

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ

ΜΗΔΕΙΣ

ΕΙΣΙΤΩ



ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΑΘΗΝΑΣ

Intercultural

High School of Athens



Ας μελετήσουμε Μαθηματικά!

Τεύχος Γ'



Let's study Maths!

Issue C



Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας

Intercultural High School of Athens



**ΣΥΓΓΡΑΦΗ:**

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ**

**ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΚΕΙΜΕΝΩΝ:**

**ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ**



**ΤΕΤΡΑΔΙΟ:**

**ΝΤΙΜΟ ΑΡΤΕΜΙΣ**

**ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗΣ -ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ:**

**ΣΟΝΙΑ ΖΟΥΚΑ**

**ΜΑΧΑΒΟΥΖΑ ΡΑΧΜΑΝ ΣΕΦΑ**

**ΕΝΤΑ ΝΤΟΡΣ ΦΕΜΠΕΛ**

**ΙΝΤΑΧΟΣΑ ΜΠΛΕΣΣΙΝΓΚ ΟΣΑΡΟ**

**ΤΑΛΟΥΚΝΤΑΡ ΑΡΑΦΑΤ**

**AUTHOR:**

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ**

**TEXT EDITING :**

**ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ**



**NOTEBOOK:**

**ΝΤΙΜΟ ΑΡΤΕΜΙΣ**

**TRANSLATION CORRECTION - ILLUSTRATION:**

**ΣΟΝΙΑ ΖΟΥΚΑ**

**ΜΑΧΑΒΟΥΖΑ ΡΑΧΜΑΝ ΣΕΦΑ...**

**ΕΝΤΑ ΝΤΟΡΣ ΦΕΜΠΕΛ**

**ΙΝΤΑΧΟΣΑ ΜΠΛΕΣΣΙΝΓΚ ΟΣΑΡΟ**

**ΤΑΛΟΥΚΝΤΑΡ ΑΡΑΦΑΤ**

## Αντί προλόγου...

### Ευχαριστούμε πολύ

Την διευθύντρια και του Διαπολιτισμικού Γυμνασίου Αθήνας Κα Δάφνη Γαβρίλη για την παραχώρηση του εργαστηρίου Πληροφορικής και την άψογη συνεργασία της, τους καθηγητές του σχολείου που με προθυμία μας επανειλημμένα παραχώρησαν τους μαθητές τους, στον συντάκτη του βιβλίου μας Κο Κωνσταντακόπουλο Βασίλη με την άψογη διατύπωση των κανόνων του σε απλά ελληνικά, καθώς και όλους τους μαθητές και μαθήτριες- των οποίων τα ονόματα αναγράφονται στην πρώτη σελίδα- που με μεγάλη προθυμία, εντατική δουλειά και ανιδιοτέλεια αφιέρωσαν τον πολύτιμο χρόνο τους στη συγγραφή και διόρθωση των κειμένων.

**Ευχόμαστε** αρχικά αυτό το βιβλίο να βοηθήσει τους μαθητές μας να μελετήσουν με μεγαλύτερη ευκολία τα μαθηματικά μαζί με τις οικογένειες τους στη συνέχεια να διευκολύνει τα παιδιά να προσδεύσουν στα μαθήματά τους, Γλώσσα και Μαθηματικά, και τέλος να γίνει βοηθός τους, πρακτικός και συναισθηματικός, στο άνοιγμα νέων δρόμων προς την καλλιέργειά τους καθώς και στη μετέπειτα επαγγελματική τους αποκατάσταση.

**Οφείλουμε να αναφέρουμε πως μέσα στις παρακάτω σελίδες υπάρχουν αρκετές γλωσσικές και συντακτικές καθώς και επιστημονικές ατέλειες τις οποίες ευελπιστούμε να διορθώσουμε σε επόμενες χρονικές περιόδους. Προφανώς είμαστε ανοιχτοί σε καλοπροαίρετα σχόλια και πιθανές διορθώσεις των κειμένων.**

**Προβλέπουμε** συγγραφή του βιβλίου σε άλλες γλώσσες καθώς και συγγραφή βιβλίων της Α' και Β' Γυμνασίου καθώς και των τάξεων του Λυκείου σε επόμενες σχολικές χρονιές για να βοηθηθούν τα παιδιά και οι οικογένειες τόσο του σχολείου μας όσο και των υπόλοιπων ελληνικών σχολείων με μαθητές με πολυπολιτισμικό υπόβαθρο.

**Ευχή μας** είναι η προσπάθεια αυτή να είναι ένα μικρό λιθαράκι για να μην αφήνουν πίσω τα παιδιά αυτά τα όνειρό τους για καλλιέργεια και καλύτερη ζωή.

Η επιμελήτρια της έκδοσης:

*Παπαϊωάννου Εμμανουέλα*

## Preface...

### We would like to thank

The principal of the Intercultural High School of Athens, Ms. Daphne Gavrili, for providing us with the IT lab and her excellent cooperation, the teachers of the school who willingly and repeatedly provided us with their students, the editor of our book, Mr. Vasilis Konstantakopoulos, for his impeccable formulation of the rules in simple Greek language, as well as all the students - whose names are listed on the first page - who with great willingness, intensive work and selflessness dedicated their valuable time to writing and correcting the texts.

**We hope** that this book will initially help our students to study mathematics more easily with their families

So as to make it easier for children to progress in their subjects, Language and Mathematics,

and finally become their assistant, practical and emotional, in opening new paths towards their cultivation as well as in their subsequent professional rehabilitation.

**We must admit that within the following pages there are several linguistic and editorial as well as scientific imperfections which we hope to correct in the future . Obviously we are waiting for well-intentioned comments and possible corrections of the texts.**

**We foresee** writing the book in other languages as well as writing books for Mathematics that are taught to 12-18 year old students, in the following school years so as to help the children and families of both our school and the rest of the Greek schools with students with multicultural backgrounds.

**Our wish is** that this effort will help so that children do not leave behind their dreams of education and a better life.

The editor of the publication:

*Papaioannou Emmanouela*

## ΜΕΡΟΣ Α' ΑΛΓΕΒΡΑ

### Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς(επανάληψη)

#### ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(N)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....

#### ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Z)

....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.....

#### ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Q)

Ένας αριθμός q είναι ρητός όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή  $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$ , όπου οι αριθμοί

$\kappa, \lambda$  είναι ακέραιοι αριθμοί και ο αριθμός  $\lambda$  δεν είναι μηδέν(δηλαδή είναι διαφορετικός του μηδενός,  $\lambda \neq 0$ )

#### Παραδείγματα:

$7 = \frac{7}{1}$ :Ρητός αριθμός

$-3 = \frac{-3}{1}$ :Ρητός αριθμός

$\frac{2}{5}$ :Ρητός αριθμός

$0,3 = \frac{3}{10}$

$-1,37 = -\frac{137}{100}$  Ρητός αριθμός

#### ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(R)

Στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών υπάρχουν όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί(δηλαδή φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, ρητοί αριθμοί κ.λ.π

#### Παραδείγματα:

0, -3, 19,2,  $\frac{-4}{5}$

#### ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί

#### Παραδείγματα:

$\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $-\sqrt{8}$

#### ΠΡΟΣΗΜΑ

+(συν)

-(πλην)

## PART A ALGEBRA

### Operations with real numbers (repetition)

#### NATURAL NUMBERS (N)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6....

#### INTEGER NUMBERS (Z)

....-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.....

#### Rational numbers (Q)

A number q is rational when it can be written in the form  $\alpha = \frac{\kappa}{\lambda}$ , where the numbers  $\kappa, \lambda$

are integers and the number  $\lambda$  is not zero (i.e. it is different from zero,  $\lambda \neq 0$ )

#### Examples:

$\frac{7}{1}$ : Rational number

$-3 = -\frac{3}{1}$  : Rational number

$\frac{2}{5}$ : Rational number

$0.3 = \frac{3}{10}$ : Rational number

$-1.37 = -137/100$  Rational number

#### REAL NUMBERS (R)

In the set R of real numbers there are all our known numbers (i.e. natural numbers, integers, rational numbers, etc.)

#### Examples:

0, -3, 19.2,  $-4/5$

#### IRRATIONAL NUMBERS

They are the real numbers that are not rational

#### Examples:

$\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $-\sqrt{8}$

#### SIGN

+(plus)

-(minus)

## ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

**Ομόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο

Παραδείγματα

+23, +17 : ομόσημοι αριθμοί

-17, -150: ομόσημοι αριθμοί

9, +15: ομόσημοι αριθμοί, δηλαδή +9, +15

12, 18: ομόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, +18

**Ετερόσημοι** λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

Παραδείγματα

+25, -17 : ετερόσημοι αριθμοί

12, -9: ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, -9

## ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Να χαρακτηρίσετε τα επόμενα ζεύγη αριθμών ως ομόσημους αριθμούς ή ετερόσημους αριθμούς

1) +17, -23

2) -9, +11;

3) -12, -18

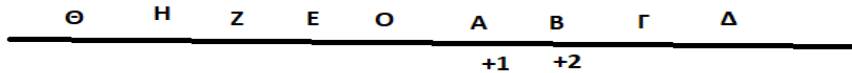
4) -21, -32

5) 7, 14

6) -7, 32

## ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ (ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΕΝΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ)

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι ίση με την απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί σε αυτόν τον πραγματικό αριθμό από την αρχή. Συμβολίζεται με  $|a|$ .



Παραδείγματα

$|+2| = (OB) = 2$

$|-3| = (OH) = 3$

$|+7| = 7$

$|-5| = 5$

$|-0,7| = 0,7$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τις επόμενες απόλυτες τιμές:

$|+3|$        $|-19|$        $|+17|$        $\left| \frac{-2}{7} \right|$        $|43|$

## BASIC DEFINITIONS

Numbers that have the same sign are **called same sign numbers**

Examples:

+23, +17: same sign numbers

-17, -150: same sign numbers

9, +15: same sign numbers, i.e., +9, +15

12, 18: same sign numbers, i.e., +12, +18

Numbers that have different signs are called **different sign numbers**.

Examples:

+25, -17: different sign numbers

12, -9: different sign numbers, i.e., +12, -9

## EXERCISE (WORK)

Classify the following pairs of numbers as same sign or different sign numbers:

1) +17, -23

2) -9, +11

3) -12, -18

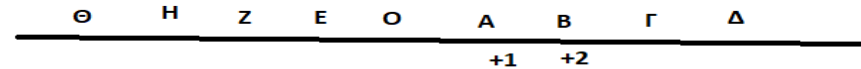
4) -21, -32

5) 7, 14

6) -7, 32

## BASIC DEFINITION (ABSOLUTE VALUE OF A REAL NUMBER)

The absolute value of a real number is equal to the distance of the point corresponding to that real number from the origin. It is denoted by  $|a|$ .



Examples:

$|+2| = (OB) = 2$

$|-3| = (OH) = 3$

$|+7| = 7$

$|-5| = 5$

$|-0.7| = 0.7$

**EXERCISE (WORK):** Calculate the following absolute values:

$|+3|$        $|-19|$        $|+17|$        $\left| \frac{-2}{7} \right|$        $|43|$

## ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**1<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** Για να προσθέσουμε δύο ομόσημους ρητούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα που προκύπτει βάζουμε τα πρόσημα που έχουν (το κοινό τους πρόσημο)

### Παραδείγματα

- 1)  $(+7)+(+13) = +20$  ή  $+7+13 = +20$
- 2)  $(-12)+(-10) = -22$  ή  $-12-10 = -22$
- 3)  $(-17)+(-19) = -36$  ή  $-17-19 = -36$
- 4)  $(+23)+(+157) = +180$  ή  $+23+157 = +180$

**2<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** Για να προσθέσουμε δύο ετερόσημους ρητούς αριθμούς αφαιρούμε την μικρότερη από τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή τους και στη διαφορά που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

### Παραδείγματα

- 1)  $(-7)+(+13) = +6$  ή  $-7+13 = +6$
- 2)  $(-12)+(+10) = -2$  ή  $-12+10 = -2$
- 3)  $(+17)+(-19) = -2$  ή  $+17-19 = -2$
- 4)  $(+23)+(-15) = +8$  ή  $+23-15 = +8$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $(+7) + (+3) = \dots$  | 5) $(-5) + (-10) = \dots$ |
| 2) $(15) + (+12) = \dots$ | 6) $(-6) + (-9) = \dots$  |
| 3) $(-7) + (+5) = \dots$  | 7) $(-6) + (+3) = \dots$  |
| 4) $(+16) + (-8) = \dots$ | 8) $(+9) + (-5) = \dots$  |

## ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσουμε πολλούς ρητούς αριθμούς, συνήθως προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους

### Παράδειγμα:

$$(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) = (+2)+(+7)+(-3)+(-4)+(-2)+(-6) = (+9)+(-17) = -8$$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

- 1)  $(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) =$
- 2)  $(-1)+(+4)+(+10)+(-5)+(-12)+(+32)+(-11) =$
- 3)  $(-\frac{2}{7})+(\frac{4}{7})+(\frac{5}{7})+(-\frac{3}{7})+(-\frac{2}{7}) =$

## ADDITION OF RATIONAL NUMBERS

**1ST RULE:** To add two same sign rational numbers, we add their absolute values and to the resulting sum, we set the sign they have (their common sign)

### Examples

- 1)  $(+7)+(+13) = +20$  or  $+7+13 = +20$
- 2)  $(-12)+(-10) = -22$  or  $-12-10 = -22$
- 3)  $(-17)+(-19) = -36$  or  $-17-19 = -36$
- 4)  $(+23)+(+157) = +180$  or  $+23+157 = +180$

**2ND RULE:** To add two opposite sign rational numbers, we subtract the smaller from the larger absolute value and to the resulting difference, and then set the sign of the rational number with the larger absolute value.

### Examples

- 1)  $(-7)+(+13) = +6$  or  $-7+13 = +6$
- 2)  $(-12)+(+10) = -2$  or  $-12+10 = -2$
- 3)  $(+17)+(-19) = -2$  or  $+17-19 = -2$
- 4)  $(+23)+(-15) = +8$  or  $+23-15 = +8$

**EXERCISE(TASK):** Calculate the sums:

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $(+7) + (+3) = \dots$  | 5) $(-5) + (-10) = \dots$ |
| 2) $(15) + (+12) = \dots$ | 6) $(-6) + (-9) = \dots$  |
| 3) $(-7) + (+5) = \dots$  | 7) $(-6) + (+3) = \dots$  |
| 4) $(+16) + (-8) = \dots$ | 8) $(+9) + (-5) = \dots$  |

## ADDING MULTIPLE NUMBERS

To add multiple rational numbers, we usually add the identical numbers first

### Example:

$$(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) = (+2)+(+7)+(-3)+(-4)+(-2)+(-6) = (+9)+(-17) = -8$$

**EXERCISE(TASK):** Calculate the following sums

- 1)  $(-3)+(-4)+(+2)+(-6)+(-2)+(+7) =$
- 2)  $(-1)+(+4)+(+10)+(-5)+(-12)+(+32)+(-11) =$
- 3)  $(-\frac{2}{7})+(\frac{4}{7})+(\frac{5}{7})+(-\frac{3}{7})+(-\frac{2}{7}) =$

## ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**1<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** + Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο +

Δηλαδή:  $+ \cdot + = +$

$$- \cdot - = +$$

Παραδείγματα

1)  $(+7) \cdot (+4) = +28$

2)  $(-3) \cdot (-12) = +36$

3)  $(+0,3)(+100) = +30$

4)  $\left(\frac{-2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) = +\frac{3}{10}$

**2<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο -

Δηλαδή:  $+ \cdot - = -$

$$- \cdot + = -$$

Παραδείγματα

1)  $(-5) \cdot (+4) = -20$

2)  $(+3) \cdot (-14) = -42$

3)  $(+0,5)(-100) = -50$

4)  $\left(\frac{-2}{7}\right) \cdot \left(\frac{+3}{4}\right) = -\frac{3}{14}$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

1)  $(+3) \cdot (+2) = \dots$

2)  $(+40) \cdot (+1,5) = \dots$

3)  $(-2) \cdot (-1) = \dots$

4)  $(-25) \cdot (-10) = \dots$

5)  $(-5) \cdot (+10)$

6)  $(+15) \cdot (-6) \dots$

7)  $(+100) \cdot (-0,2)$

8)  $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{+2}{7}\right) =$

## MULTIPLICATION OF RATIONAL NUMBERS

**1ST RULE:** To **multiply** two **same sign** rational numbers, we **multiply** their **absolute values** and add a + sign to the resulting product (result).

That is:  $+ \cdot + = +$

$$- \cdot - = +$$

Examples

1)  $(+7) \cdot (+4) = +28$

2)  $(-3) \cdot (-12) = +36$

3)  $(+0.3)(+100) = +30$

4)  $(-2/5) \cdot (-3/4) = +3/10$

**2ND RULE:** To **multiply** two **opposite sign** rational numbers, we **multiply** their **absolute values** and add a - sign to the resulting product (result).

That is:  $+ \cdot - = -$

$$- \cdot + = -$$

Examples

1)  $(-5) \cdot (+4) = -20$

2)  $(+3) \cdot (-14) = -42$

3)  $(+0.5)(-100) = -50$

4)  $\left(\frac{-2}{7}\right) \cdot \left(\frac{+3}{4}\right) = -\frac{3}{14}$

**EXERCISE (TASK):** Calculate the products:

1)  $(+3) \cdot (+2) = \dots$

2)  $(+40) \cdot (+1.5) = \dots$

3)  $(-2) \cdot (-1) = \dots$

4)  $(-25) \cdot (-10) = \dots$

5)  $(-5) \cdot (+10)$

6)  $(+15) \cdot (-6) \dots$

7)  $(+100) \cdot (-0.2)$

8)  $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot \left(\frac{+2}{7}\right) =$

### **ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ**

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι αριθμοί**.

Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

#### **Παραδείγματα αντίθετων αριθμών**

- Οι αριθμοί +5 και -5 είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί  $(+5)+(-5) = 0$  ή  $+5-5 = 0$
- Οι αριθμοί  $\left(\frac{-1}{2}\right)$  και  $\left(\frac{+1}{2}\right)$  είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί  $\left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{+1}{2}\right) = 0$

### **ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)**

Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίθετο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-17		19	
+1		-32	
$\frac{-1}{4}$		$\frac{-2}{7}$	
$\frac{+3}{5}$		0,8	

**ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:** Δυο αριθμοί που έχουν γινόμενο(αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού)τη μονάδα(1)λέγονται **αντίστροφοι αριθμοί**.

#### **Παραδείγματα αντίστροφων αριθμών:**

- Οι αριθμοί  $\frac{4}{5}$  και  $\frac{5}{4}$  είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί  $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1$
- Οι αριθμοί -7 και  $-\frac{1}{7}$  είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί  $(-7) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{7}{7} = 1$

### **ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

- Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι αριθμοί
- Μόνο ο αριθμός μηδέν(0) δεν έχει αντίστροφο αριθμό

### **ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)**

Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίστροφο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-18		0	
+1		-17	
$\frac{+1}{3}$		$\frac{-2}{3}$	
23		$\frac{2}{11}$	

### **BASIC DEFINITION**

Two numbers that have a sum of zero are called **opposite numbers**.

Opposite numbers have the same absolute value but different signs.

#### **Examples of opposite numbers**

The numbers +5 and -5 are opposite numbers because  $(+5)+(-5) = 0$  or  $+5-5 = 0$

The numbers  $(-1/2)$  and  $(+1/2)$  are opposite numbers because  $(-1/2)+(1/2) = 0$

### **EXERCISE (WORK)**

In the following table, write the opposite number of the numbers given:

NUMBER	OPPOSITE NUMBER	NUMBER	OPPOSITE NUMBER
-17		19	
+1		-32	
$\frac{-1}{4}$		$\frac{-2}{7}$	
$\frac{+3}{5}$		0,8	

**BASIC DEFINITION:** Two numbers whose product (result of multiplication) of unity (1) are called **reciprocal numbers**.

#### **Examples of reciprocal numbers:**

- The numbers  $4/5$  and  $5/4$  are reciprocal numbers because  $4/5 \cdot 5/4 = 20/20 = 1$
- The numbers -7 and  $-1/7$  are reciprocal numbers because  $(-7) \cdot (-1/7) = 7/7 = 1$

### **BASIC REMARKS**

Reciprocal numbers are same sign numbers

Only the number zero(0) does not have a reciprocal number

### **EXERCISE**

In the following table, write the reciprocal of the numbers given:

NUMBER	RECIPROCAL NUMBER	NUMBER	RECIPROCAL NUMBER
-18		0	
+1		-17	
$\frac{+1}{3}$		$\frac{-2}{3}$	
23		$\frac{2}{11}$	

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με το μηδέν(0), τότε τουλάχιστον ένας όρος του γινομένου θα είναι ίσος με το μηδέν (0)

Δηλαδή: Αν  $\alpha \cdot \beta = 0$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$

Παραδείγματα:  $0 \cdot 5 = 0$   $(-7) \cdot 0 = 0$   $0 \cdot 0 = 0$

2. Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι διάφορο του μηδενός , τότε και οι δύο όροι του γινομένου θα είναι διάφοροι του μηδενός

Δηλαδή: Αν  $\alpha \cdot \beta \neq 0$  τότε  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$

Παράδειγμα :  $(-3)(+5) = -15$ , γινόμενο διάφορο του μηδενός και κανένας όρος δεν είναι μηδέν.

## ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει:  $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Παραδείγματα:

- 1)  $(+5) - (-7) = (+5) + (+7) = +12$
- 2)  $(-13) - (+8) = (-13) + (-8) = -21$
- 3)  $(-14) - (-22) = (-14) + (+22) = +8$
- 4)  $(+25) - (+17) = (+25) + (-17) = +8$

## ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Να κάνετε τις αφαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τις διαφορές)

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) $(-12) - (-28) =$ | 5) $(+32) - (-17) =$ |
| 2) $(+19) - (-11) =$ | 6) $(-29) - (+15) =$ |
| 3) $(-23) - (-17) =$ | 7) $(-12) - (-65) =$ |
| 4) $(-25) - (-18) =$ | 8) $(+17) - (+65) =$ |

## ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει  $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ):** Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλικά)

- 1)  $(-27) : (+3) = -9$
- 2)  $(-120) : (-10) = +12$
- 3)  $(-63) : (+9) = -7$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλικά)

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| 1) $(-30) : (+6) =$ | 5) $(-72) : (+8) =$    |
| 2) $(-12) : (+4) =$ | 6) $(-200) : (-50) =$  |
| 3) $(-16) : (-4) =$ | 7) $(+144) : (-12) =$  |
| 4) $(-20) : (+4) =$ | 8) $(+1200) : (-10) =$ |

## BASIC OBSERVATIONS

1) If a product of two numbers is equal to zero (0), then at least one term of the product will be equal to zero (0)

That is: **If  $\alpha \cdot \beta = 0$  then  $\alpha = 0$  or  $\beta = 0$**

**Examples:**  $0 \cdot 5 = 0$   $(-7) \cdot 0 = 0$

2. If a product of two numbers is different from zero, then both terms of the product will be different from zero

That is: **If  $\alpha \cdot \beta \neq 0$  then  $\alpha \neq 0$  and  $\beta \neq 0$**

**Example:**  $(-3)(+5) = -15$  product different from zero and neither term is zero.

## SUBTRACTING NUMBERS

**RULE:**  $a - b = a + (-b)$

**Examples:**

- 1)  $(+5) - (-7) = (+5) + (+7) = +12$
- 2)  $(-13) - (+8) = (-13) + (-8) = -21$
- 3)  $(-14) - (-22) = (-14) + (+22) = +8$
- 4)  $(+25) - (+17) = (+25) + (-17) = +8$

## EXERCISE (WORK)

Make the subtractions (or calculate the differences)

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| 1) $(-12) - (-28) =$ | 5) $(+32) - (-17) =$ |
| 2) $(+19) - (-11) =$ | 6) $(-29) - (+15) =$ |
| 3) $(-23) - (-17) =$ | 7) $(-12) - (-65) =$ |
| 4) $(-25) - (-18) =$ | 8) $(+17) - (+65) =$ |

## DIVISION OF NUMBERS

**RULE:**  $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

**EXERCISE(EXAMPLE):** calculate the quotients

- 1)  $(-27) : (+3) = -9$
- 2)  $(-120) : (-10) = +12$
- 3)  $(-63) : (+9) = -7$

**EXERCISE(TASK):** calculate the quotients

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| 1) $(-30) : (+6) =$ | 5) $(-72) : (+8) =$    |
| 2) $(-12) : (+4) =$ | 6) $(-200) : (-50) =$  |
| 3) $(-16) : (-4) =$ | 7) $(+144) : (-12) =$  |
| 4) $(-20) : (+4) =$ | 8) $(+1200) : (-10) =$ |

## ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

**1<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

**2<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

**3<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

**4<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

### **ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:**

1)  $6+6\cdot 4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34$

2)  $2+3\cdot(4-11):(-5+2) = 2+3\cdot(-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9$

### **ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)**

βιβλίου

## **ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ**

**1<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο + ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε) την παρένθεση και το πρόσημο + (αν υπάρχει) και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με τα πρόσημα που είχαν.

**2<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο - ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε) την παρένθεση και το πρόσημο - και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με αντίθετα πρόσημα.

### **Παραδείγματα:**

1)  $+(7-12+1-6) = 7-12+1-6$

2)  $(5-7+13) = 5-7+13$

3)  $-(4-8-3+12) = -4+8+3-12$

4)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} =$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

<b>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>12</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>2</b>
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	

Άρα  $ΕΚΠ(2,3,4,12) = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$

## PRIORITY OF OPERATIONS

**1ST STEP:** We do the operations inside the parentheses

**2ND STEP:** We calculate the powers

**3RD STEP:** We do multiplications and divisions

**4th STEP:** We do additions and subtractions

### **EXAMPLES:**

1)  $6+6\cdot 4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34$

2)  $2+3\cdot(4-11):(-5+2) = 2+3\cdot(-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9$

### **EXERCISE (TASK)**

of the book

## **ELIMINATING PARENTHESES**

**1ST RULE:** When there is a + sign in front of a parentheses or there is no sign, then we delete (get rid of) the parentheses and the + sign (if any) and we write the terms that were in the parentheses with the signs they had.

**2ND RULE:** When there is a - sign in front of a parentheses, or there is no sign, then we delete (get rid of) the parentheses and the - sign and write the terms that were in the parentheses with opposite signs.

### **Examples:**

1)  $+(7-12+1-6) = 7-12+1-6$

2)  $(5-7+13) = 5-7+13$

3)  $-(4-8-3+12) = -4+8+3-12$

4)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} =$

$$\frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12} - \frac{7}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

<b>NOTE:</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>12</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>6</b>	<b>2</b>
	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>3</b>	<b>3</b>
	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	

So....  $ΕΚΠ(2,3,4,12) = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$

## ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ:  $a^v$  δύναμη

Βάση της δύναμης

Εκθέτης της δύναμης

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ:  $a^v = a \cdot a \dots a$

$v$  φορές ( $v$  παράγοντες)

Παραδείγματα:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

### ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1.  $a^1 = a$

Παραδείγματα:

$$5^1 = 5 \quad (-7)^1 = -7 \quad (-3/2)^1 = -3/2$$

2.  $a^0 = 1$  με  $a \neq 0$

Παραδείγματα:

$$15^0 = 1 \quad (-3)^0 = 1 \quad (0.56)^0 = 1$$

3.  $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$  με  $a \neq 0$

Παραδείγματα:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$$

4.  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

Παραδείγματα:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{-4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-7}{4}\right)^3$$

## POWERS OF REAL NUMBERS

SYMBOLISM:  $a^v$  power

Base of the power

Exponent of the power

COMPUTATION:  $a^v = a \cdot a \dots a$   
n times (n factors)

Examples:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$$

### BASIC PROPERTIES OF POWERS

A.  $a^1 = a$

Examples

$$5^1 = 5 \quad (-7)^1 = -7 \quad (-3/2)^1 = -3/2$$

B.  $a^0 = 1$  με  $a \neq 0$

Examples:

$$15^0 = 1 \quad (-3)^0 = 1 \quad (0.56)^0 = 1$$

C.  $a^{-v} = \frac{1}{a^v}$  με  $a \neq 0$

Examples:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$$

D.  $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-v} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v$

Examples:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{-4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{-7}{4}\right)^3$$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ):** Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

I.  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

II.  $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

III.  $(-5)^1 = -5$

IV.  $(-21)^0 = 1$

V.  $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

VI.  $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \left(\frac{-5}{3}\right) \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{+25}{9}$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

1)  $2^3$

8)  $3^4$

2)  $5^3$

9)  $(-4)^2$

3)  $(-8)^0$

10)  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-3}$

4)  $(-7)^2$

11)  $(-6)^3$

5)  $\left(\frac{-4}{5}\right)^1$

12)  $\left(\frac{-3}{10}\right)^0$

6)  $(-7)^{-3}$

13)  $(-9)^2$

7)  $\left(\frac{-4}{5}\right)^{-2}$

**EXERCISE (EXAMPLE):** Calculate the following forces

I.  $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

II.  $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

III.  $(-5)^1 = -5$

IV.  $(-21)^0 = 1$

V.  $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

VI.  $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{-5}{3}\right)^2 = \left(\frac{-5}{3}\right) \cdot \left(\frac{-5}{3}\right) = \frac{+25}{9}$

**EXERCISE (HOMEWORK):** Calculate the following forces

1)  $2^3$

8)  $3^4$

2)  $5^3$

9)  $(-4)^2$

3)  $(-8)^0$

10)  $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-3}$

4)  $(-7)^2$

11)  $(-6)^3$

5)  $\left(\frac{-4}{5}\right)^1$

12)  $\left(\frac{-3}{10}\right)^0$

6)  $(-7)^{-3}$

13)  $(-9)^2$

7)  $\left(\frac{-4}{5}\right)^{-2}$

## ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

**1<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός

**Παραδείγματα:**

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 > 0$$

**2<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο(ζυγό)αριθμό είναι θετικός αριθμός

**Παρατήρηση:** Άρτιοι(ζυγοί)αριθμοί: 0, 2, 4, 6, 8, ....

**Παραδείγματα:**

**$(-2)^4 > 0$**  (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)

$$\text{αφού } (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 > 0$$

**$(-8)^2 > 0$**  (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)

$$\text{αφού } (-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$$

**3<sup>ος</sup> ΚΑΝΟΝΑΣ:** δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό(μονό)αριθμό είναι αρνητικός αριθμός

**Παρατήρηση:** Περιττοί(μονοί)αριθμοί: 1, 3, 5, 7, 9, ....

**Παραδείγματα:**

**$(-2)^3 < 0$**  (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)

$$\text{αφού } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$$

**$(-3)^5 > 0$**  (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)

$$\text{αφού } (-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243 < 0$$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να βρείτε το πρόσημο των επόμενων δυνάμεων και στη συνέχεια

να τις υπολογίσετε:

$$(-4)^2 \qquad (-5)^3$$

$$(-7)^2 \qquad 2^5$$

$$(-2)^{10} \qquad (-2)^5$$

## SIGN OF EXPONENTS

**1ST RULE:** a power based on a positive number is a positive number

**Examples:**

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 0$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 > 0$$

**2ND RULE:** a power based on a negative number and an even number as an exponent is a positive number

**Note:** Even numbers: 0, 2, 4, 6, 8, ....

**Examples:**

**$(-2)^4 > 0$**  (negative base and even exponent)

$$\text{since } (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 > 0$$

**$(-8)^2 > 0$**  (negative base and even exponent)

$$\text{since } (-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$$

**3RD RULE:** a power with a negative base and an odd exponent is a negative number

**Note:** Odd numbers: 1, 3, 5, 7, 9, ....

**Examples:**

**$(-2)^3 < 0$**  (negative base and odd exponent)

$$\text{since } (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$$

**$(-3)^5 > 0$**  (negative base and odd exponent)

$$\text{since } (-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243 < 0$$

**EXERCISE(TASK):** Find the sign of the following powers and then calculate them

$$(-4)^2 \qquad (-5)^3$$

$$(-7)^2 \qquad 2^5$$

$$(-2)^{10} \qquad (-2)^5$$

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και

προσθέτουμε τους εκθέτες, δηλαδή  $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$

### Παραδείγματα:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$$

$$4^{-6} \cdot 4^3 = 4^{(-6)+3} = 4^{-3}$$

$$(-2)^{-7} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5}$$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να γράψετε σαν μια δύναμη τα επόμενα γινόμενα:

$$5^3 \cdot 5^4 = \quad \quad \quad (-7)^3 \cdot (-7)^2 =$$

$$9^4 \cdot 9^{-5} = \quad \quad \quad 10^{-3} \cdot 10^{-4} =$$

$$(-8)^5 \cdot (-8)^{-7} = \quad \quad \quad 12^3 \cdot 12^2 =$$

$$(-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} = \quad \quad \quad (-2)^7 \cdot (-2)^{-2} =$$

2. Για να διαιρέσουμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και αφαιρούμε τους εκθέτες (εκθέτης διαιρετέου - εκθέτης διαιρέτη), δηλαδή

$$a^{\mu} : a^{\nu} = a^{\mu-\nu}$$

### Παραδείγματα:

$$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$$

$$(-7)^{12} : (-7)^8 = (-7)^{12-8} = (-7)^4$$

$$5^{-6} : 5^3 = 5^{-6-3} = 5^{-9}$$

$$(-9)^5 \cdot (-9)^{-2} = (-9)^{5+(-2)} = (-9)^{5-2} = (-9)^3$$

$$8^{-12} : 8^{-4} = 8^{-12-(-4)} = 8^{-8}$$

### ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):

Να γράψετε σαν μια δύναμη τις επόμενες δυνάμεις (ή τα επόμενα πηλίκα):

$$15^3 : 15^2 = \quad \quad \quad (-7)^{13} : (-7)^{10} =$$

$$7^5 : 7^{-3} = \quad \quad \quad 6^{-6} : 6^4 =$$

$$(-8)^{-5} : (-8)^{-7} = \quad \quad \quad (-4)^{-6} : (-4)^2 =$$

## PROPERTIES OF FORCES

1. To multiply powers with the same base, we leave the same base and add the

exponents, that is  $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = a^{\mu+\nu}$

### Examples:

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$$

$$4^{-6} \cdot 4^3 = 4^{(-6)+3} = 4^{-3}$$

$$(-2)^{-7} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5}$$

**EXERCISE (TASK):** Write the following products as a force

$$5^3 \cdot 5^4 = \quad \quad \quad (-7)^3 \cdot (-7)^2 =$$

$$9^4 \cdot 9^{-5} = \quad \quad \quad 10^{-3} \cdot 10^{-4} =$$

$$(-8)^5 \cdot (-8)^{-7} = \quad \quad \quad 12^3 \cdot 12^2 =$$

$$(-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} = \quad \quad \quad (-2)^7 \cdot (-2)^{-2} =$$

