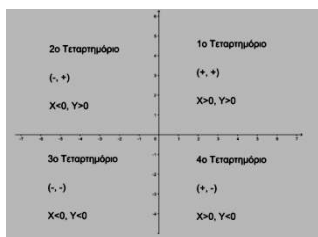
Άλγεβρα - Μέρος τρίτο:
 Συστήματα για τις εξετάσεις.....
 και
 γραφικές παραστάσεις για το Λύκειο!!

Συντεταγμένες- Εισαγωγή σε συναρτήσεις

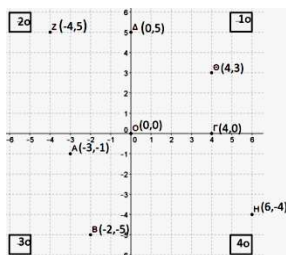
Τι σημαίνει η έκφραση σημείο $M(\alpha, \beta)$;
 Οι αριθμοί α, β λέγονται συντεταγμένες του M . Ο α λέγεται τετμημένη και ο β τεταγμένη του σημείου M . Το σημείο M συμβολίζεται με $M(\alpha, \beta)$.



Τι σημαίνει η έκφραση τεταρτημόρια;



Παράδειγμα συντεταγμένων:

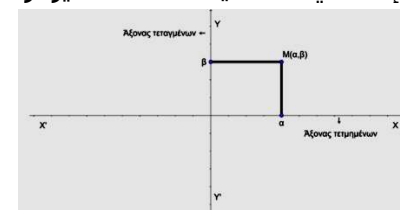


الجبر - الجزء الثالث:
 أنظمة للامتحانات.....
 و

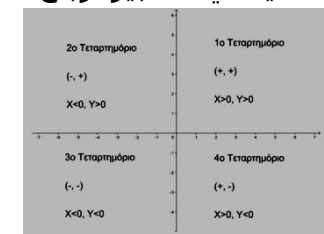
الرسوم البيانية للمدرسة الثانوية!!

الإحداثيات - مقدمة في الدوال

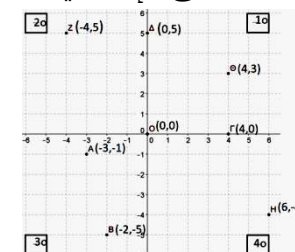
ماذا يعني التعبير نقطة $M(\alpha, \beta)$ ؟
 الأرقام α, β تسمى إحداثيات النقطة M . يُسمى α الإحداثي السيني و β الإحداثي الصادي للنقطة M . يُرمز للنقطة M بـ $M(\alpha, \beta)$.



ماذا يعني التعبير أرباع؟



مثال على الإحداثيات:



Συναρτήσεις-Γραφικές Παραστάσεις και άλλα...

Χρήση: Χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων και θεωρητικών μοντέλων.

Σε Στατιστική, Φυσική, Ιατρική, Βιολογία, Οικονομία, Περιβαλλοντολογία, μέσω της εικόνας δίνουν απλά και γρήγορα εκτίμηση για τέτοιου είδους μοντέλα.

Στα Μαθηματικά όταν λέμε ότι ένα μέγεθος είναι συνάρτηση ενός άλλου εννοούμε ότι εξαρτάται το ένα από το άλλο.

Βασικός ορισμός: Συνάρτηση ονομάζουμε μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y , με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y .

Βασική Παρατήρηση: Το να βρούμε το **πώς ακριβώς εξαρτάται ένα μέγεθος από ένα άλλο συχνά δεν είναι εύκολη διαδικασία**. Οι βοηθοί μας σε αυτό είναι ο τύπος της συνάρτησης, ο πίνακας τιμών της και η γραφική της παράσταση.

- Ο **τύπος** της συνάρτησης είναι η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x, y .
- Ο **πίνακας τιμών** της συνάρτησης συμπληρώνεται βάση πειραμάτων ή κάνοντας πράξεις
- Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης είναι σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους κάνουν αληθή την εξίσωση της συνάρτησης.

الدوال-التمثيلات البيانية وغيرها...

الاستخدام: تُستخدم لعرض النتائج التجريبية والنماذج النظرية. في الإحصاء، الفيزياء، الطب، علم الأحياء، الاقتصاد، وعلوم البيئة، من خلال الصورة تقدم تقديرًا بسيطًا وسريعًا لهذا النوع من النماذج.

في الرياضيات عند قولنا أن كمية ما هي دالة لشيء آخر نقصد أن أحدهما يعتمد على الآخر.

التعريف الأساسي: نطلق على الدالة علاقة بين متغيرين x و y ، تتوافق معها كل قيمة للمتغير x مع قيمة واحدة فقط للمتغير y .

ملاحظة أساسية: العثور على كيفية اعتماد مقدار ما على مقدار آخر غالبًا ليس عملية سهلة.

مساعدونا في ذلك هو صيغة الدالة، جدول قيمها وتمثيلها البياني.

- صيغة الدالة هي العلاقة الجبرية التي تربط المتغيرين x و y .
- يتم إكمال جدول قيم الدالة بناءً على التجارب أو من خلال إجراء العمليات الحسابية.
- التمثيل البياني للدالة هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي تجعل إحداثياتها صحيحة بالنسبة لمعادلة الدالة.

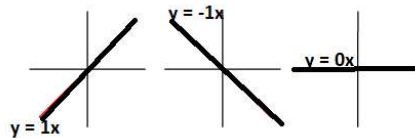
Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x$;

- Αντιστοιχεί σε **ανάλογα ποσά** (όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, παράδειγμα πόσα κιλά ψωμί αγοράζουμε από ένα φούρνο και πόσα χρήματα πληρώνουμε για αυτά).
- Έχει **γραφική παράσταση** μία **ευθεία** γραμμή που **περνάει** από την **αρχή** των **αξόνων** (σημείο $O(0,0)$).

· Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και $\alpha = \frac{y}{x}$.

- Αν το α είναι θετικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ αν είναι αρνητικός αριθμός βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

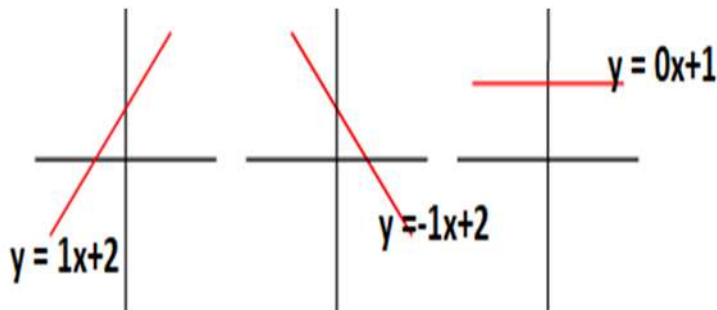
παραδείγματα



Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x + \beta$ ($\beta \neq 0$) ;

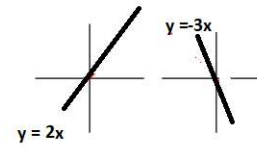
- Έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή.
- Είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \alpha \cdot x$, και περνάει απ' το σημείο $(0, \beta)$ του άξονα y .

παραδείγματα



Μαθαίνουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x$;

τιμή
αυξάνεται
από
το
μηδέν.

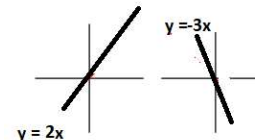
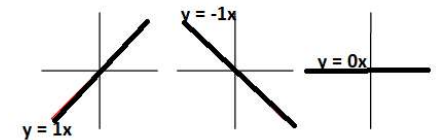


- **Τιμή** y αυξάνεται με **τιμή** x (όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, παράδειγμα πόσα κιλά ψωμί αγοράζουμε από ένα φούρνο και πόσα χρήματα πληρώνουμε για αυτά).
- Έχει **γραφική παράσταση** μία **ευθεία** γραμμή που **περνάει** από την **αρχή** των **αξόνων** (σημείο $O(0,0)$).

· Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και $\alpha = \frac{y}{x}$.

- Αν το α είναι θετικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ αν είναι αρνητικός αριθμός βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

Ασκήσεις

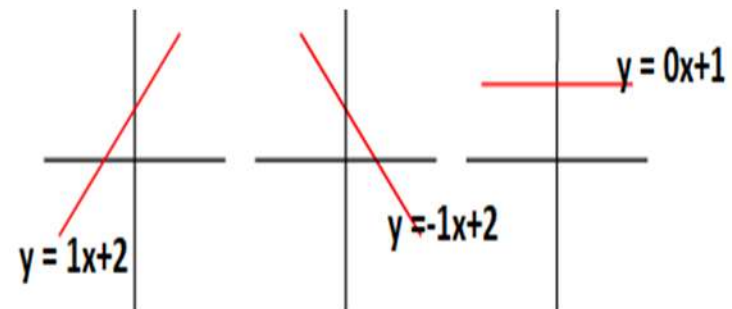


η τιμή

Μαθαίνουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x + \beta$ ($\beta \neq 0$) ;

- **Τιμή** y αυξάνεται με **τιμή** x (όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, παράδειγμα πόσα κιλά ψωμί αγοράζουμε από ένα φούρνο και πόσα χρήματα πληρώνουμε για αυτά).
- Έχει **γραφική παράσταση** μία **ευθεία** γραμμή που **περνάει** από την **αρχή** των **αξόνων** (σημείο $O(0,0)$).

Ασκήσεις

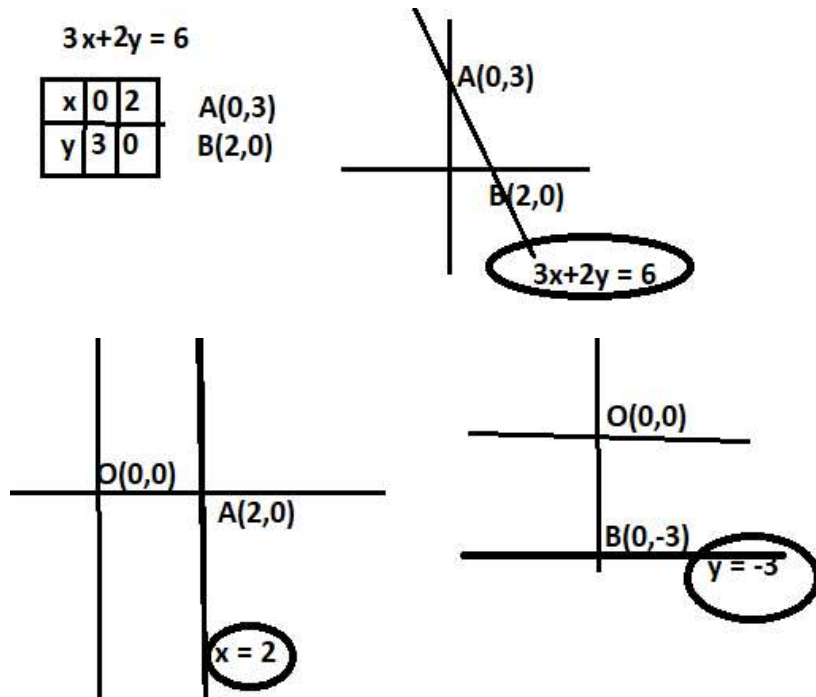


Εξίσωση μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ είναι πάντα ευθεία.

Βασική παρατήρηση: Για να σχεδιάσουμε μία ευθεία είναι αρκετά δύο σημεία της ευθείας αυτής.

Η εξίσωση $x = \alpha$ παριστάνει μία κατακόρυφη ευθεία και η εξίσωση $y = \beta$ παριστάνει μία οριζόντια.

παραδείγματα

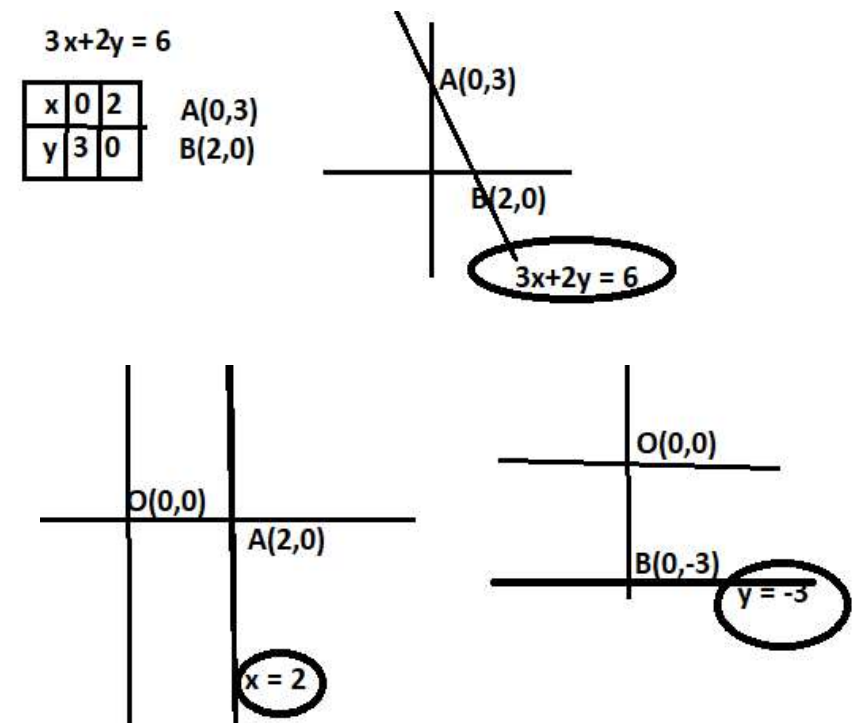


معادلة من الشكل $\alpha x + \beta y = \gamma$, $\alpha \neq 0$ أو $\beta \neq 0$ تكون دائمًا خطًا مستقيمًا.

ملاحظة أساسية: لرسم خط مستقيم يكفي نقطتان على هذا الخط.

المعادلة $x = \alpha$ تمثل خطًا عموديًا، والمعادلة $y = \beta$ تمثل خطًا أفقيًا.

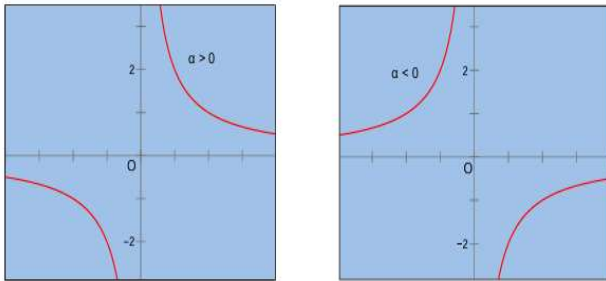
أمثلة



Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$;

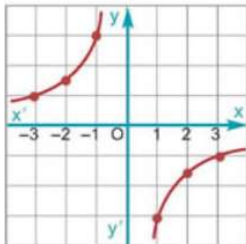
- Αντιστοιχεί σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Έχει γραφική παράσταση καμπύλη, που ονομάζεται υπερβολή.
- Η υπερβολή αποτελείται από δύο κλάδους, οι οποίοι πλησιάζουν ασταμάτητα τους άξονες χωρίς ποτέ να τους τέμνουν (λέμε πως οι άξονες είναι ασύμπτωτες της υπερβολής).
- Αν το a είναι θετικός αριθμός, τότε οι δύο κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο. Αν το a είναι αρνητικός αριθμός τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο.
- Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες $y=x$, $y = -x$

$$y = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

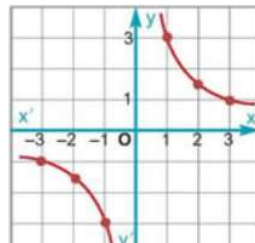


Παραδείγματα

$$y = \frac{3}{x}$$



$$y = -\frac{3}{x}$$



ماذا نعرف عن الدالة $y = a/x$ ؟

تناظر الكميات العكسية.

لها رسم بياني على شكل منحنى، يسمى فرعية.

الفرعية تتكون من فرعين يقتربان بلا توقف من المحاور دون أن يقطعاهما أبداً (نقول إن

المحاور هي المماسات للفرعية).

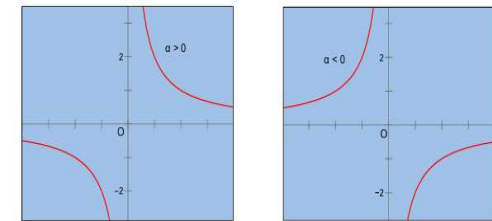
إذا كان a عدداً موجباً، فإن فرعي الفرعية يقعان في الربع الأول والربع الثالث. إذا كان

عدداً سالباً، فإن الفرعين يقعان في الربع الثاني والربع الرابع.