2. To divide powers that have the same base, we leave the same base and subtract the exponents (dividend exponent - divisor exponent), that is

$$a^{\mu} : a^{\nu} = a^{\mu-\nu}$$

### Examples:

$$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$$

$$(-7)^{12} : (-7)^8 = (-7)^{12-8} = (-7)^4$$

$$5^{-6} : 5^3 = 5^{-6-3} = 5^{-9}$$

$$(-9)^5 \cdot (-9)^{-2} = (-9)^{5+(-2)} = (-9)^{5-2} = (-9)^3$$

$$8^{-12} : 8^{-4} = 8^{-12-(-4)} = 8^{-8}$$

**EXERCISE (TASK):** Write the following products as a force

$$15^3 : 15^2 = \quad \quad \quad (-7)^{13} : (-7)^{10} =$$

$$7^5 : 7^{-3} = \quad \quad \quad 6^{-6} : 6^4 =$$

$$(-8)^{-5} : (-8)^{-7} = \quad \quad \quad (-4)^{-6} : (-4)^2 =$$

3. Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε έναν από τους

όρους του γινομένου στον εκθέτη αυτόν, δηλαδή  $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$

**Παραδείγματα:**

$$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$$

$$((-7) \cdot 4)^5 = (-7)^5 \cdot 4^5$$

$$(-2)^{10} \cdot 5^{10} = (-2 \cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$$

$$(-0,5)^3 \cdot (-2)^3 = ((-0,5) \cdot (-2))^3 = (+1)^3$$

4. Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε ορο του πηλίκου στ

ον εκθέτη αυτόν, δηλαδή  $(\alpha : \beta)^v = \alpha^v : \beta^v$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:**

A. Να γράψετε σαν κλάσμα δυνάμεων τις επόμενες δυνάμεις

$$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{-7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$$

B. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

5. Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο

γινόμενο των εκθετών, δηλαδή  $(a^m)^v = a^{m \cdot v}$

**ΑΣΚΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:** Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

$$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

$$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$$

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$$

3. To raise a product to an exponent, we raise each of the terms of the product to

that exponent, i.e.  $(\alpha \cdot \beta)^v = \alpha^v \cdot \beta^v$

**Examples:**

$$(3 \cdot 2)^4 = 3^4 \cdot 2^4$$

$$((-7) \cdot 4)^5 = (-7)^5 \cdot 4^5$$

$$(-2)^{10} \cdot 5^{10} = (-2 \cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$$

$$(-0,5)^3 \cdot (-2)^3 = ((-0,5) \cdot (-2))^3 = (+1)^3$$

4. To raise a quotient to an exponent, we raise each term of the quotient to that

exponent, that is,  $(\alpha : \beta)^v = \alpha^v : \beta^v$

**EXERCISE- EXAMPLE:**

1. Write the following powers as a fraction of powers

$$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{-7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$$

2. Calculate the forces

$$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$$

5. To raise a power to an exponent, we raise the base of the power to the product of

the exponents, that is  $(a^m)^v = a^{m \cdot v}$

**EXERCISE EXAMPLE:** Calculate the following forces

$$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 256$$

$$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$$

$$(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$$

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΕΡΓΑΣΙΑ:**

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α)  $2^4 = \dots$

(γ)  $(-2)^4 = \dots$

(β)  $2^3 = \dots$

(δ)  $(-2)^3 = \dots$

(α)  $(-3)^2 = \dots$

(γ)  $5^3 = \dots$

(β)  $(-3)^3 = \dots$

(δ)  $(-1)^9 = \dots$

(γ)  $-3^2 = \dots$

(δ)  $(-1)^{10} = \dots$

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α)  $4^{-2} = \dots$

(ε)  $-4^{-2} = \dots$

(β)  $(-4)^{-2} = \dots$

(ς)  $4^0 = \dots$

(γ)  $4^{-3} = \dots$

(ζ)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots$

(δ)  $(-4)^{-3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $6^{-21} \cdot 6^{19} = \dots$

(γ)  $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \dots$

(β)  $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \dots$

(δ)  $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \dots$

(γ)  $\frac{(-14)^5}{7^5} = \dots$

(β)  $2^6 \cdot 5^6 = \dots$

(δ)  $\frac{(-63)^3}{21^3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \dots$

(δ)  $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \dots$

(β)  $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \dots$

(ε)  $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \dots$

(γ)  $\frac{9^5}{3^{10}} = \dots$

(ς)  $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \dots$

**HOMEWORK**

Calculate, as much as possible, better using the properties of forces

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α)  $2^4 = \dots$

(γ)  $(-2)^4 = \dots$

(β)  $2^3 = \dots$

(δ)  $(-2)^3 = \dots$

(α)  $(-3)^2 = \dots$

(γ)  $5^3 = \dots$

(β)  $(-3)^3 = \dots$

(δ)  $(-1)^9 = \dots$

(γ)  $-3^2 = \dots$

(δ)  $(-1)^{10} = \dots$

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α)  $4^{-2} = \dots$

(ε)  $-4^{-2} = \dots$

(β)  $(-4)^{-2} = \dots$

(ς)  $4^0 = \dots$

(γ)  $4^{-3} = \dots$

(ζ)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \dots$

(δ)  $(-4)^{-3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $6^{-21} \cdot 6^{19} = \dots$

(γ)  $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \dots$

(β)  $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \dots$

(δ)  $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \dots$

(γ)  $\frac{(-14)^5}{7^5} = \dots$

(β)  $2^6 \cdot 5^6 = \dots$

(δ)  $\frac{(-63)^3}{21^3} = \dots$

Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α)  $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \dots$

(δ)  $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \dots$

(β)  $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \dots$

(ε)  $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \dots$

(γ)  $\frac{9^5}{3^{10}} = \dots$

(ς)  $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \dots$

## ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

**1<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

**2<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

**3<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

**4<sup>ο</sup> ΒΗΜΑ:** Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

**A.**  $3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 8^2 = 3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 64 = 18 - 24 - 64 = 18 - 88 = -70$

**B.**  $(-2)^3 - (-5)^2 + 7 \cdot 3 = (-8) - (+25) + 21 = -8 - 25 + 21 = -33 + 21 = -12$

**ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):** Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

**A** =  $2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 6 \cdot 10$

**B** =  $(-3) \cdot (-5) + (-6) \cdot (-4) + 19$

**Γ** =  $(-2)^3 - (-5)^2 + 8 \cdot (-2) - 15$

**Δ** =  $(2^3 - 5 \cdot 2) + 7^2 - 6 \cdot 4$

**E** =  $(8^2 - 5 \cdot 3) + (-4)^3$

**Ω** =  $3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 - 8 : 2 - 6 : 3$

**Ψ** =  $4 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (8 - 6) : (5 + 1)$

**Φ** =  $2^3 : 4 + 4^2 : 8 + 3 \cdot (5^2 - 4 \cdot 6)$

**Υ** =  $3^2 - 2^3 + 4^2 - 3 \cdot (10 - 3 \cdot 3) + 5^2$

**Τ** =  $4^3 - 5 \cdot (3^3 - 2^3 \cdot 3) + 2^4 : 8$

**Σ** =  $3^4 : (2^3 + 1) + 4^2 : (5 \cdot 3 - 7)$

**Ρ** =  $3 \cdot (5^2 - 2^2 \cdot 3) : (5 \cdot 2 + 3) - (10^5 - 10^4)^0$

**Π** =  $2 \cdot 10^3 + 4^2 - 5^3 : 5^2 + 2$

**Ξ** =  $(4^3 : 2^3 + 2)^3 \cdot (17 - 3 \cdot 5) + 2^3 \cdot 2 - 2$

## PRIORITY OF OPERATIONS

**1st STEP:** We perform the operations inside the parentheses

**2nd STEP:** We calculate the powers

**3rd STEP:** We perform multiplications and divisions

**4th STEP:** We perform additions and subtractions

**EXERCISES-EXAMPLES:** Calculate the value of the expressions:

**A.**  $3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 8^2 = 3 \cdot 6 + 6 \cdot 4 - 64 = 18 - 24 - 64 = 18 - 88 = -70$

**B.**  $(-2)^3 - (-5)^2 + 7 \cdot 3 = (-8) - (+25) + 21 = -8 - 25 + 21 = -33 + 21 = -12$

**EXERCISE (HOMEWORK):** Calculate the value of the expressions:

**A** =  $2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 - 6 \cdot 10$

**B** =  $(-3) \cdot (-5) + (-6) \cdot (-4) + 19$

**Γ** =  $(-2)^3 - (-5)^2 + 8 \cdot (-2) - 15$

**Δ** =  $(2^3 - 5 \cdot 2) + 7^2 - 6 \cdot 4$

**E** =  $(8^2 - 5 \cdot 3) + (-4)^3$

**Ω** =  $3 \cdot 5 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 - 8 : 2 - 6 : 3$

**Ψ** =  $4 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (8 - 6) : (5 + 1)$

**Φ** =  $2^3 : 4 + 4^2 : 8 + 3 \cdot (5^2 - 4 \cdot 6)$

**Υ** =  $3^2 - 2^3 + 4^2 - 3 \cdot (10 - 3 \cdot 3) + 5^2$

**Τ** =  $4^3 - 5 \cdot (3^3 - 2^3 \cdot 3) + 2^4 : 8$

**Σ** =  $3^4 : (2^3 + 1) + 4^2 : (5 \cdot 3 - 7)$

**Ρ** =  $3 \cdot (5^2 - 2^2 \cdot 3) : (5 \cdot 2 + 3) - (10^5 - 10^4)^0$

**Π** =  $2 \cdot 10^3 + 4^2 - 5^3 : 5^2 + 2$

**Ξ** =  $(4^3 : 2^3 + 2)^3 \cdot (17 - 3 \cdot 5) + 2^3 \cdot 2 - 2$

## ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

**ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:** Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $x$  συμβολίζεται με  $\sqrt{x}$  και

είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό

**ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ** ορίζουμε να είναι  $\sqrt{0} = 0$

Παραδείγματα

$$\sqrt{25} = 5 \text{ γιατί } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25, \quad \sqrt{49} = 7 \text{ γιατί } 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

**ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ**

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{676} = 26$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{729} = 27$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{784} = 28$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{841} = 29$

**Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών**

1. για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει  $\sqrt{x^2} = |x|$

παραδείγματα

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5 \quad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

2. Αν  $x \geq 0$ , τότε  $(\sqrt{x})^2 = x$

παραδείγματα

$$(\sqrt{8})^2 = 8, \quad (\sqrt{15})^2 = 15 \quad (\sqrt{11})^2 = 11$$

**Εργασία**

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16}, \sqrt{1600}, \sqrt{0,16} \quad \beta) \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{100}{81}}, \sqrt{\frac{144}{169}}$$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16} \quad \beta) \sqrt{8+8} \quad \gamma) \sqrt{8 \cdot 8} \quad \delta) (\sqrt{8})^2$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}} \quad B = \sqrt{96 + \sqrt{25 + \sqrt{121}}}$$

4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{1089} \quad \beta) \sqrt{484} \quad \gamma) \sqrt{11025}$$

## SQUARE ROOT OF A REAL NUMBER

**BASIC DEFINITION:** The square root of a positive number  $x$  is denoted by  $\sqrt{x}$  and is the positivenumber which when squared gives us the number

**BASIC DEFINITION** we define to be  $\sqrt{0} = 0$

Examples

$$\sqrt{25} = 5 \text{ because } 5^2 = 5 \cdot 5 = 25, \quad \sqrt{49} = 7 \text{ because } 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

**BASIC SQUARE ROOTS**

$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{324} = 18$	$\sqrt{576} = 24$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{361} = 19$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{196} = 14$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{676} = 26$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{441} = 21$	$\sqrt{729} = 27$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{784} = 28$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{529} = 23$	$\sqrt{841} = 29$

**Properties of square roots**

1. for every real number  $\sqrt{x^2} = |x|$

examples

$$\sqrt{5^2} = |5| = 5 \quad \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \quad \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)^2} = \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

2. If  $x \geq 0$ , then  $(\sqrt{x})^2 = x$

examples

$$(\sqrt{8})^2 = 8, \quad (\sqrt{15})^2 = 15 \quad (\sqrt{11})^2 = 11$$

**Homework:** Calculate the following square roots

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16}, \sqrt{1600}, \sqrt{0,16} \quad \beta) \sqrt{\frac{4}{9}}, \sqrt{\frac{100}{81}}, \sqrt{\frac{144}{169}}$$

2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{16} \quad \beta) \sqrt{8+8} \quad \gamma) \sqrt{8 \cdot 8} \quad \delta) (\sqrt{8})^2$$

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}} \quad B = \sqrt{96 + \sqrt{25 + \sqrt{121}}}$$

4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

$$\alpha) \sqrt{1089} \quad \beta) \sqrt{484} \quad \gamma) \sqrt{11025}$$

$$3. \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

δηλαδή το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών είναι ίσον με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους

**παραδείγματα**

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25$$

4. το πηλίκο το τετραγωνικών ριζών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου

δηλαδή  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

**παραδείγματα**

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

**Σημαντική παρατήρηση:**

Αν  $\alpha, \beta$  είναι δύο θετικοί αριθμοί τότε  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$

**παραδείγματα :**

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \text{ ενώ } \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

**Σημαντική παρατήρηση (Ρητοποίηση παρανομαστών)**

**Άσκηση: παράδειγμα**

Να μετατραπούν τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρανομαστή:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \cancel{\sqrt{5}}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

**Άσκησης:**

Βιβλίο..και

$$3. \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$$

Which means that the product of square roots is equal to the square root of their product.

**Examples**

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{3 \cdot 9} = \sqrt{27}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{125} = \sqrt{5 \cdot 125} = \sqrt{625} = 25$$

4.  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$  which means that the quotient of square roots is equal to the square root of the quotient,

**Examples**

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

**Important observation:**

If  $a, b$  are two positive numbers then  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$

**Examples**

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \text{ but } \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

**Important Note (Rationalizing Denominators)**

**Exercise: Example**

Convert the following fractions into equivalent fractions with a rational denominator:

$$\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \cancel{\sqrt{5}}} = \frac{7 \cdot \sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \cancel{\sqrt{2}}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

**Homework:**

From the book and...

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ , β)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ , γ)  $\frac{3}{\sqrt{3}}$ , δ)  $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ , ε)  $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α.  $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$       β.  $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$   
 γ.  $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$       δ.  $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$   
 ε.  $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$       στ.  $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α)  $\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{200} + \sqrt{288}$   
 β)  $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{175}$   
 γ)  $\sqrt{20} - \sqrt{210} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$       β.  $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$   
 γ.  $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$       δ.  $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$   
 ε.  $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$       στ.  $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$   
 ζ.  $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$       η.  $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$   
 θ.  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$       ι.  $\sqrt{\frac{a}{7}}\cdot\sqrt{14a}$

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ , β)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ , γ)  $\frac{3}{\sqrt{3}}$ , δ)  $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ , ε)  $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α.  $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$       β.  $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$   
 γ.  $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$       δ.  $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$   
 ε.  $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$       στ.  $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α)  $\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{200} + \sqrt{288}$   
 β)  $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{175}$   
 γ)  $\sqrt{20} - \sqrt{210} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α.  $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$       β.  $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$   
 γ.  $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$       δ.  $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$   
 ε.  $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$       στ.  $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$   
 ζ.  $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$       η.  $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$   
 θ.  $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$       ι.  $\sqrt{\frac{a}{7}}\cdot\sqrt{14a}$

## Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

**Βασικός ορισμός:** Αριθμητικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και πράξεις.

παραδείγματα:

$$A = 2^3 + 5 \cdot 2 - 4 \quad B = (2^3 + 5 \cdot 2) - 7 \cdot 4 \quad \Gamma = [(2^3 + 5 \cdot 2) - 7^2 - 4 \cdot 5] + 7 \cdot 4$$

**Βασικός ορισμός:** Αλγεβρικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν αριθμούς, πράξεις και μεταβλητές.

παραδείγματα:

$$A = 2^4 + 3 \cdot 2 - 7^2 + 6x + 12 \quad B = x^2 - 5x + 6 \quad \Gamma = x^3 - 5x^2 + 4x - 10$$

**Βασικός ορισμός:** Ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται μία παράσταση όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ακέραιοι (δηλαδή φυσικοί αριθμοί).

Παραδείγματα

$$A = 5x^2 + 6x \quad B = 5x^3 + 2x$$

**Βασικός ορισμός:** αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις τότε το αποτέλεσμα που θα προκύψει ονομάζεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

**Άσκηση- παράδειγμα:** βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

$$A = 3x^2 + 2x \quad \text{για } x = 4$$

$$B = 6x + 12, \text{ για } x = -2$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12, \text{ για } x = -3$$

**Λύση**

$$A = 3x^2 + 2x \quad 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 48 + 8 = 56 \quad \text{άρα } \underline{A = 56}$$

$$B = 6x + 12 = 6 \cdot (-2) + 12 = -12 + 12 = 0, \quad \text{άρα } \underline{B = 0}$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12 = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 12 = 9 + 5(-3) + 12 = 9 - 15 + 12 = 21 - 15 = 6 \quad \text{άρα } \underline{\Gamma = 6}$$

**άσκηση-εργασία:** να υπολογίσετε την τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

$$A = 5x + 2 \quad \text{για } x = 7$$

$$B = x^2 - 5x + 2, \quad \text{για } x = -2$$

$$\Gamma = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad \text{για } x = -1$$

**Βασικός ορισμός:** Μονώνυμα ονομάζονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται (γράφεται) μόνο οι πράξη του πολλαπλασιασμού

Παραδείγματα:

$$5x^3, \quad -6x, \quad 2x^2y^3\omega^5, \quad -3xy^3, \quad -\frac{3}{7}x^3y$$

## Mononyms – Calculations with mononyms

**Basic definition:** Arithmetic expressions are expressions that contain only numbers and operations.

**Examples**

$$A = 2^3 + 5 \cdot 2 - 4 \quad B = (2^3 + 5 \cdot 2) - 7 \cdot 4 \quad \Gamma = [(2^3 + 5 \cdot 2) - 7^2 - 4 \cdot 5] + 7 \cdot 4$$

**Basic definition:** Algebraic expressions are expressions that contain numbers, operations, and variables.

examples:

$$A = 2^4 + 3 \cdot 2 - 7^2 + 6x + 12 \quad B = x^2 - 5x + 6 \quad \Gamma = x^3 - 5x^2 + 4x - 10$$

**Basic definition:** An expression is called an integer algebraic expression when only the operations of addition and multiplication are noted among its variables and the exponents of the variables are positive integers (i.e. natural numbers).

Examples

$$A = 5x^2 + 6x \quad B = 5x^3 + 2x$$

**Basic definition:** if in an algebraic expression we replace the variables with numbers and perform the operations then the resulting result is called the numerical value or simply the value of the algebraic expression.

**Exercise- example:** find the numerical value of the expressions

$$A = 3x^2 + 2x \quad \text{if } x = 4$$

$$B = 6x + 12, \text{ if } x = -2$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12, \text{ if } x = -3$$

**Λύση**

$$A = 3x^2 + 2x \quad 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 16 + 2 \cdot 4 = 48 + 8 = 56 \quad \text{so } \underline{A = 56}$$

$$B = 6x + 12 = 6 \cdot (-2) + 12 = -12 + 12 = 0, \quad \text{so } \underline{B = 0}$$

$$\Gamma = x^2 + 5x + 12 = (-3)^2 + 5 \cdot (-3) + 12 = 9 + 5(-3) + 12 = 9 - 15 + 12 = 21 - 15 = 6 \quad \text{so } \underline{\Gamma = 6}$$

**exercise-task:** calculate the value of algebraic expressions:

$$A = 5x + 2 \quad \text{if } x = 7$$

$$B = x^2 - 5x + 2, \quad \text{if } x = -2$$

$$\Gamma = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad \text{if } x = -1$$

**Basic definition:** Mononyms are integer algebraic expressions in which only the multiplication operation is noted (written) between the numerical factor and the variable

$$\text{Examples: } 5x^3, \quad -6x, \quad 2x^2y^3\omega^5, \quad -3xy^3, \quad -\frac{3}{7}x^3y$$

### Βασικός ορισμός(Συντελεστής μονωνύμου)

Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονωνύμου

Παραδείγματα:

- Στο μονώνυμο  $5x^3$  ο συντελεστής είναι 5
- Στο μονώνυμο  $-3xy^3$  ο συντελεστής είναι -3

### Βασικός ορισμός (Κύριο μέρος):

Σε κάθε μονώνυμο το γινόμενο όλων των μεταβλητών του υψωμένο στους αντίστοιχους εκθέτες λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου

παραδείγματα

- Στο μονώνυμο  $5x^3$  το κύριο μέρος είναι  $x^3$
- Στο μονώνυμο  $-\frac{3}{7}x^3y$  το κύριο μέρος είναι  $x^3y$

**Άσκηση παράδειγμα :** Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
$13x^5y^3$	13	$x^5y^3$
$-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$	$-\frac{1}{2}$	$x^3y^6\omega^2$

**Άσκηση εργασία :** Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
$-13x^5y^2\omega$		
$14x^2y^3\omega^6$		
$-\frac{2}{3}x$		
$-2x^3$		

### Βασικός ορισμός( Βαθμός μονωνύμου)

Βαθμός ενός μονωνύμου ως μία μεταβλητή ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του ονομάζεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του

Παραδείγματα

A) το μονώνυμο  $8x^3y^4$  έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό, ως προς ψ 4, βαθμό προς x και ψ το μονώνυμο έχει βαθμό  $3+4 = 7$

B) το μονώνυμο  $-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$  έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό ως προς ψ 6,

βαθμό ως προς ω 2, βαθμό προς x και ψ και ω  $3+6+2 = 11$

**άσκηση εργασία:** να βρείτε το βαθμό του μονωνύμου  $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$

ως προς χ, ως προς ψ, ως προς ω ως προς x και ψ και ω

### Basic definition (Coefficient of a mononyms)

In every definition the arithmetical factor is called the coefficient of the mononyms

Examples:

In the mononyms  $5x^3$  the coefficient is 5

In the mononyms  $-3xy^3$  the coefficient is -3

### basic definition (Principal part):

In every monomial the product of all its variables raised to the corresponding exponents is called the principal part of the monomial

examples

- In the monomial  $5x^3$  the principal part is  $x^3$
- In the monomial  $-\frac{3}{7}x^3y$  the principal part is  $x^3y$

**Exercise example:** Complete the following table

monomial	coefficient	Principal part
$13x^5y^3$	13	$x^5y^3$
$-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$	$-\frac{1}{2}$	$x^3y^6\omega^2$

**Exercise-homework:** Complete the following table

monomial	coefficient	Principal part
$-13x^5y^2\omega$		
$14x^2y^3\omega^6$		
$-\frac{2}{3}x$		
$-2x^3$		

### Basic definition ( Degree of a monomial)

The degree of a monomial as a variable is called the exponent of this variable.

The degree of a monomial with respect to all its variables is called the sum of the exponents of its variables

Examples

A) the monomial  $8x^3y^4$  has degree with respect to x 3 degree, with respect to ψ degree, with respect to x and ψ the monomial has degree  $3+4 = 7$

B) the monomial  $-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$  has degree with respect to x 3, degree with respect to

ψ 6, degree with respect to ω 2 degree with respect to x and ψ and ω  $3+6+2 = 11$

**exercise work:** find the degree of the monomial

$\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$  with respect to x, y, ω,  $x+y+\omega$

### Βασικός ορισμός (όμοια μονώνυμα)

τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια

#### παραδείγματα

- τα μονώνυμα  $2x^2y^3$  και  $-5x^2y^3$  είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος
- τα μονώνυμα  $2xy^3\omega^2$ ,  $\frac{3}{2}xy^3\omega^2$  είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος

**άσκηση εργασία** να εξετάσετε αν τα επόμενα μονώνυμα είναι όμοια

- $2x^2y^3$ ,  $-5x^2y^3$ ,  $7x^2y^3$
- $8xy$ ,  $-17xy$
- $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$ ,  $x^5y^3\omega^2$

### Βασικός ορισμός(ίσα μονώνυμα )

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα μονώνυμα

### Βασικός ορισμός αντίθετα μονώνυμα

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές λέγονται αντίθετα μονώνυμα

#### παραδείγματα

- τα μονώνυμα  $-5x^2y^3$ ,  $5x^2y^3$  είναι αντίθετα μονώνυμα
- τα μονώνυμα  $8xy$ ,  $-8xy$  είναι αντίθετα μονώνυμα

**Βασικός ορισμός** οι αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα και ονομάζονται σταθερά μονώνυμα

#### παραδείγματα

- 17 σταθερό μονώνυμο
- 23 σταθερό μονώνυμο
- 0 σταθερό μονώνυμο

### Βασική παρατήρηση

Κάθε σταθερό μονώνυμο( $\neq 0$ ) έχει βαθμό μηδέν

### Βασικός ορισμός:

Το σταθερό μονώνυμο 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό

### άσκηση εργασία

α) ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 12 και μεταβλητές  $x$ ,  $\psi$  να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός ως προς  $x$  είναι 4 και ως προς  $\psi$  είναι 7

β) ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 5 και μεταβλητές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  να προσδιορίσετε το μονώνυμο αν ο βαθμός ως προς  $\alpha$  είναι 2, ο βαθμός ως προς  $\beta$  είναι 3, ο βαθμός ως προς  $\alpha, \beta$  και  $\gamma$  είναι 9

### basic definition (similar monomials)

monomials that have the same principal part are called similar monomials

- monomials  $2x^2y^3$  and  $-5x^2y^3$  are similar, as they have the same principal part
- monomials  $2xy^3\omega^2$ ,  $\frac{3}{2}xy^3\omega^2$  are similar, as they have the same principal part

**exercise work:** examine whether the following monomials are similar

- $2x^2y^3$ ,  $-5x^2y^3$ ,  $7x^2y^3$
- $8xy$ ,  $-17xy$
- $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$ ,  $x^5y^3\omega^2$

### basic definition (equal monomials )

Identical monomials that have the same coefficient are called equal monomials

### basic definition opposite monomials

Identical monomials that have opposite coefficients are called opposite monomials

#### examples

- the monomials  $-5x^2y^3$ ,  $5x^2y^3$  are opposite monomials
- the monomials  $8xy$ ,  $-8xy$  are opposite monomials

**Basic definition** numbers are considered monomials and are called constant monomials

#### examples

- 17 constant monomial
- 23 constant monomial
- 0 constant monomial

**Basic observation** every constant monomial( $\neq 0$ ) has degree 0

**basic definition:** The constant monomial 0 is called the zero monomial and has no degree

### exercise work

a) a monomial has coefficient 12 and variables  $x$ ,  $\psi$  determine the monomial, if the degree to  $x$  is 4 and with respect to  $x$  and  $\psi$  is 7

b) a monomial has coefficient 5 and variables  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  find the monomial if the degree to  $\alpha$  is 2 the degree to  $\beta$  is 3 the degree with respect to  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$  is 9

## Πράξεις με μονώνυμα (πρόσθεση μονωνύμων)

**βασικός κανόνας:** το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους

**παρατήρηση** δηλαδή για να προσθέσουμε όμοια μονώνυμα πρέπει να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

### παραδείγματα

A.  $2x^3+5x^3 = 7x^3$       C.  $9x^2y+5x^2y = 14x^2y$   
B.  $7x^2-2x^2 = 5x^2$       D.  $8a^4+5a^4-2a^4 = 11a^4$

### άσκηση εργασία

να βρείτε τα αθροίσματα ή να κάνετε τις προσθέσεις

A.  $+4x+5x = \dots$       E.  $-2x^3-7x^3 = \dots$   
B.  $10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2 = \dots$       F.  $2x^8-3x^8 = \dots$   
C.  $-x^2-3x^2 = \dots$   
D.  $-19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega$

## πολλαπλασιασμός μονωνύμων( βασικός κανόνας)

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της

**παρατήρηση** για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα πολλαπλασιάζουμε αριθμούς με αριθμούς και μεταβλητές με μεταβλητές δηλαδή γράμματα με γράμματα

**παρατήρηση** πρέπει να θυμάμαι ότι  $a^k \cdot a^\lambda = a^{k+\lambda}$

### παραδείγματα

A.  $+4x^2 \cdot 3x^3 = +12x^5$       C.  $-4\omega^2 \cdot (-3\omega^4) = 12\omega^6$   
B.  $12x^3y \cdot (-3x^5y^2) = -36x^8y^3$

### άσκηση εργασία

A.  $x^3 \cdot x^2 = \dots$       C.  $x \cdot 2x^2 \cdot x^3 \cdot 0.5x^4$   
B.  $-2x^3 \cdot (-5x) = \dots$       D.  $-3xy^2 \cdot 3x^2y \cdot \frac{1}{9}x^3y$   
E.  $\frac{1}{3}x^3cv^2 \cdot (-3x^2c^3v) = \dots$       F.  $\sqrt{3}\Psi^4 \cdot \sqrt{012}\Psi^3$

## Operations with monomials( addition of monomials)

**basic rule:** the sum of similar monomials is a monomial similar to them and has a coefficient the sum of their coefficients

**observation** that is, to add similar monomials we must reduce like terms

### examples

A.  $2x^3+5x^3 = 7x^3$       C.  $9x^2y+5x^2y = 14x^2y$   
B.  $7x^2-2x^2 = 5x^2$       D.  $8a^4+5a^4-2a^4 = 11a^4$

### exercise work

find the sums or do the additions

A.  $+4x+5x = \dots$       E.  $-2x^3-7x^3 = \dots$   
B.  $10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2 = \dots$       F.  $2x^8-3x^8 = \dots$   
C.  $-x^2-3x^2 = \dots$   
D.  $-19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega$

## multiplication of monomials (basic rule)

The product of monomials is a monomial that has a coefficient the product of their coefficients and a principal part the product of all their variables with the exponent of each variable the sum of its exponents

**note** to multiply monomials we multiply numbers with numbers and variables with variables i.e. letters with letters

**note** I must remember that  $a^k \cdot a^\lambda = a^{k+\lambda}$

### examples

A.  $+4x^2 \cdot 3x^3 = +12x^5$       C.  $-4\omega^2 \cdot (-3\omega^4) = 12\omega^6$   
B.  $12x^3y \cdot (-3x^5y^2) = -36x^8y^3$

### Homework

A.  $x^3 \cdot x^2 = \dots$       C.  $x \cdot 2x^2 \cdot x^3 \cdot 0.5x^4$   
B.  $-2x^3 \cdot (-5x) = \dots$       D.  $-3xy^2 \cdot 3x^2y \cdot \frac{1}{9}x^3y$   
E.  $\frac{1}{3}x^3cv^2 \cdot (-3x^2c^3v) = \dots$       F.  $\sqrt{3}\Psi^4 \cdot \sqrt{012}\Psi^3$

## Διαίρεση μονωνύμων( βασικός κανόνας)

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα διαιρούμε τους συντελεστές και τις μεταβλητές

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των δυνάμεων  $\alpha^k : \alpha^\lambda = \alpha^{k-\lambda}$

**άσκηση παράδειγμα** να γίνουν οι επόμενες διαιρέσεις

A.  $+12\chi^3 : (3\chi^2) = +4\chi$

C.  $-4\omega^3 : (-2\omega) = 2\omega^2$

B.  $10\alpha^3 : (-5\alpha^3) = -2$

D.  $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

**βασική παρατήρηση** το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι απαραίτητα μονώνυμο,

μπορεί να είναι άλλα σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι μονώνυμο

**άσκηση εργασία** να κάνετε τις πράξεις

I.  $20\chi^3 : 10\chi^2 = \dots$

II.  $-25\zeta^2 : (-5\zeta) = \dots$

III.  $\frac{1}{3}x^2 : (-\frac{1}{6}x) = \dots$

IV.  $0,5\alpha^3 : 0,5\alpha^4 = \dots$

## ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α)  $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2$ ,

β)  $12a\beta^3 - 6a\beta^3 + 3\beta^3a$

γ)  $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3$ ,

δ)  $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α)  $(2x^5y^2) \cdot (-3x^4y^2) \cdot (\frac{1}{6}x^2y\omega^2)$ ,

β)  $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2 \cdot (2xy\omega)^3$

γ)  $5x^2y \cdot (-2xy^2) \cdot (\frac{1}{10}xy)$ ,

δ)  $-4a^2\beta \cdot 3a\beta^2\gamma^3 \cdot \frac{1}{6}a\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α)  $(\frac{1}{3}x^2y^4) : (-\frac{1}{6}xy^2)$ , β)  $(-2x^4y^3\omega^2) : (-3x^2y^3\omega)$ , γ)  $(-6x^5y^2)^2 : (-12x^8y^3)$

## Division of monomials (basic rule)

To divide two monomials we divide the coefficients and variables using the power

property  $\alpha^k : \alpha^\lambda = \alpha^{k-\lambda}$

**exercise example** calculate the following

A.  $+12\chi^3 : (3\chi^2) = +4\chi$

C.  $-4\omega^3 : (-2\omega) = 2\omega^2$

B.  $10\alpha^3 : (-5\alpha^3) = -2$

D.  $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

**basic observation** the quotient of two monomials is not necessarily a monomial, it can be other in some cases it is not a monomial

**exercise homework:** do the operations

I.  $20\chi^3 : 10\chi^2 = \dots$

II.  $-25\zeta^2 : (-5\zeta) = \dots$

III.  $\frac{1}{3}x^2 : (-\frac{1}{6}x) = \dots$

IV.  $0,5\alpha^3 : 0,5\alpha^4 = \dots$

## REVIEW OF MONOMIALS(SIMPLIFY AS MUCH AS YOU CAN)

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α)  $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2$ ,

β)  $12a\beta^3 - 6a\beta^3 + 3\beta^3a$

γ)  $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3$ ,

δ)  $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α)  $(2x^5y^2) \cdot (-3x^4y^2) \cdot (\frac{1}{6}x^2y\omega^2)$ ,

β)  $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2 \cdot (2xy\omega)^3$

γ)  $5x^2y \cdot (-2xy^2) \cdot (\frac{1}{10}xy)$ ,

δ)  $-4a^2\beta \cdot 3a\beta^2\gamma^3 \cdot \frac{1}{6}a\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α)  $(\frac{1}{3}x^2y^4) : (-\frac{1}{6}xy^2)$ ,

β)  $(-2x^4y^3\omega^2) : (-3x^2y^3\omega)$ ,

γ)  $(-6x^5y^2)^2 : (-12x^8y^3)$

## ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

**Βασικός ορισμός:** το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια μονώνυμα είναι μία αλγεβρική παράσταση που ονομάζεται **πολυώνυμο**.

Παραδείγματα:

- A.  $2x^3+6x$                       C.  $3xy+6x^3y+8xy^2$   
B.  $x^2+5x+6$                       D.  $8x^3+7x^2-6x+5$

**Βασική παρατήρηση:** αν το πολυώνυμο έχει

- δύο όρους ονομάζεται διώνυμο
- τρεις όρους ονομάζεται τριώνυμο

**βασικός ορισμός:** κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο ονομάζεται όρος του πολυωνύμου. Για παράδειγμα στο πολυώνυμο  $8x^3+7x^2-6x+5$ , οι όροι είναι τα μονώνυμα  $8x^3$ ,  $7x^2$ ,  $-6x$ ,  $5$ ,

**άσκηση εργασία:** Να γράψετε τους όρους στα επόμενα πολυώνυμα:

- α)  $4x^2-35x+6$                       β)  $2x^3+6x^2-7x + \frac{3}{4}$                       γ)  $3xy+6x^3y+8xy^2$

**Βασικός ορισμός:** Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Παραδείγματα

- A) το πολυώνυμο  $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$  είναι τρίτου βαθμούς προς  $x$   
B) το πολυώνυμο  $8x^4+4x^2-6x^3+5x^5$  είναι 5ου βαθμούς προς  $x$

**Βασικός ορισμός:** Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του (δηλαδή το μεγαλύτερο άθροισμα εκθετών στις μεταβλητές του)

παραδείγματα

- A) Το πολυώνυμο  $6x^2y+2xy^3-4x^4y^2$  είναι
- 4<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$ ,
  - 3<sup>ου</sup> βαθμού προς  $y$
  - 6<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$  και  $y$ .
- B) το πολυώνυμο  $3x^5y^2+7x^2y^6-4x^3y^3$  είναι
- 5<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$
  - 6<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $y$
  - 8<sup>ου</sup> βαθμού ως προς  $x$  και  $y$

## POLYONYMS

**Basic definition:** the sum of monomials that are not identical monomials is an algebraic expression called a **polynomial**.

Examples:

- C.  $2x^3+6x$                       C.  $3xy+6x^3y+8xy^2$   
D.  $x^2+5x+6$                       D.  $8x^3+7x^2-6x+5$

**Basic observation:** if the polynomial has

- two terms it is called a binomial
- three terms it is called a trinomial

**basic definition:** each monomial contained in a polynomial is called a term of the polynomial. For example in the polynomial  $8x^3+7x^2-6x+5$ , the terms are the monomials  $8x^3$ ,  $7x^2$ ,  $-6x$ ,  $5$ ,

**exercise homework:** Write the terms in the following polynomials:

- a)  $4x^2-35x+6$                       b)  $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$                       c)  $3xy+6x^3y+8xy^2$

**Basic definition:** The degree of a polynomial with respect to one of its variables is the largest exponent of that variable.

Examples

- A) the polynomial  $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$  is of the third degree in  $x$   
B) the polynomial  $8x^4+4x^2-6x^3+5x^5$  is of the fifth degree in  $x$

**Basic definition:** The degree of a polynomial is the largest of the degrees of its terms (i.e. the largest sum of exponents in its variables)

examples

- A) The polynomial  $6x^2y+2xy^3-4x^4y^2$  is of the
- 4th degree in  $x$ ,
  - 3rd degree in  $y$
  - 6th degree in  $x$  and  $y$ .
- B) the polynomial  $3x^5y^2+7x^2y^6-4x^3y^3$  is of the
- 5th degree in  $x$
  - 6th degree in  $y$
  - 8th degree in  $x$  and  $y$

**άσκηση εργασία:** στα επόμενα πολυώνυμα να βρείτε

1.  $3xy+2x^3y+5xy^4$       2.  $5x^2y+9xy+12x^6y^2$       3.  $-\frac{3}{4}x^2y^3+2xy^3-4x^5y^2$

- α) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς x  
β) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς y  
γ) του βαθμό των πολυωνύμων ως προς x και y

**βασικός ορισμός:** κάθε αριθμός ονομάζεται σταθερό πολυώνυμο.

**βασικός ορισμός:** ο αριθμός μηδέν (0) λέγεται μηδενικό πολυώνυμο

**βασική παρατήρηση:** όλα τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν (0). Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

**βασική παρατήρηση:** όταν γράφουμε ένα πολυώνυμο κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο βαθμός του προηγούμενου όρου να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του επόμενου όρου τότε λέμε ότι έχουμε το πολυώνυμο κατά φθίνουσες δυνάμεις του x

παραδείγματα

$$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$$

$$B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$$

**άσκηση εργασία:** να γράψετε τα επόμενα πολυώνυμα κατά φθίνουσες δυνάμεις του x:

$$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$$

$$B(x) = x^2+3x^5-14x^3-35x+6x^7$$

$$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+5x^6$$

**βασικός ορισμός:** αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο έναν αριθμό.

**άσκηση παράδειγμα:**

Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

**A.  $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$ , για  $x = 1$**

Λύση

$$P(1) = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 7 \quad \text{άρα} \quad P(1) = 4 - 5 + 7, \quad P(1) = 6$$

**B.  $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ , για  $x = -2$**

Λύση

$$Q(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 3 \quad \text{άρα} \quad Q(-2) = 8 + 8 + 3, \quad Q(-2) = 19$$

**άσκηση εργασία:** να βρείτε την αριθμητική τιμή των πολυωνύμων

$$A(x) = 3x + 12, \quad \text{για } x = 2$$

$$B(x) = x^2 + 3x - 5, \quad \text{για } x = 2 \quad \Gamma(x) =$$

$$8x^5 + 4x^2 - 6x^3 + 1, \quad \text{για } x = -1$$

**exercise homework:** in the following polynomials find

1.  $3xy+2x^3y+5xy^4$       2.  $5x^2y+9xy+12x^6y^2$       3.  $-\frac{3}{4}x^2y^3+2xy^3-4x^5y^2$

- a) the degree of the polynomials with respect to x  
b) the degree of the polynomials with respect to y  
c) the degree of the polynomials with respect to x and y

**basic definition:** every number is considered a polynomial and is called a constant polynomial

**basic definition:** the number zero (0) is called a zero polynomial

**basic observation:** all constant polynomials have degree zero (0). For the zero polynomial no degree is defined.

**basic observation:** when we write a polynomial in such a way that the degree of the previous term is greater than the degree of the next term, then we say that we have the polynomial in decreasing powers of x

examples

$$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$$

$$B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$$

**exercise homework:** write the following polynomials in decreasing powers of x:

$$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$$

$$B(x) = x^2+3x^5-14x^3-35x+6x^7$$

$$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+5x^6$$

**Basic definition:** the numerical value of a polynomial is the result that results if we replace a number in the polynomial.

**exercise example:**

Find the numerical value of the polynomials

A..  $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$ , for  $x = 1$

Solution

$$P(1) = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 7 \quad \text{so} \quad P(1) = 4 - 5 + 7, \quad P(1) = 6$$

**C.  $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ , για  $x = -2$**

solution

$$Q(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) + 3 \quad \text{so} \quad Q(-2) = 8 + 8 + 3, \quad Q(-2) = 19$$

**exercise homework:** find the numerical value of the polynomials

$$A(x) = 3x + 12, \quad \text{if } x = 2$$

$$B(x) = x^2 + 3x - 5, \quad \text{if } x = 2$$

$$\Gamma(x) = 8x^5 + 4x^2 - 6x^3 + 1, \quad \text{if } x = -1$$

**Βασικός ορισμός:** αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν μονώνυμα που είναι όμοια τότε τα αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο με το άθροισμά τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων

**παραδείγματα** να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στο επόμενο πολυώνυμο

A.  $P(x) = x^3 + 2x + 3x^2 + 5x + 6x^2 + 8$       άρα  $P(x) = x^3 + 9x^2 + 7x + 8$

B.  $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$       άρα  $Q(x) = -3x^3 + 7x^2 + 6$

**άσκηση εργασία:** να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στα επόμενα πολυώνυμα

A.  $P(x) = 2x^3 + 6x - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 5$       C.  $R(x) = x^4 + 9x^2 + 7x^4 + 8x^2 - x^3 + 4x^2 + x^3$

B.  $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$       D.  $S(x) = -x^3 + 7x^2 + 6x^3 - 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x^2 + 3$

## Πράξεις με πολυώνυμα

**α) Πρόσθεση πολυωνύμων:** χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

**Άσκηση παράδειγμα:**

1. Να προσθέσετε τα πολυώνυμα  $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$ ,  $Q(x) = x^2 + 6x + 3$

**Λύση:**

$$P(x) + Q(x) = (4x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 6x + 3) = 4x^2 - 5x + 7 + x^2 + 6x + 3 = 5x^2 + x + 10$$

2. Να προσθέσετε τα πολυώνυμα  $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

**Λύση:**

$$A(x) + B(x) = (4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) + (-3x^3 - x^2 + 6x - 3) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 - 3x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

**Άσκηση εργασία:** να κάνετε τις προσθέσεις των επόμενων πολυωνύμων

I.  $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

II.  $G(x) = 2x^2 - 2x + 6$   $E(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

III.  $S(x) = x^3 - x^2 - 2$   $H(x) = 5x^2 - x + 1$

**β) Αφαίρεση πολυωνύμων:** χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

**άσκηση παράδειγμα:** να βρείτε τη διαφορά  $A(x) - B(x)$  όταν

$$A(x) = 4x^2 - 3x + 2, B(x) = -5x^2 + 6x - 3$$

**λύση**

$$A(x) - B(x) = (4x^2 - 3x + 2) - (-5x^2 + 6x - 3) = 4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 6x + 3 = 9x^2 - 9x + 5$$

**ασκήσεις σχολικού βιβλίου και να γίνουν οι πράξεις:**

I.  $(2x^3 + 3x^2 - 5x - 5) + (4x^3 - 5x^2 + 7x + 3) - (3x^3 + 4x^2 - 6x - 4) + 8x^2 - 5 =$

II.  $(2\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 - 7) - (3\alpha^4 + 4\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 + 5) - (2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6) =$

III.  $2\omega^2 - (2\omega^3 + 3\omega^2 - 4\omega - 9) + (2\omega^3 + 4\omega^2 - 4\omega + 3) - 5\omega^2 + 3\omega =$

**Basic definition:** if in a polynomial there are monomials that are identical then we replace them in the polynomial with their sum. This process is called like terms reduction

examples reduce like terms to the following polynomial

A.  $P(x) = x^3 + 2x + 3x^2 + 5x + 6x^2 + 8$  so  $P(x) = x^3 + 9x^2 + 7x + 8$

B.  $Q(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$  so  $Q(x) = -3x^3 + 7x^2 + 6$

**exercise homework:** reduce like terms to the following polynomials

A.  $P(x) = 2x^3 + 6x - 4x^2 + 3x + 2x^2 - 5$       C.  $R(x) = x^4 + 9x^2 + 7x^4 + 8x^2 - x^3 + 4x^2 + x^3$

B.  $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^2 + 6 - 8x^3$       D.  $S(x) = -x^3 + 7x^2 + 6x^3 - 2x^2 - 4x + 3x^2 - 3x^2 + 3$

## Operations with polynomials

**a) Addition of polynomials:** we use the properties of real numbers

**Example exercise:**

1. Add the polynomials  $P(x) = 4x^2 - 5x + 7$ ,  $Q(x) = x^2 + 6x + 3$

**Solution:**

$$P(x) + Q(x) = (4x^2 - 5x + 7) + (x^2 + 6x + 3) = 4x^2 - 5x + 7 + x^2 + 6x + 3 = 5x^2 + x + 10$$

2. Add the polynomials  $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

**Solution:**

$$A(x) + B(x) = (4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) + (-3x^3 - x^2 + 6x - 3) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2 - 3x^3 - x^2 + 6x - 3 = x^3 + 2x^2 + x - 1$$

**Exercise task:** do the additions of the following polynomials

I.  $A(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ ,  $B(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3$

II.  $G(x) = 2x^2 - 2x + 6$   $E(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 1$

III.  $S(x) = x^3 - x^2 - 2$   $H(x) = 5x^2 - x + 1$

**b) Subtraction of polynomials:** we use the properties of real numbers

**exercise example:** find the difference  $A(x) - B(x)$  when

$$A(x) = 4x^2 - 3x + 2, B(x) = -5x^2 + 6x - 3$$

**solution**

$$A(x) - B(x) = (4x^2 - 3x + 2) - (-5x^2 + 6x - 3) = 4x^2 - 3x + 2 + 5x^2 - 6x + 3 = 9x^2 - 9x + 5$$

**textbook exercises and do the operations:**

I.  $(2x^3 + 3x^2 - 5x - 5) + (4x^3 - 5x^2 + 7x + 3) - (3x^3 + 4x^2 - 6x - 4) + 8x^2 - 5 =$

II.  $(2\alpha^4 - 3\alpha^3 + 5\alpha^2 - 7) - (3\alpha^4 + 4\alpha^3 - 5\alpha^2 + 2) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 + 5) - (2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6) =$

III.  $2\omega^2 - (2\omega^3 + 3\omega^2 - 4\omega - 9) + (2\omega^3 + 4\omega^2 - 4\omega + 3) - 5\omega^2 + 3\omega =$

### γ) Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

**Βασικός κανόνας:** Για να πολλαπλασιάσουμε ένα μονώνυμο με ένα πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

**Άσκηση παράδειγμα:** Να κάνετε τις πράξεις:

- A.  $2x \cdot (x^2 - 5x + 7) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 7 = 2x^3 - 10x^2 + 14x$   
B.  $-3x \cdot (x^3 - 6x + 12) = -3x \cdot x^3 + 3x \cdot 6x - 3x \cdot 12 = -3x^4 + 12x^2 - 36x$   
C.  $5x^2 \cdot (2x^2 - 6x + 3) = 5x^2 \cdot 2x^2 - 5x^2 \cdot 6x + 5x^2 \cdot 3 = 10x^4 - 30x^3 + 15x^2$

**Άσκηση εργασία:** Να κάνετε τις πράξεις:

- A.  $3x \cdot (4x^2 - 2x + 3)$  E.  $4x \cdot (3x^2 - 6x + 9)$   
B.  $2x^3 \cdot (x^2 + 3x - 2)$  F.  $-3x^3 \cdot (2x^3 - x^2 + x + 5)$   
C.  $-2x^4 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 6)$  G.  $4xy(3x^2 + 2xy^2 - 4x^2y)$   
D.  $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x^2 + x - 3)$  H.  $5x^3y^2(x^2y^3 + 2x^3y^2 - 4x^2y)$

**Βασικός κανόνας:** Για να πολλαπλασιάσουμε ένα πολυώνυμο με ένα πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πρώτου πολυωνύμου με κάθε όρο του δεύτερου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

**Άσκηση παράδειγμα:** Να κάνετε τις πράξεις

- A.  $(3x^2 + 4) \cdot (2x - 7) =$   
 $3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 7 + 4 \cdot 2x - 4 \cdot 7 =$   
 $6x^3 - 21x + 8x - 28 =$   
 $6x^3 - 13x - 28$   
B.  $(4x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 3) =$   
 $4x^2 \cdot x^2 + 4x^2 \cdot 6x + 4x^2 \cdot 3 - 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 6x - 5x \cdot 3 + 7x^2 + 7 \cdot 6x + 7 \cdot 3 =$   
 $4x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 5x^3 - 30x^2 - 15x + 7x^2 + 42x + 21 =$   
 $4x^4 + 19x^3 - 11x^2 + 27x + 21$

**Άσκηση Εργασία:** Να κάνετε τις πράξεις:

- $(x + 3)(x - 5) =$
- $(x + 7)(x - 2) =$
- $(3x + 10)(x - 4) =$
- $(2 - x)(-4x - 3) =$
- $(-5x^2 + 1)(4x + 3) =$
- $(2a + 3b)(2a - 3b) =$
- $(5x - 6y)(5x + 6y) =$
- $(10x - 5y)(10x - 5y) =$
- $(2x - 7y)(2x - 7y) =$
- $(3y + x)(x + 3y) =$
- $(5 + 3x)(5 + 3x) =$

### c) Multiplication of polynomials

**Basic rule:** To multiply a monomial by a polynomial, we multiply the monomial by each term of the polynomial and add the resulting products.

**Example exercise:** Do the operations:

- A.  $2x \cdot (x^2 - 5x + 7) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 7 = 2x^3 - 10x^2 + 14x$   
B.  $-3x \cdot (x^3 - 6x + 12) = -3x \cdot x^3 + 3x \cdot 6x - 3x \cdot 12 = -3x^4 + 12x^2 - 36x$   
C.  $5x^2 \cdot (2x^2 - 6x + 3) = 5x^2 \cdot 2x^2 - 5x^2 \cdot 6x + 5x^2 \cdot 3 = 10x^4 - 30x^3 + 15x^2$

**Workout exercise:** Do the operations:

- A.  $3x \cdot (4x^2 - 2x + 3)$  E.  $4x \cdot (3x^2 - 6x + 9)$   
B.  $2x^3 \cdot (x^2 + 3x - 2)$  F.  $-3x^3 \cdot (2x^3 - x^2 + x + 5)$   
C.  $-2x^4 \cdot (4x^3 - 2x^2 + 6)$  G.  $4xy(3x^2 + 2xy^2 - 4x^2y)$   
D.  $-3x^2 \cdot (4x^3 - 5x^2 + x - 3)$  H.  $5x^3y^2(x^2y^3 + 2x^3y^2 - 4x^2y)$

**Basic rule:** To multiply a polynomial by a polynomial, we multiply each term of the first polynomial by each term of the second polynomial and add the resulting products.

**Example exercise:** Do the operations

- A.  $(3x^2 + 4) \cdot (2x - 7) =$   
 $3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot 7 + 4 \cdot 2x - 4 \cdot 7 =$   
 $6x^3 - 21x + 8x - 28 =$   
 $6x^3 - 13x - 28$   
B.  $(4x^2 - 5x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 3) =$   
 $4x^2 \cdot x^2 + 4x^2 \cdot 6x + 4x^2 \cdot 3 - 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 6x - 5x \cdot 3 + 7x^2 + 7 \cdot 6x + 7 \cdot 3 =$   
 $4x^4 + 24x^3 + 12x^2 - 5x^3 - 30x^2 - 15x + 7x^2 + 42x + 21 =$   
 $4x^4 + 19x^3 - 11x^2 + 27x + 21$

**Exercise task:** Do the operations:

- $(x + 3)(x - 5) =$
- $(x + 7)(x - 2) =$
- $(3x + 10)(x - 4) =$
- $(2 - x)(-4x - 3) =$
- $(-5x^2 + 1)(4x + 3) =$
- $(2a + 3b)(2a - 3b) =$
- $(5x - 6y)(5x + 6y) =$
- $(10x - 5y)(10x - 5y) =$
- $(2x - 7y)(2x - 7y) =$
- $(3y + x)(x + 3y) =$
- $(5 + 3x)(5 + 3x) =$

### Βασική παρατήρηση: Ισότητα πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα  $A(x)$  και  $B(x)$  είναι ίσα όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των αντιστοιχών όρων είναι ίσοι.

#### Παράδειγμα:

Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα, όπου  $P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1)$ ,  $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ .

#### Λύση:

$$P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1) = (-3x \cdot 2x + 3x \cdot 4) \cdot (x-1) = (-6x^2 + 12x) \cdot (x-1) = -6x^2 \cdot x + 6x^2 \cdot 1 + 12x \cdot x - 12x \cdot 1 = -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x,$$

$$\text{Άρα } P(x) = -6x^3 + 18x^2 - 12x.$$

$$\text{Θέλω } P(x) = Q(x), \text{ δηλαδή: } -6x^3 + 18x^2 - 12x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\text{Πρέπει: } \alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12, \delta = 0$$

#### Άσκηση Εργασία:

Βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ώστε τα πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  να είναι ίσα:

$$P(x) = 2 \cdot (-4x+1) \cdot (x+3), \quad Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

### Αξιοσημείωτες Ταυτότητες:

**Βασικός Ορισμός:** Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει (δηλαδή ισχύει) για όλες τις τιμές των μεταβλητών.

#### Παραδείγματα:

- Η ισότητα  $\alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$  είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής  $\alpha$ .
- Η ισότητα  $0 \cdot x = 0$  είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής  $x$ .
- Η ισότητα  $x+y = 0$  δεν είναι ταυτότητα γιατί δεν ισχύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών  $x, y$  (γιατί πχ για  $x = 5$  και  $y = 3$   $x+y = 0, 5+3 = 0, 8=0$  δεν ισχύει)

### 1. Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

#### Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Άσκηση παράδειγμα:** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\text{I. } (x+3)^2 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\text{II. } (y+5)^2 = y^2 + 2y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$\text{III. } (\omega+4)^2 = \omega^2 + 2\omega \cdot 4 + 4^2 = \omega^2 + 8\omega + 16$$

$$\text{IV. } (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\text{V. } (3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$\text{VI. } (x+x^3)^2 = x^2 + 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$$

### Basic observation: Equality of polynomials

Two polynomials  $A(x)$  and  $B(x)$  are equal when they are of the same degree and the coefficients of the corresponding terms are equal.

#### Example:

Find the values of  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  so that the polynomials  $P(x)$  and  $Q(x)$  are equal, where  $P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1)$ ,  $Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ .

#### Solution:

$$P(x) = 3x \cdot (-2x+4) \cdot (x-1) = (-3x \cdot 2x + 3x \cdot 4) \cdot (x-1) = (-6x^2 + 12x) \cdot (x-1) = -6x^2 \cdot x + 6x^2 \cdot 1 + 12x \cdot x - 12x \cdot 1 = -6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x,$$

$$\text{I want } P(x) = Q(x), \text{ that is: } -6x^3 + 18x^2 - 12x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

$$\text{So } \alpha = -6, \beta = 18, \gamma = -12, \delta = 0$$

#### Exercise Work:

Find the values of  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  so that the polynomials  $P(x)$  and  $Q(x)$  are equal:

$$P(x) = 2 \cdot (-4x+1) \cdot (x+3), \quad Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

### Notable Identities:

**Basic Definition:** An identity is any equality that contains variables and is true (i.e. valid) for all values of the variables.

#### Examples:

- The equality  $\alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3$  is an identity because it is valid for all values of the variable  $\alpha$ .
- The equality  $0 \cdot x = 0$  is an identity because it is valid for all values of the variable  $x$ .
- The equality  $x+y = 0$  is not an identity because it is not valid for all values of the variables  $x, y$  (because e.g. for  $x = 5$  and  $y = 3$   $x+y = 0, 5+3 = 0, 8=0$  is not valid)

### 1. Square sum: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

#### Proof:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Example exercise:** Find the expansions:

$$\text{I. } (x+3)^2 = x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\text{II. } (y+5)^2 = y^2 + 2y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$\text{III. } (\omega+4)^2 = \omega^2 + 2\omega \cdot 4 + 4^2 = \omega^2 + 8\omega + 16$$

$$\text{IV. } (2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\text{V. } (3x+2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$\text{VI. } (x+x^3)^2 = x^2 + 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$$

**Άσκηση εργασία:** να βρείτε τα αναπτύγματα

- A.  $(x+2)^2$  E.  $(y+4)^2$   
B.  $(\omega+3)^2$  F.  $(3x+1)^2$   
C.  $(2x+5y)^2$  G.  $(x+\frac{1}{2})^2$   
D.  $(2+y^3)^2$  H.  $(x^3+x^2)^2$

## 2. Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**Απόδειξη:**

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Άσκηση παράδειγμα:** Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

$$(x-3)^2 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(y-6)^2 = y^2 - 2y \cdot 6 + 6^2 = y^2 - 12y + 36$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$(2x-x^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = 4x^2 - 4x^4 + x^6$$

**Άσκηση εργασία:** Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

$(x-4)^2$  E.  $(4-2x)^2$

$(x^2-2)^2$  F.  $(6x-5)^2$

$(3x-4y)^2$  G.  $(2x^2-7x)^2$

$(x^3-2x^2)^2$  H.  $(\sqrt{x}-3)^2$

## A. Κύβος αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**Απόδειξη:**

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta \cdot \beta + \beta^3 = \\ &\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

## 3B. Κύβος διαφοράς: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

(χωρίς απόδειξη)

**Exercise:** find the expansions

- A.  $(x+2)^2$  E.  $(y+4)^2$   
B.  $(\omega+3)^2$  F.  $(3x+1)^2$   
C.  $(2x+5y)^2$  G.  $(x+\frac{1}{2})^2$   
D.  $(2+y^3)^2$  H.  $(x^3+x^2)^2$

## 2. Square of difference: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

**Proof:**

$$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta) \cdot (\alpha-\beta) = \alpha^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

**Exercise- Example:** find the expansions

$$(x-3)^2 = x^2 - 2x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(y-6)^2 = y^2 - 2y \cdot 6 + 6^2 = y^2 - 12y + 36$$

$$(2y-3)^2 = (2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3 + 3^2 = 4y^2 - 12y + 9$$

$$(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

$$(2x-x^3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot x^3 + (x^3)^2 = 4x^2 - 4x^4 + x^6$$

**Exercise:** find the expansions

$(x-4)^2$  E.  $(4-2x)^2$

$(x^2-2)^2$  F.  $(6x-5)^2$

$(3x-4y)^2$  G.  $(2x^2-7x)^2$

$(x^3-2x^2)^2$  H.  $(\sqrt{x}-3)^2$

## A. $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

**Proof:**

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^3 &= (\alpha+\beta) \cdot (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) = \\ &\alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta \cdot \beta + \beta^3 = \\ &\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3\end{aligned}$$

## 3B. $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

(no proof included)

**Άσκηση παράδειγμα** Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

- I.  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- II.  $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
- III.  $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- IV.  $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 8y^3$

**Άσκηση εργασία** Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

- A.  $(x + 2)^3$
- B.  $(y - 1)^3$
- C.  $(2x^2 + 3x)^3$
- D.  $(2y - 1)^3$

### 3. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**Απόδειξη:**

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

**Άσκηση παράδειγμα:** να βρείτε τα αναπτύγματα

- I.  $(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- II.  $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2 - 2^2 = \omega^2 - 9$
- III.  $(\chi+4)(4-\chi) = (4+\chi)(4-\chi) = 4^2 - \chi^2 = 16 - \chi^2$
- IV.  $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2 - 5^2 = x - 25$
- V.  $(x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x^2)^2 - 4 = x^4 - 4$
- VI.  $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2 - 2^2 = 36\omega^2 - 4$

**Άσκηση εργασία:** Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(\chi + 3)(\chi - 3)$	ii) $(\chi - 1)(\chi + 1)$
iii) $(2\chi - 5)(2\chi + 5)$	iv) $(1 - 3\chi)(1 + 3\chi)$
v) $(2\chi + 5\psi)(2\chi - 5\psi)$	vi) $(3\kappa - 2\lambda)(3\kappa + 2\lambda)$
vii) $(\chi^2 + 1)(\chi^2 - 1)$	viii) $(\chi^3 - 2)(\chi^3 + 2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5} - \frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}\chi - \frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi + \frac{3}{4}\psi\right)$

**Exercise- Example:** find the expansions written below

- I.  $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
- II.  $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
- III.  $(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
- IV.  $(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 3y + 3 \cdot 2x \cdot (3y)^2 - (3y)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 8y^3$

**Exercise- Homework:** find the expansions written below

- A.  $(x + 2)^3$
- B.  $(y - 1)^3$
- C.  $(2x^2 + 3x)^3$
- D.  $(2y - 1)^3$

### 4. $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

**Proof:**

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

**Exercise- Example:** find the expansions written below

- I.  $(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
- II.  $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2 - 2^2 = \omega^2 - 9$
- III.  $(\chi+4)(4-\chi) = (4+\chi)(4-\chi) = 4^2 - \chi^2 = 16 - \chi^2$
- IV.  $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2 - 5^2 = x - 25$
- V.  $(x^2 - 2)(x^2 + 2) = (x^2)^2 - 4 = x^4 - 4$
- VI.  $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2 - 2^2 = 36\omega^2 - 4$

**Exercise- Example:** find the expansions written below

i) $(\chi + 3)(\chi - 3)$	ii) $(\chi - 1)(\chi + 1)$
iii) $(2\chi - 5)(2\chi + 5)$	iv) $(1 - 3\chi)(1 + 3\chi)$
v) $(2\chi + 5\psi)(2\chi - 5\psi)$	vi) $(3\kappa - 2\lambda)(3\kappa + 2\lambda)$
vii) $(\chi^2 + 1)(\chi^2 - 1)$	viii) $(\chi^3 - 2)(\chi^3 + 2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5} - \frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}\chi - \frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi + \frac{3}{4}\psi\right)$

# Review.....

## 1. Find the expansions :

α)  $(x + 5)^2 =$

β)  $(3\alpha - \beta)^2 =$

γ)  $(5x + 4)(5x - 4) =$

δ)  $(\psi + 2)^3 =$

ε)  $(2x - 3)^3 =$

η)  $(3\alpha^2 - \beta^3)(\beta^3 + 3\alpha^2) =$

## 2. Fill in the blanks so that the identities are valid

α.  $(\dots + \dots)^2 = 9x^2 + 12x + \dots$

β.  $(\dots - \dots)^2 = 25x^2 - \dots + 4y^2$

γ.  $(\dots + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$

δ.  $(\dots -)^2 = 16x^4 - 4x + \dots$

ε.  $(2\beta - \dots)^2 = \dots - \dots + 36\gamma^2$

στ.  $(+ \dots)^2 = \dots - \dots + 9x^2y^4$

ζ.  $(5 + \dots)(5 - \dots) = \dots - 16x^2$

η.  $(2\alpha + \dots)^3 = \dots + 3\dots + 3\dots + 27$

θ.  $x^2 + \dots + 16y^2 = (\dots + \dots)^2$

ι.  $\dots + 6\alpha\beta + \beta^2 = (\dots + \dots)^2$

ια.  $\dots - 12xy + 9y^2 = (\dots - \dots)^2$

ιβ.  $\alpha^2x^4 + \dots + \dots = (\dots + \beta y)^2$

ιγ.  $x^{2v} + y^{2v} + \dots = (\dots + \dots)^2$

## 3. Calculate and simplify as much as possible :

α.  $(1 - \alpha)(1 + \alpha) + \alpha^2$

β.  $(x^2 - 1)^2 - 1$

γ.  $(4\alpha - 3\beta)^2 - 16\alpha^2 - 9\beta^2 + 24\alpha\beta$

δ.  $2(x - 5)(x + 5) - (3 - x)^2$

ε.  $2(\kappa + 4)^2 - 3(\kappa + 2)(\kappa - 2)$

στ.  $2(2 - \beta)^2 - 3(\beta - 2)^2$

ζ.  $-9\alpha^2 + (3\alpha + 4\beta)^2 - 24\alpha\beta$

η.  $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x - 9y)$

ια.  $2x^3 - (x^2 + 1)(x - 2) + (x - 1)^3$

ιβ.  $(x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 + 5x^2$

ιγ.  $(\alpha - 2\beta)^2 - 3(\alpha - 3\beta)^2 - (2\alpha + 3\beta)(2\alpha - 3\beta)$

## Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

**Βασικός ορισμός:** Η διαδικασία με την οποία μία αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα ή διαφορά σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται παραγοντοποίηση

**Παραδείγματα:**

- a.  $3x+3y = 3(x+y)$
- b.  $5\alpha-5\beta = 5(\alpha-\beta)$

### Βασικοί τρόποι παραγοντοποίησης:

#### 1<sup>ος</sup> τρόπος: κοινός παράγοντας

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κοινού παράγοντα λαμβάνουμε υπόψη τους κανόνες:

**1<sup>ος</sup> κανόνας:** Από τους συντελεστές (αριθμούς) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των όρων (δηλαδή των αριθμών).

**2<sup>ος</sup> κανόνας:** Από τις μεταβλητές (γράμματα) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα μόνο την κοινή (ίδια) μεταβλητή (γράμμα) στο μικρότερο εκθέτη.

**Παραδείγματα:**

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- a.  $4x^2+6x^3 = 2x^2(2+3x)$
- b.  $4x^2y+8x = 4x(xy+2)$

#### Ασκήσεις:

Σχολικού βιβλίου και...

1.  $kx-2x$   $kx+2x$   $-kx+2x$   $-kx-2x$   $2x+8xy$   $5xy-10y$   $3x-3$   $x^4+x^3$   $x^3-x^2+x$
2.  $5x^2-10x+5xy$   $2x^2+4y+10$   $x^2y+x^2y^2-xy^2$   $k(x+y)+l(x+y)$   $k(x+y)-l(x+y)$
3.  $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$   $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$   $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

#### 2<sup>ος</sup> τρόπος (κοινός παράγοντας κατά ομάδες-ομαδοποίηση)

**Παραδείγματα**

- a)  $\alpha\chi+\alpha\psi+2\chi+2\psi = \alpha(\chi+\psi)+2(\chi+\psi) = (\chi+\psi)(\alpha+2)$
- β)  $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2 + 5)$
- γ)  $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta-3) - 3(\beta-3) = (\beta-3)(\alpha-3)$

## Factorization of Algebraic Expressions

**Basic definition:** The process by which an algebraic expression is converted from a sum or difference to a product of factors is called factorization.

**Examples:**

- a.  $3x + 3y = 3(x + y)$
- b.  $5\alpha - 5\beta = 5(\alpha - \beta)$

### Basic methods of factorization:

#### 1st method: common factor

To factorize an algebraic expression using the common factor method, we consider the following rules:

**1st rule:** From the coefficients (numbers) of the terms of the expression, we take out as a common factor the greatest common divisor of the terms (the numbers).

**2nd rule:** From the variables (letters) of the terms in the expression, we take as a common factor only the common (same) variable (letter) with the smallest exponent.

**Examples:**

Factorize the expressions:

- a.  $4x^2+6x^3 = 2x^2(2+3x)$
- b.  $4x^2y+8x = 4x(xy+2)$

#### Exercises:

From the school book and...