لها مركز تناظر عند نقطة تقاطع المحاور ومحاور تناظر هي منصف المحاور، أي

المستقيمان $y = x$ و $y = -x$.

$$y = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

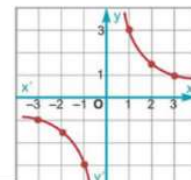


أمثلة

$$y = \frac{3}{x}$$



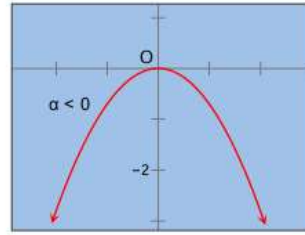
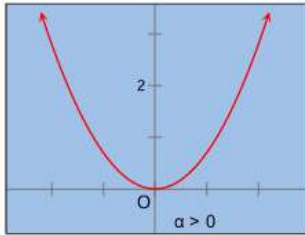
$$y = -\frac{3}{x}$$



Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $\psi = \alpha x^2$

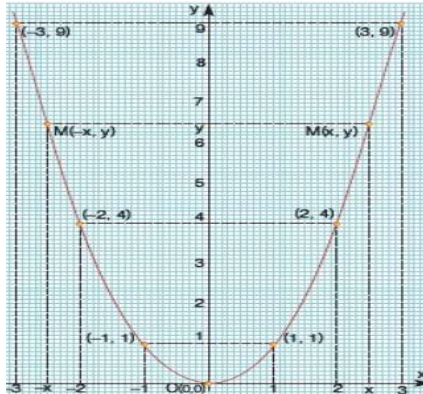
- έχει γραφική παράσταση παραβολή
- βρίσκεται πάνω από τον άξονα x αν $\alpha > 0$
- κάτω από τον άξονα x αν $\alpha < 0$.
- έχει άξονα συμμετρίας (δηλαδή κόβεται στη μέση από) τον άξονα y .

$$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$$

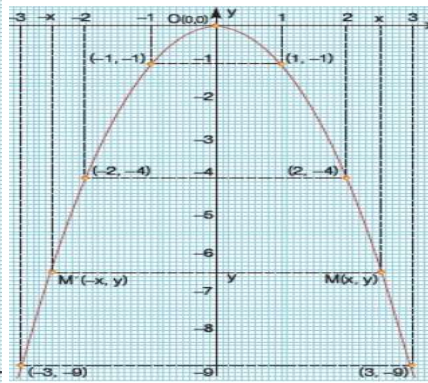


Παράδειγματα

$$y = x^2$$



$$y = -x^2$$



ماذا نعرف عن الدالة $\psi = \alpha x^2$

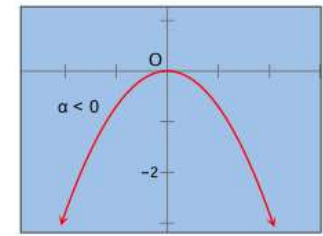
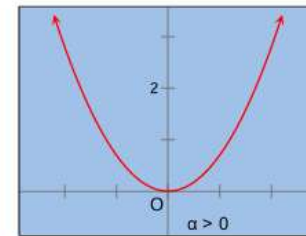
• لها تمثيل رسومي على شكل قطع مكافئ

• تقع فوق محور x إذا $\alpha > 0$

• تقع تحت محور x إذا $\alpha < 0$

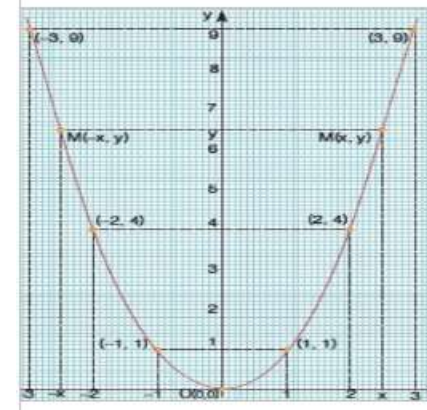
• لها محور تماثل (أي يُقسم إلى نصفين بواسطة) محور y .

$$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$$

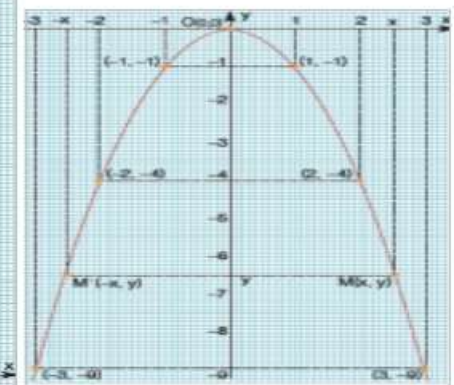


أمثلة

$$y = x^2$$

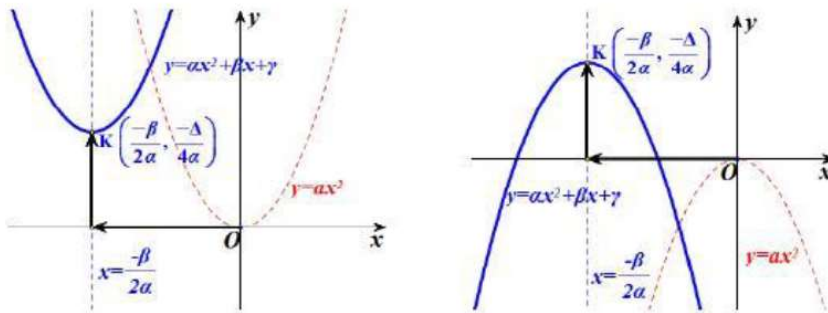


$$y = -x^2$$



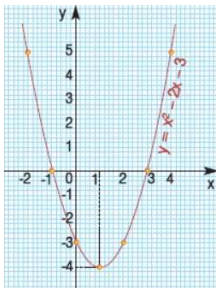
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

- είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K και έχει εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας της (δηλαδή τη χωρίζει στη μέση)
- Αν a είναι θετικός αριθμός τότε «κοιτάει προς τα πάνω» και αν το a είναι αρνητικός «κοιτάει προς τα κάτω»

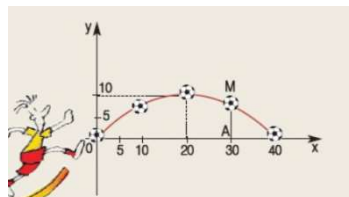


Παραδείγματα-εφαρμογές

$$Y = x^2 - 2x - 3$$

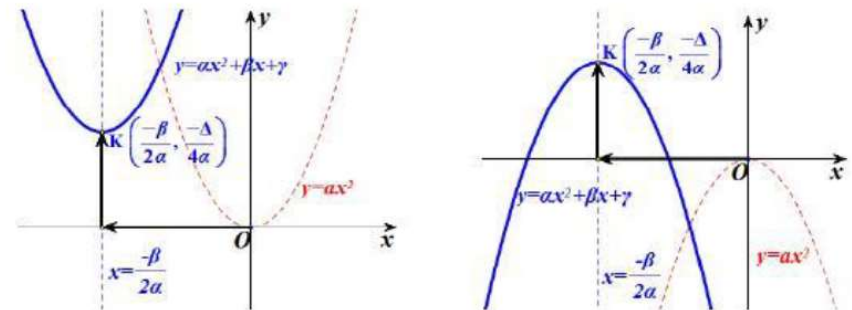


$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x, 0 \leq x \leq 40$$



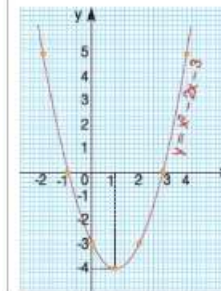
المخطط البياني للدالة $y = ax^2 + bx + \gamma$ مع $a \neq 0$

- هو قطع مكافئ له الرأس في النقطة K (,)، حيث $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- المستقيم العمودي الذي يمر بالرأس K ومعادلته $x =$ هو محور التماثل له (أي يقسمه إلى نصفين)
- إذا كان a عددًا موجبًا فهو «متجه نحو الأعلى» وإذا كان a عددًا سالبًا فهو «متجه نحو الأسفل»

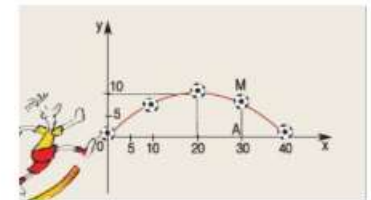


أمثلة

$$Y = x^2 - 2x - 3$$



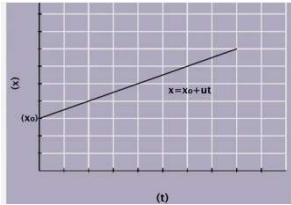
$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x, 0 \leq x \leq 40$$



Σε Φυσική(: Ο χρόνος δεν μπορεί να είναι αρνητικός !!!!)

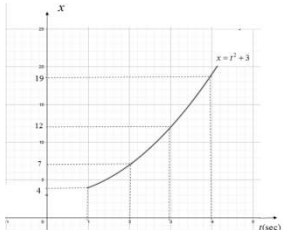
1. Θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα u

Τύπος Φυσικής: $x = x_0 + u t$.



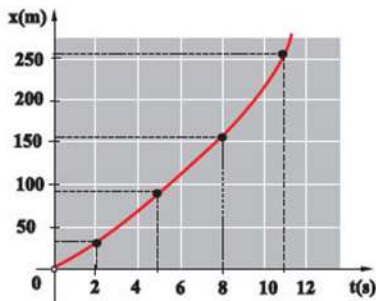
2. Θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

Τύπος Φυσικής $x = t^2 + 3$



3. Μετατόπιση σε (ομαλά)επιταχυνόμενη κίνηση

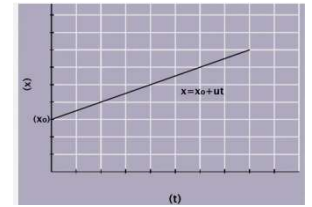
Τύπος: $x = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



في الفيزياء (: لا يمكن أن يكون الزمن سالبًا !!!!)

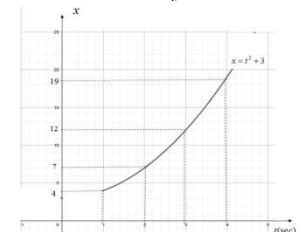
1. موضع جسم يتحرك بسرعة ثابتة u

صيغة الفيزياء: $x = x_0 + u t$.



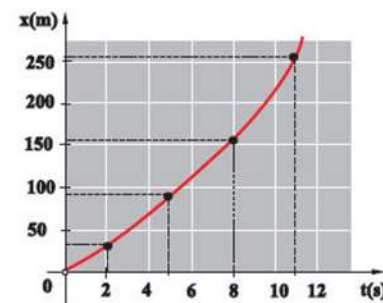
2. موضع جسم يتحرك بتسارع ثابت

صيغة الفيزياء: $x = t^2 + 3$



3. الإزاحة في حركة متسارعة (بشكل منتظم)

الصيغة: $x = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2$



Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.

Βασικός ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής $ax+by=\gamma$ ονομάζεται εξίσωση πρώτου βαθμού με αγνώστους x, y , ή γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, ψ .

Παραδείγματα:

$$2x+3\psi=17$$

$$-3x+4\psi=11$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{5}\psi = -\frac{7}{12}$$

Βασικός ορισμός: Κάθε ζεύγος της μορφής (x, ψ) που επαληθεύει (δηλαδή κάνει σωστή) τη γραμμική εξίσωση $ax+by=\gamma$ ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.

Ασκήσεις-παραδείγματα :

A. Το ζεύγος αριθμών $(x, y) = (2, 3)$ είναι λύση της εξίσωσης $4x+2y = 14$;

Είναι $(x, y) = (2, 3)$ οπότε $x = 2, y = 3$

$$4x+2y = 14$$

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$

$$8+6 = 14$$

$$14=14 \text{ σωστό}$$

Άρα το ζεύγος $(x, y) = (2, 3)$ είναι λύση της εξίσωσης

B. Το ζεύγος αριθμών $(x, y) = (-2, 5)$ είναι λύση της εξίσωσης $3x+y = 4$;

Είναι $(x, y) = (-2, 5)$ οπότε $x = -2, y = 5$

$$3x+y = 4$$

$$3 \cdot (-2) + 5 = 4$$

$$-6+5 = 4$$

$$-1=4 \text{ λάθος}$$

Άρα το ζεύγος $(x, y) = (-2, 5)$ δεν είναι λύση της εξίσωσης

Άσκηση- εργασία: Να εξετάσετε αν τα επόμενα ζεύγη αριθμών είναι λύση των εξισώσεων που δίνονται :

$(x, y) = (2, 7)$ της εξίσωσης $4x+y = 15$.

$(x, y) = (3, -1)$ της εξίσωσης $2x-y = 7$.

$(x, y) = (-4, 2)$ της εξίσωσης $x+y = 2$.

$(x, y) = (-3, -5)$ της εξίσωσης $2x+y = -11$.

أنظمة المعادلات الخطية

مفهوم المعادلة الخطية.

التعريف الأساسي: كل معادلة من الشكل $ax + by = \gamma$ تسمى معادلة من الدرجة الأولى مع مجهولين x و y ، أو معادلة خطية مع المجهولين x و y .

أمثلة:

$$2x + 3y = 17$$

$$3x + 4y = 11$$

$$1/2x - 3/5y = -7/12$$

التعريف الأساسي: كل زوج من الشكل (x, y) الذي يُحقق (أي يجعل صحيحاً) المعادلة الخطية $ax + by = \gamma$ يسمى حل المعادلة.

تمارين - أمثلة:

أ. هل زوج الأعداد $(x, y) = (2, 3)$ هو حل المعادلة $4x + 2y = 14$ ؟

هو $(x, y) = (2, 3)$ إذن $x = 2, y = 3$

$$4x + 2y = 14$$

$$14 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4$$

$$14 = 6 + 8$$

$$14 = 14 \text{ صحيح}$$

إذن الزوج $(x, y) = (2, 3)$ هو حل المعادلة

ب. هل الزوج الرقمي $(x, y) = (2, -5)$ حل المعادلة $3x+y = 4$ ؟

لأن $(x, y) = (2, -5)$ إذن $x = 2, y = -5$

$$3x+y = 4$$

$$4 = 5 + (2) \cdot (-3)$$

$$4 = 5 - 6$$

$$4 = -1 \text{ خطأ}$$

إذن الزوج $(x, y) = (2, -5)$ ليس حلاً للمعادلة

تمرين-واجب: تحقق مما إذا كانت أزواج الأرقام التالية هي حل للمعادلات المعطاة:

$(x, y) = (2, 7)$ للمعادلة $4x+y = 15$.

$(x, y) = (3, -1)$ للمعادلة $2x-y = 7$.

$(x, y) = (4, 2)$ للمعادلة $x+y = 2$.

$(x, y) = (3, -5)$ للمعادلة $2x+y = -11$.

Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής εξίσωσης.

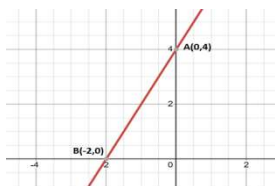
Γεωμετρικά η γραμμική εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ αντιστοιχεί σε μία ευθεία

Παράδειγμα: η εξίσωση $-2x + y = 4$ αντιστοιχεί στην επόμενη ευθεία.

X	0	-2
y	4	0

A (0,4)

B (-2,0)



Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.

Βασικός ορισμός: Κάθε ζεύγος δύο γραμμικών εξισώσεων δηλαδή εξισώσεων της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ και $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$ λέμε ότι αποτελεί ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y.

Παραδείγματα γραμμικού συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3x + 7y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x + 8y = 14 \\ -6x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Βασικός ορισμός: Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y λέγεται κάθε ζεύγος (x,y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Παράδειγμα: το ζεύγος (x,y) = (1,2) είναι λύση για το σύστημα;

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10 & 1 - 5 \cdot 2 = -9 \\ 2 + 8 = 10 & 1 - 10 = -9 \\ 10 = 10 & -9 = -9 \text{ ισχύει} \end{array}$$

Άρα το ζεύγος (x,y) = (1,2) είναι λύση του συστήματος.

Άσκηση-εργασία: Να εξετάσεις αν καθένα από τα επόμενα ζεύγη είναι λύση του συστήματος που δίνεται.

A) (x,y) = (1,2) (Σ) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$

B) (x,y) = (-1,4) (Σ) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 4y = -17 \end{cases}$

التفسير الهندسي للمعادلة الخطية.

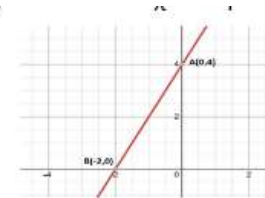
هندسياً، المعادلة الخطية $\alpha x + \beta y = \gamma$ تمثل خطاً مستقيماً.

مثال: المعادلة $-2x + y = 4$ تمثل الخط المستقيم التالي.

X	0	-2
y	4	0

A (0,4)

B (-2,0)



مفهوم النظام الخطي وحله بيانياً.

التعريف الأساسي: كل زوج من معادلتين خطيتين، أي معادلات من الشكل $\alpha x + \beta y = \gamma$ و $\alpha' x + \beta' y = \gamma'$

نقول إنه يمثل نظاماً من معادلتين خطيتين مع متغيرين مجهولين x و y. أمثلة على النظام الخطي:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3x + 7y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x + 8y = 14 \\ -6x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

التعريف الأساسي: يُقال إن حل نظام خطي مكون من معادلتين بمجهولين x و y هو كل زوج (x,y) يتحقق في المعادلات.

مثال: هل الزوج (x,y) = (1,2) هو حل للنظام؟

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10 & 1 - 5 \cdot 2 = -9 \\ 2 + 8 = 10 & 1 - 10 = -9 \\ 10 = 10 & -9 = -9 \end{array}$$

إذاً، الزوج (x,y) = (1,2) هو حل للنظام.

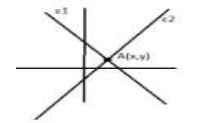
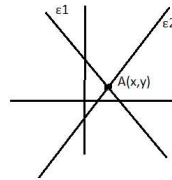
تمرين-عمل: تحقق مما إذا كان كل من الأزواج التالية هو حل للنظام المعطى.

A) (x,y) = (1,2) (Σ) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$

B) (x,y) = (-1,4) (Σ) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 4y = -17 \end{cases}$

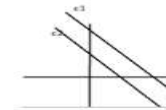
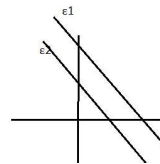
Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους
(γεωμετρικός τρόπος λύσης γραμμικού συστήματος)

- Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει μία **μοναδική λύση** (x, ψ) τότε οι δύο ευθείες που προκύπτουν **τέμνονται** σε ένα σημείο με συντεταγμένες (x, ψ) .



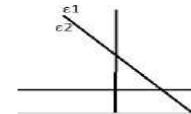
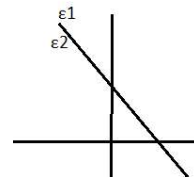
1. إذا كان للنظام الخطي حل وحيد (x, ψ) فإن المستقيمين الناتجين يتقاطعان في نقطة ذات إحداثيات (x, ψ) .