1.  $kx-2x$   $kx+2x$   $-kx+2x$   $-kx-2x$   $2x+8xy$   $5xy-10y$   $3x-3$   $x^4+x^3$   $x^3-x^2+x$
2.  $5x^2-10x+5xy$   $2x^2+4y+10$   $x^2y+x^2y^2-xy^2$   $k(x+y)+l(x+y)$   $k(x+y)-l(x+y)$
3.  $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$   $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$   $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

#### 2nd method (common factor by groups-grouping)

**Examples**

- a)  $\alpha\chi+\alpha\psi+2\chi+2\psi = \alpha(\chi+\psi)+2(\chi+\psi) = (\chi+\psi)(\alpha+2)$
- β)  $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x-4) + 5(x-4) = (x-4)(3x^2 + 5)$
- γ)  $\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta-3) - 3(\beta-3) = (\beta-3)(\alpha-3)$

### Άσκηση- εργασία:

Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες αλγεβρικές παραστάσεις:

1)  $14x + 14y + kx + ky$     $xy + 3yz + 5x + 15z$     $ax - by - bx + ay$     $10x + x^2 - 120y - 12xy$

2)  $3x^2 - 3y^2 - 9xy + xy$     $1 + x^2 - xy + x^2y$     $15x^2y - 20x^2z - 18yz^3 + 24z^3$

3)  $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$     $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$     $|\alpha - \beta|^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma$     $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$

### Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων με διαφορά τετραγώνων

Ισχύει:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \text{ ή}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

### Άσκηση-παράδειγμα:

Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

a)  $x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$

b)  $\omega^2 - 7^2 = (\omega-7)(\omega+7)$

c)  $x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d)  $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$

e)  $\omega - 100 = \omega^2 - 10^2 = (\omega-10)(\omega+10)$

f)  $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$

### Άσκηση επανάληψης:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

$\alpha^2 - \gamma^2$     $x^2 - 1$     $x^2 - 4$     $x^2 - 9$     $x^2 - 64$     $1 - 4x^2$     $4x^2 - 9y^2$     $\alpha^2\beta^2 - 9$     $81\alpha^2 - 49\beta^2$

$16\alpha^2 - x^2y^2\omega^2$     $(x-2y)^2 - 4y^2$     $x^4 - y^4$     $16 - x^4$     $x^6 - y^6$     $3\alpha^3\beta - 27\alpha\beta^3$

### Exercise - homework:

Factorize the following algebraic expressions:

1)  $14x + 14y + kx + ky$     $xy + 3yz + 5x + 15z$     $ax - by - bx + ay$     $10x + x^2 - 120y - 12xy$

2)  $3x^2 - 3y^2 - 9xy + xy$     $1 + x^2 - xy + x^2y$     $15x^2y - 20x^2z - 18yz^3 + 24z^3$

3)  $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$     $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$     $|\alpha - \beta|^2 - \alpha\gamma - \beta\gamma$     $\beta^3 - 3\alpha\beta^2 - 2\alpha\beta + 6\alpha^2$

### Factoring algebraic expressions using the difference of squares

It is always true that:

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \text{ or } \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

### Exercise-Example:

Factorize the following algebraic expressions:

a)  $x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$

b)  $\omega^2 - 7^2 = (\omega-7)(\omega+7)$

c)  $x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d)  $x^2 - 36 = x^2 - 6^2 = (x-6)(x+6)$

e)  $\omega - 100 = \omega^2 - 10^2 = (\omega-10)(\omega+10)$

f)  $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$

### Exercise - homework:

Factorize the following algebraic expressions:

$\alpha^2 - \gamma^2$     $x^2 - 1$     $x^2 - 4$     $x^2 - 9$     $x^2 - 64$     $1 - 4x^2$     $4x^2 - 9y^2$     $\alpha^2\beta^2 - 9$     $81\alpha^2 - 49\beta^2$

$16\alpha^2 - x^2y^2\omega^2$     $(x-2y)^2 - 4y^2$     $x^4 - y^4$     $16 - x^4$     $x^6 - y^6$     $3\alpha^3\beta - 27\alpha\beta^3$

### Ανάπτυγμα τετραγώνου

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \text{ και } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Άσκηση – Παράδειγμα:

- a)  $\chi^2 - 2\chi + 1 = \chi^2 - 2 \cdot \chi \cdot 1 + 1^2 = (\chi - 1)^2$
- b)  $\gamma^2 + 4\gamma + 4 = \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot 2 + 2^2 = (\gamma + 2)^2$
- c)  $4\gamma^2 - 12\gamma + 9 = (2\gamma)^2 - 2 \cdot 2\gamma \cdot 3 + 3^2 = (2\gamma - 3)^2$
- d)  $9\alpha^2 - 24\alpha\beta + 16\beta^2 = (3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot 4\beta + (4\beta)^2 = (3\alpha - 4\beta)^2$

### Άσκηση εργασία:

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- |   |   |
|---|---|
| α. $x^2 + 2x + 1$                         | β. $x^2 - 4x - 4$                               |
| γ. $-4x^2 - 4x - 1$                       | δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$      |
| ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$             | στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$     |
| ζ. $16x^2 + 40xy + 25y^2$                 | η. $-25x^2 + 40xy - 16y^2$                      |
| θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$ | ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$ |

2. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

- |  |  |
|--|--|
| α. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$   | β. $81x^4 - 36x^2 + 4$                           |
| γ. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$  | δ. $x^4 - 2x^2y^3 + y^6$                         |
| ε. $x^6 - 2x^3 + 1$  | στ. $100x^4y^6 - 40x^2y^3$                       |
| ζ. $x^2 + x + \frac{1}{4}$   | η. $25x^2y^2 - 20xy + 4$                         |
| ι. $\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ | ια. $\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}$ |

### Square expansion

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \text{ and } \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Exercise-Example:

- a)  $\chi^2 - 2\chi + 1 = \chi^2 - 2 \cdot \chi \cdot 1 + 1^2 = (\chi - 1)^2$
- b)  $\gamma^2 + 4\gamma + 4 = \gamma^2 + 2 \cdot \gamma \cdot 2 + 2^2 = (\gamma + 2)^2$
- c)  $4\gamma^2 - 12\gamma + 9 = (2\gamma)^2 - 2 \cdot 2\gamma \cdot 3 + 3^2 = (2\gamma - 3)^2$
- d)  $9\alpha^2 - 24\alpha\beta + 16\beta^2 = (3\alpha)^2 - 2 \cdot 3\alpha \cdot 4\beta + (4\beta)^2 = (3\alpha - 4\beta)^2$

### Exercise - homework:

1. Factorize the following algebraic expressions:

- |   |   |
|---|---|
| α. $x^2 + 2x + 1$                         | β. $x^2 - 4x - 4$                               |
| γ. $-4x^2 - 4x - 1$                       | δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$      |
| ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$             | στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$     |
| ζ. $16x^2 + 40xy + 25y^2$                 | η. $-25x^2 + 40xy - 16y^2$                      |
| θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$ | ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$ |

2. Factor the expressions into a product of factors.

- |  |  |
|--|--|
| α. $81\chi^4 - 36\chi^2 + 4$   | β. $81x^4 - 36x^2 + 4$                           |
| γ. $x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4$  | δ. $x^4 - 2x^2y^3 + y^6$                         |
| ε. $x^6 - 2x^3 + 1$  | στ. $100x^4y^6 - 40x^2y^3$                       |
| ζ. $x^2 + x + \frac{1}{4}$   | η. $25x^2y^2 - 20xy + 4$                         |
| ι. $\frac{\alpha^2}{16} + \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ | ια. $\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}$ |

### Σημαντικές Παρατηρήσεις

**A. Η παραγοντοποίηση συνεχίζεται πάντα μέχρι να φτάσουμε σε «γινόμενα πρώτων παραγόντων».**

#### Άσκηση-Παράδειγμα:

- $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)$
- $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2)$
- $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$
- $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

#### Άσκηση – Εργασία:

- |                                     |     |                       |
|-------------------------------------|-----|-----------------------|
| α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ | β.  | $6x^2 - 24$           |
| γ. $15x^2 - 15\delta$ .             |     | $x^4 - 64x^2y^2$      |
| ε. $\kappa^5 - \kappa$              | στ. | $16\alpha^5 - \alpha$ |
| ζ. $x^7 - x^3$                      | η.  | $6x^2 - 96$           |

**B. Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και με άλλους τρόπους, όπως**

#### • η διάσπαση:

- $2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(2\alpha + 3\beta)$
- $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

**• Οι ομάδες της ομαδοποίησης μπορεί να περιέχουν 3-1 προσθετέους:**

$$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y)$$

#### Ασκήσεις:

- $x^2 + 2x + 1 - a^2 =$
- $x^2 - 2ax + a^2 - 16 =$
- $1 - x^2 + 2ax - a^2 =$
- $9a^2 - 4x^2 - 4x - 1 =$
- $25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^6 =$
- $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 =$

### Important....notes

**A. Factorization always continues until we reach a 'product of prime factors'.**

#### Exercise-Example:

- $\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = \alpha(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)$
- $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x - 2)(x + 2)$
- $2x^2 - 8x + 8 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2(x - 2)^2$
- $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

#### Exercise - homework:

- |                                     |     |                       |
|-------------------------------------|-----|-----------------------|
| α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ | β.  | $6x^2 - 24$           |
| γ. $15x^2 - 15$                     | δ.  | $x^4 - 64x^2y^2$      |
| ε. $\kappa^5 - \kappa$              | στ. | $16\alpha^5 - \alpha$ |
| ζ. $x^7 - x^3$                      | η.  | $6x^2 - 96$           |

**B. Factoring can also be done in other ways, such as**

#### • **splitting:**

- $2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\alpha\beta + 3\beta^2 = 2\alpha(\alpha + \beta) + 3\beta(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(2\alpha + 3\beta)$
- $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$

**• Groups in grouping can contain 3-1 terms:**

$$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) - y^2 = (x - 1)^2 - y^2 = (x - 1 - y)(x - 1 + y)$$

#### Homework:

- $x^2 + 2x + 1 - a^2 =$
- $x^2 - 2ax + a^2 - 16 =$
- $1 - x^2 + 2ax - a^2 =$
- $9a^2 - 4x^2 - 4x - 1 =$
- $25x^4 + 10x^2 + 1 - 9x^6 =$
- $x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 =$

## Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και μέγιστος κοινός διαιρέτης ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

**1<sup>ος</sup> κανόνας:** Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινό παραγόντων τους με εκθέτη καθενός στο μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

**2<sup>ος</sup> κανόνας:** Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερο αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.

### Παραδείγματα:

1.  $\text{ΕΚΠ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 72x^3y^2\omega^3$

γιατί

12	18	24		2
6	9	12		2
3	9	6		2
3	9	3		3
1	3	1		3
1	1	1		

$\text{ΕΚΠ}(12,18,24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

$\text{ΜΚΔ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 6xy\omega$

γιατί

12		2	18		2	24		2
6		2	9		3	12		2
3		3	3		3	6		2
1			1			3		3
						1		

$\text{ΜΚΔ}(12,18,24) = 2 \cdot 3 = 6$

2. Να βρείτε το ΕΚΠ που και τον ΜΚΔ των παραστάσεων  $6(x^2-y^2)$ ,  $4(x-y)^2$ ,  $12(x-y)^3$

### Λύση:

$$6(x^2-y^2) = 2 \cdot 3(x-y) \cdot (x+y)$$

$$4(x-y)^2 = 2^2 \cdot (x-y)^2$$

$$12(x-y)^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot (x-y)^3$$

Οπότε  $\text{ΕΚΠ} = 12 \cdot (x-y)^3 \cdot (x+y)$  και  $\text{ΜΚΔ} = 2(x-y)$

Ασκήσεις: Βιβλίου

## Least common multiple and greatest common divisor of integer algebraic expressions

**Rule 1:** The least common multiple of two or more algebraic expressions that have been factorized is called the product of their common and uncommon factors, each raised to the highest of its exponents.

**Rule 2:** The greatest common divisor of two or more algebraic expressions that have been factorized is called the product of their common factors, each raised to the lowest of its exponents.

### Examples :

1.  $\text{ΕΚΠ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 72x^3y^2\omega^3$

γιατί

12	18	24		2
6	9	12		2
3	9	6		2
3	9	3		3
1	3	1		3
1	1	1		

$\text{ΕΚΠ}(12,18,24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

$\text{ΜΚΔ}(12x^3y^2\omega, 18x^2y\omega^3, 24xy\omega^2) = 6xy\omega$

γιατί

12		2	18		2	24		2
6		2	9		3	12		2
3		3	3		3	6		2
1			1			3		3
						1		

$\text{ΜΚΔ}(12,18,24) = 2 \cdot 3 = 6$

2. Find ΕΚΠ (least common multiple) and ΜΚΔ (greatest common divisor) of the algebraic expressions below:

$6(x^2-y^2)$ ,  $4(x-y)^2$ ,  $12(x-y)^3$

### Solution:

$$6(x^2-y^2) = 2 \cdot 3(x-y) \cdot (x+y)$$

$$4(x-y)^2 = 2^2 \cdot (x-y)^2$$

$$12(x-y)^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot (x-y)^3$$

So....  $\text{ΕΚΠ} = 12 \cdot (x-y)^3 \cdot (x+y)$  and  $\text{ΜΚΔ} = 2(x-y)$

Exercises- Homework: From the book

## Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

**Βασικός ορισμός:** Μία αλγεβρική παράσταση στην οποία και ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμα ονομάζεται **ρητή αλγεβρική παράσταση**.

**Υπενθύμιση:**

μονώνυμα:  $3x^2y, \frac{1}{2}x^4$

πολυώνυμα:  $x^2 + 2x + 1$

$-3x+5$

$7x^5+6x^2-4x+3$

**Παραδείγματα ρητών αλγεβρικών παραστάσεων**

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2}, \quad \frac{3}{x - 5}, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha}$$

**Βασικές υπενθυμίσεις-παρατηρήσεις:**

- Το κλάσμα  $\frac{5}{0}$  δεν ορίζεται γιατί η διαίρεση  $5:0$  δεν γίνεται
- Μία ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται όταν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν(0)
- Ο συμβολισμός  $a \neq b$  σημαίνει ότι ο αριθμός  $a$  δεν είναι ίσος με τον αριθμό  $b$ .

**Παραδείγματα :**

Για ποιες τιμές του  $x$  ορίζονται τα κλάσματα:

a)  $\frac{1}{x}$  πρέπει  $x \neq 0$

b)  $\frac{2x}{x-4}$  πρέπει  $x-4 \neq 0$  οπότε  $x \neq 4$

c)  $\frac{2x+5}{3x-6}$  πρέπει  $3x-6 \neq 0$   $3x \neq 6$  οπότε  $x \neq 2$

## Rational algebraic expressions

**Basic definition:** An algebraic expression in which both the numerator and the denominator are polynomials is called a **rational algebraic expression**.

**Reminder:**

Monomials:  $3x^2y, \frac{1}{2}x^4$

Polynomials:  $x^2 + 2x + 1$

$-3x+5$

$7x^5+6x^2-4x+3$

**Examples of rational algebraic expressions**

$$\frac{x^2 + 1}{x + 2}, \quad \frac{3}{x - 5}, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha}$$

**Basic reminders and notes:**

- The fraction  $\frac{5}{0}$  is undefined because division  $5 \div 0$  cannot be performed.
- A rational algebraic expression is defined when the denominator is not zero (0).
- The notation  $a \neq b$  means that the number  $a$  is not equal to the number  $b$ .

**Examples:**

For which values of  $x$  are the fractions defined:

a)  $\frac{1}{x}$  is defined when  $x \neq 0$

b)  $\frac{2x}{x-4}$  is defined when  $x-4 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$

c)  $\frac{2x+5}{3x-6}$  is defined when  $3x-6 \neq 0 \rightarrow 3x \neq 6 \rightarrow x \neq 2$

### Απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων:

Για να απλοποιήσουμε μία ρητή αλγεβρική παράσταση κάνουμε τα εξής:

**1<sup>ο</sup> βήμα:** παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους αριθμητή και παρονομαστή της αλγεβρικής παράστασης.

**2<sup>ο</sup> βήμα:** διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες που εμφανίζονται σε

αριθμητή και παρονομαστή.  $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

### Άσκηση- παράδειγμα:

Να απλοποιήσετε τις επόμενες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις:

$$a) \frac{2a^2x^3}{6a^3x^2} = \frac{2 \cdot aaxxx}{2 \cdot 3 \cdot aaxxx} = \frac{x}{3a}$$

$$b) \frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3} = \frac{36 \cdot y\omega}{25}$$

$$c) \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$d) \frac{2x-10}{x^2-25} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x+5}$$

### Άσκηση-εργασία:

**Ασκήσεις βιβλίου και....** Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρονομαστές να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$a) \frac{6\alpha}{8\alpha} \quad \beta) \frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3} \quad \gamma) \frac{\chi-1}{1-\chi} \quad \delta) \frac{2\chi-4}{\chi^2-2\chi}$$
$$e) \frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6} \quad \sigma\tau) \frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4} \quad \zeta) \frac{(2\chi+3)^2-2(2\chi+3)+1}{(2\chi+3)^2-1}$$
$$\eta) \frac{2\alpha^2+10\alpha-\alpha\beta-5\beta}{2\alpha^2+6\alpha-\alpha\beta-3\beta}$$

### Simplifying Rational Algebraic Expressions:

To simplify a rational algebraic expression, we do the following:

**Step 1:** We factorize both the numerator and the denominator of the algebraic expression.

**Step 2:** we delete the common factors that appear in the numerator and the

denominator.  $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$

### Exercise - example:

Simplify the following rational algebraic expressions:

$$a) \frac{2a^2x^3}{6a^3x^2} = \frac{2 \cdot aaxxx}{2 \cdot 3 \cdot aaxxx} = \frac{x}{3a}$$

$$b) \frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3} = \frac{36 \cdot y\omega}{25}$$

$$c) \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$d) \frac{2x-10}{x^2-25} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x+5}$$

### Exercise-assignment:

**Book exercises and....** Find the values of the variables for which the denominators are defined and simplify the expressions:

$$a) \frac{6\alpha}{8\alpha} \quad \beta) \frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3} \quad \gamma) \frac{\chi-1}{1-\chi} \quad \delta) \frac{2\chi-4}{\chi^2-2\chi}$$
$$e) \frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6} \quad \sigma\tau) \frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4} \quad \zeta) \frac{(2\chi+3)^2-2(2\chi+3)+1}{(2\chi+3)^2-1}$$
$$\eta) \frac{2\alpha^2+10\alpha-\alpha\beta-5\beta}{2\alpha^2+6\alpha-\alpha\beta-3\beta}$$

## Πράξεις ρητών παραστάσεων

### A) Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων

**1ος κανόνας:** για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο αριθμό με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο δηλαδή:  $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$

Παραδείγματα:

$$a) 3 \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$$

$$b) \frac{4x^3}{x^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12x^3}{x^5+2}$$

**2ος βασικός κανόνας:** για να πολλαπλασιάσουμε μία ακέραιη αλγεβρική παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:  $\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$

Παράδειγμα:

$$3x \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{12x^2}{x+2}$$

**3ος βασικός κανόνας:** για να πολλαπλασιάσουμε μία ρητή παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:  $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

Παραδείγματα

$$A) \frac{2\alpha^2 x^3}{6a^3 x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3 x} = \frac{2\alpha^2 x^3 \cdot 3\alpha x^4}{6a^3 x^3 \cdot 4a^3 x} = \frac{6\alpha^3 x^7}{24 \cdot a^6 x^4} = \frac{x^3}{4a^3}$$

$$B) \frac{x(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

## Operations with Rational Expressions

### A) Multiplication of Rational Expressions

**1st rule:** To multiply an integer with a fraction, we multiply the integer by the numerator of the fraction and leave the denominator the same, that means that:  $\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$

Examples:

$$a) 3 \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$$

$$b) \frac{4x^3}{x^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12x^3}{x^5+2}$$

**2nd basic rule:** To multiply an integer algebraic expression by a rational expression, we multiply numerator by numerator and denominator by denominator, that means that:  $\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\delta}$

Example:

$$3x \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{12x^2}{x+2}$$

**3rd basic rule:** To multiply a rational expression by another rational expression, we multiply numerator by numerator and denominator by denominator, that means that:  $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$

Examples

$$A) \frac{2\alpha^2 x^3}{6a^3 x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3 x} = \frac{2\alpha^2 x^3 \cdot 3\alpha x^4}{6a^3 x^3 \cdot 4a^3 x} = \frac{6\alpha^3 x^7}{24 \cdot a^6 x^4} = \frac{x^3}{4a^3}$$

$$B) \frac{x(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

### Β) Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Για να διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ρητή παράσταση (διαιρέτέο) με την αντίστροφη παράσταση της δεύτερης

ρητής παράστασης (διαιρέτης), δηλαδή:  $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

#### Παραδείγματα

$$\text{Α)} \frac{24ax}{5ax^3} : \frac{3x^3}{4a^4x} = \frac{24ax}{5ax^3} \cdot \frac{4a^4x}{3x^3} = \frac{24ax \cdot 4a^4x}{5ax^3 \cdot 3x^3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3ax^4}{4 \cdot 5 \cdot a^5x^4} = \frac{18}{5a^4}$$

$$\text{Β)} \frac{3x-3}{x-2} : \frac{x^2-1}{4x^2-16} = \frac{3x-3}{x-2} \cdot \frac{4x^2-16}{x^2-1} = \frac{(3x-3) \cdot (4x^2-16)}{(x-2)(x^2-1)} =$$
$$= \frac{3(x-1) \cdot 4(x^2-4)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1) \cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3 \cdot 4(x-2)}{(x+1)} = \frac{12(x-2)}{x+1}$$

#### Βασική παρατήρηση- μνημονικός κανόνας:

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

#### Παραδείγματα:

$$\text{Α)} \frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}} = \frac{x^5}{y} : \frac{x}{y^4} = \frac{x^5}{y} \cdot \frac{y^4}{x} = \frac{x^5 \cdot y^4}{y \cdot x} = x^4 \cdot y^3$$

$$\text{Β)} \frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x} = \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x(x+1) \cdot 1}{(x-1)(x+1) \cdot 2x} = \frac{1}{2(x-1)}$$

### Β) Division of rational expressions

To divide two rational expressions, we multiply the first rational expression (dividend) by the reciprocal of the second rational expression (divisor), that

means that:  $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

#### Examples:

$$\text{Α)} \frac{24ax}{5ax^3} : \frac{3x^3}{4a^4x} = \frac{24ax}{5ax^3} \cdot \frac{4a^4x}{3x^3} = \frac{24ax \cdot 4a^4x}{5ax^3 \cdot 3x^3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3ax^4}{4 \cdot 5 \cdot a^5x^4} = \frac{18}{5a^4}$$

$$\text{Β)} \frac{3x-3}{x-2} : \frac{x^2-1}{4x^2-16} = \frac{3x-3}{x-2} \cdot \frac{4x^2-16}{x^2-1} = \frac{(3x-3) \cdot (4x^2-16)}{(x-2)(x^2-1)} =$$
$$= \frac{3(x-1) \cdot 4(x^2-4)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1) \cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{3 \cdot 4(x-2)}{(x+1)} = \frac{12(x-2)}{x+1}$$

#### Basic observation - rule for memorizing easily:

Conversion of a complex fraction into a simple one

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

#### Examples:

$$\text{Α)} \frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}} = \frac{x^5}{y} : \frac{x}{y^4} = \frac{x^5}{y} \cdot \frac{y^4}{x} = \frac{x^5 \cdot y^4}{y \cdot x} = x^4 \cdot y^3$$

$$\text{Β)} \frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x} = \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{x(x+1) \cdot 1}{(x-1)(x+1) \cdot 2x} = \frac{1}{2(x-1)}$$

Άσκηση-εργασία: Σχολικό βιβλίο και ...να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

I)

$$(\alpha) \frac{8}{\beta} \cdot \frac{a}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{a^2}$$

$$(\beta) \left(-\frac{7a^2}{16a}\right) \cdot \frac{8\beta}{a} \cdot \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(\gamma) \frac{10}{a^3} \cdot \frac{a^3}{2\omega^3}$$

$$(\delta) -\frac{4a}{xy\omega} \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{2a}\right)^2 \cdot \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

$$(\epsilon) \frac{7}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{14x} \cdot (3-x)$$

II)

$$(\alpha) \frac{3a^2}{\beta} : \frac{\beta^2}{6a}$$

$$(\beta) \frac{a^5}{\beta^5} : \left(\frac{a}{\beta}\right)^6$$

$$(\gamma) \frac{x+7}{\beta^2-x^2} : \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(\delta) \frac{x}{x-2} : \frac{x^2-2x}{x^2}$$

$$(\epsilon) \frac{6}{x+y} : \frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$$

$$(\sigma\tau) \frac{x^3}{x^3-1} : \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

III)

$$(\alpha) \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{2x}$$

$$(\beta) \frac{xy-xy^3}{xy-x^3y} : \frac{6}{12-12x}$$

$$(\gamma) \frac{\omega}{\omega^2+2\omega} : \frac{\omega}{\omega^2-4}$$

$$(\delta) \frac{x+2}{\frac{x}{x+2}} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$$

$$(\epsilon) \frac{2(x-2)}{\frac{x+2}{(x+2)^2}}$$

Exercise-homework: school book and... do the following tasks:

I)

$$(\alpha) \frac{8}{\beta} \cdot \frac{a}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{a^2}$$

$$(\beta) \left(-\frac{7a^2}{16a}\right) \cdot \frac{8\beta}{a} \cdot \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(\gamma) \frac{10}{a^3} \cdot \frac{a^3}{2\omega^3}$$

$$(\delta) -\frac{4a}{xy\omega} \cdot \frac{x}{y^2} \cdot \left(\frac{y}{2a}\right)^2 \cdot \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

$$(\epsilon) \frac{7}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{14x} \cdot (3-x)$$

II)

$$(\alpha) \frac{3a^2}{\beta} : \frac{\beta^2}{6a}$$

$$(\beta) \frac{a^5}{\beta^5} : \left(\frac{a}{\beta}\right)^6$$

$$(\gamma) \frac{x+7}{\beta^2-x^2} : \frac{x+\beta}{49-x^2}$$

$$(\delta) \frac{x}{x-2} : \frac{x^2-2x}{x^2}$$

$$(\epsilon) \frac{6}{x+y} : \frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$$

$$(\sigma\tau) \frac{x^3}{x^3-1} : \frac{x^3+x^2+x}{3}$$

III)

$$(\alpha) \frac{x(x+1)}{x^2-1} : \frac{2x}{2x}$$

$$(\beta) \frac{xy-xy^3}{xy-x^3y} : \frac{6}{12-12x}$$

$$(\gamma) \frac{\omega}{\omega^2+2\omega} : \frac{\omega}{\omega^2-4}$$

$$(\delta) \frac{x+2}{\frac{x}{x+2}} : \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$$

$$(\epsilon) \frac{2(x-2)}{\frac{x+2}{(x+2)^2}}$$

### Γ) Πρόσθεση- Αφαίρεση ρητών παραστάσεων:

**1η περίπτωση:** για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις που έχουν **ίδιους παρονομαστές**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα πρόσθεσης-αφαίρεσης ομώνυμων κλασμάτων, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \text{ και } \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

**Άσκηση- παράδειγμα:** Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{x+3}{y+2} + \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3+x-2}{y+2} = \frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta) \frac{x+3}{y+2} - \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3-x+2}{y+2} = \frac{x+5}{y+2}$$

**2η περίπτωση:** Για να προσθέσουμε είναι αφαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές κάνουμε τα εξής:

1<sup>ο</sup> βήμα: Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές

2<sup>ο</sup> βήμα: Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών.

3<sup>ο</sup> βήμα: Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

4<sup>ο</sup> βήμα: Κάνουμε τις προσθέσεις-αφαιρέσεις που ζητούνται.

5<sup>ο</sup> βήμα: Κάνουμε τις απλοποιήσεις που ενδεχομένως υπάρχουν

**Άσκηση- παράδειγμα:** Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha) \frac{2x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x+2-3}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta) \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+3+2x}{x(x+1)} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

### C) Addition - Subtraction of rational expressions:

**1st case:** To add or subtract two rational expressions that have the same denominators, we use the rule for adding/subtracting like fractions, that is:

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \text{ and } \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

**Exercise - example:** Do the

$$(\alpha) \frac{x+3}{y+2} + \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3+x-2}{y+2} = \frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta) \frac{x+3}{y+2} - \frac{x-2}{y+2} = \frac{x+3-x+2}{y+2} = \frac{x+5}{y+2}$$

calculations:

**2nd case:** To add or subtract two rational expressions that have different denominators, do the following:

**1st step:** Factor the denominators

**2nd step:** Find the LCM of the denominators

**3rd step:** Convert the fractions to like fractions

**4th step:** Perform the requested additions/subtractions

**5th step:** Simplify if possible.

**Exercise - example:** Perform the operations:

$$(\alpha) \frac{2x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{2}{2x} - \frac{3}{2x} = \frac{2x+2-3}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta) \frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1} = \frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)} = \frac{3x+3+2x}{x(x+1)} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

$$\gamma) \frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3\alpha-3} + \frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6} =$$

$$\frac{3}{2(\alpha+1)} - \frac{2}{3(\alpha-1)} + \frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(\alpha+1) \\ 3(\alpha-1) \\ 2 \cdot 3(\alpha-1)(\alpha+1) \end{array} \right\} \text{EKII} = 2 \cdot 3(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$\frac{3(\alpha-1)}{2(\alpha+1)} - \frac{2(\alpha+1)}{3(\alpha-1)} + \frac{1}{6(\alpha-1)(\alpha+1)}$$

$$= \frac{3 \cdot 3(\alpha-1)}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} - \frac{2 \cdot 2(\alpha+1)}{3(\alpha-1)2(\alpha+1)} + \frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)} =$$

$$= \frac{9 - (\alpha-1) - 4 \cdot (\alpha+1) + 5\alpha+3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} =$$

$$= \frac{9\alpha - 9 - 4\alpha - 4 + 5\alpha + 3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)} = \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)}$$

$$= \frac{10\alpha - 10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{10(\cancel{\alpha-1})}{6(\alpha+1)(\cancel{\alpha-1})} = \frac{5}{3(\alpha+1)}$$

### Ασκήσεις...Homework

$$1. \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x+3} = \dots\dots\dots$$

$$2. \frac{x}{x+2} - \frac{3+x}{x+2} = \dots\dots\dots$$

$$3. \frac{3x}{x-1} + \frac{3}{1-x} = \dots\dots\dots$$

$$4. \frac{x}{x-2} + \frac{x}{2-x} = \dots\dots\dots$$

$$5. 1 + \frac{2}{x} = \dots\dots\dots$$

$$6. \frac{3x}{3x-12} - \frac{4}{x-4} = \dots\dots\dots$$

$$7. \frac{4}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+3x} = \dots\dots\dots$$

$$8. \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}}{1 + \frac{1}{y}} = \dots\dots\dots$$

$$9. \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{x-y} - 1\right) = \dots\dots\dots$$

$$10. \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) = \dots\dots\dots$$

## Εξισώσεις ανισώσεις

### A. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$

#### 1. Άσκηση(παράδειγμα):

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

A)  $2x = 6$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$\boxed{x=3}$$

η εξίσωση έχει μία μόνο μία μόνο( μοναδική) λύση

B)  $0x = 0$  η εξίσωση έχει **άπειρες** (πάρα πολλές) λύσεις και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη** (είναι σωστή για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x)

Γ)  $0x = -7$  καμία λύση (**αδύνατη**, είναι λάθος για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x )

#### B. Μεθοδολογία-Παράδειγμα:

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x+1}{2} - 14 = \frac{5-x}{4} - \frac{x+2}{3}$$

1. Αν έχει κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών

Η εξίσωση έχει παρονομαστές τους αριθμούς 2, 3 και 4. Το ΕΚΠ(2,3,4)=12. Θα πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το 12. Οι όροι (κομμάτια) μιας εξίσωσης "διαχωρίζονται" μεταξύ τους από τα πρόσημα + και - . Η δική μας εξίσωση έχει 4 όρους

τους  $\frac{x+1}{2}$ ,  $-14$ ,  $\frac{5-x}{4}$  και  $-\frac{x+2}{3}$ . Οπότε θα έχουμε

$$12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12 \frac{5-x}{4} - 12 \frac{x+2}{3}$$

Τώρα απλοποιούμε τους παρονομαστές (γι' αυτό το λόγω βάλουμε παντού το 12) κάνοντας διαίρεση το 12 με κάθε παρονομαστή.

$$6 \cdot 12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 3 \cdot 12 \frac{5-x}{4} - 4 \cdot 12 \frac{x+2}{3}$$

## Equations and Inequalities

### A. The equation $ax + \beta = 0$

#### 1. Exercise (example):

Find the number of solutions of the equation:

A)  $2x = 6$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$
$$\boxed{x=3}$$

The equation has only one (unique) solution

B)  $0x = 0$  The equation has infinitely many solutions and is called an **identity** or **indefinite equation** (it is true for any value of x)

C)  $0x = -7$  No solution (**impossible**, it is false for any value of x)

#### B. Methodology - Example:

Solve the equation:

$$\frac{x+1}{2} - 14 = \frac{5-x}{4} - \frac{x+2}{3}$$

1. If it has fractions, multiply each term of the equation by the LCM of the denominators.

The equation has denominators 2, 3, and 4. The LCM(2,3,4) = 12. We will multiply all terms of the equation by 12. The terms (pieces) of an equation are "separated" by the signs + and -. Our equation has 4

terms:  $\frac{x+1}{2}$ ,  $-14$ ,  $\frac{5-x}{4}$  and  $-\frac{x+2}{3}$ . so we will have

$$12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12 \frac{5-x}{4} - 12 \frac{x+2}{3}$$

Now we simplify the denominators (this is why we put 12 everywhere) by dividing 12 by each denominator.

$$6 \cdot 12 \frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 3 \cdot 12 \frac{5-x}{4} - 4 \cdot 12 \frac{x+2}{3}$$

Καθαρογράφουμε ότι απέμεινε έχοντας στο μυαλό μας το εξής: Όποιος αριθμητής αποτελείται από δύο κομμάτια θα μπει υποχρεωτικά σε παρένθεση.

$$6(x + 1) - 168 = 3(5 - x) - 4(x + 2)$$

2. Διώχνουμε τις παρενθέσεις από την εξίσωση εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται έξω από την παρένθεση και με τους δύο όρους που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση:

$$6(x + 1) - 168 = 3(5 - x) - 4(x + 2)$$

Οπότε προκύπτει

$$6 \cdot x + 6 \cdot 1 - 168 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot x - 4 \cdot x - 4 \cdot 2$$

δηλαδή

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

3. Χωρίζουμε γνωστούς – άγνωστους: Εδώ θα πρέπει να θυμόμαστε ότι: “Όποιος όρος αλλάξει μέλος θα πρέπει να αλλάξει και το πρόσημό του

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

4. “Συμμαζεύουμε” δηλαδή κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη. (Αναγωγή Όμοιων Όρων)

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

$$13x = 169$$

5. Πρέπει το  $x$  να μείνει μόνο του, άρα πρέπει να φύγει από δίπλα του ο αριθμός 13 (Συντελεστής λέγεται). Για το λόγο αυτό “Διαιρώ με τον Συντελεστή του άγνωστου” και τα δύο μέλη απαραίτητα.

6. Αν έχουμε  $0x = 0$  η εξίσωση είναι **αόριστη** και αν έχουμε  $0x = 169$  (κάποιον αριθμό διαφορετικό του 0) η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

**Ασκήσεις-Εργασία: Απότοβιβλίο**

We write neatly what remains, keeping the following in mind: Any numerator that consists of two parts must necessarily go in parentheses.

$$6(x + 1) - 168 = 3(5 - x) - 4(x + 2)$$

2. We remove the parentheses from the equation by applying the distributive property, that is, by multiplying the number outside the parentheses with both terms inside the parentheses:

$$6(x + 1) - 168 = 3(5 - x) - 4(x + 2)$$

So it becomes

$$6 \cdot x + 6 \cdot 1 - 168 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot x - 4 \cdot x - 4 \cdot 2$$

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

3. We separate known – unknowns: Here we must remember that: “Any term that changes side must also change its sign.”

$$6x + 6 - 168 = 15 - 3x - 4x - 8$$

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8$$

4. We “tidy up,” that is, perform operations on both sides. (Combining Like Terms)

$$6x + 3x + 4x = -6 + 168 + 15 - 8 \quad 13x = 169$$

5. The  $x$  must be left alone, so the number 13 next to it must be removed (it is called the coefficient).

For this reason, we “divide by the coefficient of the unknown” on both sides necessarily.

6. If we have  $0x = 0$ , my equation is **indeterminate**, and if we have  $0x = 169$  (some number different from 0), the equation is **impossible**.

**Homework: From the school book**

## Εξισώσεις 2<sup>ου</sup> βαθμού

**Βασικός ορισμός:** Κάθε εξίσωση της μορφής  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha$  διαφορετικό του μηδενός) λέγεται εξίσωση δεύτερου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση).

**Βασικός ορισμός:** οι αριθμοί  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  στη δευτεροβάθμια εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης ειδικά ο αριθμός  $\gamma$  (δηλαδή ο συντελεστής  $\gamma$ ) ονομάζεται **σταθερός όρος** της εξίσωσης.

**Άσκηση παράδειγμα:** Στις επόμενες εξισώσεις να προσδιορίσετε τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  των δευτεροβάθμιων εξισώσεων:

a)  $3x^2 + 5x + 2 = 0$  οπότε  $\alpha = 3$   $\beta = 5$   $\gamma = 2$

b)  $2x^2 + 6x + 9 = 0$  οπότε  $\alpha = 2$   $\beta = 6$   $\gamma = 9$

c)  $5x^2 - 6x + 7 = 0$  οπότε  $\alpha = 5$   $\beta = -6$   $\gamma = 7$

d)  $-3x^2 + 6x - 9 = 0$  οπότε  $\alpha = -3$   $\beta = 6$   $\gamma = -9$

e)  $x^2 - 5x - 2 = 0$  οπότε  $\alpha = 1$   $\beta = -5$   $\gamma = -2$

f)  $x^2 + 4x = 0$  οπότε  $\alpha = 1$   $\beta = 4$   $\gamma = 0$

g)  $-x^2 + 4 = 0$  οπότε  $\alpha = -1$   $\beta = 0$   $\gamma = 4$

h)  $\frac{3}{4}x^2 + 5x + \frac{1}{4} = 0$  οπότε  $\alpha = \frac{3}{4}$   $\beta = 5$   $\gamma = \frac{1}{4}$

## Quadratic Equations

**Basic definition:** Any equation of the form  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ,  $\alpha \neq 0$  ( $\alpha$  different from zero) is called a second-degree equation with one unknown (quadratic equation).

**Basic definition:** The numbers  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in the quadratic equation  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  are called the coefficients of the equation, and specifically the number  $\gamma$  (i.e., the coefficient  $\gamma$ ) is called the **constant term** of the equation.

**Example exercise:** In the following equations, determine the coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  of the quadratic equations:

a)  $3x^2 + 5x + 2 = 0$   $\alpha = 3$   $\beta = 5$   $\gamma = 2$

b)  $2x^2 + 6x + 9 = 0$   $\alpha = 2$   $\beta = 6$   $\gamma = 9$

c)  $5x^2 - 6x + 7 = 0$   $\alpha = 5$   $\beta = -6$   $\gamma = 7$

d)  $-3x^2 + 6x - 9 = 0$   $\alpha = -3$   $\beta = 6$   $\gamma = -9$

e)  $x^2 - 5x - 2 = 0$   $\alpha = 1$   $\beta = -5$   $\gamma = -2$

f)  $x^2 + 4x = 0$   $\alpha = 1$   $\beta = 4$   $\gamma = 0$

g)  $-x^2 + 4 = 0$   $\alpha = -1$   $\beta = 0$   $\gamma = 4$

h)  $\frac{3}{4}x^2 + 5x + \frac{1}{4} = 0$   $\alpha = \frac{3}{4}$   $\beta = 5$   $\gamma = \frac{1}{4}$



## Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων

### 1<sup>η</sup> περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2 + bx = 0$

Μέθοδος επίλυσης: παραγοντοποίηση.

(παρατήρηση  $\alpha \cdot \beta = 0$  τότε  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ )

**Άσκηση-παράδειγμα:** να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

a)  $x^2 - 6x = 0$  οπότε

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 6$$

b)  $2x^2 + 12x = 0$  οπότε

$$2x(x+6) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } x + 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -6$$

c)  $-4x^2 + 6x = 0$  οπότε

$$2x(-2x+3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } -2x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } -2x = -3$$

$$x = 0 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

**Άσκηση εργασία:** Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

a)  $x^2 - 3x = 0$

b)  $x^2 + 8x = 0$

c)  $3x^2 - 15x = 0$

d)  $-3x^2 + 12x = 0$

e)  $4x^2 + x = 0$

## How we (usually) solve Quadratic Equations\

### 1st case: Form of equations: $ax^2 + bx = 0$

Method of solving : Factoring

(note:  $\alpha \cdot \beta = 0$  then  $\alpha = 0$  or  $\beta = 0$ )

**Exercise-example:** Solve the following equations:

a)  $x^2 - 6x = 0$

$$x(x-6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 6$$

b)  $2x^2 + 12x = 0$

$$2x(x+6) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } x + 6 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -6$$

c)  $-4x^2 + 6x = 0$

$$2x(-2x+3) = 0$$

$$2x = 0 \text{ ή } -2x + 3 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } -2x = -3$$

$$x = 0 \text{ ή } x = \frac{3}{2}$$

**Exercise-homework:** Solve the following equations:

a)  $x^2 - 3x = 0$

b)  $x^2 + 8x = 0$

c)  $3x^2 - 15x = 0$

d)  $-3x^2 + 12x = 0$

e)  $4x^2 + x = 0$

## Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

### 2η περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2 + \gamma = 0$ - Μέθοδος:

**1<sup>ος</sup> τρόπος:** παραγοντοποιούμε την εξίσωση και καταλήγουμε σε γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν

**2<sup>ος</sup> τρόπος:** χρησιμοποιούμε τον ορισμό τετραγωνικής ρίζας.

**Προσοχή:** το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού δεν είναι αρνητικός αριθμός!!

**Άσκηση παράδειγμα:** Να λύσετε την εξίσωση:

A)  $x^2 - 16 = 0$

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x-4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x+4 = 0, \quad \text{οπότε} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}, \quad \text{οπότε} \quad x = +4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

B)  $4x^2 - 100 = 0$

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$(2x-10) \cdot (2x+10) = 0$$

$$2x-10 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x+10 = 0$$

$$2x = 10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \quad \text{οπότε} \quad x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$4x^2 = 100$$

$$2x = \pm\sqrt{100}, \quad \text{άρα} \quad 2x = +10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \quad \text{οπότε} \quad x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

**Άσκηση εργασία:** Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις (όσες γίνεται με δύο τρόπους):

A)  $x^2 - 9 = 0$

B)  $x^2 - 64 = 0$

Γ)  $x^2 = 144$

Δ)  $x^2 - 256 = 0$

E)  $9x^2 - 16 = 0$

Z)  $x^2 = -36$

H)  $x^2 + 4 = 0$

Θ)  $4x^2 + 100 = 0$

I)  $3 \cdot (x+2)^2 = 12$

## Solving a quadratic equation

### 2nd case: Equations of the form $ax^2 + \gamma = 0$ - Method:

**1st way:** we factorize the equation and end up with a product of factors equal to zero

**2nd way:** we use the definition of square root.

**Attention:** the square of a real number is not a negative number!!

**Example exercise:** Solve the equation:

A)  $x^2 - 16 = 0$

**1st way:**

$$x^2 - 16 = 0$$

$$(x-4) \cdot (x+4) = 0$$

$$x-4 = 0 \quad \text{ή} \quad x+4 = 0, \quad \text{οπότε} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

**2nd way:**

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}, \quad \text{οπότε} \quad x = +4 \quad \text{ή} \quad x = -4$$

B)  $4x^2 - 100 = 0$

**1st way:**

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$(2x-10) \cdot (2x+10) = 0$$

$$2x-10 = 0 \quad \text{ή} \quad 2x+10 = 0$$

$$2x = 10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \quad \text{οπότε} \quad x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

**2nd way:**

$$4x^2 - 100 = 0$$

$$4x^2 = 100$$

$$2x = \pm\sqrt{100}, \quad \text{άρα} \quad 2x = +10 \quad \text{ή} \quad 2x = -10, \quad \text{οπότε} \quad x = 5 \quad \text{ή} \quad x = -5$$

**Exercise: Solve the following equations (if you can in two ways)**

A)  $x^2 - 9 = 0$

B)  $x^2 - 64 = 0$

Γ)  $x^2 = 144$

Δ)  $x^2 - 256 = 0$

E)  $9x^2 - 16 = 0$

Z)  $x^2 = -36$

H)  $x^2 + 4 = 0$

Θ)  $4x^2 + 100 = 0$

I)  $3 \cdot (x+2)^2 = 12$

## Επίλυση εξισώσεων δεύτερου βαθμού με χρήση τύπου

Εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$

**Άσκηση παράδειγμα:** Να προσδιορίσετε τους συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  στις επόμενες εξισώσεις:

A.  $2x^2 + 5x + 6 = 0$  οπότε  $\alpha = 2$   $\beta = 5$   $\gamma = 6$

B.  $x^2 - 4x + 3 = 0$  οπότε  $\alpha = 1$   $\beta = -4$   $\gamma = 3$

C.  $2x^2 - 50 = 0$  οπότε  $\alpha = 2$   $\beta = 0$   $\gamma = -50$

**Βασική παρατήρηση:**

Στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  μας βοηθάει η **Διακρίνουσα** τις εξίσωσης, η οποία υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

**Άσκηση-παράδειγμα:** Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

A.  $2x^2 + 6x + 4 = 0$  οπότε  $\alpha = 2$   $\beta = 6$   $\gamma = 4$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$$

B.  $-3x^2 + 5x + 2 = 0$  οπότε  $\alpha = -3$   $\beta = 5$   $\gamma = 2$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25 + 24 = 49$$

C.  $x^2 + 2x + 1 = 0$  οπότε  $\alpha = 1$   $\beta = 2$   $\gamma = 1$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

D.  $-x^2 + x - 3 = 0$  οπότε  $\alpha = -1$   $\beta = 1$   $\gamma = -3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 1 - 12 = -11$$

**Άσκηση-Εργασία:** Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

A.  $3x^2 + 12x + 1 = 0$

B.  $x^2 - 2x + 3 = 0$

C.  $3x^2 - 12x = 0$

D.  $9x^2 - 16 = 0$

## Solving Quadratic Equations Using a Formula

Quadratic Equation:  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  with  $\alpha \neq 0$

**Example Exercise:** Find the coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  in the following equations

A.  $2x^2 + 5x + 6 = 0$   $\rightarrow \alpha = 2$   $\beta = 5$   $\gamma = 6$

B.  $x^2 - 4x + 3 = 0$   $\rightarrow \alpha = 1$   $\beta = -4$   $\gamma = 3$

C.  $2x^2 - 50 = 0$   $\rightarrow \alpha = 2$   $\beta = 0$   $\gamma = -50$

**Basic observation:**

In solving a quadratic equation of the form  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , we are helped by the **Discriminant** of the equation, which is calculated by the formula:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

**Exercise-example:** Calculate the discriminant in the following equations:

A.  $2x^2 + 6x + 4 = 0$   $\rightarrow \alpha = 2$   $\beta = 6$   $\gamma = 4$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 36 - 32 = 4$$

B.  $-3x^2 + 5x + 2 = 0$   $\rightarrow \alpha = -3$   $\beta = 5$   $\gamma = 2$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 25 + 24 = 49$$

C.  $x^2 + 2x + 1 = 0$   $\rightarrow \alpha = 1$   $\beta = 2$   $\gamma = 1$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

D.  $-x^2 + x - 3 = 0$   $\rightarrow \alpha = -1$   $\beta = 1$   $\gamma = -3$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = 1 - 12 = -11$$

**Exercise:** Calculate the discriminant in the following equations:

A.  $3x^2 + 12x + 1 = 0$

B.  $x^2 - 2x + 3 = 0$

C.  $3x^2 - 12x = 0$

D.  $9x^2 - 16 = 0$

### Βασική παρατήρηση:

Η εξίσωση  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $a \neq 0$ ,

- αν  $\Delta > 0$  τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν  $\Delta = 0$ , η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την  $x = \frac{-\beta}{2a}$
- Αν  $\Delta < 0$ , τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

### Παράδειγμα Λύσης

Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

A)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$

#### 1. Βρίσκουμε τους Συντελεστές:

$$a=2 \quad \beta=5 \quad \gamma=-3$$

#### 2. Υπολογισμός Διακρίνουσας ( $\Delta$ )

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$$

Επειδή  $\Delta > 0$ , η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

#### 3. Εύρεση Ριζών ( $x_{1,2}$ )

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

#### 4. Υπολογισμός των δύο λύσεων:

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

#### 5. Απάντηση: Οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$$

### Basic observation:

The equation  $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$  with  $a \neq 0$ ,

- if  $\Delta > 0$  then the equation has two unequal solutions  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- If  $\Delta = 0$ , the equation has a double solution  $x = \frac{-\beta}{2a}$
- If  $\Delta < 0$ , then the equation has no solution (impossible equation)

### Example of solution of quadratic equation with formula:

Solve the following equations

A)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$

#### 1. Let us find the Coefficients:

$$a=2 \quad \beta=5 \quad \gamma=-3$$

#### 2. Calculation of Discriminant ( $\Delta$ )

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$$

Since  $\Delta > 0$ , the equation has two real and unequal roots

#### 3. Finding Roots ( $x_{1,2}$ )

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

#### 4. Calculating the two solutions:

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

#### 5. Answer: The solutions of the equation are

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -3$$

**B)  $x^2-6x+9=0$**

**1. Προσδιορισμός Συντελεστών:**

$a=1 \quad \beta=-6 \quad \gamma=9$

**2. Υπολογισμός Διακρίνουσας ( $\Delta$ )**

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9=36-36=0$$

Επειδή  $\Delta=0$ , η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα.

**3. Εύρεση Ρίζας ( $x$ )**

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-6)}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$$

**4. Απάντηση:** Η διπλή λύση (ρίζα) της εξίσωσης είναι

$x=3$

**Γ)  $x^2-x+2=0$**

**1. Προσδιορισμός Συντελεστών:**

$a=1 \quad \beta=-1 \quad \gamma=2$

**2. Υπολογισμός Διακρίνουσας ( $\Delta$ )**

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2=1-8=-7$$

Επειδή  $\Delta < 0$ , η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση).

**Άσκηση εργασία:** Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

1.  $2x^2-5x+2=0$

2.  $x^2+5x-6=0$

3.  $x^2-4x+4=0$

4.  $-3x^2+5x-8=0$

5.  $x^2+5x+7=0$

6.  $x^2+x-1=0$

7.  $x^2=7x+3$

8.  $-10x+1+25x^2=0$

9.  $(x+2)^2+5=0$

10.  $(3x-1)^2=9$

11.  $(x+2)^2+(x-7)^2=0$

12.  $(x+4)^2-(x+6)^2=-8$

13.  $(x-1)^2=-x$

14.  $(x-2)(x-1)=2x^2+4$

15.  $2(9-x^2)-4x=3x(1-x)+1$

16.  $(x-2)^2+2x(x+2)=2(3x+10)$

**B)  $x^2-6x+9=0$**

**1. Let us find the Coefficients :**

$a=1 \quad \beta=-6 \quad \gamma=9$

**2. Calculation of Discriminant ( $\Delta$ )**

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9=36-36=0$$

As  $\Delta=0$ , the equation has one (double) root.

**3. Finding the root ( $x$ )**

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-(-6)}{2\cdot 1}=\frac{6}{2}=3$$

**4. Answer: : The double solution (root) of the equation is**

$x=3$

**Γ)  $x^2-x+2=0$**

**1. We find the Coefficients :**

$a=1 \quad \beta=-1 \quad \gamma=2$

**2. Calculation of Discriminant ( $\Delta$ )**

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2=1-8=-7$$

Because  $\Delta < 0$ , the equation has no solution (impossible equation).

**Exercise:** Solve the following equations:

1.  $2x^2-5x+2=0$

2.  $x^2+5x-6=0$

3.  $x^2-4x+4=0$

4.  $-3x^2+5x-8=0$

5.  $x^2+5x+7=0$

6.  $x^2+x-1=0$

7.  $x^2=7x+3$

8.  $-10x+1+25x^2=0$

9.  $(x+2)^2+5=0$

10.  $(3x-1)^2=9$

11.  $(x+2)^2+(x-7)^2=0$

12.  $(x+4)^2-(x+6)^2=-8$

13.  $(x-1)^2=-x$

14.  $(x-2)(x-1)=2x^2+4$

15.  $2(9-x^2)-4x=3x(1-x)+1$

16.  $(x-2)^2+2x(x+2)=2(3x+10)$

# 20 FAMOUS MATHEMATICIANS

WHO CHANGED THE WORLD



**Euclid**

(c. 300 BCE)

Father of Geometry

**Archimedes**

(c. 287–212 BCE)

Inventor & Geometrician

**Isaac Newton**

1643–1727

Calculus & Classical Mechanics

**Leonhard Euler**

(1707–1786)

Graph Theory & Euler's Identity



**Joseph Fourier**

(1768–1830)

Fourier Series & Transforms

**Sophie Germain**

(1776–1831)

Elasticity & Number Theory

**Évariste Galois**

(1811–1832)

Group Theory & Algebra

**Bernhard Riemann**

(1826–1866)

Riemann Hypothesis & Manifolds



**David Hilbert**

(1862–1943)

Hilbert Space & 23 Problems

**Emmy Noether**

(1882–1935)

Abstract Algebra & Physics

**John von Neumann**

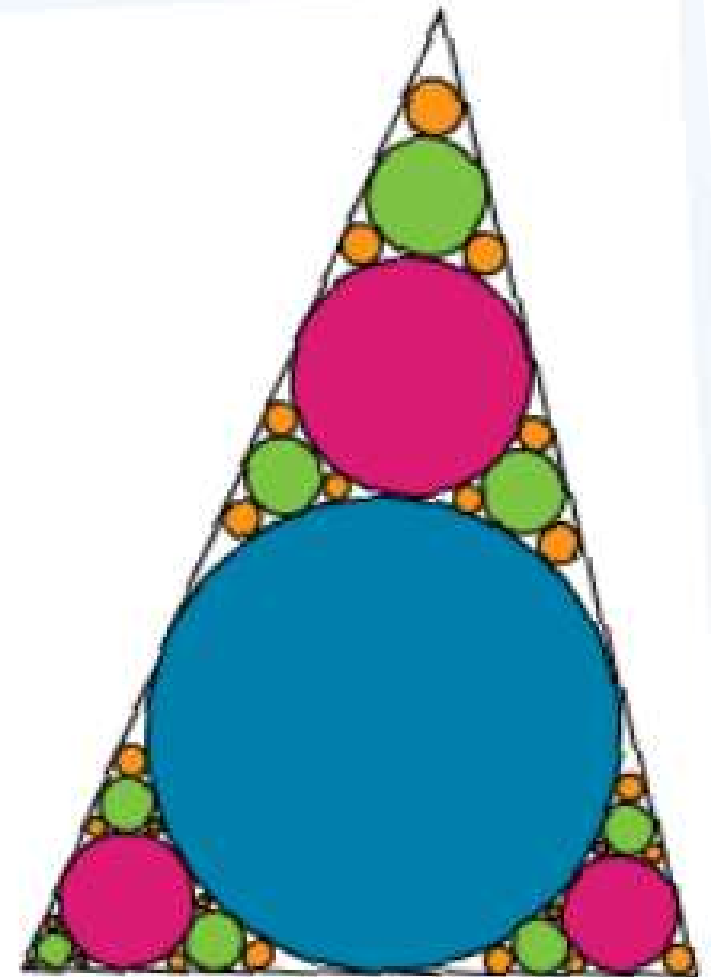
(1903–1957)

Game Theory & Computing

**Alan Turing**

(1912–1954)

Turing Machines & AI Foundations



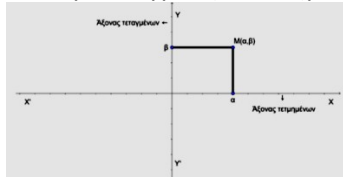
# Άλγεβρα - Μέρος τρίτο: Συστήματα για τις εξετάσεις.....

και  
γραφικές παραστάσεις για το Λύκειο!!

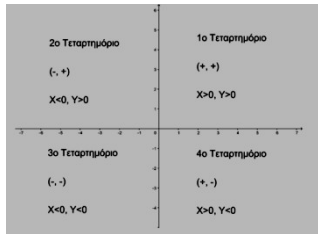
## Συντεταγμένες- Εισαγωγή σε συναρτήσεις

Τι σημαίνει η έκφραση σημείο  $M(a, \beta)$  ;

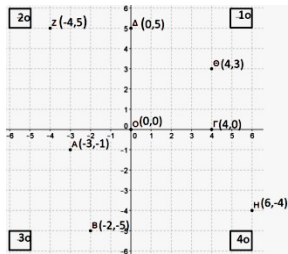
Οι αριθμοί  $a, \beta$  λέγονται συντεταγμένες του  $M$ . Ο  $a$  λέγεται τετμημένη και ο  $\beta$  τεταγμένη του σημείου  $M$ . Το σημείο  $M$  συμβολίζεται με  $M(a, \beta)$ .



Τι σημαίνει η έκφραση τεταρτημόρια;



Παράδειγμα συντεταγμένων:

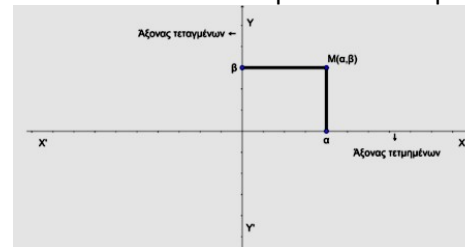


# Algebra - Part Three: Systems for exams... and graphs for High School!!

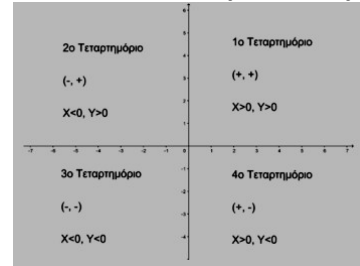
## Coordinates - Introduction to functions

What does the expression point  $M(a, b)$  mean?

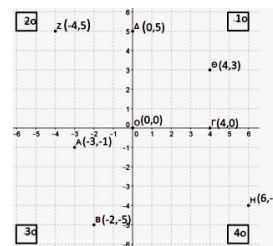
The numbers  $a, b$  are called the coordinates of  $M$ .  $a$  is called the **abscissa** and  $b$  the **ordinate** of point  $M$ . The point  $M$  is denoted by  $M(a, b)$ .



What does the expression quadrants mean?



Example of coordinates:



## Συναρτήσεις-Γραφικές Παραστάσεις και άλλα...

**Χρήση:** Χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτων και θεωρητικών μοντέλων. Σε Στατιστική, Φυσική, Ιατρική, Βιολογία, Οικονομία, Περιβαλλοντολογία, μέσω της εικόνας δίνουν απλά και γρήγορα εκτίμηση για τέτοιου είδους μοντέλα.

**Στα Μαθηματικά** όταν λέμε ότι ένα μέγεθος είναι συνάρτηση ενός άλλου εννοούμε ότι εξαρτάται το ένα από το άλλο.

**Βασικός ορισμός:** Συνάρτηση ονομάζουμε μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$ , με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής  $x$  αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής  $y$ .

**Βασική Παρατήρηση:** Το να βρούμε το **πώς ακριβώς εξαρτάται ένα μέγεθος από ένα άλλο συχνά δεν είναι εύκολη διαδικασία**. Οι βοηθοί μας σε αυτό είναι ο τύπος της συνάρτησης, ο πίνακας τιμών της και η γραφική της παράσταση.

- Ο **τύπος** της συνάρτησης είναι η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές  $x, y$ .
- Ο **πίνακας τιμών** της συνάρτησης συμπληρώνεται βάση πειραμάτων ή κάνοντας πράξεις
- Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης είναι σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους κάνουν αληθή την εξίσωση της συνάρτησης.

## Functions-Graphs and more...

**Use:** They are used for presenting experimental results and theoretical models. In Statistics, Physics, Medicine, Biology, Economics, Environmental Science, through images they provide a simple and quick estimation for such models.

**In Mathematics**, when we say that one quantity is a function of another, we mean that one depends on the other.

**Basic definition:** A function is called a relation between two variables  $x$  and  $y$ , where each value of the variable  $x$  corresponds to only one value of the variable  $y$ .

**Basic Observation:** Finding exactly how one quantity depends on another is often not an easy process. Our aids for this are the formula of the function, its table of values, and its graphical representation.

- The **formula** of the function is the algebraic relationship that connects the variables  $x$  and  $y$ .
- **The table of values** of the function is filled in based on experiments or by performing calculations.
- The **graph** of the function is the set of all points in the plane whose coordinates make the equation of the function true.

### Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x$ ;

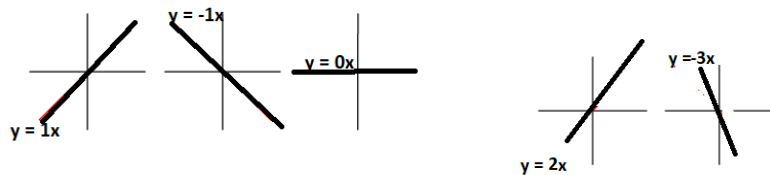
· Αντιστοιχεί σε **ανάλογα ποσά** (όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, παράδειγμα πόσα κιλά ψωμί αγοράζουμε από ένα φούρνο και πόσα χρήματα πληρώνουμε για αυτά).

· Έχει **γραφική παράσταση** μία **ευθεία** γραμμή που **περνάει** από την **αρχή** των **αξόνων** (σημείο  $O(0,0)$ ).

· Το  $\alpha$  ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και  $\alpha = \frac{y}{x}$ .

· Αν το  $\alpha$  είναι θετικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ αν είναι αρνητικός αριθμός βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

### παράδειγματα

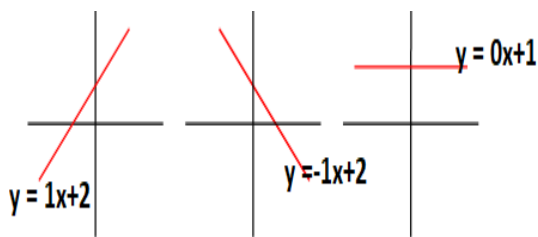


### Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \alpha \cdot x + \beta$ ( $\beta \neq 0$ ) ;

· Έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή.

· Είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = \alpha \cdot x$ , και περνάει απ' το σημείο  $(0, \beta)$  του άξονα  $y$ .

### παράδειγματα



### What do we know about the function $y = \alpha \cdot x$ ?

• It corresponds to **proportional amounts** (when the value of one is multiplied by a number, then the corresponding value of the other is multiplied by the same number, for example how many kilograms of bread we buy from a bakery and how much money we pay for these).

• Its **graph** is a **straight line** that **passes** through the **origin** (point  $O(0,0)$ ).

•  $\alpha$  is called the **slope** of the line and  $\alpha = \frac{y}{x}$ .

• If  $\alpha$  is a positive number, then the line is in the 1st and 3rd quadrants, while if it is a negative number, it is in the 2nd and 4th quadrants.

### examples

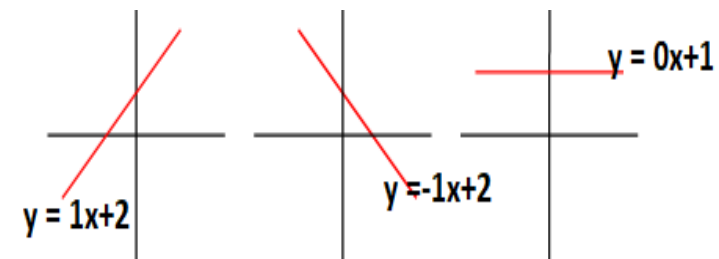


### What do we know about the function $y = \alpha \cdot x + \beta$ ( $\beta \neq 0$ )?

• Its graph is a straight line.

• It is parallel to the line  $y = \alpha \cdot x$  and passes through the point  $(0, \beta)$  of the  $y$ -axis.

### Examples

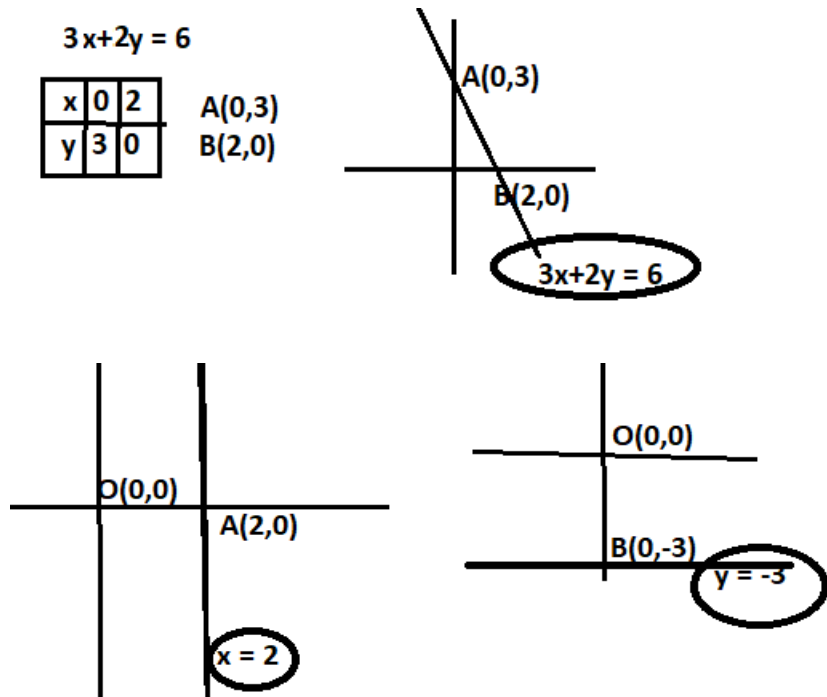


**Εξίσωση μορφής  $ax + by = \gamma$ ,  $a \neq 0$  ή  $b \neq 0$  είναι πάντα ευθεία.**

**Βασική παρατήρηση:** Για να σχεδιάσουμε μία ευθεία είναι αρκετά δύο σημεία της ευθείας αυτής.

Η εξίσωση  $x = \alpha$  παριστάνει μία κατακόρυφη ευθεία και η εξίσωση  $y = \beta$  παριστάνει μία οριζόντια.

**παραδείγματα**

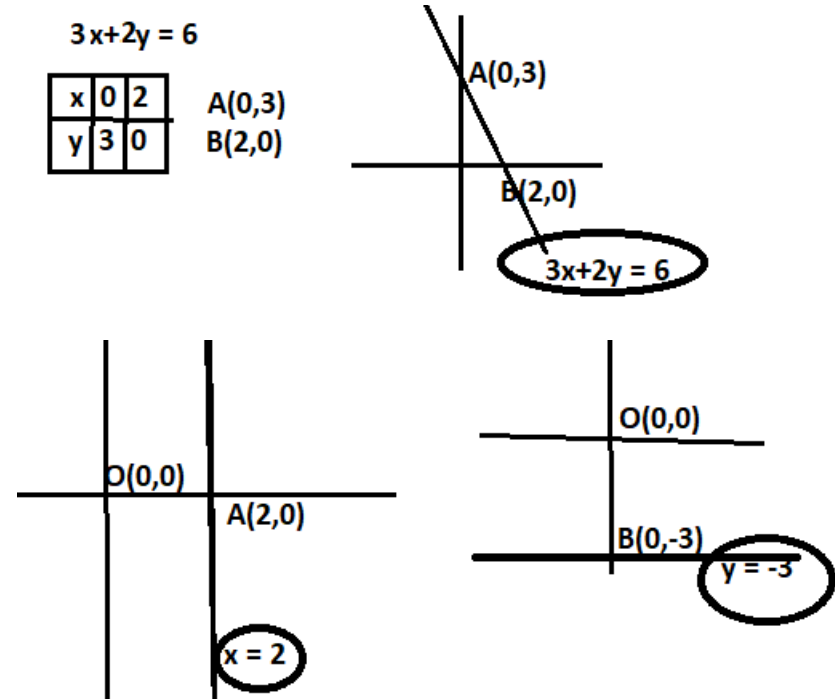


**An equation of the form  $ax + by = \gamma$ ,  $a \neq 0$  or  $b \neq 0$  is always a straight line.**

**Basic observation:** To draw a straight line, two points on that line are enough.

The equation  $x = \alpha$  represents a vertical line and the equation  $y = \beta$  represents a horizontal line.

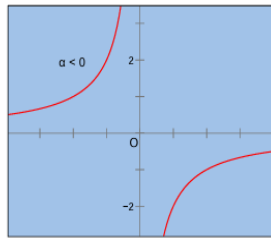
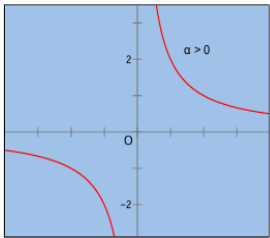
**Examples**



## Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ ;

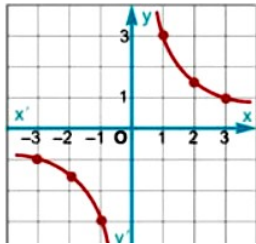
- Αντιστοιχεί σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Έχει γραφική παράσταση καμπύλη, που ονομάζεται υπερβολή.
- Η υπερβολή αποτελείται από δύο κλάδους, οι οποίοι πλησιάζουν ασταμάτητα τους άξονες χωρίς ποτέ να τους τέμνουν (λέμε πως οι άξονες είναι ασύμπτωτες της υπερβολής).
- Αν το  $a$  είναι θετικός αριθμός, τότε οι δύο κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο. Αν το  $a$  είναι αρνητικός αριθμός τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο.
- Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες  $y=x$ ,  $y = -x$

$$y = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

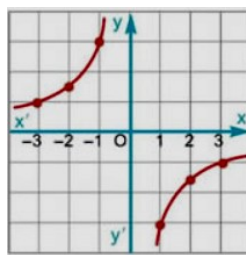


## Παραδείγματα

$$y = \frac{3}{x}$$



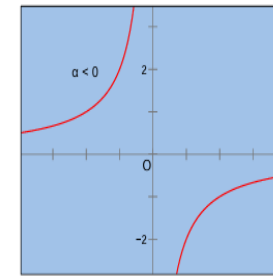
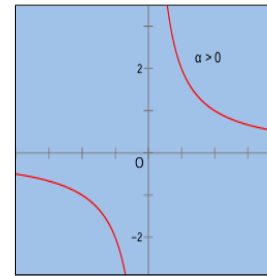
$$y = \frac{-3}{x}$$



## What do we know about the function $y = \frac{a}{x}$ ?

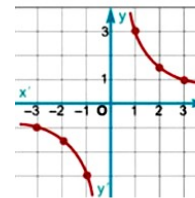
- It corresponds to inversely proportional quantities.
- Its graph is a curve called a hyperbola.
- The hyperbola consists of two branches, which approach the axes continuously without ever intersecting them (we say that the axes are asymptotes of the hyperbola).
- If  $a$  is a positive number, then the two branches of the hyperbola lie in the 1st and 3rd quadrants. If  $a$  is a negative number, then the branches lie in the 2nd and 4th quadrants.
- It has a center of symmetry at the origin and axes of symmetry along the bisectors of the axes, that is, the lines  $y = x$  and  $y = -x$ .

$$y = \frac{a}{x}, a \neq 0$$

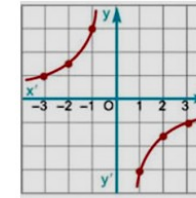


## Examples

$$y = \frac{3}{x}$$



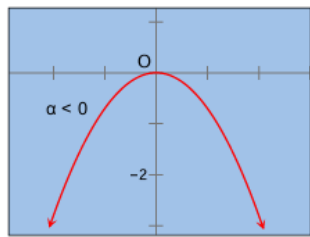
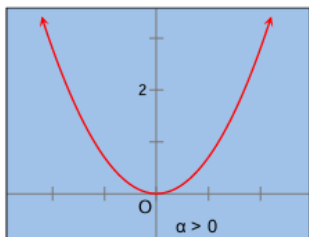
$$y = -\frac{3}{x}$$



## Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $\psi = \alpha x^2$

- έχει γραφική παράσταση παραβολή
- βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $xx'$  αν  $\alpha > 0$
- κάτω από τον άξονα  $xx'$  αν  $\alpha < 0$ .
- έχει άξονα συμμετρίας (δηλαδή κόβεται στη μέση από) τον άξονα  $yy'$ .