- Το γραμμικό σύστημα **δεν έχει λύση**(αδύνατο σύστημα) και οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι **παράλληλες** μεταξύ τους.



2. النظام الخطي ليس له حل (نظام مستحيل) والمستقيمان ϵ_1 و ϵ_2 متوازيان.

- Το γραμμικό σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** (αόριστο σύστημα) και οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 **ταυτίζονται**.

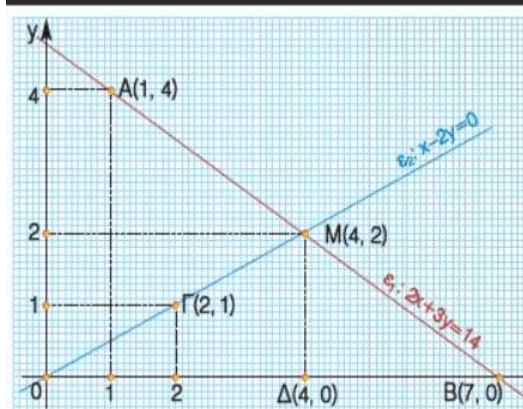


3. النظام الخطي له حلول لا نهائية (نظام غير محدد) والمستقيمان ϵ_1 و ϵ_2 متطابقان.

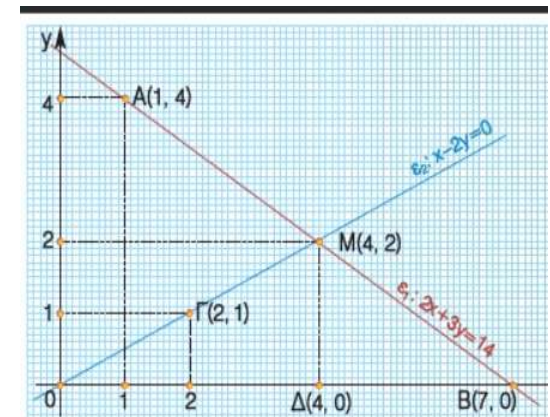
أمثلة

Παραδείγματα

- Λύση του συστήματος
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$
 είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, 2) \rightarrow x = 4, y = 2$



• حل النظام
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$
 هو الزوج $x = 4, y = 2 \rightarrow (4, 2) = (x, y)$

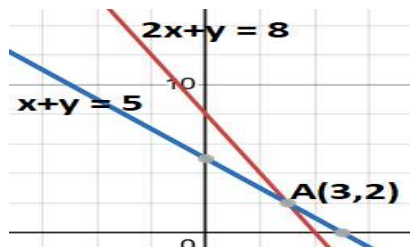


➤ Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

είναι το ζεύγος

$$(x, y) = (3, 2) \rightarrow x = 3, y = 2$$

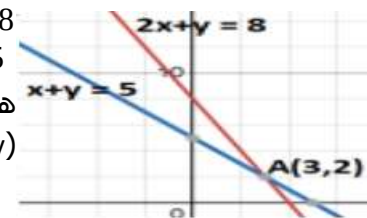


• حل النظام

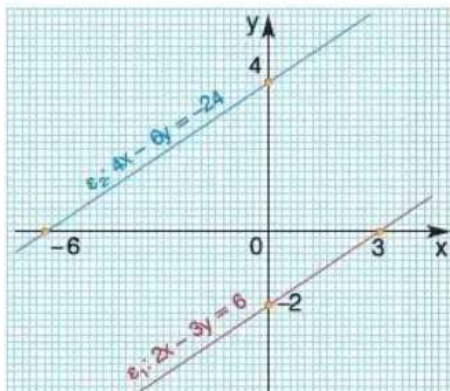
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

هو الزوج

$$x = 3, y = 2 \rightarrow (3, 2) = (x, y)$$



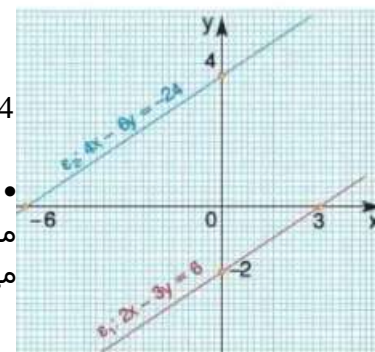
➤ το σύστημα $\begin{cases} 4x - 6y = -24 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$
δεν έχει λύση (αδύνατο σύστημα) και οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2
είναι παράλληλες μεταξύ τους



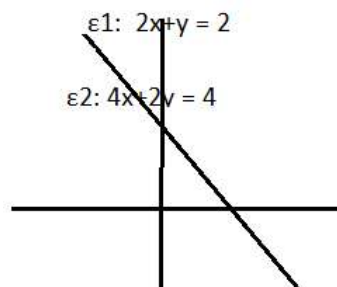
$$\begin{cases} 4x - 6y = -24 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

• النظام ليس له حل (نظام

مستحيل) والخطين ϵ_1 و ϵ_2 متوازيان مع بعضهما البعض



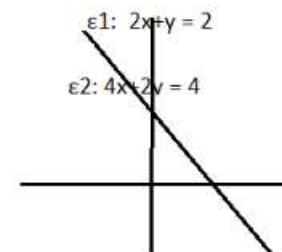
➤ το σύστημα $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$
έχει άπειρες λύσεις και οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2
ταυτίζονται.



$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$$

• النظام

له حلول لا نهائية والخطين ϵ_1 و ϵ_2 متطابقان.



Αλγεβρική λύση γραμμικού συστήματος

1^{ος} τρόπος: Μέθοδος αντικατάστασης

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος

Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$4(5 - 3y) + 5y = 13$$

$$20 - 12y + 5y = 13$$

$$-12y + 5y = 13 - 20$$

$$-7y = -7$$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$$y = 1$$

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3 \cdot 1 = 5$$

$$x + 3 = 5$$

$$x = 2$$

άρα η λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = (2, 1)$

الحل الجبري لنظام خطي

الطريقة الأولى: طريقة الاستبدال

- نحل إحدى معادلات النظام بالنسبة لمجهول.
- نستبدل هذا المجهول في المعادلة الأخرى للنظام بالتعبير المتساوي له، وبذلك نحصل على معادلة بمجهول واحد، نقوم بحلها.
- القيمة التي وجدناها للمجهول نستبدلها في المعادلة السابقة، وبذلك نجد المجهول الآخر.
- نحدد حل النظام

تمرين مثال 1: حل النظام:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$4(5 - 3y) + 5y = 13$$

$$20 - 12y + 5y = 13$$

$$-12y + 5y = 13 - 20$$

$$-7y = -7$$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$$y = 1$$

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3 \cdot 1 = 5$$

$$x + 3 = 5$$

$$x = 2$$

$$(2, 1) = (x, y)$$

Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$5(y-3) + 6y = 7$$

$$5y - 15 + 6y = 7$$

$$5y + 6y = 7 + 15$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$x = y - 3$$

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1$$

άρα η λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = (-1, 2)$

تمرین مثال 2: حل النظام:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$5(y-3) + 6y = 7$$

$$5y - 15 + 6y = 7$$

$$5y + 6y = 7 + 15$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$x = y - 3$$

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1$$

$$(1, 2) = (x, y)$$

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα συστήματα :

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

تمرین-عمل: حل الأنظمة:

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος – 2^{ος} τρόπος:

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Βήμα 1ο: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν άγνωστο.

Βήμα 2ο: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις. Προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

Βήμα 3ο: Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και την τιμή του άλλου αγνώστου. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος .

Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 & \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 8 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} \quad +$$

$$-6x + 6x - 10y + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$3x + 5 \cdot 2 = 1$$

$$3x + 10 = 1$$

$$3x = 1 - 10$$

$$3x = -9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$$

$x = -3$ άρα η λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = (-3, 2)$

الحل الجبري لنظام خطي – الطريقة الثانية:

طريقة المعاملات المعاكسة

الخطوة 1: نضرب أطراف كل معادلة بعدد مناسب بحيث تظهر معاملات متعاكسة في مجهول واحد.

الخطوة 2: نجمع المعادلتين حدًا لحد. تنتج معادلة بمجهول واحد نقوم بحلها.

الخطوة 3: نستبدل قيمة المجهول الذي وجدناه في إحدى معادلات النظام، وبالتالي نجد قيمة المجهول الآخر. نحدد حل النظام.

مثال تدريب 1: حل النظام

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 & \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 8 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} \quad +$$

$$-6x + 6x - 10y + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$3x + 5 \cdot 2 = 1$$

$$3x + 10 = 1$$

$$3x = 1 - 10$$

$$3x = -9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$$

$$x = -3 \longrightarrow (x, y) = (-3, 2)$$

Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdot 2 \\ 5x + 2y = 6 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \quad +$$

$$4x + 5x - 2y + 2y = 6 + 6$$

$$9x = 12$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$2x - y = 3$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$$

$$\frac{8}{3} - y = 3$$

$$-y = 3 - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1 \cdot y}{-1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

$$y = -\frac{1}{3} \quad x = -3 \quad (x, y) = (-3, -\frac{1}{3})$$

تمرین مثال 2: حل النظام:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdot 2 \\ 5x + 2y = 6 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \quad +$$

$$4x + 5x - 2y + 2y = 6 + 6$$

$$9x = 12$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$2x - y = 3$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$$

$$\frac{8}{3} - y = 3$$

$$-y = 3 - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1 \cdot y}{-1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

$$y = -\frac{1}{3} \quad x = -3 \quad (x, y) = (-3, -\frac{1}{3})$$

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:

$$\rightarrow \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ -7x + 8y = -3 \end{cases}$$

Πολύπλοκα συστήματα:

Αν το σύστημα είναι πολύπλοκο τότε για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών** και όλες τις απαιτούμενες **πράξεις**. Έπειτα το **τακτοποιούμε** και αποφασίζουμε ποια μέθοδος είναι κατάλληλη για την επίλυσή του.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2} + 14\frac{2y+1}{7} + 14\frac{2}{1} = 0 \\ 6\frac{x+6}{3} - 6\frac{y-6}{2} = 6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \\ 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 7x + 4y = 5 \\ -7 \cdot 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 4y = 10 \\ -14x + 21y = -126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 29y = -116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4(-4) = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

$$1. \begin{cases} \frac{x-1}{4} - y = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

تمرين-واجب: عليكم حل الأنظمة التالية باستخدام طريقة المعاملات المعارضة:

$$\rightarrow \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ -7x + 8y = -3 \end{cases}$$

أنظمة معقدة:

إذا كان النظام معقدًا، فإن لتبسيط معادلات النظام، نقوم بإلغاء المقامات وجميع العمليات المطلوبة. بعد ذلك نقوم بترتيبه ونقرر أي طريقة مناسبة لحله.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2} + 14\frac{2y+1}{7} + 14\frac{2}{1} = 0 \\ 6\frac{x+6}{3} - 6\frac{y-6}{2} = 6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \\ 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 7x + 4y = 5 \\ -7 \cdot 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 4y = 10 \\ -14x + 21y = -126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 29y = -116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4(-4) = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

تمرين-واجب: حل الأنظمة التالية

$$1. \begin{cases} \frac{x-1}{4} - y = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις σε λύση συστημάτων:

Η γραφική λύση ενός συστήματος δεν βρίσκει πάντα ακριβώς τη λύση του, αφού συχνά οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι ακριβώς, όμως λύνει το σύστημα έστω και με προσέγγιση όταν η άλγεβρα είναι αδύνατο, ή πολύ δύσκολο να το λύσει.

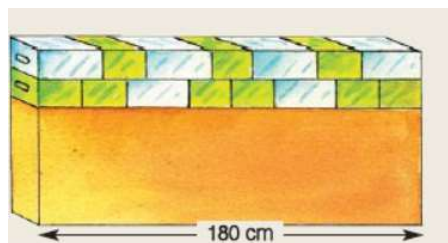
Η αλγεβρική λύση του μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.

Το αν **θα διαλέξουμε** τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών, ή αντικατάστασης είναι επιλογή μας (διαλέγουμε όποια μας «βολεύει» περισσότερο, σε κάποια συστήματα όμως εξυπηρετεί να γνωρίζουμε και τις 2.

Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι λύσης συστημάτων

Προβλήματα:

1. Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



2. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ABΓ, αν οι πλευρές έχουν εξισώσεις $AB: 2x - 3y = 1$, $ΑΓ: x + y = 3$, $ΒΓ: x - 3y = 3$

3. Σε ένα αγρόκτημα είναι κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 140 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

4. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

5. Να βρεθούν δύο συμπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της άλλης κατά 12°

Μلاحظات حول حل الأنظمة:

الحل البياني لنظام لا يجد دائمًا حله بالضبط، لأن إحداثيات نقطة التقاطع بين المستقيمين غالبًا ليست دقيقة، ومع ذلك فإنه يحل النظام حتى لو بشكل تقريبي عندما يكون الحل الجبري مستحيلًا، أو صعب جدًا.

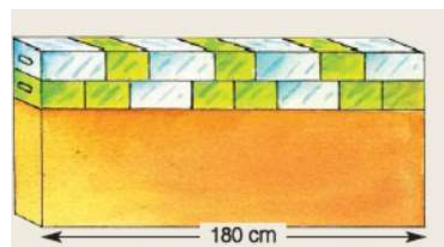
الحل الجبري يعطينا القدرة على تحديد حل النظام بدقة (إذا كان موجودًا) في أي حالة.

اختيارنا لطريقة المعاملات المعاكسة أو طريقة التعويض هو خيارنا (نختار ما يناسبنا أكثر، لكن في بعض الأنظمة من المفيد معرفة الطريقتين).

هناك أساليب أخرى لحل الأنظمة....

المشاكل:

1. في الجزء العلوي من جدار طوله 180 سم تم وضع طوب زخرفي أخضر وأزرق في صفين. احسب طول كل طوبة خضراء وزرقاء.



2. يجب حساب إحداثيات رؤوس المثلث ABC إذا كانت للأضلاع المعادلات $AB: 2x - 3y = 1$, $ΑΓ: x + y = 3$, $ΒΓ: x - 3y = 3$

3. في مزرعة هناك دجاج وأرانب. إذا كان لجميع الحيوانات 50 رأسًا و140 قدمًا، جد عدد الدجاج وعدد الأرانب.

4. مجموع أرقام عدد مكون من رقمين هو 14. إذا عكسنا الرقم نحصل على عدد أقل بمقدار 36 وحدة. جد الرقم.

5. جد زاويتين متكاملتين، إذا كانت إحدى الزاويتين أكبر من ضعف الأخرى بمقدار 12° .

Ας μελετήσουμε Γεωμετρία!

Τεύχος Γ΄

Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας



Κωσταντάκοπουλος Βασίλης-

Παπαϊωάννου Εμμανουέλα

هيا ندرس الهندسة!

العدد ٣

مدرسة أثينا الثانوية متعددة

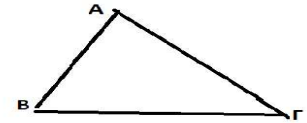
الثقافات



-Konstandakopoulos Vasilis

Papaioannou Emmanouela

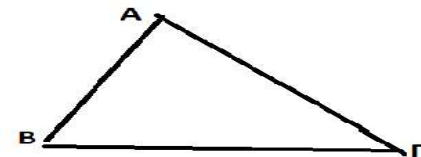
شكل:



اسم الشكل: مثلث ABΓ

أضلاع المثلث

مثال:



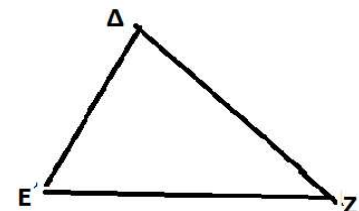
مثلث ABΓ

أضلاع المثلث : AB أو γ

AG و β

BΓ و α

مثال:



مثلث ΔEZ

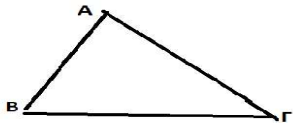
أضلاع المثلث : ΔE أو ζ

ΔZ و ε

EZ و δ

Ονομασία σχήματος : τρίγωνο ABΓ

Σχήμα:



Βασική παρατήρηση: Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις γωνίες και τρεις πλευρές.

Βασικός ορισμός: Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου αποτελούν τα κύρια στοιχεία του.

Πλευρές τριγώνου

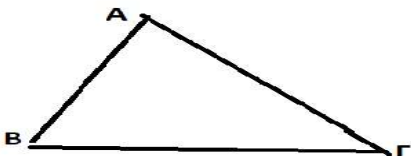
Παράδειγμα:

τρίγωνο ABΓ

πλευρές τριγώνου AB ή γ

AG ή β

BΓ ή α



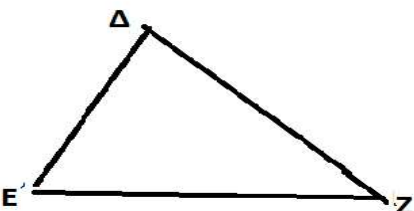
Παράδειγμα

τρίγωνο ΔEZ

πλευρές τριγώνου ΔE ή ζ

ΔZ ή ε

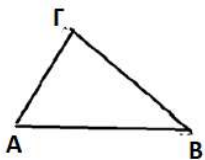
EZ ή δ



Βασικός ορισμός: Η γωνία που βρίσκεται ανάμεσα (δηλαδή περιέχεται σε δύο

πλευρές ενός τριγώνου) ονομάζεται **περιεχόμενη γωνία**.

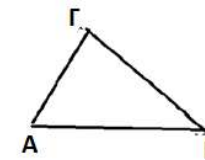
Παράδειγμα:



Πλευρές	Περιεχόμενη γωνία
AB, AΓ	$\hat{A}$
BΓ, BA	$\hat{B}$
ΓA, ΓB	$\hat{\Gamma}$

تعريف أساسي: الزاوية المحصورة بين ضلعين في مثلث تُسمى الزاوية المحصورة.