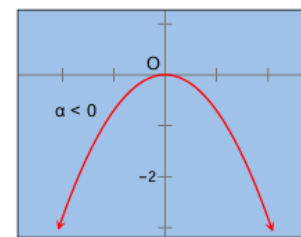
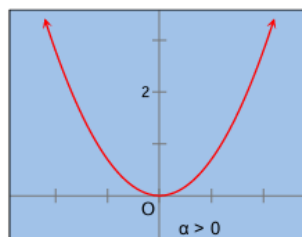
$$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$$



## What we know about the function $\psi = \alpha x^2$

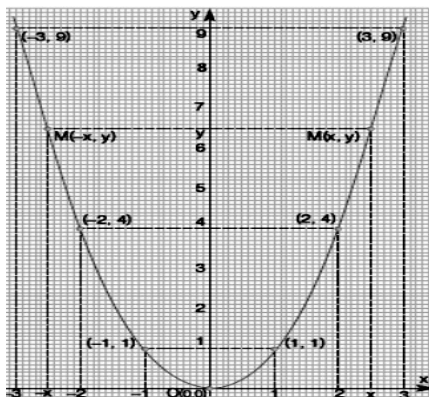
- Its graph is a parabola
- It lies above the  $xx'$  axis if  $\alpha > 0$
- It lies below the  $xx'$  axis if  $\alpha < 0$
- It has an axis of symmetry (that is, it is bisected by the  $yy'$  axis).

$$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$$

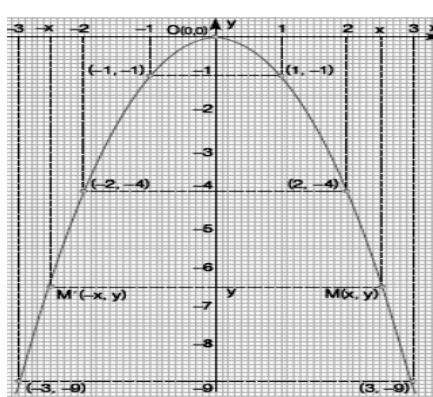


## Παράδειγματα

$$y = x^2$$

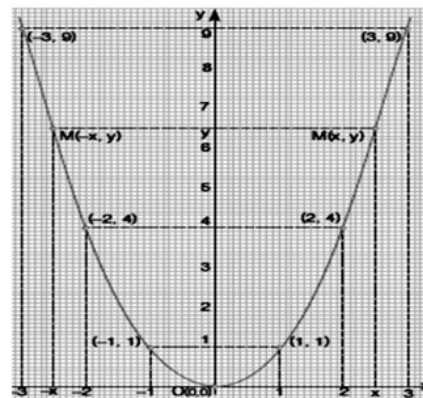


$$y = -x^2$$

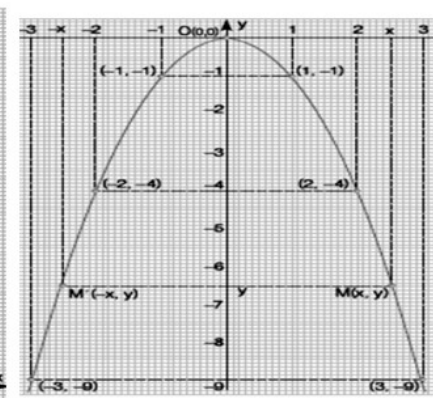


## Examples

$$y = x^2$$

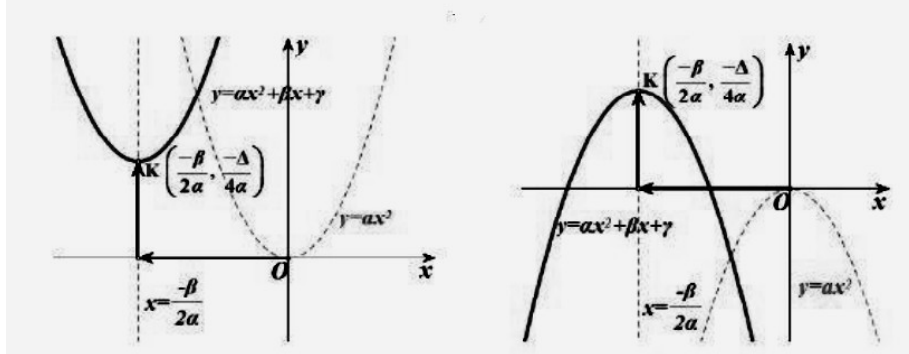


$$y = -x^2$$



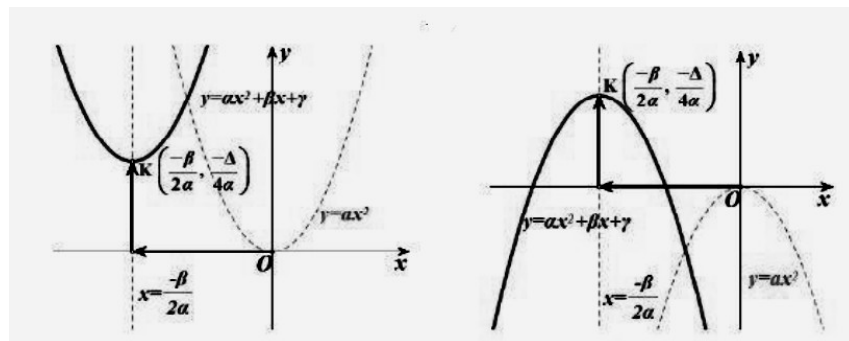
## Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$

- είναι **παραβολή** με κορυφή το σημείο  $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ , όπου  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή K και έχει εξίσωση  $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$  είναι άξονας συμμετρίας της (δηλαδή τη χωρίζει στη μέση)
- Αν  $a$  είναι θετικός αριθμός τότε «κοιτάει προς τα πάνω» και αν το  $a$  είναι αρνητικός «κοιτάει προς τα κάτω»



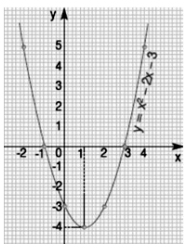
## The graph of the function $y = ax^2 + bx + \gamma$ with $a \neq 0$

- is a **parabola** with vertex at the point  $K(-\beta/2\alpha, -\Delta/(4\alpha))$ , where  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ .
- The vertical line passing through the vertex K and having the equation  $x = -\beta/2\alpha$  is its axis of symmetry (i.e., it divides it in half).
- If  $a$  is a positive number, it "opens upwards" and if  $a$  is negative, it "opens downwards".

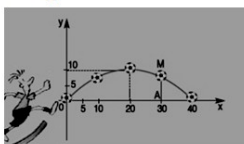


## Παραδείγματα-εφαρμογές

$$Y = x^2 - 2x - 3$$

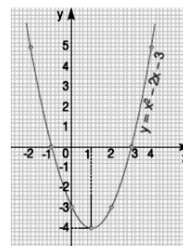


$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x, 0 \leq x \leq 40$$

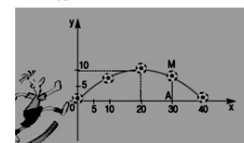


## Examples-applications

$$Y = x^2 - 2x - 3$$



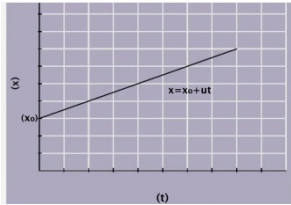
$$y = -\frac{1}{40}x^2 + x, 0 \leq x \leq 40$$



**Σε Φυσική(: Ο χρόνος δεν μπορεί να είναι αρνητικός !!!!)**

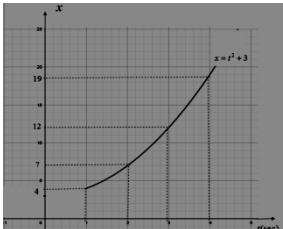
1. Θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα  $u$

Τύπος Φυσικής:  $x = x_0 + u t$ .



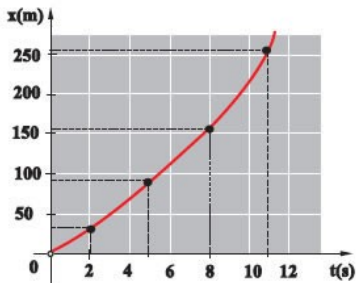
2. Θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση

Τύπος Φυσικής  $x = t^2 + 3$



3. Μετατόπιση σε (ομαλά)επιταχυνόμενη κίνηση

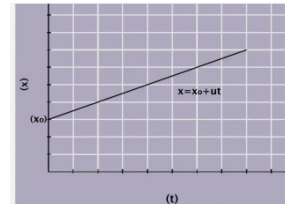
Τύπος:  $x = u_0 t + 1/2 \alpha t^2$



**In Physics (: Time cannot be negative !!!!)**

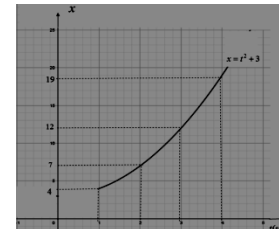
1. Position of a body in motion with constant velocity  $u$

Physics formula:  $x = x_0 + u t$ .



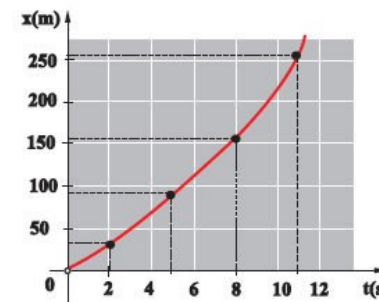
2. Position of a body in motion with constant acceleration

Physics formula:  $x = t^2 + 3$



3. Displacement in (uniformly) accelerated motion

Formula:  $x = u_0 t + 1/2 \alpha t^2$



## Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.

**Βασικός ορισμός:** Κάθε εξίσωση της μορφής  $ax+by = \gamma$  ονομάζεται εξίσωση πρώτου βαθμού με αγνώστους  $x, y$ , ή γραμμική εξίσωση με αγνώστους  $x, \psi$ .

**Παραδείγματα:**

$$2x+3\psi = 17$$

$$-3x+4\psi = 11$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{5}\psi = -\frac{7}{12}$$

**Βασικός ορισμός:** Κάθε ζεύγος της μορφής  $(x,\psi)$  που επαληθεύει (δηλαδή κάνει σωστή) τη γραμμική εξίσωση  $ax+by = \gamma$  ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.

**Ασκήσεις-παραδείγματα :**

**A. Το ζεύγος αριθμών  $(x,y) = (2,3)$  είναι λύση της εξίσωσης  $4x+2y = 14$  ;**

Είναι  $(x,y) = (2,3)$  οπότε  $x = 2, y = 3$

$$4x+2y = 14$$

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$

$$8+6 = 14$$

$$14 = 14 \text{ σωστό}$$

Άρα το ζεύγος  $(x,y) = (2,3)$  είναι λύση της εξίσωσης

**B. Το ζεύγος αριθμών  $(x,y) = (-2,5)$  είναι λύση της εξίσωσης  $3x+y = 4$  ;**

Είναι  $(x,y) = (-2,5)$  οπότε  $x = -2, y = 5$

$$3x+y = 4$$

$$3 \cdot (-2) + 5 = 4$$

$$-6+5 = 4$$

$$-1 = 4 \text{ λάθος}$$

Άρα το ζεύγος  $(x,y) = (-2,5)$  δεν είναι λύση της εξίσωσης

**Άσκηση- εργασία:** Να εξετάσετε αν τα επόμενα ζεύγη αριθμών είναι λύση των εξισώσεων που δίνονται :

$(x,y) = (2,7)$  της εξίσωσης  $4x+y = 15$  .

$(x,y) = (3,-1)$  της εξίσωσης  $2x-y = 7$  .  $(x,y) = (-4,2)$  της εξίσωσης  $x+y = 2$  .

$(x,y) = (-3,-5)$  της εξίσωσης  $2x+y = -11$  .

## Systems of Linear Equations

**The concept of a linear equation.**

**Basic definition:** Any equation of the form  $ax + by = \gamma$  is called a first-degree equation with unknowns  $x, y$ , or a linear equation with unknowns  $x, y$ .

**Examples:**

$$2x + 3y = 17$$

$$-3x + 4y = 11$$

$$1/2x - 3/5y = -7/12$$

**Basic definition:** Any pair of the form  $(x,y)$  that make true the linear equation  $ax + by = \gamma$  is called a solution of the equation.

**Exercises-examples:**

**A. Is the pair of numbers  $(x,y) = (2,3)$  a solution of the equation  $4x + 2y = 14$ ?**

$(x,y) = (2,3)$  so  $x = 2, y = 3$

$$4x + 2y = 14$$

$$4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$

$$8 + 6 = 14$$

$$14 = 14 \text{ true}$$

Therefore, the pair  $(x,y) = (2,3)$  is a solution of the equation

**B. Is the pair of numbers  $(x,y) = (-2,5)$  a solution of the equation  $3x+y = 4$ ?**

We have  $(x,y) = (-2,5)$ , so  $x = -2, y = 5$

$$3x+y = 4$$

$$3 \cdot (-2) + 5 = 4$$

$$-6+5 = 4$$

$$-1 = 4 \text{ false}$$

Therefore, the pair  $(x,y) = (-2,5)$  is not a solution of the equation

**Exercise - task:** Examine whether the following pairs of numbers are solutions of the given equations:

$(x,y) = (2,7)$  for the equation  $4x+y = 15$ .

$(x,y) = (3,-1)$  for the equation  $2x-y = 7$ .

$(x,y) = (-4,2)$  for the equation  $x+y = 2$ .

$(x,y) = (-3,-5)$  της εξίσωσης  $2x+y = -11$  .

### Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής εξίσωσης.

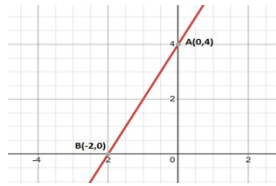
Γεωμετρικά η γραμμική εξίσωση  $ax+by=c$  αντιστοιχεί σε μία ευθεία

**Παράδειγμα:** η εξίσωση  $-2x+y=4$  αντιστοιχεί στην επόμενη ευθεία.

X	0	-2
y	4	0

A (0,4)

B (-2,0)



### Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.

**Βασικός ορισμός:** Κάθε ζεύγος δύο γραμμικών εξισώσεων δηλαδή εξισώσεων της μορφής  $ax+by=c$  και  $a'x+b'y=c'$  λέμε ότι αποτελεί ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y.

**Παραδείγματα γραμμικού συστήματος:**

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3x + 7y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x + 8y = 14 \\ -6x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

**Βασικός ορισμός:** Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y λέγεται κάθε ζεύγος (x,y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

**Παράδειγμα:** το ζεύγος (x,y) =(1,2) είναι λύση για το σύστημα;

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10 & 1 - 5 \cdot 2 = -9 \\ 2 + 8 = 10 & 1 - 10 = -9 \\ 10 = 10 & -9 = -9 \text{ ισχύει} \end{array}$$

Άρα το ζεύγος (x,y) =(1,2) είναι λύση του συστήματος.

**Άσκηση-εργασία:** Να εξετάσεις αν καθένα από τα επόμενα ζεύγη είναι λύση του συστήματος που δίνεται.

A) (x,y) =(1,2)    (Σ)  $\begin{cases} x+2y=10 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$     B) (x,y) =(-1,4)    (Σ)  $\begin{cases} x+2y=9 \\ x-4y=-17 \end{cases}$

Γ) (x,y) =(1,2)    (Σ)  $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x+y=-1 \end{cases}$

### Geometric interpretation of the linear equation.

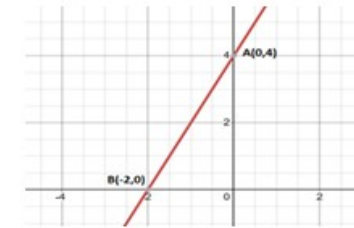
Geometrically, the linear equation  $ax + by = c$  corresponds to a straight line.

**Example:** the equation  $-2x + y = 4$  corresponds to the following line.

X	0	-2
y	4	0

A (0,4)

B (-2,0)



### The concept of a linear system and its graphical solution.

**Basic definition:** Every pair of two linear equations, that is, equations of the form  $ax + by = c$  and  $a'x + b'y = c'$ , is called a system of two linear equations with two unknowns x, y.

**Examples of a linear system:**

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3x + 7y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x + 8y = 14 \\ -6x + \frac{1}{4}y = \frac{3}{7} \end{cases}$$

**Basic definition:** A solution of a linear system of two equations with two unknowns x, y is called every pair (x, y) that satisfies the equations.

**Example:** the pair (x,y) = (1,2) is a solution for the system?

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10 & 1 - 5 \cdot 2 = -9 \\ 2 + 8 = 10 & 1 - 10 = -9 \\ 10 = 10 & -9 = -9 \end{array}$$

which is true

Therefore, the pair (x,y) = (1,2) is a solution of the system.

**Exercise-task: Examine whether each of the following pairs is a solution of the given system.**

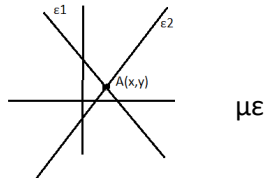
A) (x,y) =(1,2)    (Σ)  $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases}$

B) (x,y) =(-1,4)    (Σ)  $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ x - 4y = -17 \end{cases}$

Γ) (x,y) =(1,2)    (Σ)  $\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + y = -1 \end{cases}$

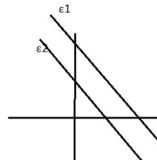
**Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους  
(γεωμετρικός τρόπος λύσης γραμμικού συστήματος)**

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει μία **μοναδική λύση**  $(x, \psi)$  τότε οι δύο ευθείες που προκύπτουν **τέμνονται** σε ένα σημείο συντεταγμένες  $(x, \psi)$ .

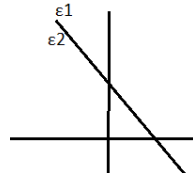


με

2. Το γραμμικό σύστημα **δεν έχει λύση** (αδύνατο σύστημα) και οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  είναι **παράλληλες** μεταξύ τους.

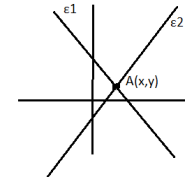


3. Το γραμμικό σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** (αόριστο σύστημα) και οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  **ταυτίζονται**.

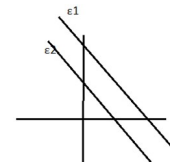


**Graphical solution of a linear system with two unknown numbers  
(geometric way of solving of a linear system)**

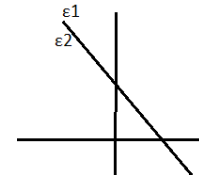
1. If a linear system has a **unique solution**  $(x, y)$  then the two resulting lines **intersect** at a **point** with coordinates  $(x, y)$ .



2. The linear system has **no solution** (inconsistent system) and the lines  $\epsilon_1, \epsilon_2$  are **parallel**.

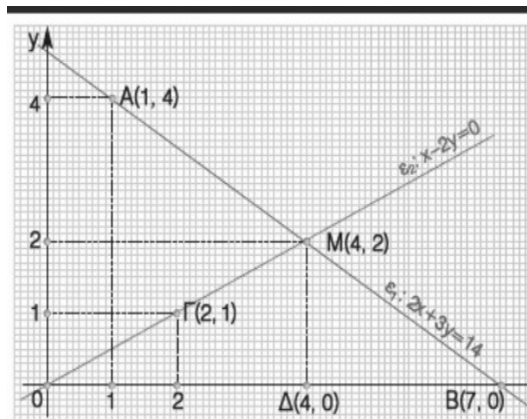


3. The linear system has **infinite solutions** (indeterminate system) and the lines  $\epsilon_1, \epsilon_2$  **coincide**.



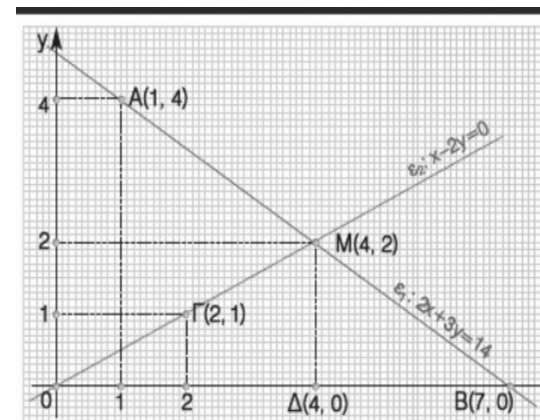
**Παραδείγματα**

1. Λύση του συστήματος
- $$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$
- είναι το ζεύγος  $(x, y) = (4, 2) \rightarrow x = 4, y = 2$



**Examples**

1. Solution of the system
- $$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$
- Is the pair  $(x, y) = (4, 2) \rightarrow x = 4, y = 2$

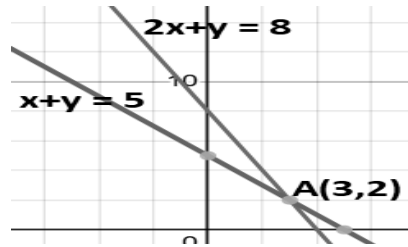


2. Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x+y=5 \end{cases}$$

είναι το ζεύγος

$$(x,y) = (3,2) \rightarrow x = 3, y = 2$$

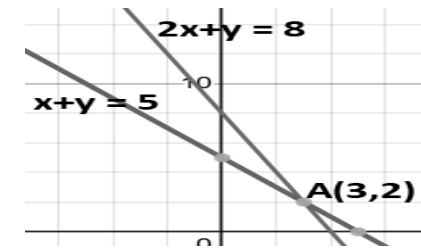


2. Solution of the system

$$\begin{cases} 2x+y=8 \\ x+y=5 \end{cases}$$

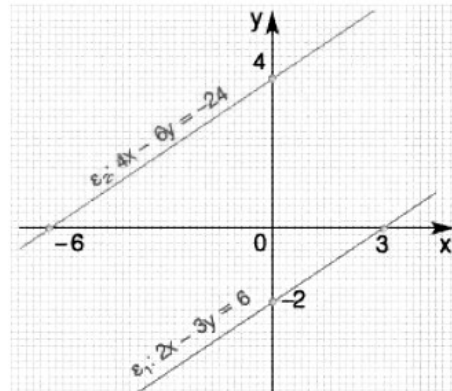
is the pair

$$(x, y) = (3, 2) \rightarrow x = 3, y = 2$$



3. το σύστημα  $\begin{cases} 4x-6y=-24 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$

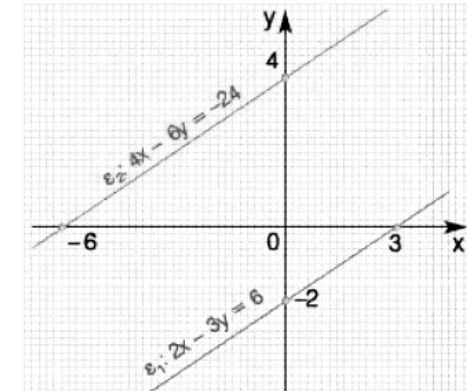
δεν έχει λύση (αδύνατο σύστημα) και οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  είναι παράλληλες μεταξύ τους



3. the system

$$\begin{cases} 4x-6y=-24 \\ 2x-3y=6 \end{cases}$$

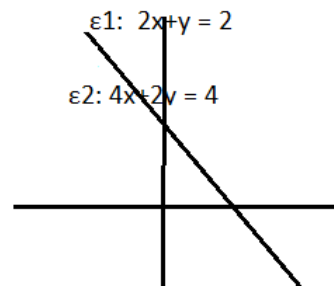
has no solution (inconsistent system) and the lines  $\epsilon_1, \epsilon_2$  are parallel.



are

4. το σύστημα  $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$

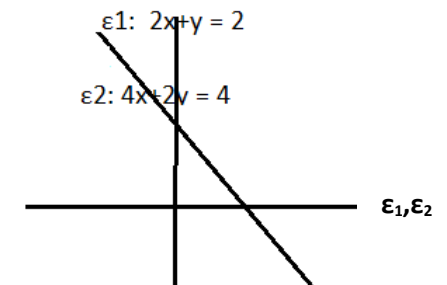
έχει άπειρες λύσεις και οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  ταυτίζονται.



4. The system

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 4x+2y=4 \end{cases}$$

has infinite solutions and the lines coincide.



## Αλγεβρική λύση γραμμικού συστήματος

### 1<sup>ος</sup> τρόπος: Μέθοδος αντικατάστασης

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος

### Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 4x+5y=13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x=5-3y \\ 4x+5y=13 \end{cases}$$

$$4(5-3y)+5y=13$$

$$20-12y+5y=13$$

$$-12y+5y=13-20$$

$$-7y=-7$$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$$y=1$$

$$x+3y=5$$

$$x+3 \cdot 1=5$$

$$x+3=5$$

$$x=2 \text{ άρα η λύση του συστήματος είναι: } (x,y) = (2,1)$$

## Algebraic solution of a linear system

### 1st method: Substitution method

1. Solve one of the system's equations for one unknown.
2. Substitute this unknown in the other equation of the system with its equivalent expression, resulting in an equation with one unknown, which we then solve.
3. Substitute the value of the unknown we found into the previous equation, thus finding the other unknown as well.
4. Determine the solution of the system.

### Example Exercise 1: Solve the system:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 4x+5y=13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x=5-3y \\ 4x+5y=13 \end{cases}$$

$$4(5-3y)+5y=13$$

$$20-12y+5y=13$$

$$-12y+5y=13-20$$

$$-7y=-7$$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$$y=1$$

$$x+3y=5$$

$$x+3 \cdot 1=5$$

$$x+3=5$$

$$x=2$$

So, the solution is  $(x,y) = (2,1)$

**Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:**

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$5(y-3) + 6y = 7$$

$$5y - 15 + 6y = 7$$

$$5y + 6y = 7 + 15$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$x = y - 3$$

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:  $(x, y) = (-1, 2)$

**Exercise example 2: Solve the system:**

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$5(y-3) + 6y = 7$$

$$5y - 15 + 6y = 7$$

$$5y + 6y = 7 + 15$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$x = y - 3$$

$$x = 2 - 3$$

$$x = -1$$

So, the solution is  $(x, y) = (-1, 2)$

**Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα συστήματα:**

1. 
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

**Exercise for homework: solve the following systems:**

1. 
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

3. 
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

## Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος – 2<sup>ος</sup> τρόπος:

### Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

**Βήμα 1ο:** Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν άγνωστο.

**Βήμα 2ο:** Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις. Προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

**Βήμα 3ο:** Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και την τιμή του άλλου αγνώστου. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος .

### Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 & \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 8 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} \quad +$$

$$-6x + 6x - 10y + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$3x + 5 \cdot 2 = 1$$

$$3x + 10 = 1$$

$$3x = 1 - 10$$

$$3x = -9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$$

$x = -3$  άρα η λύση του συστήματος είναι:  $(x, y) = (-3, 2)$

## Algebraic solution of a linear system – 2nd method:

### Method of opposite coefficients

**Step 1:** Multiply the terms of each equation by an appropriate number so that opposite coefficients appear for one unknown.

**Step 2:** Add the two equations term by term. An equation with one unknown results, which we solve.

**Step 3:** Substitute the value of the unknown we found into one of the system's equations, thus finding the value of the other unknown as well.

Determine the solution of the system.

### Exercise example 1: Solve the system

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 & \cdot (-2) \\ 2x + 7y = 8 & \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} \quad +$$

$$-6x + 6x - 10y + 21y = -2 + 24$$

$$11y = 22$$

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

$$y = 2$$

$$3x + 5 \cdot 2 = 1$$

$$3x + 10 = 1$$

$$3x = 1 - 10$$

$$3x = -9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-9}{3}$$

$$x = -3$$

So the solution of the system is  $(x, y) = (-3, 2)$

**Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:**

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdot 2 \\ 5x + 2y = 6 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 & + \\ 5x + 2y = 6 & + \end{cases}$$

---

$$4x + 5x - 2y + 2y = 6 + 6$$

$$9x = 12$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$2x - y = 3$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$$

$$\frac{8}{3} - y = 3$$

$$-y = 3 - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1 \cdot y}{-1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$x = -3$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:  $(x, y) = (-3, -\frac{1}{3})$

**Exercise example 2: Solve the system:**

$$\begin{cases} 2x - y = 3 & \cdot 2 \\ 5x + 2y = 6 & \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 & + \\ 5x + 2y = 6 & + \end{cases}$$

---

$$4x + 5x - 2y + 2y = 6 + 6$$

$$9x = 12$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$2x - y = 3$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$$

$$\frac{8}{3} - y = 3$$

$$-y = 3 - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1 \cdot y}{-1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$x = -3$$

So the solution of the system is  $(x, y) = (-3, -\frac{1}{3})$

**Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:**

$$1. \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ -7x + 8y = -3 \end{cases}$$

**Πολύπλοκα συστήματα:**

Αν το σύστημα είναι πολύπλοκο τότε για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος, κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών** και όλες τις απαιτούμενες **πράξεις**. Έπειτα το **τακτοποιούμε** και αποφασίζουμε ποια μέθοδος είναι κατάλληλη για την επίλυσή του.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2} + 14\frac{2y+1}{7} + 14\frac{2}{1} = 0 \\ 6\frac{x+6}{3} - 6\frac{y-6}{2} = 6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \\ 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 7x + 4y = 5 \\ -7 \cdot 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 8y = 10 \\ -14x + 21y = -126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 29y = -116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4(-4) = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

**Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα**

$$1. \begin{cases} \frac{x-1}{4} - y = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

**Exercise-assignment: Solve the following systems using the method of opposite coefficients:**

$$1. \begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ -7x + 8y = -3 \end{cases}$$

**Complex systems:**

If the system is complex, then in order to simplify its equations, we **eliminate denominators** and perform all the necessary **operations**. Then we organize it and decide which method is suitable for solving it.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2} + 14\frac{2y+1}{7} + 14\frac{2}{1} = 0 \\ 6\frac{x+6}{3} - 6\frac{y-6}{2} = 6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 = 0 \\ 2(x+6) - 3(y-6) = 48 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 35 + 4y + 2 + 28 = 0 \\ 2x + 12 - 3y + 18 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 7x + 4y = 5 \\ -7 \cdot 2x - 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 8y = 10 \\ -14x + 21y = -126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 29y = -116 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 4(-4) = 5 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 21 \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

**Exercise-assignment: Solve the following systems**

$$1. \begin{cases} \frac{x-1}{4} - y = 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = -1 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{3} = 3 \\ \frac{x+4}{3} - \frac{y-6}{2} = 4 \end{cases}$$

### Παρατηρήσεις σε λύση συστημάτων:

Η **γραφική λύση ενός συστήματος** δεν βρίσκει πάντα ακριβώς τη λύση του, αφού συχνά οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι ακριβώς, όμως λύνει το σύστημα έστω και με προσέγγιση όταν η άλγεβρα είναι αδύνατο, ή πολύ δύσκολο να το λύσει .

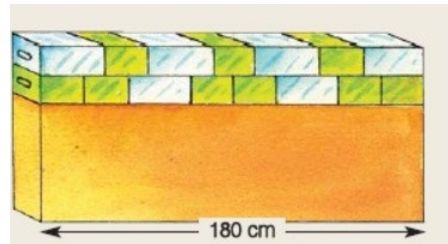
Η **αλγεβρική λύση** του μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.

Το αν **θα διαλέξουμε** τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών, ή αντικατάστασης είναι επιλογή μας(διαλέγουμε όποια μας «βολεύει» περισσότερο, σε κάποια συστήματα όμως εξυπηρετεί να γνωρίζουμε και τις 2.

Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι λύσης συστημάτων ....

### Προβλήματα:

1. Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



2. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ, αν οι πλευρές έχουν εξισώσεις ΑΒ:  $2x - 3y = 1$ , ΑΓ:  $x + y = 3$ , ΒΓ:  $x - 3y = 3$

3. Σε ένα αγρόκτημα είναι κόττες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 140 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κόττες και πόσα τα κουνέλια.

4. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

5. Να βρεθούν δύο συμπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της άλλης κατά  $12^\circ$ .

### Remarks on solving systems:

**The graphical solution of a system** does not always find its exact solution, since often the coordinates of the intersection point of the two lines are not exact, but it solves the system at least approximately when algebra is impossible, or very difficult to solve.

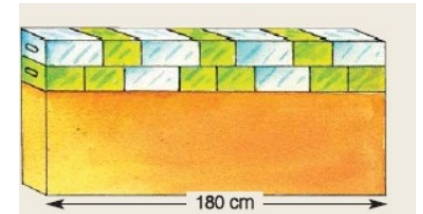
**The algebraic solution** gives us the ability to determine the solution (if it exists) accurately in any case.

Whether **we choose** the method of opposite coefficients or substitution is our choice (we choose whichever is more "convenient" for us, but in some systems it is useful to know both).

*There are also other methods for solving systems....*

### Problems:

1. At the top of a wall 180 cm long, green and blue decorative bricks have been placed in two rows. Calculate the length of each green and blue brick.



2. Calculate the coordinates of the vertices of triangle ABC if the sides have the equations AB:  $2x - 3y = 1$ , AC:  $x + y = 3$ , BC:  $x - 3y = 3$ .

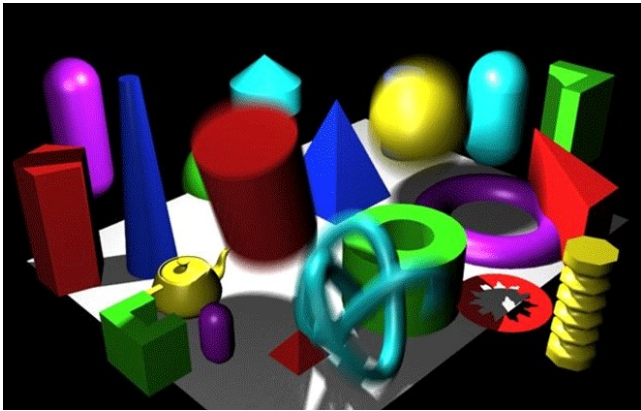
3. On a farm there are chickens and rabbits. If the animals together have 50 heads and 140 legs, find how many chickens and how many rabbits there are.

4. The sum of the digits of a two-digit number is 14. If we swap the digits, the resulting number is 36 units smaller. Find the number.

5. Find two complementary angles if one of them is  $12^\circ$  greater than twice the other.

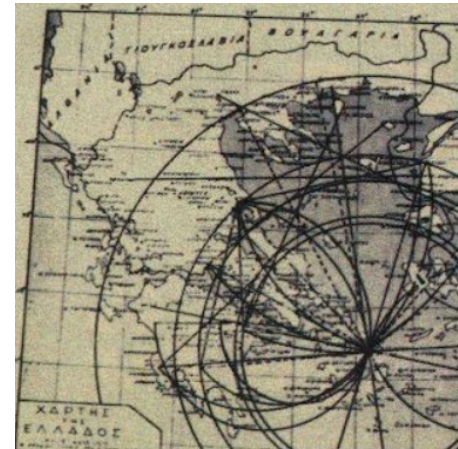
**Ας μελετήσουμε Γεωμετρία!**

**Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας**



**Let us Study Geometry!!!**

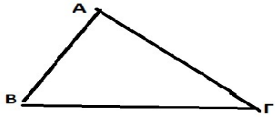
**Intercultural High School of Athens**



## Γεωμετρία

### Κύρια και Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Σχήμα:



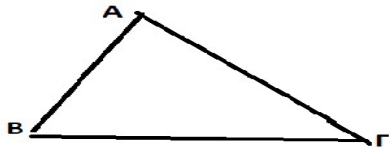
Ονομασία σχήματος: τρίγωνο ΑΒΓ

**Βασική παρατήρηση:** Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις γωνίες και τρεις πλευρές.

**Βασικός ορισμός:** Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου αποτελούν τα κύρια στοιχεία του.

### Πλευρές τριγώνου

**Παράδειγμα:**



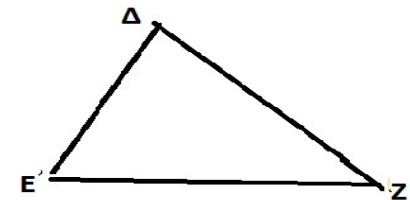
τρίγωνο ΑΒΓ

πλευρές τριγώνου ΑΒ ή γ

ΑΓ ή β

ΒΓ ή α

**Παράδειγμα**



τρίγωνο ΔΕΖ

πλευρές τριγώνου ΔΕ ή ζ

ΔΖ ή ε

ΕΖ ή δ

## Geometry

### Primary and Secondary Elements of a Triangle

Shape:



Name of shape: triangle ΑΒΓ

**Basic observation:** In every triangle there are three angles and three sides.

**Basic definition:** The sides and angles of a triangle constitute its main elements.

### Sides of a triangle

**Example:**



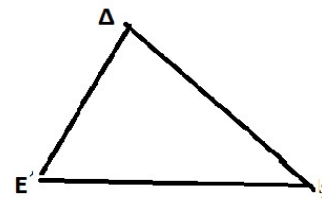
triangle ΑΒΓ

sides of triangle ΑΒ or Γ

ΑΓ or β

ΒΓ or α

**Example**

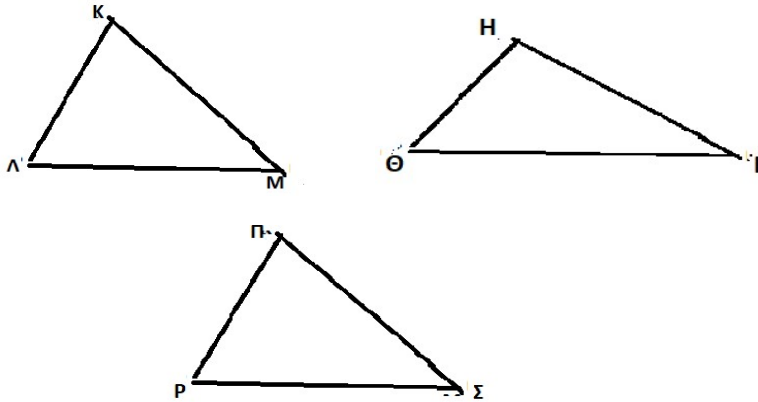


triangle ΔΕΖ

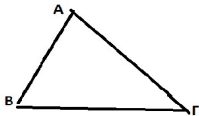
sides of triangle ΔΕ or ζ

ΔΖ or ε ΕΖ or δ

**Άσκηση εργασία** Να ονομάσετε τα επόμενα τρίγωνα και τις πλευρές τους με δύο τρόπους



**Γωνίες τριγώνου:**



**τρίγωνο ΑΒΓ**

**γωνίες τριγώνου**

$\widehat{A}$  ή  $\widehat{BAG}$  ή  $\widehat{GAB}$

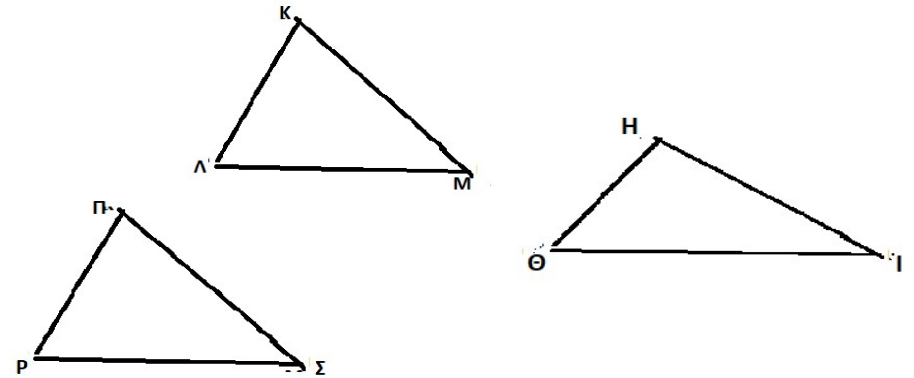
$\widehat{B}$  ή  $\widehat{ABG}$  ή  $\widehat{GBA}$

$\widehat{\Gamma}$  ή  $\widehat{AGB}$  ή  $\widehat{BGA}$

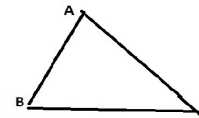
**Βασική παρατήρηση:** οι Γωνίες μετριοούνται σε μοίρες

**Άσκηση εργασία 2:** να ονομάσετε τις γωνίες των τριγώνων της άσκησης 1 από το σχολικό βιβλίο.

**Exercise- task:** Name the following triangles and their sides in two ways



**Angles of a triangle:**



**triangle ΑΒΓ**

**angles of the triangle:**

$\widehat{A}$  or  $\widehat{BAG}$  or  $\widehat{GAB}$

$\widehat{B}$  or  $\widehat{ABG}$  or  $\widehat{GBA}$

$\widehat{\Gamma}$  or  $\widehat{AGB}$  or  $\widehat{BGA}$

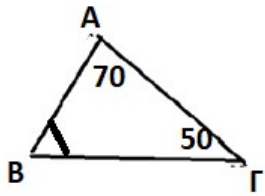
**Key observation:** Angles are measured in degrees

**Exercise- task 2:** name the angles of the triangles in exercise 1 from the textbook.

**Βασική παρατήρηση** το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$  δηλαδή ισχύει

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

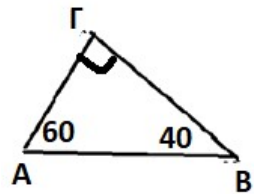
**Άσκηση-Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{B}$  στο επόμενο τρίγωνο:



**Λύση:**

Ισχύει:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$   
 $70^\circ + \hat{B} + 50^\circ = 180^\circ$   
 $\hat{B} + 120^\circ = 180^\circ$   
 $\hat{B} = 180^\circ - 120^\circ$   
 $\hat{B} = 60^\circ$

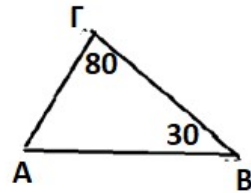
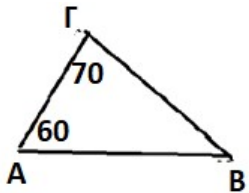
**Άσκηση-Παράδειγμα:** Να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{\Gamma}$  στο επόμενο τρίγωνο



**Λύση:**

Ισχύει:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$   
 $60^\circ + 40^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$   
 $\hat{\Gamma} + 100^\circ = 180^\circ$   
 $\hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ$   
 $\hat{\Gamma} = 80^\circ$

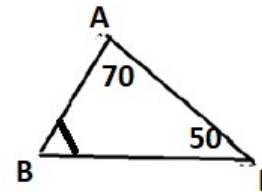
**Άσκηση-Εργασία:** Να υπολογιστούν οι άγνωστες γωνίες στα επόμενα τρίγωνα:



**Basic observation:** the sum of the angles of a triangle is  $180^\circ$ , which means that

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

**Exercise-Example:** Calculate angle  $\hat{B}$  in the following triangle:



**Solution:**

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

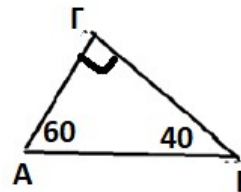
$$70^\circ + \hat{B} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B} + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\hat{B} = 60^\circ$$

**Exercise-Example:** Calculate angle  $\hat{\Gamma}$  in the following triangle:



**Λύση:**

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

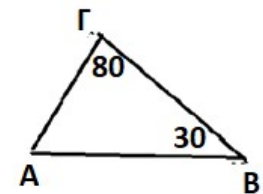
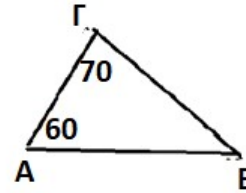
$$60^\circ + 40^\circ + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

$$\hat{\Gamma} + 100^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{\Gamma} = 180^\circ - 100^\circ$$

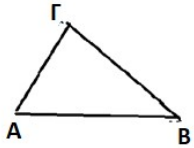
$$\hat{\Gamma} = 80^\circ$$

**Exercise-Example:** Calculate the unknown angles in the following triangles:



**Βασικός ορισμός:** Η γωνία που βρίσκεται ανάμεσα (δηλαδή περιέχεται σε δύο πλευρές ενός τριγώνου) ονομάζεται **περιεχόμενη γωνία**.

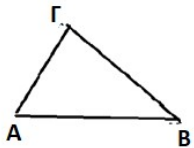
**Παράδειγμα:**



Πλευρές	περιεχόμενη γωνία
AB, AΓ	$\hat{A}$
BΓ, BA	$\hat{B}$
ΓA, ΓB	$\hat{\Gamma}$

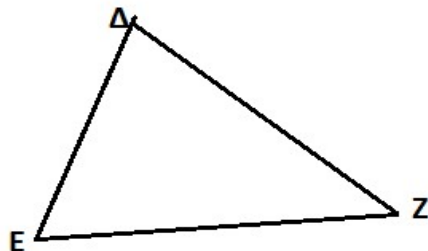
**Βασικός ορισμός:** Οι γωνίες ενός τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς (δηλαδή ακουμπούν-πρόσκεινται - στην πλευρά αυτή) ονομάζονται **προσκειμένες** γωνίες.

**Παράδειγμα:**



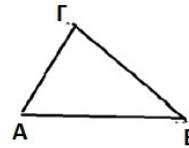
Πλευρά	προσκειμένες γωνίες
AB	$\hat{A}, \hat{B}$
BΓ	$\hat{B}, \hat{\Gamma}$
ΓA	$\hat{\Gamma}, \hat{A}$

**Άσκηση-Εργασία:** στο τρίγωνο ΔEZ να βρείτε  
 Α) την περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΔE, ΔZ  
 Β) τις προσκειμένες γωνίες της πλευράς EZ



**Basic definition:** The angle that lies between (i.e. contained by two sides of a triangle) is called the **included angle**.

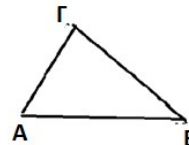
**Example:**



sides	Included angle
AB, AΓ	$\hat{A}$
BΓ, BA	$\hat{B}$
ΓA, ΓB	$\hat{\Gamma}$

**Basic definition:** The angles of a triangle whose vertices are the ends of a side (i.e. they touch - approach - that side) are called **adjacent angles**.

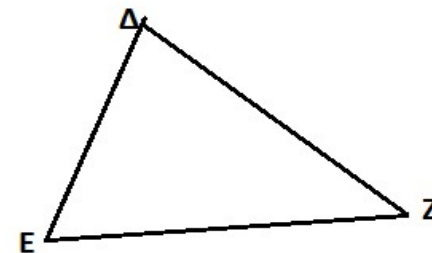
**Example:**



side	adjacent angles
AB	$\hat{A}, \hat{B}$
BΓ	$\hat{B}, \hat{\Gamma}$
ΓA	$\hat{\Gamma}, \hat{A}$

**Exercise-Work:** in triangle ΔEZ find

- A) the included angle of sides DE, DZ  
 B) the adjacent angles of side EZ

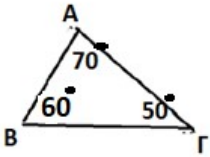


## Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες:

τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους διακρίνονται σε:

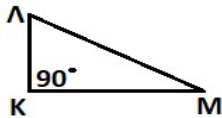
**A) Οξυγώνιο τρίγωνο:** ένα τρίγωνο ονομάζεται οξυγώνιο όταν όλες οι γωνίες του είναι οξείες (δηλαδή λιγότερο από  $90^\circ$ )

**Παράδειγμα:**

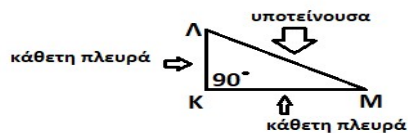


**B) Ορθογώνιο τρίγωνο:** ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο τρίγωνο όταν έχει μια ορθή γωνία (δηλαδή μία γωνία ίση με  $90^\circ$ )

**Παράδειγμα:**

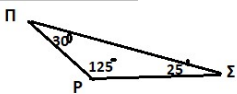


**Βασική παρατήρηση(Ονομασία πλευρών):** Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται υποτείνουσα ενώ η πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία ονομάζονται κάθετες πλευρές



**Γ) Αμβλυγώνιο τρίγωνο:** ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο τρίγωνο όταν έχει μια αμβλεία γωνία (δηλαδή μία γωνία μεγαλύτερη από  $90^\circ$ )

**Παράδειγμα:**

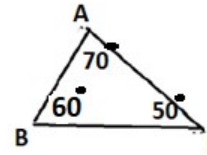


## Types of triangles according to angles:

triangles according to their angles are distinguished into:

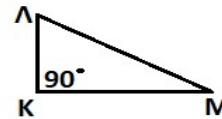
**A) Acute triangle:** a triangle is called acute when all its angles are acute (i.e. less than  $90^\circ$ )

**Example:**

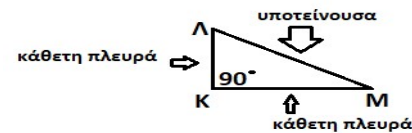


**B) Right triangle:** a triangle is called a right triangle when it has a right angle (i.e. an angle equal to  $90^\circ$ )

**Example:**

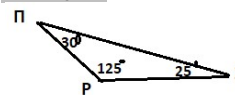


**Basic observation (Name of sides):** The side opposite the right angle is called the hypotenuse while the sides that form the right angle are called perpendicular sides.



**C) Obtuse triangle:** a triangle is called an obtuse triangle when it has an obtuse angle (i.e. an angle greater than  $90^\circ$ )

**Example:**



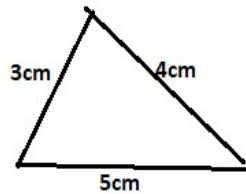
## Είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές:

Τα τρίγωνα διακρίνονται στις επόμενες κατηγορίες ως προς τις πλευρές

### 1. Σκαληνό

Ένα τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό όταν όλες οι πλευρές του είναι άνισες μεταξύ τους.

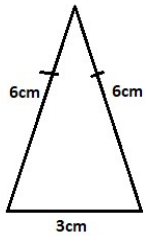
Παράδειγμα



### 2. Ισοσκελές

Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισοσκελές όταν οι δύο πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

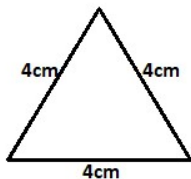
Παράδειγμα



### 3. Ισόπλευρο

Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισόπλευρο όταν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

Παράδειγμα



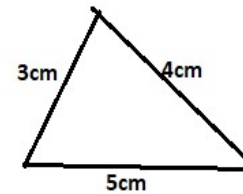
## Types of triangles according to their sides:

Triangles are divided into the following categories according to their sides

### 1. Scalene

A triangle is called scalene when all its sides are unequal to each other.

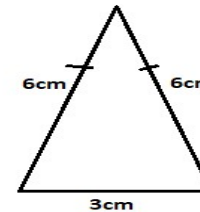
Example



### 2. Isosceles

A triangle is called isosceles when its two sides are equal to each other.

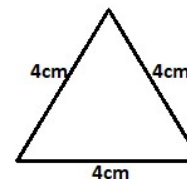
Example



### 3. Equilateral

A triangle is called equilateral when all three of its sides are equal to each other.

Example

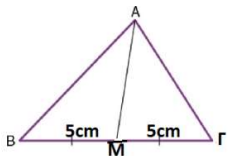


## Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

### Διάμεσος τριγώνου

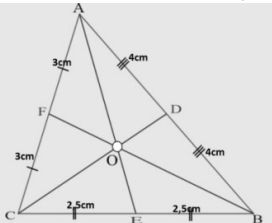
Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κορυφή του τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς (υπενθύμιση: **μέσο** ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμο τμήμα σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα)

### Παράδειγμα



### Παράδειγμα-άσκηση:

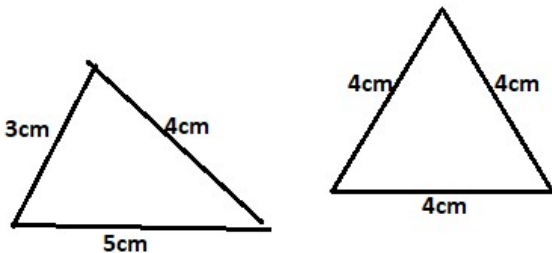
Να σχεδιάσετε τις διαμέσους του τριγώνου



**Βασική παρατήρηση:** Οι διάμεσοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

### Άσκηση-εργασία:

Να σχεδιάσετε τις διαμέσους των τριγώνων:

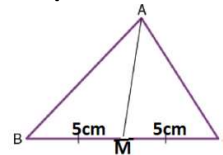


## Secondary elements of a triangle

### Median of a triangle

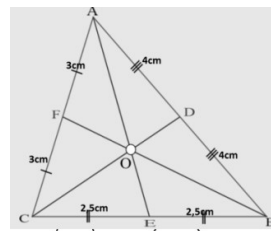
The median of a triangle is the line segment that starts from the vertex of the triangle and ends at the midpoint of the opposite side (reminder: the midpoint of a line is the point that divides the line segment into two equal line segments)

### Example



### Example-exercise:

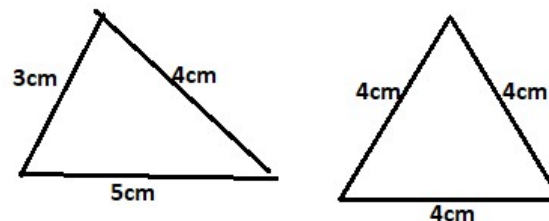
Draw the medians of the triangle



**Basic observation:** The medians pass through the same point.

### Exercise-work:

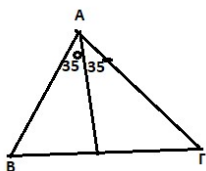
Draw the medians of the triangles:



**Διχοτόμος τριγώνου**

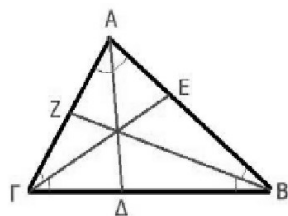
Διχοτόμος τριγώνου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και χωρίζει τη γωνία αυτή σε δύο ίσα μέρη.

**Παράδειγμα**



**Παράδειγμα-άσκηση:**

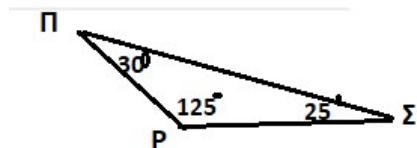
Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους του τριγώνου:



**Βασική παρατήρηση:** Οι διχοτόμοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

**Άσκηση-εργασία:**

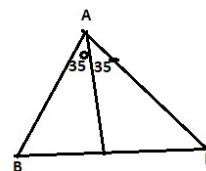
Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους των τριγώνων:



**Triangle bisector**

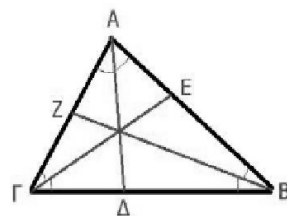
A triangle bisector is a line segment that connects the vertex of an angle of a triangle to the opposite side and divides that angle into two equal parts.

**Example**



**Example-exercise:**

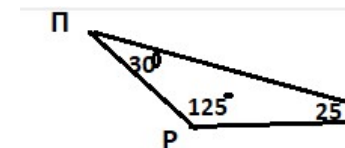
Draw the bisectors of the triangle



**Basic observation:** The bisectors pass through the same point.

**Exercise-work:**

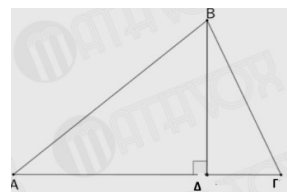
Draw the bisectors of the triangles:



**Ύψος ενός τριγώνου**

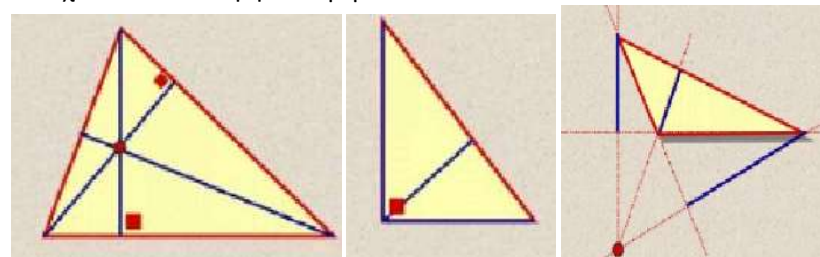
Ύψος ενός τριγώνου είναι το **κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή προς την απέναντι πλευρά** (ή την προέκτασή της).

**Παράδειγμα**



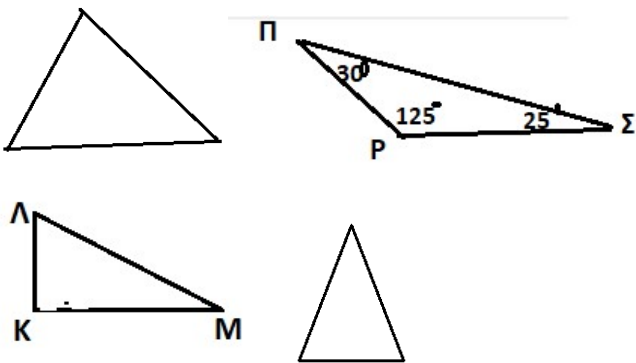
**Παράδειγμα-άσκηση:**

Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:



**Άσκηση-εργασία:**

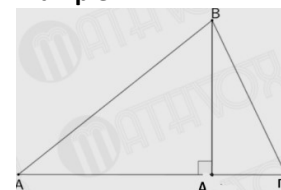
Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:



**Height of a triangle**

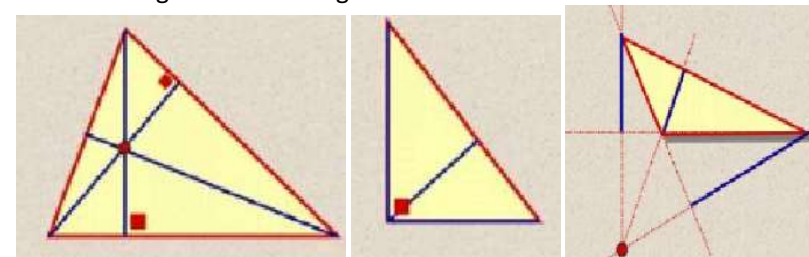
The height of a triangle is the perpendicular line segment from a vertex to the c side (or its extension).

**Example**



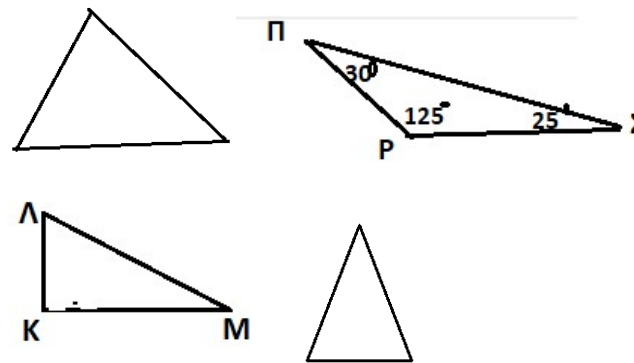
**Example-exercise:**

Draw the heights of the triangles:



**Exercise-work:**

Draw the heights of the triangles:





## ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

### Η ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΑ ΜΑΣ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΓΙΑ

- ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
- ΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΠΟΜΕΝΩΝ ΤΑΞΕΩΝ
- ΤΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
- ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΟΠΩΣ ΦΥΣΙΚΗ , ΧΗΜΕΙΑ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΚΑΙ ΤΕΛΟΣ

- **ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΑ ΟΠΟΥ ΑΠΟΦΕΥΓΟΥΜΕ ΝΑ ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ!!**

### Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΤΟΡΙΚΑ ...

- ✓ ξεκίνησε από τον Θαλή (639-548 π.χ.)
- ✓ αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους.
- ✓ συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη.
- ✓ Τελειοποιήθηκε από τον Ευκλείδη (330-270 π.χ.)

### Πώς αποδεικνύεται μια γεωμετρική πρόταση;

- ✓ Η Ευκλείδεια απόδειξη ξεκινά με τα **δεδομένα(υπόθεση)** και **τι ζητάμε να αποδειχθεί(ζητούμενα-συμπέρασμα)**. Για να είναι σωστό ότι γράφουμε σε μια απόδειξη πρέπει να μπορεί να δικαιολογηθεί από δεδομένα, αξιώματα, προηγούμενες αποδεδειγμένες προτάσεις .
- ✓ στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.
- ✓ καθώς βγάζουμε συμπεράσματα σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία.

## EQUILATERAL TRIANGLES – START PROVING

### THE PROOF METHOD WILL BE USEFUL TO US FOR

- GEOMETRY OF THE 9TH GRADE
- SOLVING COMPLEX PROBLEMS IN MATHEMATICS OF THE FOLLOWING GRADES
- UNIVERSITY MATHEMATICS
- APPLICATION IN SCIENCES SUCH AS PHYSICS, CHEMISTRY, ECONOMICS
- AND FINALLY
- **EVERYDAY LIFE WHERE WE AVOID ACCEPTING INFORMATION WITHOUT PROOF!!**

### PROOF HISTORICALLY ...

- started with Thales (639-548 BC)
- was developed by Pythagoras and the Pythagoreans
- was systematized by Plato and Aristotle
- was perfected by Euclid (330-270 BC)

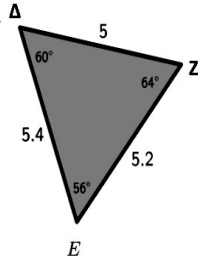
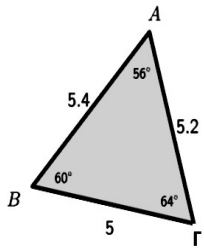
### How is a geometric proposition proven?

- The Euclidean proof begins with the given data (assumption) and what is asked to be proven (requirements - conclusion). For what we write in a proof to be correct, it must be justified by data, axioms, or previously proven propositions.
- it is based on the rules of Logic.
- as we draw conclusions, intuition and insight are very important .

## Ίσα τρίγωνα

**Βασική πρόταση 1:** Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

**Παράδειγμα:** Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



Στα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ παρατηρούμε ότι  
 $AB = ΔΕ$   
 $ΑΓ = ΔΖ$  και  $ΒΓ = ΕΖ$   
 οπότε τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις

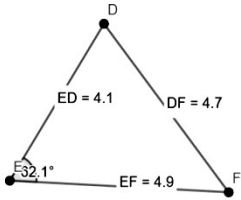
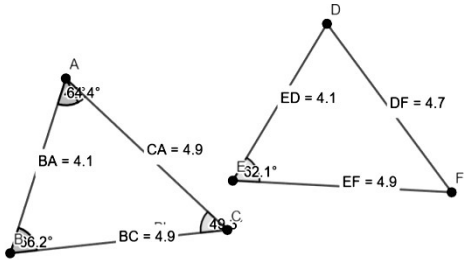
$$\hat{A} = \hat{\Delta}$$

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$$

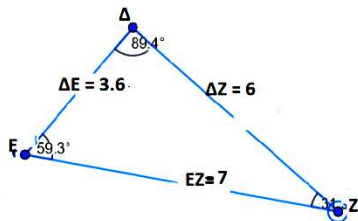
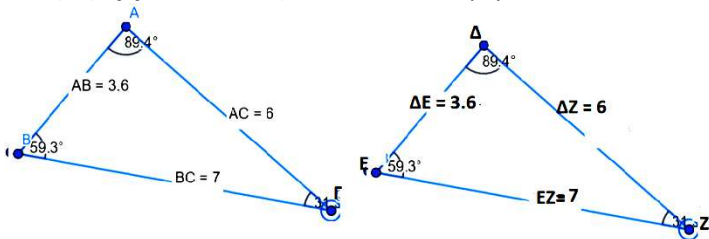
αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.  
 Συμβολίζουμε:  $AB\Gamma = ΔΕΖ$ .

**Ερώτηση κρίσεως:** Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ABC και DEF είναι ίσα.



Στα τρίγωνα ABC και DEF παρατηρούμε ότι οι γωνίες B και E δεν είναι ίσες, επίσης οι πλευρές CA και DF δεν είναι ίσες, επομένως τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ δεν είναι ίσα.

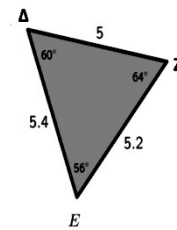
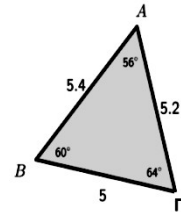
**Άσκηση εργασία:** Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



## Congruent Triangles

**Basic Proposition 1:** If two triangles have their sides equal one by one and their corresponding angles equal, then they are congruent.

**Example:** Examine whether triangles ABC and DEF are congruent.

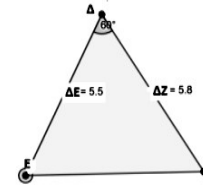
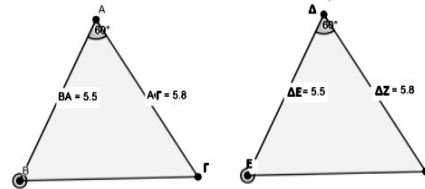


In triangles ABC and DEF we observe that  
 $AB = ΔΕ$   
 $ΑΓ = ΔΖ$  and  $ΒΓ = ΕΖ$   
 $\hat{A} = \hat{\Delta}$   
 $\hat{B} = \hat{E}$   
 $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

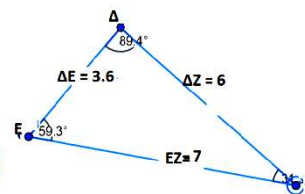
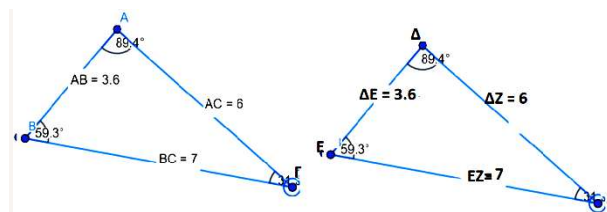
therefore, triangles ABC and DEF are congruent because they have their sides equal one by one and their corresponding angles equal.  
 We symbolize:  $ABC = DEF$ .

**Critical Question:** Examine whether triangles ABC and DEF are congruent.

In triangles ABC and DEF we observe that angles B and E are not equal, and also sides CA and DF are not equal, so triangles ABC and DEF are not congruent.



**Exercise:** Examine whether triangles ABC and DEF are congruent.



## Κριτήρια ισότητας τριγώνων

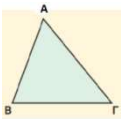
### 1<sup>ο</sup> κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση τότε είναι ίσα (Π-Γ-Π)

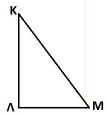
#### Βασικές επισημάνσεις:

1. η έκφραση ή σε μία προς μία σημαίνει αντίστοιχες πλευρές
2. η έκφραση **περιεχόμενη γωνία** σημαίνει γωνία που περιέχεται ανάμεσα στις ίσες πλευρές

#### παράδειγμα για επισήμανση 2:



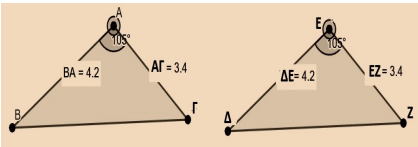
περιεχόμενη γωνία στις πλευρές AB και ΑΓ είναι η γωνία  $\hat{A}$



Η περιεχόμενη γωνία στις πλευρές ΛΚ και ΛΜ είναι η γωνία  $\hat{L}$ .

**ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:** Όταν δυο τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα (γωνίες και πλευρές)

**Άσκηση παράδειγμα:** να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

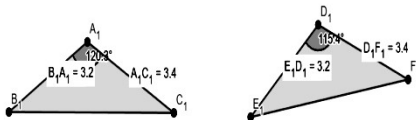


Συγκρίνω τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ, αυτά έχουν:

$$\begin{aligned} AB &= DE = 5,5\text{cm} && (\Pi) \\ \hat{A} &= \hat{E} = 60^\circ && (\Gamma) \\ ΑΓ &= ΔΖ = 5,8\text{cm} && (\Pi) \end{aligned}$$

Επομένως από πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Άρα  $B\Gamma = EΖ$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ .

**Άσκηση εργασία:** Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα  $A_1B_1C_1$  και  $D_1E_1F_1$  που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα είναι ίσα.