مثال:

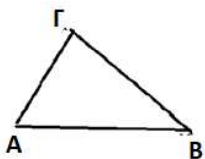


ضلع	الزاوية المضمنة
AB, AΓ	$\hat{A}$
BΓ, BA	$\hat{B}$
ΓA, ΓB	$\hat{\Gamma}$

Βασικός ορισμός: Οι γωνίες ενός τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς (δηλαδή ακουμπούν-πρόσκεινται - στην πλευρά αυτή) ονομάζονται

προσκειμένες γωνίες.

Παράδειγμα:

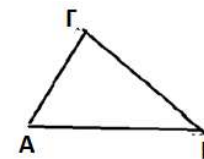


Πλευρά	προσκειμένες γωνίες
AB	$\hat{A}, \hat{B}$
BΓ	$\hat{B}, \hat{\Gamma}$
ΓA	$\hat{\Gamma}, \hat{A}$

تعريف أساسي: زوايا المثلث التي تكون رؤوسها طرفي ضلع (أي تلامس - تقترب - من ذلك الضلع) تُسمى زوايا متجاورة.

مثال:

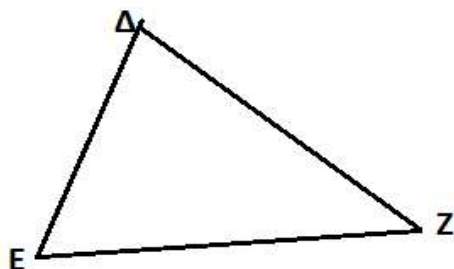
جانب	الزوايا المجاورة
AB	$\hat{A}, \hat{B}$
BΓ	$\hat{B}, \hat{\Gamma}$
ΓA	$\hat{\Gamma}, \hat{A}$



Άσκηση-Εργασία: στο τρίγωνο ΔΕΖ να βρείτε

A) την περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΔΕ, ΔΖ

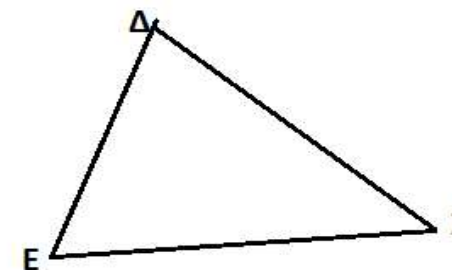
B) τις προσκειμένες γωνίες της πλευράς ΕΖ



تمرين عملي: في المثلث ΔΕΖ، أوجد

(أ) الزاوية المحصورة بين الضلعين ΔΕ وΔΖ

(ب) الزاويتين المتجاورتين للضلع ΕΖ

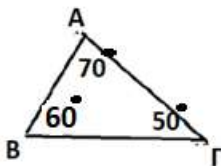


Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες:

τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους διακρίνονται σε:

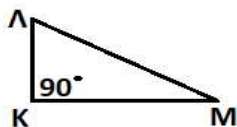
Α) Οξυγώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται οξυγώνιο όταν όλες οι γωνίες του είναι οξείες (δηλαδή λιγότερο από 90°)

Παράδειγμα:

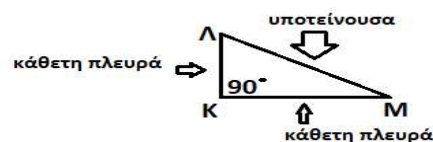


Β) Ορθογώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο τρίγωνο όταν έχει μια ορθή γωνία (δηλαδή μία γωνία ίση με 90°)

Παράδειγμα:

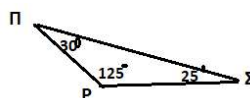


Βασική παρατήρηση (Ονομασία πλευρών): Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται υποτείνουσα ενώ η πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία ονομάζονται κάθετες πλευρές



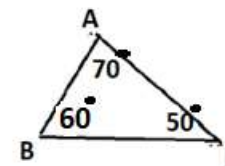
Γ) Αμβλυγώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο τρίγωνο όταν έχει μια αμβλεία γωνία (δηλαδή μία γωνία μεγαλύτερη από 90°)

Παράδειγμα:



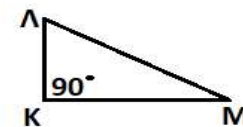
Α) مثلث حاد: يُسمى المثلث حادًا عندما تكون جميع زواياه حادة (أي أقل من 90°).

مثال:

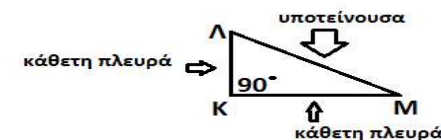


Β) مثلث قائم الزاوية: يُسمى المثلث قائم الزاوية عندما تكون زاويته قائمة (أي زاوية تساوي 90°).

مثال:

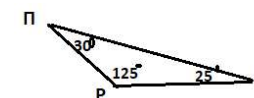


ملاحظة أساسية (أسماء الأضلاع): يُسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة وترًا، بينما تُسمى الأضلاع التي تُشكل الزاوية القائمة ضلعين متعامدين.



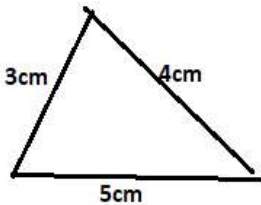
Γ) مثلث منفرج الزاوية: يُسمى المثلث منفرج الزاوية عندما تكون زاويته منفرجة (أي زاوية أكبر من 90°).

مثال:

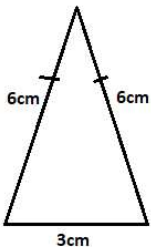


Είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές:
Τα τρίγωνα διακρίνονται στις επόμενες κατηγορίες ως προς τις πλευρές

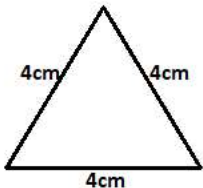
7. **Σκαληνό**
Ένα τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό όταν όλες οι πλευρές του είναι άνισες μεταξύ τους.
Παράδειγμα



8. **Ισοσκελές**
Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισοσκελές όταν οι δύο πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
Παράδειγμα

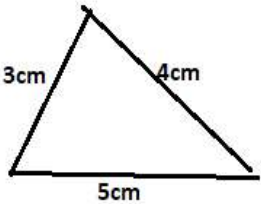


9. **Ισόπλευρο**
Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισόπλευρο όταν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.
Παράδειγμα



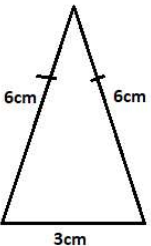
Ανواع المثلثات حسب أضلاعها:
تُقسّم المثلثات إلى الفئات التالية حسب أضلاعها:

1. **مثلث مختلف الأضلاع**
يُسمّى المثلث مختلف الأضلاع عندما تكون جميع أضلاعه غير متساوية.
مثال:

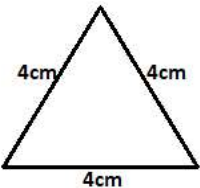


متساوي الساقين عندما يكون

2. **متساوي الساقين**
يُسمى المثلث
ضلعاه متساويين.
مثال



3. **متساوي الأضلاع**
يُسمى المثلث متساوي الأضلاع عندما تكون أضلاعه الثلاثة متساوية.
مثال

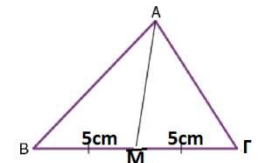


العناصر الثانوية للمثلث

متوسط المثلث

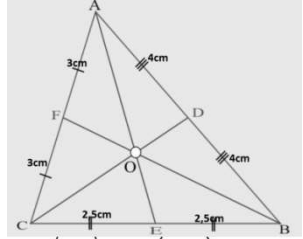
يُسمى متوسط المثلث القطعة المستقيمة التي تبدأ من رأس المثلث وتنتهي بمنتصف الضلع المقابل (ملاحظة: تُسمى نقطة منتصف القطعة المستقيمة النقطة التي تقسمها إلى قطعتين مستقيمتين متساويتين).

مثال



تمرين:

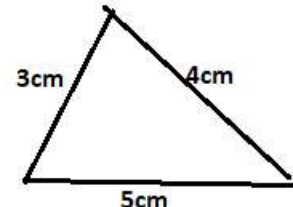
رسم متوسطات المثلث



ملاحظة أساسية: تمر المتوسطات بنفس النقطة.

مهمة تدريبية:

ارسموا المتوسطات للمثلث:

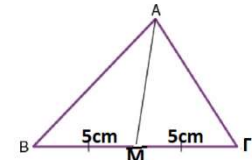


Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος τριγώνου

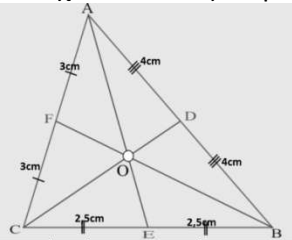
Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κορυφή του τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς (υπενθύμιση: μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα)

Παράδειγμα



Παράδειγμα-άσκηση:

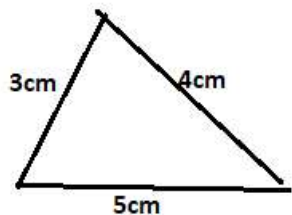
Να σχεδιάσετε τις διαμέσους του τριγώνου



Βασική παρατήρηση: Οι διάμεσοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

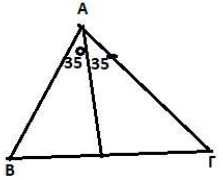
Άσκηση-εργασία:

Να σχεδιάσετε τις διαμέσους του τριγώνου:



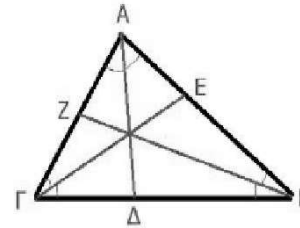
منصف المثلث

منصف المثلث هو قطعة مستقيمة تصل رأس زاوية المثلث بالضلع المقابل لها، وتقسم هذه الزاوية إلى جزأين متساويين.
مثال



تمرين:

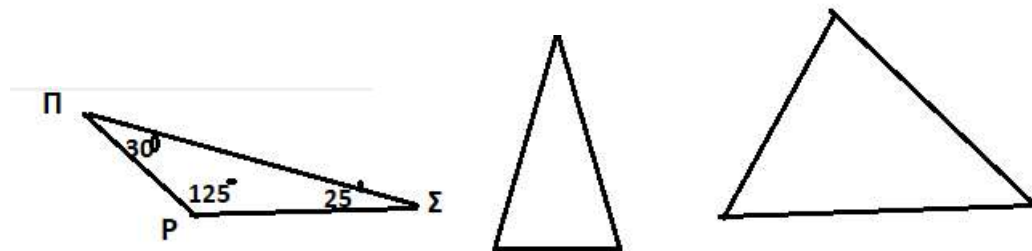
لرسم منصفات المثلث:



ملاحظة أساسية: تمر المنصفات بنفس النقطة.

مهمة تدريبية:

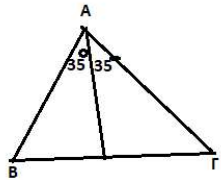
لرسم منصفات المثلث:



Διχοτόμος τριγώνου

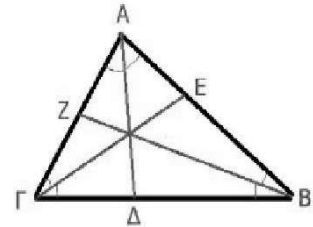
Διχοτόμος τριγώνου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και χωρίζει τη γωνία αυτή σε δύο ίσα μέρη.

Παράδειγμα



Παράδειγμα-άσκηση:

Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους του τριγώνου:



Βασική παρατήρηση: Οι διχοτόμοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση-εργασία:

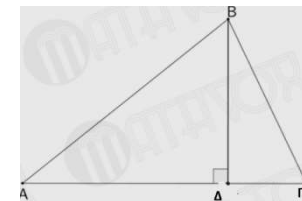
Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους των τριγώνων:



ارتفاع المثلث

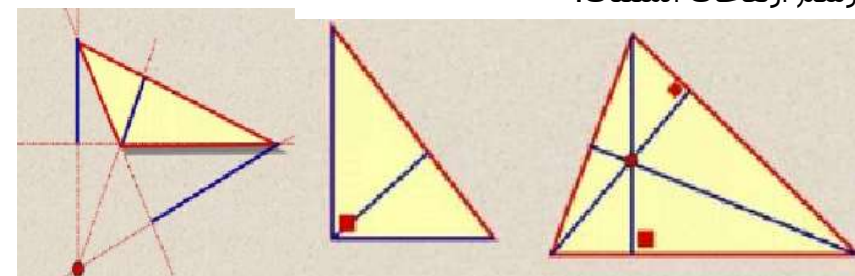
ارتفاع المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية الممتدة من رأس المثلث إلى الضلع المقابل (أو امتداده).

مثال



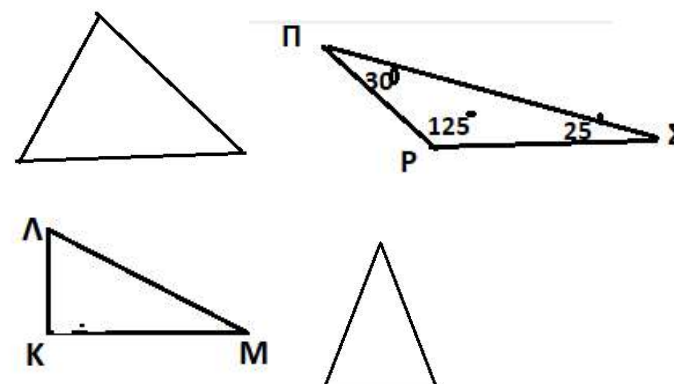
تمرين:

لرسم ارتفاعات المثلثات:



مهمة تدريبية:

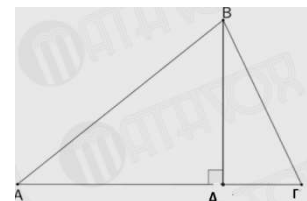
لرسم ارتفاعات المثلثات:



Ύψος ενός τριγώνου

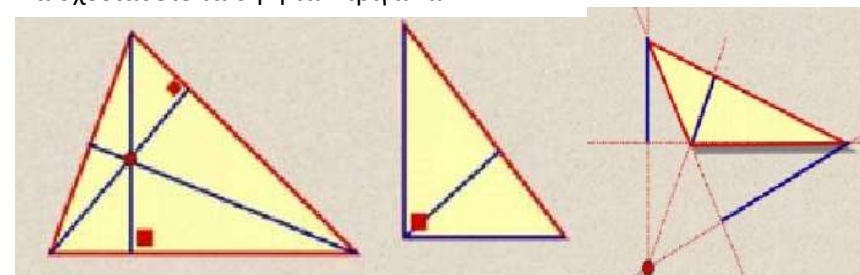
Ύψος ενός τριγώνου είναι το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή προς την απέναντι πλευρά (ή την προέκτασή της).

Παράδειγμα



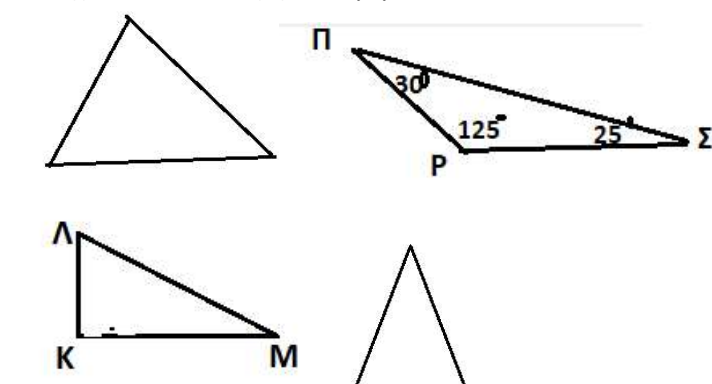
Παράδειγμα-άσκηση:

Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:



Άσκηση-εργασία:

Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:

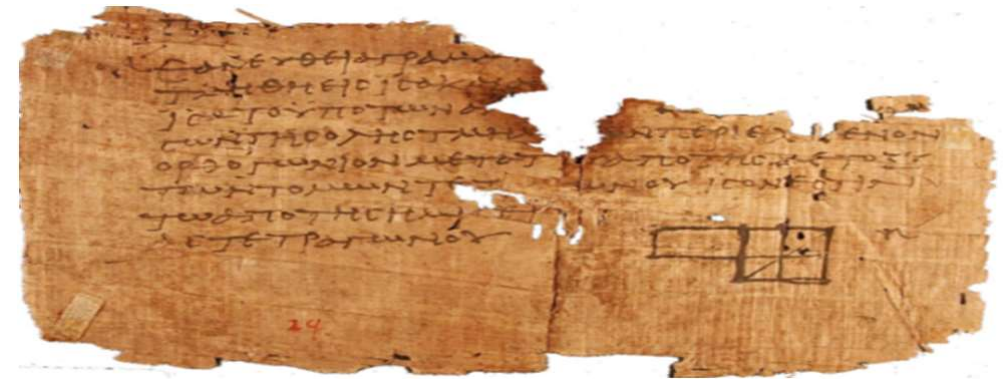


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΡΟΣ 2

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

الهندسة الجزء 2

المثلثات المتساوية



ستكون طريقة البرهان مفيدة لنا في

• هندسة الصف الثالث الإعدادي

• حل المسائل المعقدة في رياضيات السنوات التالية

• الرياضيات الجامعية

• التطبيق في علوم مثل الفيزياء، الكيمياء، الاقتصاد

وأخيراً

• في الحياة اليومية حيث نتجنب قبول المعلومات بدون برهان !!

تاريخياً، البرهان...

□ بدأ مع طاليس (639-548 قبل الميلاد)

□ تطور بواسطة فيثاغورس والفيثاغوريين

□ تم تنظيمه بواسطة أفلاطون وأرسطو

□ تم إتقانه بواسطة إقليدس (330-270 قبل الميلاد)

كيف يُبرهن الاقتراح الهندسي؟

□ يبدأ البرهان الإقليدي بالبيانات (الفرضية) وما نريد إثباته (المطلوب -

الاستنتاج). لكي يكون كل ما نكتبه في البرهان صحيحاً، يجب أن يكون قابلاً

للتبرير بالبيانات، البديهيات، الاقتراحات المثبتة سابقاً.

□ يعتمد على قواعد المنطق

□ أثناء استخلاص الاستنتاجات، يلعب الحدس والملاحظة دوراً مهماً

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΑ ΜΑΣ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΓΙΑ

10. ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

11. ΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ

ΕΠΟΜΕΝΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

12. ΤΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

13. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΟΠΩΣ ΦΥΣΙΚΗ , ΧΗΜΕΙΑ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΚΑΙ ΤΕΛΟΣ

14. ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΑ ΟΠΟΥ ΑΠΟΦΕΥΓΟΥΜΕ ΝΑ ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ!!

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ...

- ✓ ξεκίνησε από τον Θαλή (639-548 π.Χ.)
- ✓ αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους.
- ✓ συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη.
- ✓ Τελειοποιήθηκε από τον Ευκλείδη (330-270 π.Χ.)

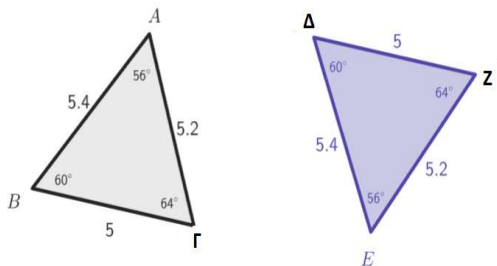
Πώς αποδεικνύεται μια γεωμετρική πρόταση;

- ✓ Η Ευκλείδεια απόδειξη ξεκινά με τα **δεδομένα(υπόθεση)** και **τι ζητάμε να αποδειχθεί(ζητούμενα-συμπέρασμα)**. Για να είναι σωστό ό,τι γράφουμε σε μια απόδειξη πρέπει να μπορεί να δικαιολογηθεί από δεδομένα, αξιώματα, προηγούμενες αποδεδειγμένες προτάσεις .
- ✓ στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.
- ✓ καθώς βγάζουμε συμπεράσματα σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εμποτσία.

Ίσα τρίγωνα

Βασική πρόταση 1: Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Παράδειγμα: Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ παρατηρούμε ότι

$$AB = \Delta E \qquad \hat{A} = \hat{\Delta}$$

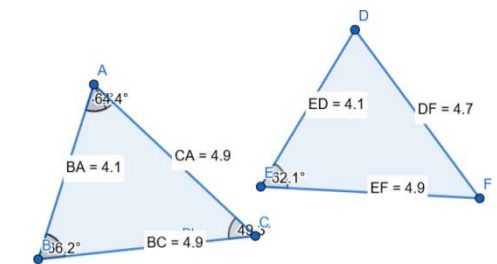
$$A\Gamma = \Delta Z \quad \text{και} \quad \hat{B} = \hat{E}$$

$$B\Gamma = EZ \qquad \hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

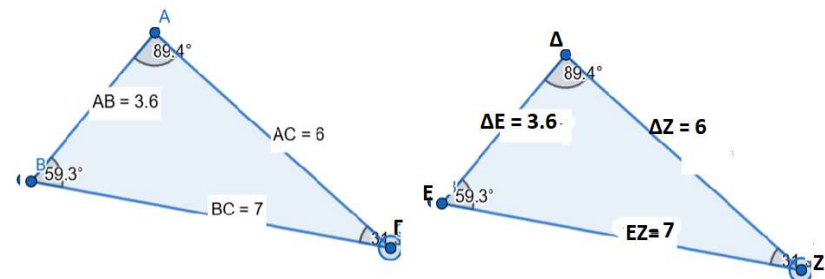
Συμβολίζουμε: $AB\Gamma = \Delta EZ$.

Ερώτηση κρίσεως: Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ABC και DEF είναι ίσα.



Στα τρίγωνα ABC και DEF παρατηρούμε ότι οι γωνίες B και E δεν είναι ίσες, επίσης οι πλευρές AC και DE δεν είναι ίσες, επομένως τα τρίγωνα ABC και DEF δεν είναι ίσα.

Άσκηση εργασία: Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

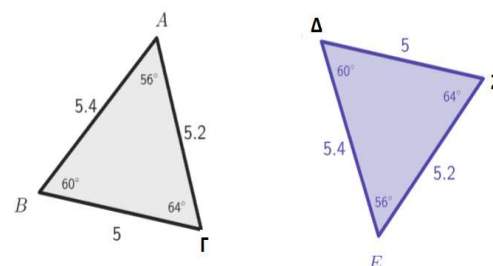


المثلثات المتطابقة

القاعدة الأساسية 1: إذا كان لمثلثين أضلاعهما متساوية واحدًا لواحد وزواياهما المقابلة متساوية، فإنهما متطابقان.

مثال: افحص ما إذا كانت المثلثات ABG و DEZ متطابقة.

في المثلثات ABΓ و DEZ نلاحظ ما يلي:


$$AB = \Delta E \text{ و زاوية } A = \text{زاوية } \Delta$$
$$E \text{ زاوية } = B \text{ زاوية و } A\Gamma = \Delta Z$$

$B\Gamma = EZ$ و زاویه $\Gamma C =$ زاوی Z

لذلك فإن المثلثات ΔEZ $AB\Gamma$ متطابقة

لأنها لها أضلاع م

مقابلة متساوية.

نرمز لها: $\Delta EZ = AB\Gamma$.

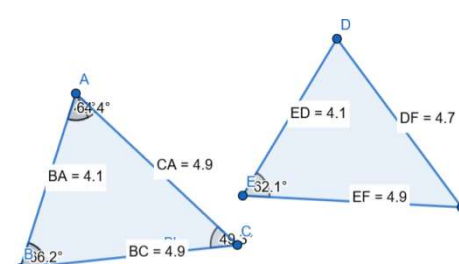
سؤال تقيمي: افحص ما إذا كانت المثلثات ABC و DEF متطابقة.

في المثلثات ABC و DEF نلاحظ أن الزاويتين B و E

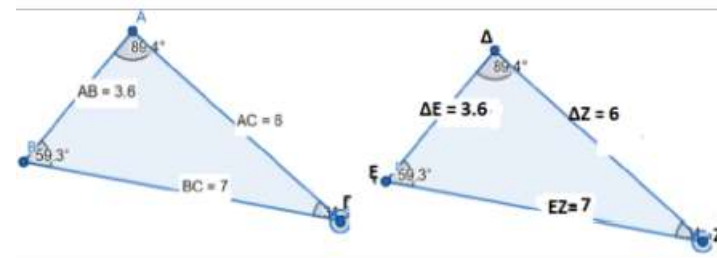
غير متساويتين، كما أن الضلعين AC و DE غير

متساويين، لذلك فإن المثلثات ABC و DEF غير

متطابقة



تمرين عملي: افحص ما إذا كانت المثلثات $AB\Gamma$, ΔEZ متطابقة.



معايير تساوي المثلثات

المعيار الأول لتساوي المثلثات

إذا كان لمثلثين ضلعان متساويان على التوالي وزاويتهم المحصورة متساوية، فإنهما متساويان

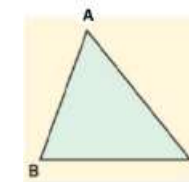
Π-Γ-Π

ملاحظات أساسية:

عبارة "على التوالي" تعني الأضلاع المقابلة

عبارة "زاوية محصورة" تعني الزاوية الموجودة بين الأضلاع المتساوية

مثال للملاحظة 2:

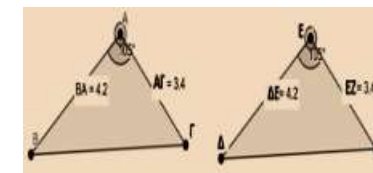


الزاوية المحصورة بين الضلعين أ ب و أ ج هي الزاوية أ



الزاوية المحصورة بين الضلعين ل ك و ل م هي الزاوية ل

ملاحظة أساسية: عندما يكون مثلثان متساويان، فإن باقي عناصرهما أيضًا متساوية (زوايا وأضلاع)



تمرين مثال: فحص ما إذا كانت المثلثات أ ب ج و د ه ز متساوية.

مقارنة المثلثين أ ب ج و د ه

ز، وهذه لها:

أ ب = د ه = 5,5 سم (ض)

أ = د = 60° (ز)

أ ج = د ز = 5,8 سم (ض)

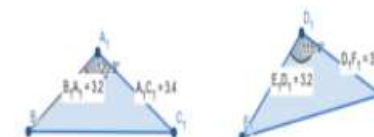
لذلك، وفقًا للمعيار الأول لتساوي المثلثات (ض-ز-ض) فإن المثلثين متساويان. وبالتالي ب ج = ه ز، ب = ه، ج = ز.

تمرين عمل:

فحص ما إذا كانت المثلثات أ ب 1 ج 1 و

د 1 ه 1 و ف 1 الموجودة في

الأشكال التالية متساوية



Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1° κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση τότε είναι ίσα (Π-Γ-Π)

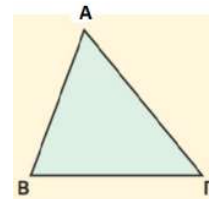
Βασικές επισημάνσεις:

15. η έκφραση ή σε μία προς μία σημαίνει αντίστοιχες πλευρές

16. η έκφραση **περιεχόμενη γωνία** σημαίνει γωνία που περιέχεται ανάμεσα στις ίσες πλευρές

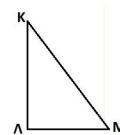
παράδειγμα για επισημάνση 2:

περιεχόμενη γωνία στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι η γωνία Α



Η περιεχόμενη γωνία στις πλευρές ΑΚ και ΑΜ είναι η γωνία Α

. Α



ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όταν δυο τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα (γωνίες και πλευρές)

Άσκηση παράδειγμα: να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, αυτά έχουν:

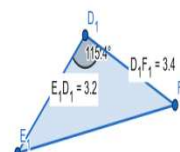
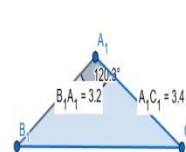
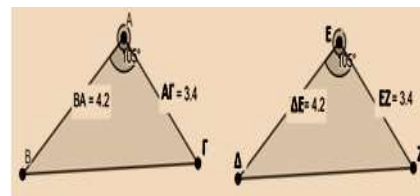
ΑΒ = ΔΕ = 5,5cm (Π)

Α = Δ = 60° (Γ)

ΑΓ = ΔΖ = 5,8cm (Π)

Επομένως από πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Άρα ΒΓ = ΕΖ, Β = Ε, Γ = Ζ.



Άσκηση εργασία: Να εξετάσετε αν τα

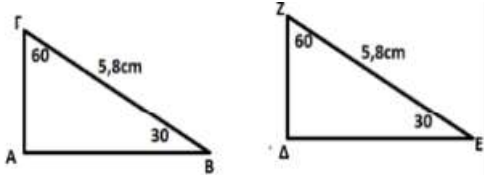
τρίγωνα Α₁Β₁С₁ και D₁E₁F₁ που φαίνονται

στα παρακάτω σχήματα είναι ίσα.

إذا كان لمثلثين ضلع متساوي والزوايا المجاورة لهذا الضلع متساوية بالترتيب، فإنهما متساويان. (Γ-Π-Γ)

مثال تمرين:

تحقق مما إذا كانت المثلثات أ ب ج و د ه ز متساوية.



نقارن المثلثات أ ب ج و د ه ز، وهي تمتلك: $\hat{B} = \hat{E} = 30^\circ$ (زا) $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ (ض) $BG = EZ = 5.8$ سم (ض)

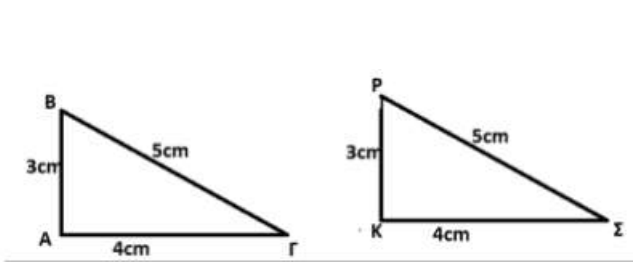
لذلك، وفقاً للمعيار الثاني لمساواة المثلثات (زا-ض-زا) المثلثان متساويان. إذن $\hat{A} = \hat{D}$ ، $\hat{B} = \hat{E}$ ، $AB = DE$ ، $AG = DZ$

إذا كان لمثلثين جميع الأضلاع متساوية بالترتيب الواحد تلو الآخر، فإنهما متساويان. (ض-ض-ض)

مثال تمرين:

تحقق مما إذا كانت المثلثات أ ب ج و ك ر س متساوية.

نقارن المثلثات أ ب ج و ك ر س، وهي تمتلك:



$AB = KP = 3$ سم (ض) $BG = PS = 5$ سم (ض) $AG = KS = 4$ سم (ض)

لذلك، وفقاً للمعيار الثالث لمساواة المثلثات (ض-ض-ض) المثلثان متساويان.

إذن $\hat{A} = \hat{K}$ ، $\hat{B} = \hat{P}$ ، $\hat{G} = \hat{S}$ ، $AB = KP$ ، $AG = KS$ ، $BG = PS$.

تمارين - من الكتاب المدرسي

2° كرتيرون ايسوتيتاس تريغونون

ان ديو تريغونا اأكون ميا پلورا ايسا كاي تيس پروسكيمينيس سثن پلورا اوتى ايسيس ميا پروس ميا، توتة ايناي ايسا. (Γ-Π-Γ)

أسكسثا پاراأايناما:

نا اأاأاأاأا ان تا تريغونا ABΓ كاي ΔEZ ايناي ايسا.

سأكرينوما تا تريغونا ABΓ كاي ΔEZ، اأا اأكون:

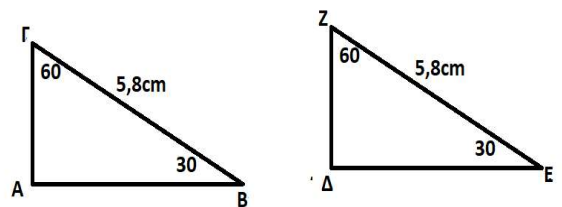
$\hat{B} = \hat{E} = 30^\circ$ (Γ)

$BΓ = EZ = 5,8\text{cm}$ (Π)

$\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 60^\circ$ (Γ)

اأومناس اأا 2° كرتيرون ايسوتيتاس

تريغونون (Γ-Π-Γ) تا ديو تريغونا ايناي ايسا. أرا $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ، $AB = \Delta E$ ، $A\Gamma = \Delta Z$



3° كرتيرون ايسوتيتاس تريغونون

ان ديو تريغونا اأكون تيس پلورا ايسا ميا پروس ميا، توتة ايناي ايسا. (Π-Π-Π)

أسكسثا پاراأايناما:

نا اأاأاأاأا ان تا تريغونا ABΓ كاي KΠΣ ايناي ايسا.

سأكرينوما تا تريغونا ABΓ كاي KΠΣ، اأا اأكون:

$AB = KP = 3\text{cm}$ (Π)

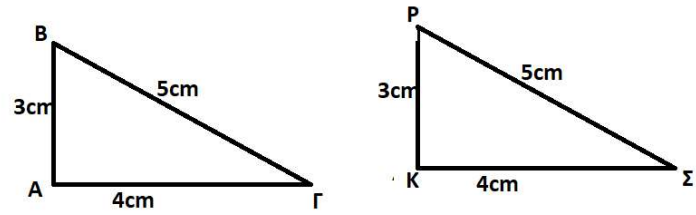
$BΓ = P\Sigma = 5\text{cm}$ (Π)

$A\Gamma = K\Sigma = 4\text{cm}$ (Π)

اأومناس اأا 3° كرتيرون ايسوتيتاس تريغونون (Π-Π-Π) تا ديو تريغونا ايناي ايسا.

أرا $\hat{A} = \hat{K}$ ، $\hat{B} = \hat{P}$ ، $\hat{\Gamma} = \hat{\Sigma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

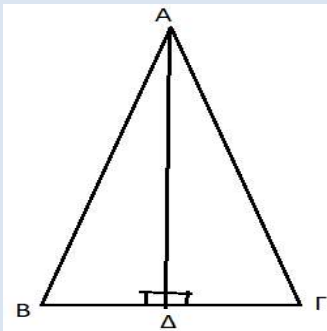


Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων:

17. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Π-Π)

Παράδειγμα:

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρνουμε το ύψος ΑΔ προς τη βάση. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι ίσα.

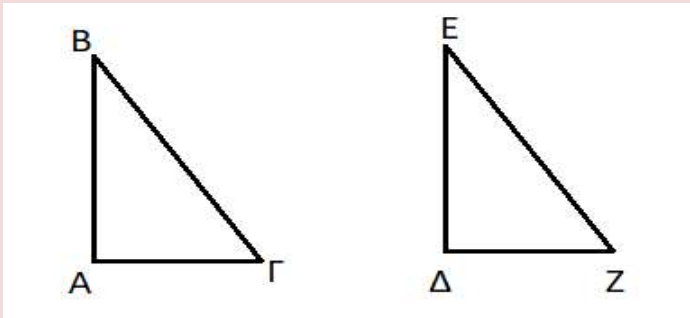


Λύση:
✓ $\widehat{ADB} = \widehat{AD\Gamma} = 90^\circ$ (γιατί το ΑΔ είναι ύψος)
✓ ΑΒ = ΑΓ (ως πλευρές του ισοσκελούς) (Π)
✓ ΑΔ = ΑΔ (κοινή- ίδια κάθετη πλευρά). (Π)
Συμπέρασμα: Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες

18. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες μία προς μία είναι ίσα. (Π-Γ)

Παράδειγμα:

Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και ΔΕΖ ($\widehat{D} = 90^\circ$). Αν ΒΓ = 10cm, ΕΖ = 10cm και $\widehat{B} = 30^\circ, \widehat{E} = 30^\circ$



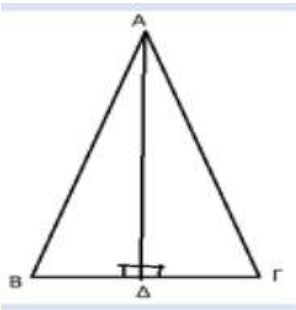
να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση:
✓ Ορθές γωνίες: $\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{D} = 90^\circ$ (από τα δεδομένα)
✓ Υποτείνουσες: ΒΓ = ΕΖ = 10cm (από τα δεδομένα)
✓ Οξείες γωνίες: $\widehat{B} = 30^\circ, \widehat{E} = 30^\circ$ (από τα δεδομένα)

Συμπέρασμα: Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες

Μεταίρι τσαιυι μθλθλθ ταιάμθ الزاوية:

μθλθλθ ταιάμθ λθμθ ζλγλθ μθτθβλθλθ μθτθσαιυιθ μθζμθτ θκωνθλθ μθτθσαιυιθ. (Π-Π)



μθλθ:

في مثلث متساوي الساقين
ABΓ (AB = AC)
نرسم الارتفاع
AD إلى القاعدة. أثبت أن
المثلثين ABΔ و AΓΔ متساويين.

الحل:

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (لأن AD هو ارتفاع)

AB = AC (كأضلاع المثلث المتساوي الساقين) (ض)

AD = AD (جانب مشترك-عمودي نفسه). (ض)
الاستنتاج: المثلثان القائمان متساويان لأن لهما
ضلعان متقابلان متساويان.

μθλθλθ ταιάμθ λθμθ ζλγλθ μθτθβλθλθ μθτθσαιυιθ μθζμθτ θκωνθλθ

μθτθσαιυιθ. (Π-Γ)

μθλθ:

يُعطى مثلثان قائمان
ABC ($\angle A = 90^\circ$) و
DEF ($\angle D = 90^\circ$). إذا
كان BC = 10 سم و
EF = 10 سم و $\angle B = 30^\circ$ و $\angle E = 30^\circ$, أثبت
أن المثلثين متساويين.

الحل:

- الزوايا القائمة: $90^\circ = 90^\circ$ (من المعطيات)
- الوتر: BC = EF = 10 سم (من المعطيات)
- الزوايا الحادة: $30^\circ = 30^\circ$ (من المعطيات)

الاستنتاج: المثلثات متساوية لأن لديها ضلعًا مطابقًا وزاوية حادة مطابقة

Ισοσκελές τρίγωνο

Βασικός ορισμός: Ισοσκελές τρίγωνο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει δύο ίσες πλευρές.

Βασικές παρατηρήσεις-ιδιότητες ισοσκελών τριγώνων:

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος από την κορυφή προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν (δηλαδή ταυτίζονται- είναι ίδιες)

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

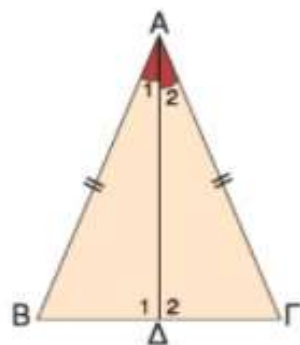
A. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) η διχοτόμος AD προς τη βάση $B\Gamma$ είναι ταυτόχρονα διάμεσος και ύψος, επομένως διχοτόμος, ύψος και διάμεσος συμπίπτουν.

B. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ γιατί AD διχοτόμος,

$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$ γιατί AD ύψος και

$BD = D\Gamma$ γιατί AD διάμεσος



Αυτό θα το αποδείξουμε συγκρίνοντας τα τρίγωνα $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ που έχουν:

19. $AD = AD$, (κοινή πλευρά)

20. $AB = A\Gamma$ (από την υπόθεση, αφού το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές)

21. $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ γιατί AD διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση ($\Pi-\Gamma-\Pi$).

Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, $BD = D\Gamma$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$,

οπότε η διχοτόμος AD είναι και ύψος. Η διχοτόμος AD είναι και διάμεσος, αφού $BD = D\Gamma$.

επίσης

Γ. Αν το AM είναι ύψος τότε θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος συμπεράσμα

Δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο αν AM είναι διάμεσος ή ύψος ή διχοτόμος τότε θα είναι και τα

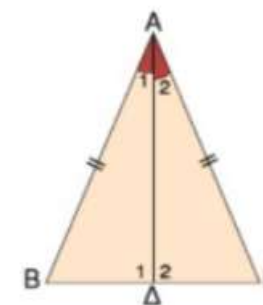
άλλα δύο σε κάθε περίπτωση.

Μثلث متساوي الساقين

التعريف الأساسي: يُسمى المثلث متساوي الساقين المثلث الذي له ضلعان متساويان.

الملاحظات الأساسية وخصائص مثلثات متساوية الساقين:

1. في كل مثلث متساوي الساقين، الزوايا المقابلة لقاعدته متساوية.
2. الشطر، الارتفاع، والوسط من القمة إلى قاعدة المثلث متساوي الساقين تتطابق (أي متساوية)



في الشكل المجاور والرموز، الأمور المذكورة أعلاه كما يلي:

أ. في المثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)، الشطر AD من القاعدة $B\Gamma$ هو في نفس الوقت المتوسط والارتفاع، وبالتالي الشطر، الارتفاع، والمتوسط تتطابق.

ب. تنطبق الاستنتاجات التالية:

لماذا فإن AD منسّط الزاوية، 90° لأن AD ارتفاع و لماذا AD منصف.

سوف نثبت ذلك بمقارنة المثلثات $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ التي لها:

• $AD = AD$ (الجانب المشترك)

• $AB = A\Gamma$ (من الفرضية، لأن المثلث $AB\Gamma$ متساوي الساقين)

• لأن AD منصف الزاوية.

إذاً المثلثات متساوية، لأنها لها ضلعان متساويان بنسبة واحد إلى واحد والزاوية المحصورة متساوية (ض-ز-ض).

لأن المثلثات $AB\Delta$ و $A\Delta\Gamma$ متساوية، سيكون لديها جميع العناصر المقابلة متساوية، إذن، $BD = D\Gamma$ وبما أنها 180° ، سيكون 90° ، إذن منصف الزاوية AD هو أيضاً ارتفاع. منصف الزاوية AD هو أيضاً متوسط، لأن $BD = D\Gamma$.

أيضاً

ج. إذا كان AM هو ارتفاع، فسيكون أيضاً متوسط ومنصف الزاوية - استنتاج.

د. في المثلث المتساوي الساقين، إذا كان AM هو متوسط أو ارتفاع أو منصف الزاوية، فسيكون الاثنان الآخران في كل حالة.

خاصية أساسية للمنصف العمودي لقطعة مستقيمة

تذكير: المنصف العمودي لقطعة مستقيمة هو مستقيم عمودي على قطعة المستقيمة ويمر من منتصف قطعة المستقيمة.

خاصية أساسية للمنصف العمودي: النقاط الموجودة على المنصف العمودي لقطعة مستقيمة تكون متساوية البعد عن طرفي قطعة المستقيمة

في الشكل المجاور وبشكل رمزي يكون ما سبق كما يلي:

المنصف العمودي ϵ لقطعة المستقيمة AB يقطعها عند النقطة M . إذا كانت S نقطة عشوائية

على المنصف العمودي، فإن $SA = SB$.

يمكننا إثبات ذلك بمقارنة المثلثات القائمة $AM\epsilon$ و $BM\epsilon$ التي لها:

• $SM = SM$ (جانب مشترك)

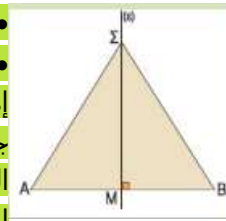
• $AM = MB$ ، لأن M منتصف AB .

إذاً هذه المثلثات القائمة متساوية لأنها لها

جانبان متطابقان على التوالي. وبما أن

المثلثات متساوية، فإن باقي العناصر المقابلة

لها ستكون متساوية أيضاً، لذا $SA = SB$.



الخاصية الأساسية لمنصف الزاوية:

النقاط على منصف زاوية تبعد بمسافات متساوية عن جانبي الزاوية.

في الشكل المجاور وبطريقة الرموز يكون ما سبق كما يلي:

نرسم منصف الزاوية Oz للزاوية xOy وعلى هذا المنصف نأخذ نقطة عشوائية A . إذا كانت AB

و AC هي المسافات من النقطة A إلى جانبي الزاوية، فإن $AB = AC$.

يمكننا إثبات ذلك بمقارنة المثلثين القائمين AOB و $AO\Gamma$ اللذين لهما:

• $OA = OA$ كجانب مشترك و

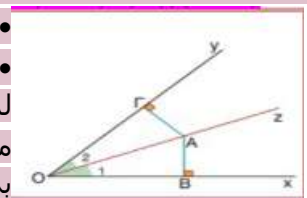
• $\hat{O}1 = \hat{O}2$ ، لأن Oz هو منصف زاوية xOy .

لذلك المثلثان القائمان متساويان، لأن لهما جانبا وزاوية حادة

متساوية.

بما أن المثلثين متساويين، فستكون بقية العناصر المقابلة لهما

متساوية أيضاً، وبالتالي $AB = A\Gamma$.



Βασική ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

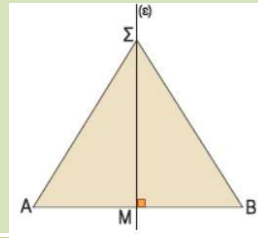
Υπενθύμιση: Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μία ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα για διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.

Βασική ιδιότητα μεσοκαθέτου: τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου

τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Η μεσοκάθετος ϵ του ευθύγραμμου τμήματος AB το στο σημείο M . Αν S είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα ισχύει ότι $SA = SB$.



τέμνει

BM\epsilon

Αυτό μπορούμε να το **αποδείξουμε συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα $AM\epsilon$, $BM\epsilon$** που έχουν:

22. $SM = SM$, (κοινή πλευρά)

23. $AM = MB$, αφού το M είναι μέσον του AB .

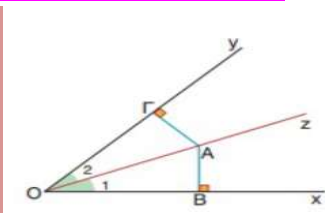
Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $SA = SB$.

Βασική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας:

Τα σημεία της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχουν τις πλευρές της γωνίας.

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Φέρνουμε τη διχοτόμο Oz της γωνίας xOy και αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A . Αν AB , $A\Gamma$ αποστάσεις του σημείου A από τις πλευρές της ισχύει ότι $AB = A\Gamma$.



πάνω σ' είναι οι γωνίας,

Αυτό μπορούμε να το **αποδείξουμε συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα AOB , $AO\Gamma$** που έχουν:

✓ $OA = OA$ κοινή πλευρά και

✓ $\hat{O}1 = \hat{O}2$, αφού η Oz είναι διχοτόμος της γωνίας xOy .

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $AB = A\Gamma$.

Μεταξύ των τριγώνων, οι γωνίες είναι μεταξύ τους ίσες. Τα παραπάνω μας καθιστούν ικανούς να συγκρίνουμε και εμείς τρίγωνα με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ισότητας ορθογωνίων τριγώνων όπως βλέπουμε στις προηγούμενες σελίδες.

نظرًا لأنه من الصعب وضعها في «قالب» مثل الجبر، نقدم بعض الملاحظات التي قد تساعد في حل التمارين:

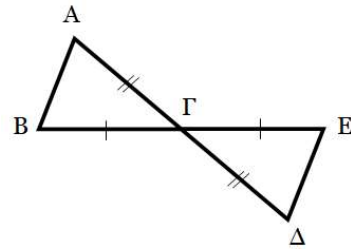
1. دائمًا نرسم شكلاً جيداً يساعد في حل التمرين.
2. نكتب بيانات التمرين التي تُكتب قبل كلمات "لإثبات".
3. نفحص إذا ما كانت المثلثات تشترك في ضلع.
4. لا نقارن المثلثات غير المتساوية، أي المثلثات التي يبدو من الشكل أنها ليست متساوية.
5. في الدائرة، جميع الشعاعات دائماً متساوية.
6. نتجنب مقارنة المثلثات إذا لم يعطِ التمرين "اسم" لها.
7. كل مثلث متساوي الأضلاع له جميع الأضلاع متساوية وكل زاوية فيه 60° .
8. إذا لم توجد مثلثات متساوية في الشكل، نرسم خطوط مساعدة.
9. قد يكون مثلث واحد داخل الآخر.
10. إذا كان التمرين يحتوي على سؤالين أو أكثر، أي مثلثات نثبت في السؤال الأول أنها متساوية، تُعتبر مفروغاً منها أنها متساوية وسيكون لها أيضاً بقية العناصر متساوية للسؤال التالي.
11. إذا كان لدينا مثلثات قائمة الزاوية، تسري عليها معايير أو-و و أو-ز.
12. نرسم الشكل خطوة بخطوة (باستخدام أدوات هندسية) ولا نقرأ التمرين كله معاً. يمكن القيام بذلك بالتعاون مع زميل لنا الذي سيقراً لنا قليلاً ونحن سنقوم برسم الخطوط واحدة واحدة.

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων μας βοηθούν να αποδείξουμε ότι κάποια ευθύγραμμα τμήματα οι γωνίες είναι μεταξύ τους ίσα. Τα παραπάνω μας καθιστούν ικανούς να συγκρίνουμε και εμείς τρίγωνα με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ισότητας ορθογωνίων τριγώνων όπως βλέπουμε στις προηγούμενες σελίδες.

Επειδή είναι δύσκολο να το βάλουμε σε «καλούπια» όπως την άλγεβρα, δίνουμε κάποιες παρατηρήσεις που ίσως βοηθήσουν στην επίλυση των ασκήσεων

1. Κάνουμε πάντα ένα **καλό σχήμα** που βοηθάει στην επίλυση της άσκησης.
2. Γράφουμε τα **δεδομένα της άσκησης** που γράφονται πριν τις λέξεις να αποδείξουμε.
3. Ελέγχουμε μήπως τα τρίγωνα έχουν **κοινή πλευρά**.
4. Δεν συγκρίνουμε άνισα τρίγωνα δηλαδή τρίγωνα που φαίνονται από τα σχήμα ότι δεν είναι ίσα.
5. Σε **κύκλο** όλες οι **ακτίνες** είναι πάντα **ίσες**.
6. Αποφεύγουμε να συγκρίνουμε τρίγωνα αν η άσκηση δεν τους έχει δώσει «όνομα»
7. Κάθε **ισόπλευρο** τρίγωνο έχει ίσες όλες τις πλευρές και η κάθε γωνία του είναι **60°**
8. Αν **δεν υπάρχουν ίσα τρίγωνα στο σχήμα**, φέρνουμε **βοηθητικές ευθείες**
9. Το **ένα τρίγωνο μπορεί να είναι μέσα στο άλλο**
10. Αν η **άσκηση έχει δύο ή παραπάνω ερωτήματα** όποια τρίγωνα αποδείξουμε στο πρώτο ερώτημα ότι είναι ίσα θεωρείτε δεδομένο ότι είναι ίσα και **θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα για το επόμενο ερώτημα**
11. Αν έχουμε **ορθογώνια τρίγωνα** ισχύουν κριτήρια Π-Π και Π-Γ
12. **Φτιάχνουμε το σχήμα βήμα βήμα** (με χρήση γεωμετρικών οργάνων) και δεν διαβάζουμε όλη την άσκηση μαζί. Αυτό μπορεί να γίνει σε συνεργασία με συμμαθητή μας ο οποίος θα μας διαβάξει λίγο και εμείς θα κάνουμε μία μία τις γραμμές.

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα:



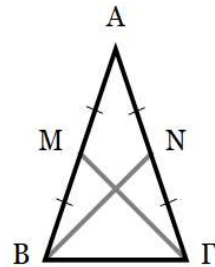
2. Στο διπλανό σχήμα, έχουμε

ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Φέρνουμε τις διαμέσους BN και ΓM .

Να αποδείξετε ότι

$BN = \Gamma M$.



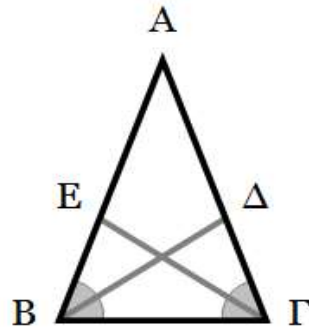
3. Δίνεται

ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$).

Σχεδιάζουμε

τις διχοτόμους $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι

$B\Delta = \Gamma E$.

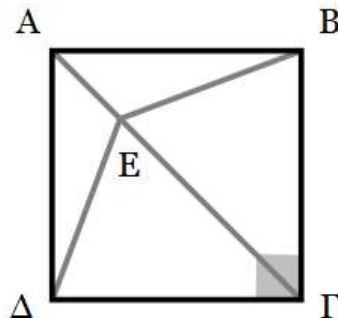


4. Δίνεται

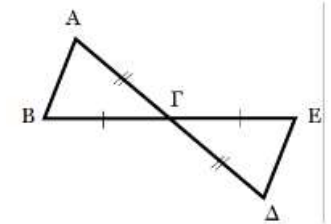
τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $A\Gamma$.

Αν E τυχαίο σημείο της $A\Gamma$, να δείξετε ότι

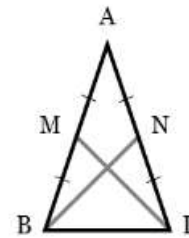
$BE = \Delta E$.



أن المثلثين أ ب ج و ج د ه متساويان:



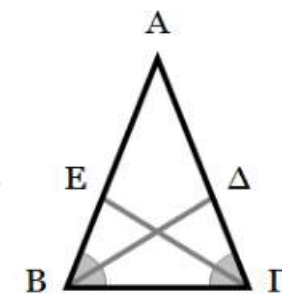
2. في الشكل المجاور، لدينا مثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). نرسم المتوسطين BN و ΓM . أثبت أن $BN = \Gamma M$.



3. يُعطى مثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$

($AB = A\Gamma$). نرسم منصف الزاويتين $B\Delta$ و ΓE .

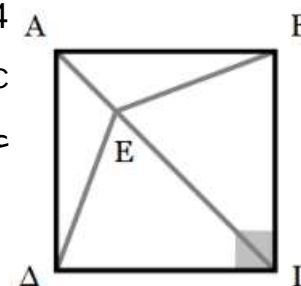
أثبت أن $B\Delta = \Gamma E$.



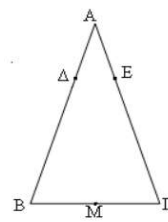
4. يُعطى مربع $ABCD$ وقطره

AC . إذا كان E نقطة عشوائية

على $A\Gamma$ ، بين أن $BE = \Delta E$.

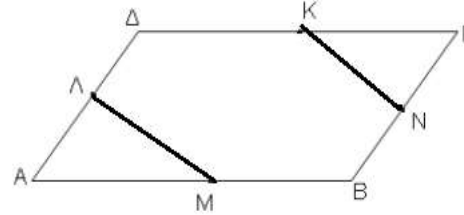


7. Στις πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ ($AB=AG$) παίρνουμε $AD=AE$. Αν M το μέσο του $B\Gamma$, να συγκριθούν τα ΔM και EM .



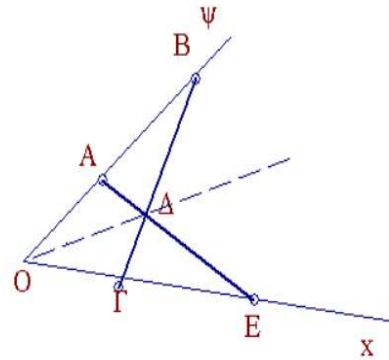
7. على جانبي المثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$ ($AB=AG$) نأخذ $AD=AE$. إذا كان M منتصف $B\Gamma$ ، قارنوا DM و EM .

8. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα K, N των πλευρών $\Delta\Gamma$ και ΓB είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα Λ, M των $A\Delta$ και AB .



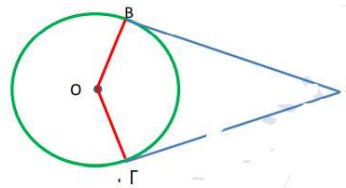
8. في متوازي أضلاع $AB\Gamma\Delta$ ، أظهروا أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي K, N للجانبين $\Delta\Gamma$ و $B\Gamma$ تساوي القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي Λ, M للأضلاع $A\Delta$ و AB .

9. Στις πλευρές της γωνίας $\widehat{xOy}$ παίρνουμε τα σημεία A, B, Γ , και E έτσι ώστε $OA=O\Gamma$, $OB=OE$
 α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα OAE και $O\Gamma B$
 β) Αν τα AE και ΓB τέμνονται στο Δ να αποδείξετε ότι $A\Delta=\Gamma\Delta$.
 γ) Να αποδείξετε ότι η OD είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{xOy}$



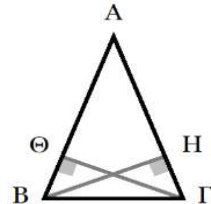
9. على جانبي الزاوية ($س و ص$) نأخذ النقاط A, B, Γ ، و E, B بحيث $OA=O\Gamma$ و $OB=OE$ و
 (أ) قارنوا المثلثات OAE و $O\Gamma B$
 (ب) إذا تقطعت AE و ΓB في Δ أظهروا أن $A\Delta=\Gamma\Delta$
 (ج) أظهروا أن OD منصف زاوية ($س و ص$)

8. Δίνεται ο κύκλος (O, ρ) και ένα σημείο A εξωτερικό του κύκλου. Αν AB και $A\Gamma$ είναι εφαπτόμενα του κύκλου τμήματα από το σημείο A δείξτε ότι αυτά είναι ίσα (δηλαδή δείξτε ότι $AB=A\Gamma$)



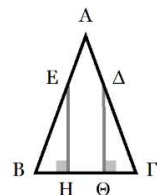
10. معطى دائرة ($و, ر$) ونقطة A خارج الدائرة. إذا كانت AB و $A\Gamma$ مماسات للدائرة من النقطة A ، برهنوا أنها متساوية (أي برهنوا أن $AB=A\Gamma$)

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρνουμε τα ύψη BH και $\Gamma\Theta$. Να αποδείξετε ότι $BH = \Gamma\Theta$.



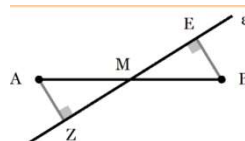
9. يُعطى مثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). نرسم الارتفاعين $BH, \Gamma\Theta$. أظهِر أن $BH = \Gamma\Theta$.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και E, Δ σημεία στις πλευρές του, έτσι ώστε $BE = \Delta\Theta$. Να δείξετε ότι τα σημεία E και Δ ισαπέχουν από τη βάση B .



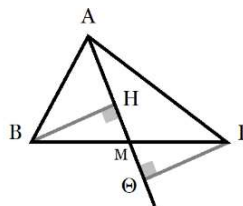
10. يُعطى مثلث متساوي الساقين $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) ونقطتين E, Δ على ضلعيه بحيث $BE = \Delta\Theta$. أظهِر أن النقطتين E و Δ متساويتان البعد عن القاعدة $B\Gamma$.

11. Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB , το μέσον του M και (ε) μια τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το M . Να αποδείξετε ότι τα άκρα A και B ισαπέχουν από την ευθεία (ε) .



11. لنعتبر قطعة مستقيمة AB , و M منتصفها، و (ε) مستقيم عشوائي يمر عبر M . أظهِر أن النهايتين A و B متساويتان البعد عن المستقيم (ε) .

12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσός του AM , την οποία και προεκτείνουμε πέραν του σημείου M . Να δείξετε ότι οι κορυφές B και Γ του τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο AM .



12. يُعطى مثلث $AB\Gamma$ ووسيطه AM ، والذي نمتدّه بعد النقطة M . أظهِر أن رؤوس B و Γ للمثلث متساويتان البعد عن الوسيط AM .

13. Έστω δυο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, για τα οποία ισχύει $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ και $\upsilon\alpha = \upsilon\alpha'$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

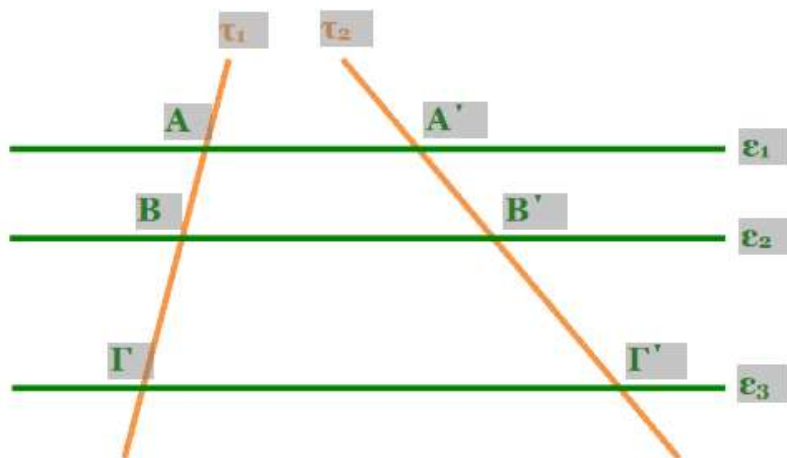
13. لنعتبر مثلثين $AB\Gamma$ و $A'B'\Gamma'$ حيث $\alpha = \alpha'$ ، $\beta = \beta'$ و $\upsilon\alpha = \upsilon\alpha'$. أظهِر أن المثلثين متساويان.

14. Έστω δυο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, για τα οποία ισχύει $\alpha = \alpha'$, $\mu\alpha = \mu\alpha'$ και $\upsilon\alpha = \upsilon\alpha'$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

14. لنعتبر مثلثين $AB\Gamma$ و $A'B'\Gamma'$ حيث $\alpha = \alpha'$ ، $\mu\alpha = \mu\alpha'$ و $\upsilon\alpha = \upsilon\alpha'$. أظهِر أن المثلثين متساويان.

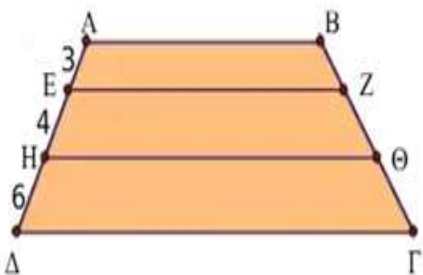
ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:



$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

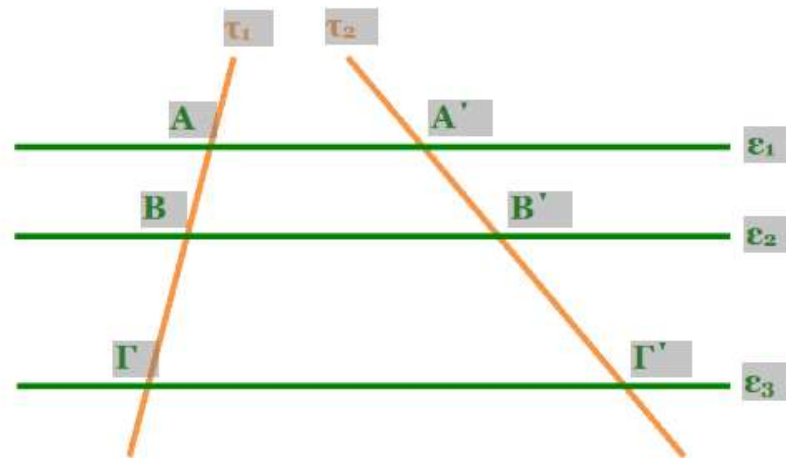
Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα, βρείτε τα κλάσματα:



$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \beta) \quad & \frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ \gamma) \quad & \frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13} \end{aligned}$$

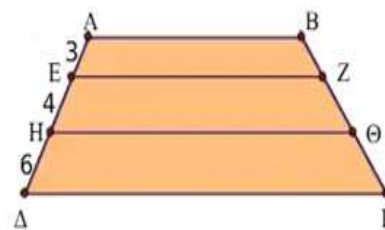
نظرية طاليس

إذا قامت ثلاثة خطوط مستقيمة أو أكثر متوازية بقطع خطين مستقيمين آخرين، فإن المقاطع المحددة على أحدهما تتناسب مع المقاطع المقابلة المحددة على الآخر. أي:



$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3 \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

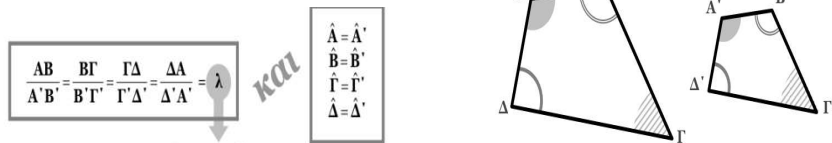
مثال: في الشكل أدناه، جد الكسور:



$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \beta) \quad & \frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \\ \gamma) \quad & \frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13} \end{aligned}$$

ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

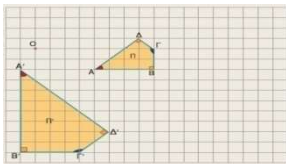
Βασικός ορισμός: Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.



Παρατηρήσεις:

- Με απλά λόγια, τα όμοια σχήματα έχουν την ίδια μορφή, αλλά διαφορετικό μέγεθος! Είναι, δηλαδή, το ένα σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου. Ο λόγος ομοιότητας είναι, σα να λέμε, κάτι σαν την κλίμακα ενός χάρτη.
- Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.
- Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 3.000.000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι $\lambda = 1:3.000.000$ οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 30 km στην πραγματικότητα.
- Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.
- **Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.**
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

παράδειγμα



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \text{ και } \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

τα πολύγωνα(τετράπλευρα)ABΓΔ, ABΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2.

أشكال متشابهة متحدة الاتجاه

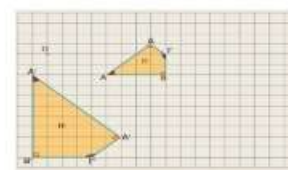
التعريف الأساسي: إذا كان لمضلعين جوانب متناسبة وزواياه المقابلة متساوية، فإنهما متشابهان.



ملاحظات:

- بكلمات بسيطة، الأشكال المتشابهة لها نفس الشكل، لكن بحجم مختلف! بمعنى آخر، أحدهما تصغير أو تكبير للآخر. نسبة التشابه هي، كما نقول، شيء مثل مقياس الخريطة.
- المقياس هو نسبة المسافة على الخريطة إلى المسافة الفعلية المقابلة، أي أنه نسبة تشابه الشكلين.
- على سبيل المثال، المقياس 1 : 3.000.000 يعني أن نسبة تشابه الشكل على الخريطة إلى الواقع هي $\lambda = 1:3.000.000$ ، وبالتالي 1 سم على الخريطة يساوي 30 كم في الواقع.
- أي جانبيين متناظرين لأي مضلعين متشابهين لهما نفس النسبة، ولهذا يُسميان متناظرين وتُسمى نسبتهم نسبة التشابه.
- إذا كان مضلعان متشابهان، فإنهما لهما أضلاع متناظرة متناسبة وزواياهما المتناظرة متساوية.
- نسبة محيطين شكلين هندسيين متشابهين تساوي نسبة تشابههما.

مثال



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \text{ και } \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

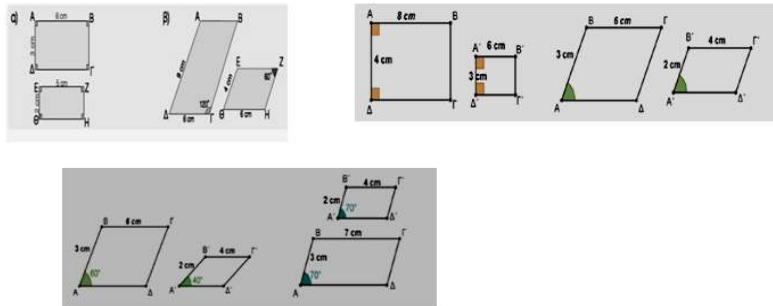
المضلعات (أربعة الأضلاع) ABΓΔ, ABΓΔ متشابهة بنسبة تشابه 2.

Ασκήσεις:

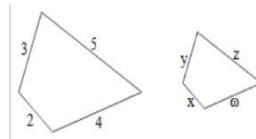
1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια
- β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια
- γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια
- δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια
- ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια
- στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια

2. ποια από τα παρακάτω ζευγάρια είναι όμοια;

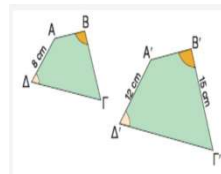


3. Τα τετράπλευρα στο διπλανό σχήμα είναι όμοια. Η περίμετρος του "μικρού" είναι $\Pi=7$, να βρείτε τα x, y, z, ω .



4. Στο διπλανό σχήμα

- α) Ο λόγος ομοιότητας του $AB\Gamma\Delta$ προς το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι
- β) Ο λόγος ομοιότητας του $A'B'\Gamma'\Delta'$ προς το $AB\Gamma\Delta$ είναι
- γ) Αν η γωνία B είναι 110 μοίρες, τότε και η γωνία είναι 110° .
- δ) Ο λόγος των περιμέτρων του $AB\Gamma\Delta$ ως προς το $A'B'\Gamma'\Delta'$ είναι ίσος με.....
- ε) Η πλευρά $B\Gamma$ είναι ίση με

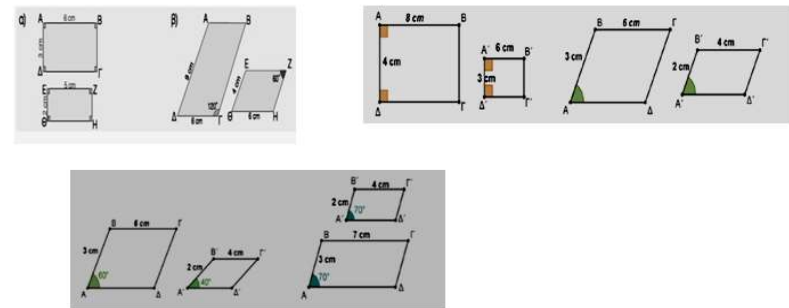


تمارين:

1. صُنف الجمل التالية بوضع (ص) إذا كانت صحيحة و(خ) إذا كانت خاطئة:

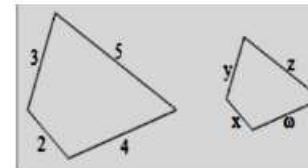
- أ) مربعان متشابهان دائماً
- ب) مستطيلان متشابهان
- ج) إذا كان لدى مضلعين أضلاع متناسبة فهم متشابهان
- د) معينان أشكالهما متشابهة
- هـ) إذا كان مضلعان متساويان فإنهما متشابهان
- و) مضلعات منتظمة متشابهة

2. أي من الأزواج التالية متشابهة؟



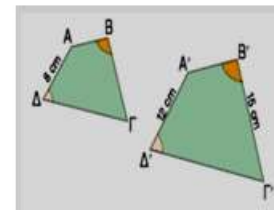
3. المربعات في الشكل المجاور متشابهة.

محيط الـ "صغير" هو $\Pi=7$ ، جد قيم x و y و z و ω .



4. في الشكل المجاور:

- أ) نسبة التشابه بين $AB\Gamma\Delta$ و $A'B'\Gamma'D$ هي
- ب) نسبة التشابه بين $AB\Gamma\Delta$ و $A'B'\Gamma'D$ هي
- ج) إذا كانت الزاوية B تساوي 110 درجات، فإن الزاوية هي أيضاً 110° .
- د) نسبة محيطات $AB\Gamma\Delta$ إلى $A'B'\Gamma'D$ تساوي
- هـ) طول الضلع $B\Gamma$ يساوي



ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Κριτήριο για όμοια τρίγωνα: Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε θα είναι όμοια, και θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Παρατηρήσεις:

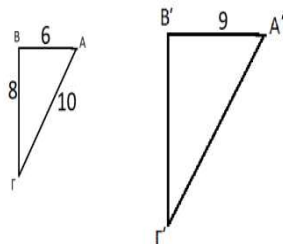
- Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν μία οξεία γωνία ίση.
- Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους!
- Πάντα σημειώνουμε ποιες γωνίες είναι ίσες για να βρούμε τις σωστές "απέναντι" πλευρές στην αναλογία.
- Ο **λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων(και πολυγώνων)** ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας (λ^2).

Παράδειγμα-Άσκηση 1:

Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$.
Αν $AB = 6$, $B\Gamma = 8$ και $A\Gamma = 10$,
και $A'B' = 9$,
να βρείτε τις υπόλοιπες πλευρές του $A'B'\Gamma'$.

Λύση:

Εφόσον τα τρίγωνα είναι όμοια οι πλευρές τους είναι ανάλογες:



Βρίσκουμε τον λόγο ομοιότητας λ :

$$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\text{ή } \frac{9}{6} = \frac{3}{2})$$

Υπολογίζουμε την $B'\Gamma'$:

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{B'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot B'\Gamma' = 8 \cdot 9 \rightarrow 6B'\Gamma' = 72 \rightarrow B'\Gamma' = 72:6 \rightarrow B'\Gamma' = 12$$

Υπολογίζουμε την $A'\Gamma'$:

$$\frac{6}{9} = \frac{10}{A'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot A'\Gamma' = 10 \cdot 9 \rightarrow 6A'\Gamma' = 90 \rightarrow A'\Gamma' = 90:6 \rightarrow A'\Gamma' = 15$$

المثلثات المتشابهة

معايير المثلثات المتشابهة: إذا كان لمثلثين زاويتان متساويتان، واحدة لواحدة، فإنهما يكونان متشابهان، وستكون أضلاعهما متناسبة.

ملاحظات:

- مثلثان قائمان الزاوية متشابهان إذا كان لهما زاوية حادة متساوية.
- جميع المثلثات المتساوية الأضلاع متشابهة فيما بينها!
- نحدد دائماً أي الزوايا متساوية لإيجاد الأضلاع "المقابلة" الصحيحة في النسبة.
- نسبة مساحتي مثلثين متشابهين (وأشكال متعددة الأضلاع) تساوي مربع نسبة التشابه (λ^2).

مثال-تمرين 1

معطى مثلثان متشابهان $AB\Gamma$ و $A'B'\Gamma'$.
إذا كان $AB = 6$, $B\Gamma = 8$ و $A\Gamma = 10$,
و $A'B' = 9$,
أوجد بقية أضلاع $A'B'\Gamma'$.

الحل:

بما أن المثلثين متشابهان فإن أضلاعهما تتناسب:

نحسب نسبة التشابه λ :

$$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\text{ή } \frac{9}{6} = \frac{3}{2})$$

نحسب $B'\Gamma'$:

$$B'\Gamma' = 8 \cdot 9 \rightarrow 6B'\Gamma' = 72 \rightarrow B'\Gamma' = 72:6 \rightarrow B'\Gamma' = 12$$

نحسب $A'\Gamma'$:

$$A'\Gamma' = 10 \cdot 9 \rightarrow 6A'\Gamma' = 90 \rightarrow A'\Gamma' = 90:6 \rightarrow A'\Gamma' = 15$$

Παράδειγμα-Άσκηση 2:

Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, παίρνουμε ένα σημείο Δ στην πλευρά AB και ένα σημείο E στην πλευρά AG , ώστε $DE \parallel B\Gamma$. Αν $AD = 4$, $\Delta B = 2$ και $B\Gamma = 9$, να βρείτε το μήκος του τμήματος DE .

Λύση:

Επειδή $DE \parallel B\Gamma$, τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια (έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και τις γωνίες $\hat{\Delta}$, $\hat{B}$ ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά).

Υπολογίζουμε την πλευρά AB :

$$AB = AD + \Delta B = 4 + 2 = 6.$$

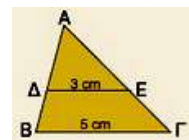
Γράφουμε την αναλογία:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{B\Gamma}$$

Αντικαθιστούμε και λύνουμε:

$$\frac{4}{6} = \frac{DE}{9} \rightarrow 6 \cdot DE = 36 \rightarrow DE = 6$$

Παράδειγμα-Άσκηση 3:



Στο διπλανό σχήμα είναι $DE \parallel B\Gamma$. Αν το τρίγωνο $A\Delta E$ έχει εμβαδόν 18 cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Λύση:

Επειδή $DE \parallel B\Gamma$, τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια (έχουν τη γωνία $\hat{A}$ κοινή και τις γωνίες $\hat{\Delta}$, $\hat{B}$ ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά

Γράφουμε την αναλογία:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{B\Gamma} = \frac{3}{5} = \lambda$$

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων (και πολυγώνων) ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας (λ^2), άρα:

$$\frac{\text{Εμβαδόν } A\Delta E}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{18}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \frac{9}{25} \rightarrow$$

$$9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 18 \cdot 25 \rightarrow 9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 450 \rightarrow \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 50.$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίζουμε τις επιφάνειες σπιτιών, οικοπέδων κλπ όταν είναι σχεδιασμένα σε κλίμακα.

Μثال-تمرین 2:

في مثلث $AB\Gamma$,

نأخذ نقطة Δ على الجانب AB ونقطة E على الجانب

AG ,

بحيث $DE \parallel B\Gamma$. إذا كانت $AD = 4$, $\Delta B = 2$ و $B\Gamma = 9$, أوجد طول الجزء DE .

الحل:

لأن $DE \parallel B\Gamma$, مثلثات $A\Delta E$ و $AB\Gamma$ متشابهة (لديها الزاوية المشتركة والزاويا متساوية كزاويا داخلية وخارجية).

نحسب الجانب AB :

$$AB = AD + \Delta B = 4 + 2 = 6.$$

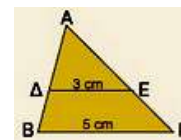
نكتب النسبة:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{B\Gamma}$$

نستبدل ونحل:

$$\Delta E = 36 \rightarrow \Delta E = 6 \cdot 6 \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{DE}{9}$$

Μثال-تمرین 3:



في الشكل المجاور، $DE \parallel B\Gamma$. إذا كان مساحة المثلث $A\Delta E$ تساوي 18 سم^2 ، فاحسب مساحة المثلث $AB\Gamma$

الحل:

نظرًا لأن $DE \parallel B\Gamma$ ، فإن المثلثين $A\Delta E$ و $AB\Gamma$ متشابهان (لهم زاوية مشتركة والزاويا متساوية لأنهم داخليون وخارج بعضهم بعضًا ويتقابلون عند القمة) نكتب النسبة:

$$\lambda = \frac{3}{5} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{B\Gamma}$$

نسبة مساحتي مثلثين متشابهين (وأي مضلعات) تساوي مربع نسبة التشابه (λ^2)، إذن:

$$\frac{\text{Εμβαδόν } A\Delta E}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{18}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \frac{9}{25} \rightarrow 9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 18 \cdot 25 \rightarrow 9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 450 \rightarrow \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 50.$$

هكذا يمكننا حساب مساحات المنازل، الأراضي، وما إلى ذلك عندما يتم تصميمها على مقياس.

Άσκηση 1: Ορθογώνια Τρίγωνα & Ύψος

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\hat{A} = 90^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$ είναι όμοια.
- Αν $B\Delta = 4\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = 9\text{cm}$, να βρείτε το μήκος του ύψους $A\Delta$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις συμπληρωματικές οξείες γωνίες (που έχουν άθροισμα 90°).

Άσκηση 2:

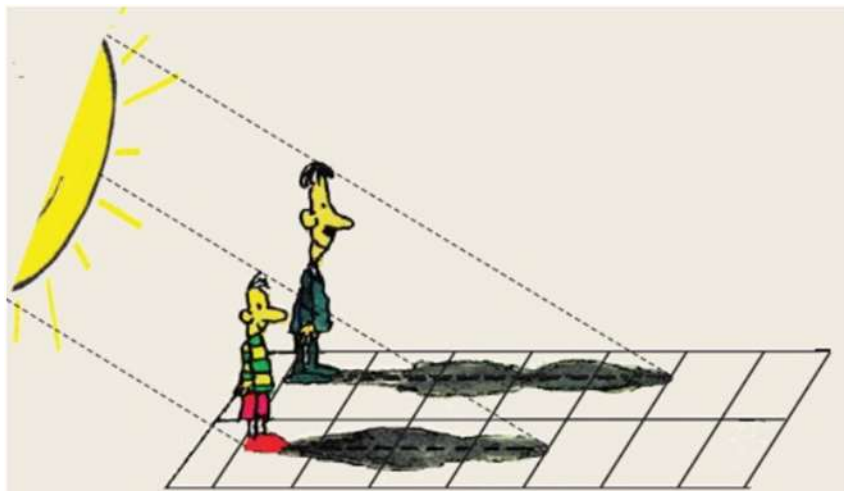
Σε ένα τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, οι διαγώνιοί του $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο σημείο O .

Αν οι βάσεις είναι $AB = 6\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 10\text{cm}$, και το τμήμα $OA = 3\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος OG .

Υπόδειξη: Υπάρχουν εντός εναλλάξ γωνίες λόγω των παράλληλων βάσεων.

Άσκηση 3: Η Σκιά

Ο γιος έχει ύψος 1.36m . Ποιο είναι το ύψος του πατέρα;



التمرين 1: المثلثات القائمة & الارتفاع

لنفترض مثلثًا قائم الزاوية $AB\Gamma$ حيث $\hat{A} = 90^\circ$ درجة و $A\Delta$ هو الارتفاع المقابل للوتر.

أثبت أن المثلثين $AB\Delta$ و $A\Delta\Gamma$ متشابهان.

إذا كان $B\Delta = 4$ سم و $\Delta\Gamma = 9$ سم، احسب طول الارتفاع $A\Delta$.

تلميح: استخدم الزوايا الحادة المكملية (التي يكون مجموعها 90° درجة).

التمرين 2:

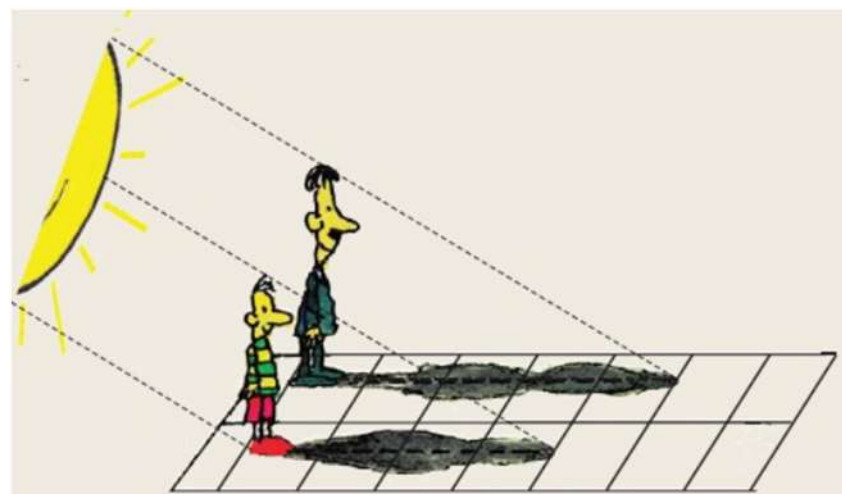
في شبه المنحرف $AB\Gamma\Delta$ مع القاعدتين AB و $\Gamma\Delta$ ، تتقاطع قطراه $A\Gamma$ و $B\Delta$ عند النقطة O .

إذا كانت القاعدتان $AB = 6$ سم و $\Gamma\Delta = 10$ سم، والجزء $OA = 3$ سم، احسب طول الجزء OG .

تلميح: هناك زوايا متبادلة داخلية بسبب القواعد المتوازية.

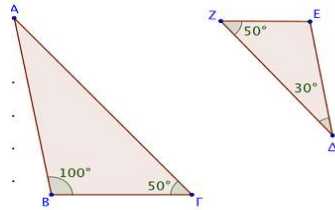
التمرين 3: الظل

طول الابن 1.36 متر. ما هو طول الأب؟



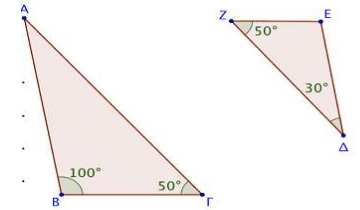
Άσκηση 4:

Να αποδείξετε ότι
τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι
όμοια
και να γράψετε τους ίσους λόγους



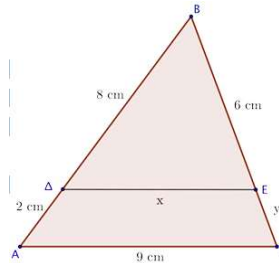
تمرين 4:

أثبتوا أن المثلثات $AB\Gamma$ و $E\Delta Z$ متشابهة واكتبوا النسب المتساوية



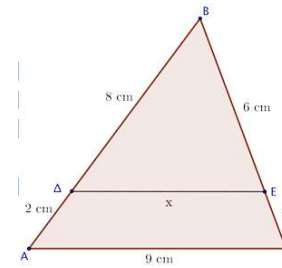
Άσκηση 5:

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel A\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι
τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $B\Delta E$ είναι όμοια,



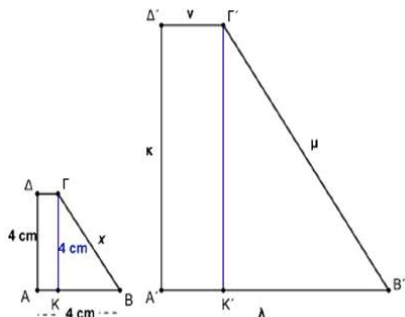
تمرين 5:

في الشكل المجاور $E \parallel A\Gamma$.
أثبتوا أن المثلثات $AB\Gamma$ و $B\Delta E$ متشابهة



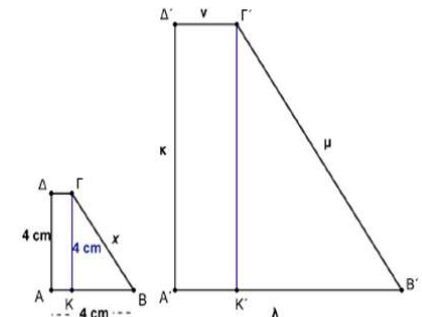
Άσκηση 6:

Τα τραπέζια του σχήματος
είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.
Να υπολογίσετε τα x , κ , λ , μ , ν .



تمرين 6:

المستطيلات في الشكل متشابهة بنسبة تشابه.
احسبوا القيم x و κ و λ و μ و ν .



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα	Ενότητα
4-10	Αριθμοί - πράξεις μεταξύ τους
11-17	Δυνάμεις - ιδιότητες δυνάμεων
18-20	Τετραγωνικές ρίζες και ιδιότητές τους
21-25	Μονώνυμα, ορισμοί και πράξεις
26-30	πολύνυμα, ορισμοί και πράξεις
30-33	Αξιοσημείωτες ταυτότητες
34-37	Παραγοντοποίηση
38	Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο- Μέγιστος κοινός διαιρέτης αλγεβρικών παραστάσεων
39-45	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις και πράξεις αυτών
46-47	Εξισώσεις α' βαθμού
48-53	Εξισώσεις β' βαθμού
55-62	Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων
63-72	Συστήματα (γραμμικά) δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους
74-82	Επανάληψη σε βασικές έννοιες γεωμετρίας
84-94	Ίσα τρίγωνα και εφαρμογές αυτών
95-101	Θεώρημα Θαλή και όμοια σχήματα

المحتويات

صفحة	القسم
4-10	بينها العمليات - الأعداد
11-17	القوى خصائص - القوى
18-20	وخصائصها التربيعية الجذور
21-25	والعمليات التعاريف ، الفردية الحدود
26-30	والعمليات التعاريف ، الحدود متعددة
30-33	بالملاحظة الجذيرة الهويات
34-37	عوامل إلى التحليل
38	مشترك قاسم أكبر - مشترك مضاعف أقل الجبرية للتعبيرات
39-45	وعملياتها الكسرية الجبرية التعبيرات
46-47	الأولى الدرجة من المعادلات
48-53	الثانية الدرجة من لمعادلات
55-62	للدوال البيانية التمثيلات
63-72	بمجهولين معادلتين (خطية) أنظمة
74-82	الهندسة في الأساسية للمفاهيم مراجعة
84-94	بها المتعلقة والتطبيقات المتساوية المثلثات
95-101	المتشابهة والأشكال طاليس نظرية