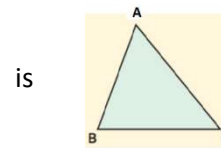
## Criteria for Triangle Congruence

### 1st Criterion for Triangle Congruence

If two triangles have two sides equal one by one and the included angle equal, then they are congruent (S-A-S)

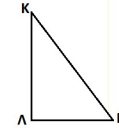
#### Key Notes:

1. The expression 'one by one' means corresponding sides
2. The expression '**included angle**' refers to the angle formed between the equal sides



#### Example to illustrate note 2:

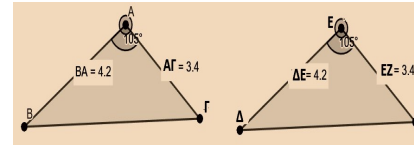
The included angle between sides AB and AC angle  $\hat{A}$



The included angle between sides LK and LM is angle  $\hat{L}$

**MAIN OBSERVATION:** When two triangles are congruent, their remaining elements (angles and sides) are also equal

**Exercise Example:** to check if triangles ABC and DEF are congruent.

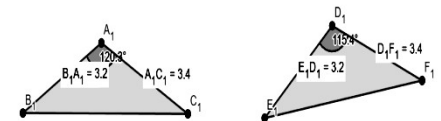


Comparing triangles ABC and DEF, they have:

$$\begin{aligned} AB &= DE = 5.5 \text{ cm} && (S) \\ \hat{A} &= \hat{E} = 60^\circ && (A) \\ AC &= DZ = 5.8 \text{ cm} && (S) \end{aligned}$$

Therefore, according to the first criterion for triangle congruence (S-A-S), the two triangles are congruent. Hence,  $BC = EF$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$ ,  $\hat{C} = \hat{F}$ .

**Exercise Assignment:** Check if the triangles  $A_1B_1C_1$  και  $D_1E_1F_1$  shown below are congruent.

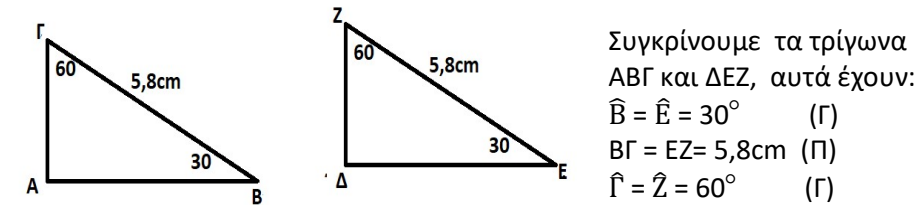


**2° κριτήριο ισότητας τριγώνων**

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. (Γ-Π-Γ)

**Άσκηση παράδειγμα:**

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



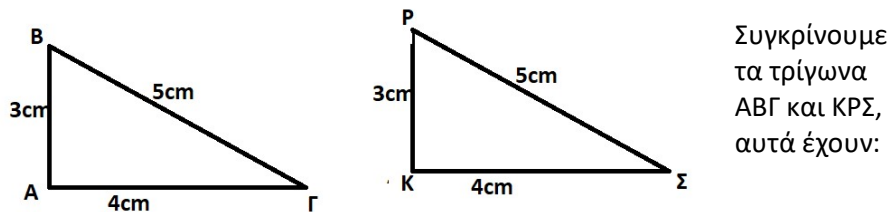
Επομένως από 2° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα. Άρα  $\widehat{A} = \widehat{D}$ ,  $AB = DE$ ,  $AG = DZ$

**3° κριτήριο ισότητας τριγώνων**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. (Π-Π-Π)

**Άσκηση παράδειγμα:**

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΡΣ είναι ίσα.



$$AB = KP = 3\text{cm} \quad (\Pi)$$

$$B\Gamma = P\Sigma = 5\text{cm} \quad (\Pi)$$

$$A\Gamma = K\Sigma = 4\text{cm} \quad (\Pi)$$

Επομένως από 3° κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

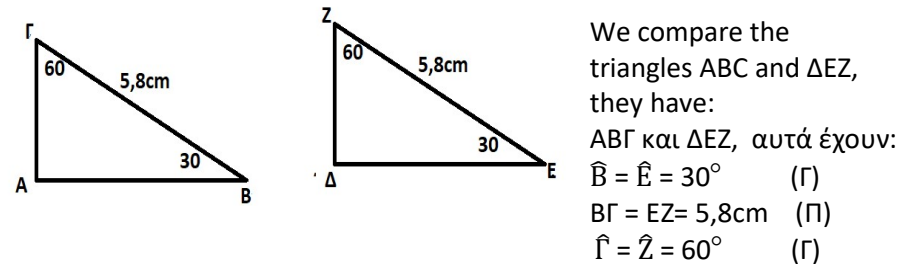
Άρα  $\widehat{A} = \widehat{K}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{P}$ ,  $\widehat{\Gamma} = \widehat{S}$ .

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ****2nd criterion of equality of triangles**

If two triangles have one side equal and the sides adjacent to that side equal one to one, then they are equal. (C-P-C)

**Exercise example:**

Check whether the triangles ABC and DEZ are equal.



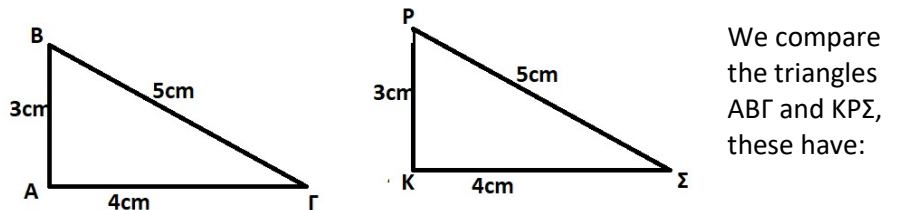
Therefore, from the 2nd criterion of equality of triangles (A-S-A) the two triangles are equal. So  $\widehat{A} = \widehat{D}$ ,  $AB = DE$ ,  $AG = DZ$

**3rd criterion of equality of triangles**

If two triangles have the sides equal one to one, then they are equal. (S-S-S)

**Exercise example:**

Consider whether the triangles ABC and KPS are equal.



$$AB = KP = 3\text{cm} \quad (\text{S})$$

$$B\Gamma = P\Sigma = 5\text{cm} \quad (\text{S})$$

$$A\Gamma = K\Sigma = 4\text{cm} \quad (\text{S})$$

Therefore, from the 3rd criterion of equality of triangles (S-S-S) the two triangles are equal.

So  $\widehat{A} = \widehat{K}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{P}$ ,  $\widehat{\Gamma} = \widehat{S}$ .

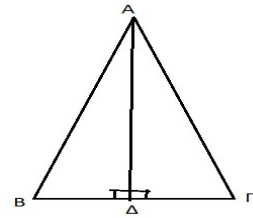
**EXERCISES-FROM THE TEXTBOOK**

**Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:**

1. Δύο **ορθογώνια** τρίγωνα που έχουν **δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες** μία προς μία είναι ίσα. (Π-Π)

**Παράδειγμα:**

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) φέρνουμε το ύψος  $AD$  προς τη βάση. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$ ,  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα.

**Λύση:**

- I.  $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta \Gamma} = 90^\circ$  (γιατί το  $AD$  είναι ύψος)  
 II.  $AB = A\Gamma$  (ως πλευρές του ισοσκελούς) (Π)  
 III.  $AD = AD$  (κοινή- ίδια κάθετη πλευρά). (Π)

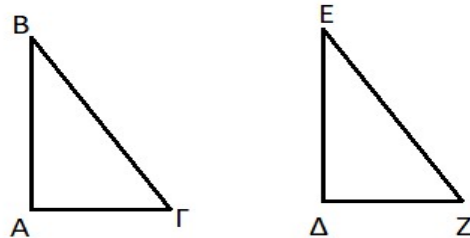
**Συμπέρασμα:** Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες

2. Δύο **ορθογώνια** τρίγωνα που έχουν **μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες** μία προς μία είναι ίσα. (Π-Γ)

**Παράδειγμα:**

Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta EZ$  ( $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ ).  
 Αν  $B\Gamma = 10\text{cm}$ ,  $EZ = 10\text{cm}$  και  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{E} = 30^\circ$

να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

**Λύση:**

- I. **Ορθές γωνίες:**  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  (από τα δεδομένα)  
 II. **Υποτείνουσες:**  $B\Gamma = EZ = 10\text{cm}$  (από τα δεδομένα)  
 III. **Οξείες γωνίες:**  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{E} = 30^\circ$  (από τα δεδομένα)

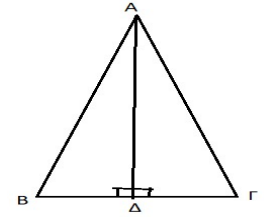
**Συμπέρασμα:** Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν **μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες**

**Criteria for the equality of right triangles:**

1. Two **right** triangles that have **two corresponding sides equal** one by one are congruent. (S-S)

**Example:**

In an isosceles triangle  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) we draw the height  $AD$  to the base. Prove that triangles  $AB\Delta$  and  $A\Gamma\Delta$  are congruent.

**Solution:**

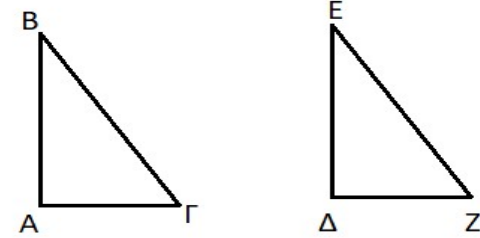
- I.  $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta \Gamma} = 90^\circ$  (because  $AD$  is the height)  
 II.  $AB = A\Gamma$  (as sides of the isosceles triangle) (S)  
 III.  $AD = AD$  (common - same perpendicular side). (S)

**Conclusion:** The right triangles are congruent because they have two corresponding sides equal.

2. Two **right** triangles that have one **corresponding side** and one **corresponding acute angle** equal one by one are congruent. (S-A)

**Example:**

Two right triangles  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) and  $\Delta EZ$  ( $\widehat{\Delta} = 90^\circ$ ) are given.  
 If  $B\Gamma = 10\text{cm}$ ,  $EZ = 10\text{cm}$ , and  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{E} = 30^\circ$ , prove that the triangles are congruent.

**Solution:**

- I. **Right angles:**  $\widehat{A} = 90^\circ$ ,  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  (from the data)  
 II. **Hypotenuses:**  $B\Gamma = EZ = 10\text{cm}$  (from the data)  
 III. **Acute angles:**  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $\widehat{E} = 30^\circ$  (from the data)

**Conclusion:** The triangles are equal because they have one **corresponding side** and one **corresponding acute angle** equal

## Ισοσκελές τρίγωνο

**Βασικός ορισμός:** Ισοσκελές τρίγωνο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει δύο ίσες πλευρές.

**Βασικές παρατηρήσεις-ιδιότητες ισοσκελών τριγώνων:**

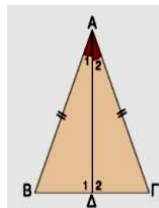
1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2. Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος από την κορυφή προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν (δηλαδή ταυτίζονται- είναι ίδιες)

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

A. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ( AB = AΓ )

η διχοτόμος AΔ προς τη βάση BΓ είναι ταυτόχρονα διάμεσος και ύψος, επομένως διχοτόμος, ύψος και διάμεσος συμπίπτουν .



B. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  γιατί AΔ διχοτόμος ,

$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$  γιατί AΔ ύψος και

$B\Delta = \Delta\Gamma$  γιατί AΔ διάμεσος

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε συγκρίνοντας τα τρίγωνα ABΔ, AΔΓ που έχουν:

- AΔ = AΔ, (κοινή πλευρά)
- AB = AΓ (από την υπόθεση, αφού το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές)
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  γιατί AΔ διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{A}$  .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση (Π-Γ-Π).

Επειδή τα τρίγωνα ABΔ και AΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ,  $B\Delta = \Delta\Gamma$  και  
αφού είναι  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$  και  $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$ , θα έχουμε  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$ ,  
οπότε η διχοτόμος AΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος AΔ είναι και διάμεσος, αφού  $B\Delta = \Delta\Gamma$ .

επίσης

Γ. Αν το AM είναι ύψος τότε θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος συμπέρασμα

Δ. Στο ισοσκελές τρίγωνο αν AM είναι διάμεσος ή ύψος ή διχοτόμος τότε θα είναι και τα άλλα δύο σε κάθε περίπτωση.

## Isosceles Triangle

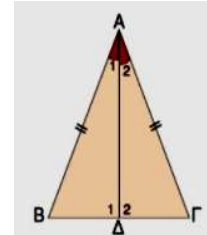
**Basic Definition:** Isosceles triangle is called the triangle that has two equal sides.

**Basic observations-properties of isosceles triangles:**

1. In every isosceles triangle, the angles corresponding to its base are equal.
2. The bisector, the altitude, and the median from the vertex to the base of the isosceles triangle coincide (that is, they are identical-are the same).

In the adjacent figure, symbolically, the above are as follows:

A. In the isosceles triangle ABΓ (AB = AΓ), the bisector AΔ that leads to the base BΓ is also median and height, therefore the bisector, height, and median coincide.



B. The following conclusions are true:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  because AΔ is the bisector ,

$\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$  because AΔ is the height and

$B\Delta = \Delta\Gamma$  because AΔ is the median.

We can prove this by comparing triangles ABΔ and AΔΓ,

which have:

→ AΔ = AΔ (common side),

→ AB = AΓ (by assumption, since triangle ABΓ is isosceles),

→  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  because AΔ is the bisector of angle  $\widehat{A}$ .

Therefore, the triangles are equal because they have two sides equal one-to-one and their included angle equal (Π-Γ-Π).

Since the triangles ABΔ and AΔΓ are equal, all their corresponding elements will be equal, so

$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ ,  $B\Delta = \Delta\Gamma$ , and

since  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$  and  $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$ , we will have  $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$ ,

so the bisector AΔ is also height. The bisector AΔ is also median, because  $B\Delta = \Delta\Gamma$ .

Γ.Finally if AM is height, then it will also be a median and bisector.

Conclusion

Δ. In an isosceles triangle, if AM is median, height or bisector, then it will be the other two.

### Βασική ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

**Υπενθύμιση:** Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μία ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα για διέρχεται από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

**Βασική ιδιότητα μεσοκαθέτου:** τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος

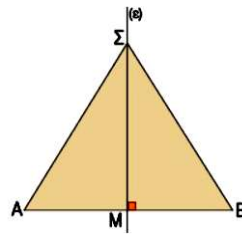
Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Η μεσοκάθετος  $\epsilon$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  το τέμνει στο σημείο  $M$ . Αν  $\Sigma$  είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα ισχύει ότι  $\Sigma A = \Sigma B$ .

Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα  $AM\Sigma$ ,  $BM\Sigma$  που έχουν:

- $\Sigma M = \Sigma M$ , (κοινή πλευρά)
- $AM = MB$ , αφού το  $M$  είναι μέσον του  $AB$ .

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $\Sigma A = \Sigma B$ .



### Basic property of the perpendicular bisector of a line segment

**Reminder:** The perpendicular bisector of a line segment is a line that is perpendicular to the line segment and passes through the midpoint of the line segment.

**Basic property of the perpendicular bisector:** the points on the perpendicular bisector of a line segment are equidistant from the endpoints of the line segment

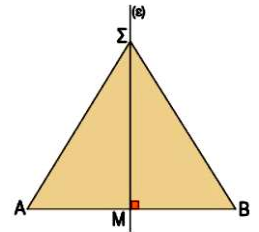
In the adjacent figure, symbolically, the above is as follows:

The perpendicular bisector  $\epsilon$  of the line segment  $AB$  intersects it at point  $M$ . If  $\Sigma$  is any point on the perpendicular bisector, then  $\Sigma A = \Sigma B$ .

We can prove this by comparing the right triangles  $AMS$  and  $BMS$  which have:

- $\Sigma M = \Sigma M$  (common side)
- $AM = MB$ , since  $M$  is the midpoint of  $AB$ .

Therefore, these right triangles are congruent, because they have two corresponding sides equal one to one. Since the triangles are congruent, their remaining corresponding elements are also equal, so  $\Sigma A = \Sigma B$ .

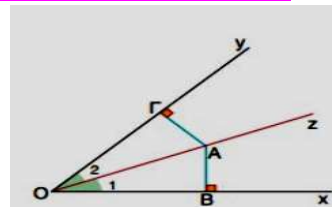


### Βασική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας:

Τα σημεία της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχουν τις πλευρές της γωνίας.

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Φέρνουμε τη διχοτόμο  $Oz$  της γωνίας  $x\hat{O}y$  και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο  $A$ . Αν  $AB$ ,  $AG$  είναι οι αποστάσεις του σημείου  $A$  από τις πλευρές της γωνίας, ισχύει ότι  $AB = AG$ .



Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα  $AOB$ ,  $AOG$  που έχουν:

- $OA = OA$  κοινή πλευρά και
- $\hat{O}1 = \hat{O}2$ , αφού η  $Oz$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $x\hat{O}y$ .

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

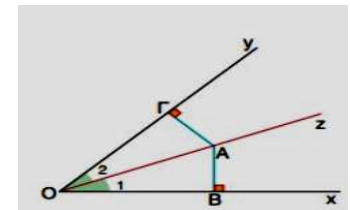
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε  $AB = AG$ .

### Basic Angle Bisector Property:

The points of the bisector of an angle are equidistant from the sides of the corner.

In the adjacent figure and symbolically, the above are as follows:

We bring the bisector  $Oz$  of the angle  $x\hat{O}y$  and on it we get a random point  $A$ . If  $AB$ ,  $AG$  are the distances of the point  $A$  from the sides of the angle, it is true that  $AB = AG$ .



We can prove this by comparing the right triangles  $AOB$ ,  $AOG$  that have:

- $OA = OA$  common side and
- $\hat{O}1 = \hat{O}2$ , since  $Oz$  is a bisector of the angle  $x\hat{O}y$ .

So these rectangular triangles are equal, because they have respectively one side and an acute angle equal.

Since the triangles are equal, they will have the rest of their corresponding elements equal, so  $AB = AG$ .

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων μας βοηθούν να αποδείξουμε ότι κάποια ευθύγραμμα τμήματα οι γωνίες είναι μεταξύ τους ίσα. Τα παραπάνω μας καθιστούν ικανούς να συγκρίνουμε και εμείς τρίγωνα με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ισότητας ορθογωνίων τριγώνων όπως βλέπουμε στις προηγούμενες σελίδες.

**Επειδή είναι δύσκολο να το βάλουμε σε «καλούπια» όπως την άλγεβρα, δίνουμε κάποιες παρατηρήσεις που ίσως βοηθήσουν στην επίλυση των ασκήσεων**

1. Κάνουμε πάντα ένα **καλό σχήμα** που βοηθάει στην επίλυση της άσκησης.
2. Γράφουμε τα **δεδομένα της άσκησης** που γράφονται πριν τις λέξεις να αποδείξουμε.
3. Ελέγχουμε μήπως τα τρίγωνα έχουν **κοινή πλευρά**.
4. Δεν συγκρίνουμε άνισα τρίγωνα δηλαδή τρίγωνα που φαίνονται από το σχήμα ότι δεν είναι ίσα.
5. Σε **κύκλο** όλες οι **ακτίνες** είναι πάντα **ίσες**.
6. Αποφεύγουμε να συγκρίνουμε τρίγωνα αν η άσκηση δεν τους έχει δώσει «όνομα»
7. Κάθε **ισόπλευρο** τρίγωνο έχει ίσες όλες τις πλευρές και η κάθε γωνία του είναι **60°**
8. Αν **δεν υπάρχουν ίσα τρίγωνα στο σχήμα**, φέρνουμε **βοηθητικές ευθείες**
9. Το **ένα τρίγωνο μπορεί να είναι μέσα στο άλλο**
10. Αν η **άσκηση έχει δύο ή παραπάνω ερωτήματα** όποια τρίγωνα αποδείξουμε στο πρώτο ερώτημα ότι είναι ίσα θεωρείτε δεδομένο ότι είναι ίσα και **θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα για το επόμενο ερώτημα**
11. Αν έχουμε **ορθογώνια τρίγωνα** ισχύουν κριτήρια Π-Π και Π-Γ
12. **Φτιάχνουμε το σχήμα βήμα βήμα** (με χρήση γεωμετρικών οργάνων) και δεν διαβάζουμε όλη την άσκηση μαζί. Αυτό μπορεί να γίνει σε συνεργασία με συμμαθητή μας ο οποίος θα μας διαβάζει λίγο και εμείς θα κάνουμε μία μία τις γραμμές.

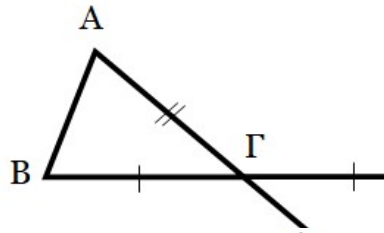
The triangle equality criteria help us prove that some straight segments of angles are equal to each other. The above enables us to compare triangles with the criteria of equality of triangles and equality of right triangles as we see in the previous pages.

**As it is difficult to put it in "molds" such as in algebra, the following observations may help solve exercises**

1. Always do a **good regimen** that helps solve the exercise.
2. We write down the **data of the exercise** that are written before the words to prove.
3. Check if the triangles have a **common side**.
4. We do not compare unequal triangles, i.e. triangles that appear from the shape to be not straight.
5. In a **circle** all the **rays** are always equal.
6. Avoid comparing triangles if the exercise has not given them a "name"
7. Each **equilateral** triangle has all sides equal and each angle is 60°
8. If **there are no congruent** triangles in the figure, **we draw auxiliary** lines.
9. **One triangle may be inside another.**
10. If the exercise has two or more questions, any triangles we prove to be congruent in the first question are considered given as congruent, and the **remaining elements will also be congruent for the next** question.
11. When comparing **right triangles**, the criteria S-S and S-A apply.
12. When we draw **the figure**, we draw it **step by step** (using geometric instruments) and do not read the entire exercise at once. This can be done in collaboration with a classmate who will read a little to us while we draw each line one by one.

**Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων(του βιβλίου και....)**

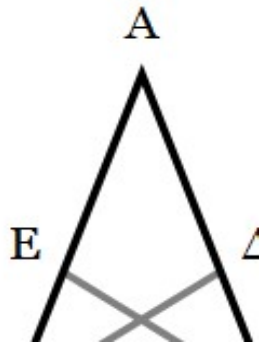
1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι ίσα:



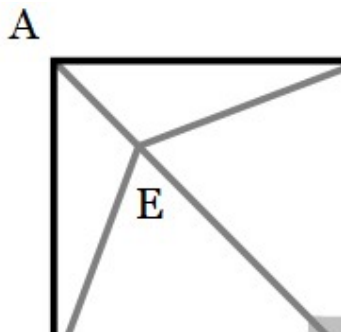
2. Στο διπλανό σχήμα, έχουμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τις διαμέσους  $BN$  και  $\Gamma M$ . Να αποδείξετε ότι  $BN = \Gamma M$ .



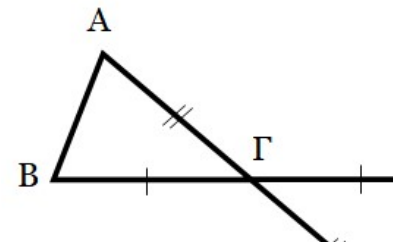
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους  $BD$ ,  $\Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι  $BD = \Gamma E$ .



4. Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και η διαγώνίός του  $A\Gamma$ . Αν  $E$  τυχαίο σημείο της  $A\Gamma$ , να δείξετε ότι  $BE = \Delta E$ .


**Exercises on triangle equality (from the book and....)**

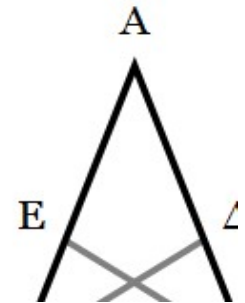
1. Prove that triangles  $AB\Gamma$  and  $\Gamma\Delta E$  are congruent.



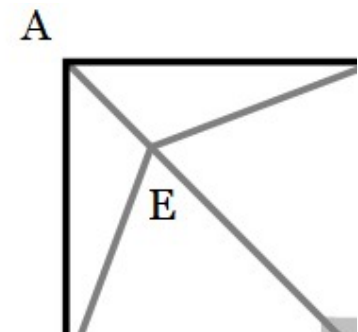
2. In this figure, there is an isosceles triangle  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). We draw the medians  $BN$  and  $\Gamma M$ . Prove that  $BN = \Gamma M$ .



3. Given isosceles triangle  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). We draw the bisectors  $BD$ , and  $\Gamma E$ . Prove that  $BD = \Gamma E$ .



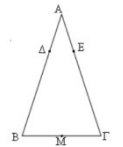
4. Given square  $AB\Gamma\Delta$  and its diagonal  $A\Gamma$ . If  $E$  is a random point on  $A\Gamma$ , prove that  $BE = \Delta E$ .



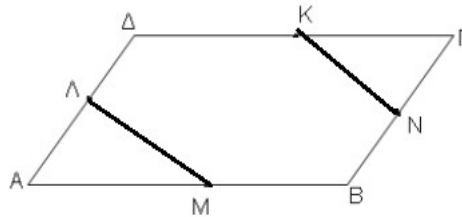
5. Στις πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) παίρνουμε  $AD=AE$ . Αν  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$ , να συγκριθούν τα  $\Delta M$  και  $EM$ .



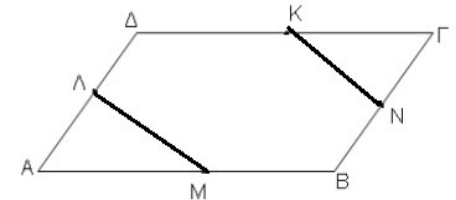
5. On the sides of the isosceles triangle  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) we take  $AD=AE$ . If  $M$  is the midpoint of  $B\Gamma$ , compare  $\Delta M$  and  $EM$ .



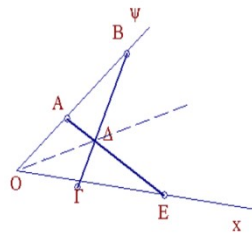
6. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα  $K, N$  των πλευρών  $\Delta\Gamma$  και  $\Gamma B$  είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα  $\Lambda, M$  των  $A\Delta$  και  $AB$ .



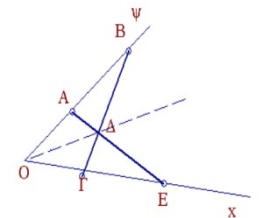
6. In a parallelogram  $AB\Gamma\Delta$ , prove that the straight line segment that connects the midpoints  $K, N$  of the sides  $\Delta\Gamma$  and  $\Gamma B$  is equal to the straight line segment that connects the midpoints  $\Lambda, M$  of  $A\Delta$  and  $AB$ .



7. Στις πλευρές της γωνίας  $\widehat{xOy}$  παίρνουμε τα σημεία  $A, B, \Gamma$ , και  $E$  έτσι ώστε  $OA=O\Gamma, OB=OE$   
 α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα  $OAE$  και  $O\Gamma B$   
 β) Αν τα  $AE$  και  $\Gamma B$  τέμνονται στο  $\Delta$  να αποδείξετε ότι  $A\Delta=\Gamma\Delta$ .



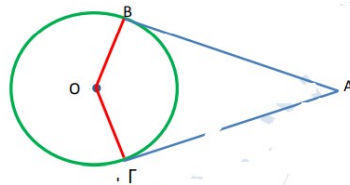
- 7, On the sides of the angle  $\widehat{xOy}$  we take the points  $A, B, \Gamma$ , and  $E$  such that  $OA=O\Gamma, OB=OE$



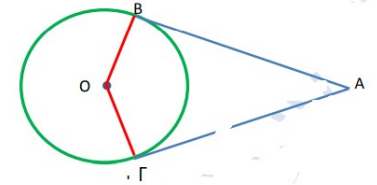
- γ) Να αποδείξετε ότι η  $O\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{xOy}$

- a) Compare the triangles  $OAE$  and  $O\Gamma B$   
 b) If  $AE$  and  $\Gamma B$  intersect at  $\Delta$ , prove that  $A\Delta=\Gamma\Delta$ .  
 c) Prove that  $O\Delta$  bisects the angle  $\widehat{xOy}$

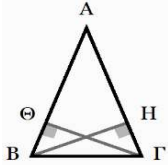
8. Δίνεται ο κύκλος  $(O, \rho)$  και ένα σημείο  $A$  εξωτερικό του κύκλου. Αν  $AB$  και  $AG$  είναι εφαπτόμενα του κύκλου τμήματα από το σημείο  $A$  δείξτε ότι αυτά είναι ίσα (δηλαδή δείξτε ότι  $AB=AG$ )



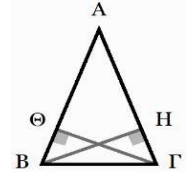
8. Given the circle  $(O, \rho)$  and a point  $A$  outside the circle. If  $AB$  and  $AG$  are tangent segments of the circle at point  $A$ , show that they are equal (i.e. show that  $AB=AG$ )



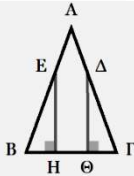
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε τα ύψη  $BH$  και  $\Gamma\Theta$ . Να αποδείξετε ότι  $BH = \Gamma\Theta$



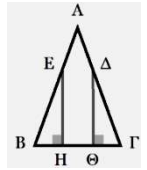
9. An isosceles triangle  $AB\Gamma$  is given ( $AB = A\Gamma$ ). We draw the altitudes  $BH$  and  $\Gamma\Theta$ . Prove that  $BH = \Gamma\Theta$ .



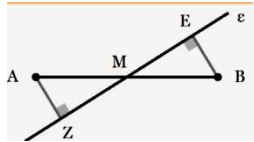
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $E, \Delta$  σημεία στις πλευρές του, έτσι ώστε  $BE = \Delta\Theta$ . Να δείξετε ότι τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ .



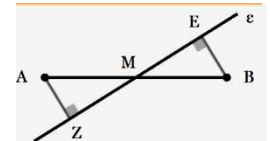
10. An isosceles triangle  $AB\Gamma$  is given ( $AB = A\Gamma$ ) and  $E, \Delta$  points on its sides such that  $BE = \Delta\Theta$ . Show that the points  $E$  and  $\Delta$  are equidistant from the base  $B\Gamma$ .



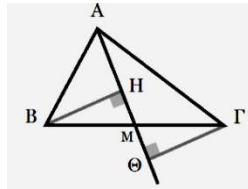
11. Έστω ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , το μέσον του  $M$  και  $(\epsilon)$  μια τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το  $M$ . Να αποδείξετε ότι τα άκρα  $A$  και  $B$  ισαπέχουν από την ευθεία  $(\epsilon)$



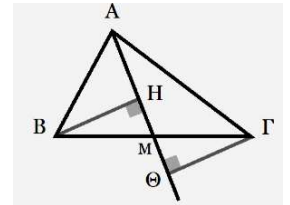
11. Let  $AB$  be a line segment,  $M$  its midpoint, and  $(\epsilon)$  a random line passing through  $M$ . Prove that the endpoints  $A$  and  $B$  are equidistant from the line  $(\epsilon)$ .



12. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AM$ , την οποία και προεκτείνουμε πέραν του σημείου  $M$ . Να δείξετε ότι οι κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  του τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο  $AM$ .



12. A triangle  $ABC$  is given with its median  $AM$ , which we extend beyond the point  $M$ . Show that the vertices  $B$  and  $C$  of the triangle are equidistant from the median  $AM$ .



13. Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$  και  $\mu\alpha = \mu\alpha'$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

13. Let two triangles  $AB\Gamma$  and  $A'B'\Gamma'$  be such that  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta = \beta'$ , and  $\mu\alpha = \mu\alpha'$ . Prove that the triangles are equal.

14. Έστω δυο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , για τα οποία ισχύει  $\alpha = \alpha'$ ,  $\mu\alpha = \mu\alpha'$  και  $\mu\beta = \mu\beta'$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

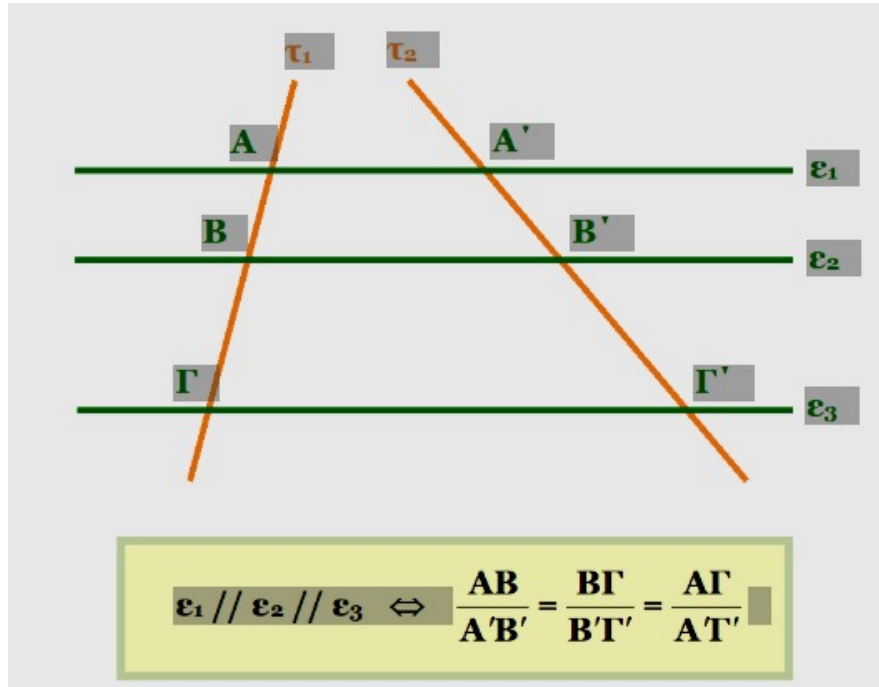
14. Let two triangles  $AB\Gamma$  and  $A'B'\Gamma'$  be such that  $\alpha = \alpha'$ ,  $\mu\alpha = \mu\alpha'$  and  $\mu\beta = \mu\beta'$ . Prove that the triangles are equal.

15. Σε κύκλο με κέντρο  $O$ , φέρνουμε τη διάμετρο  $AB$  και τις ίσες χορδές  $A\Gamma, B\Delta$ . Να δείξετε ότι  $A\Delta = B\Gamma$ .

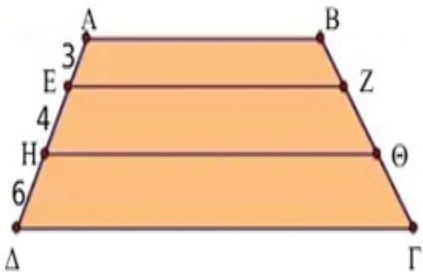
15. In a circle with center  $O$ , draw the diameter  $AB$  and equal chords  $A\Gamma, B\Delta$ . Prove that  $A\Delta = B\Gamma$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ**

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:



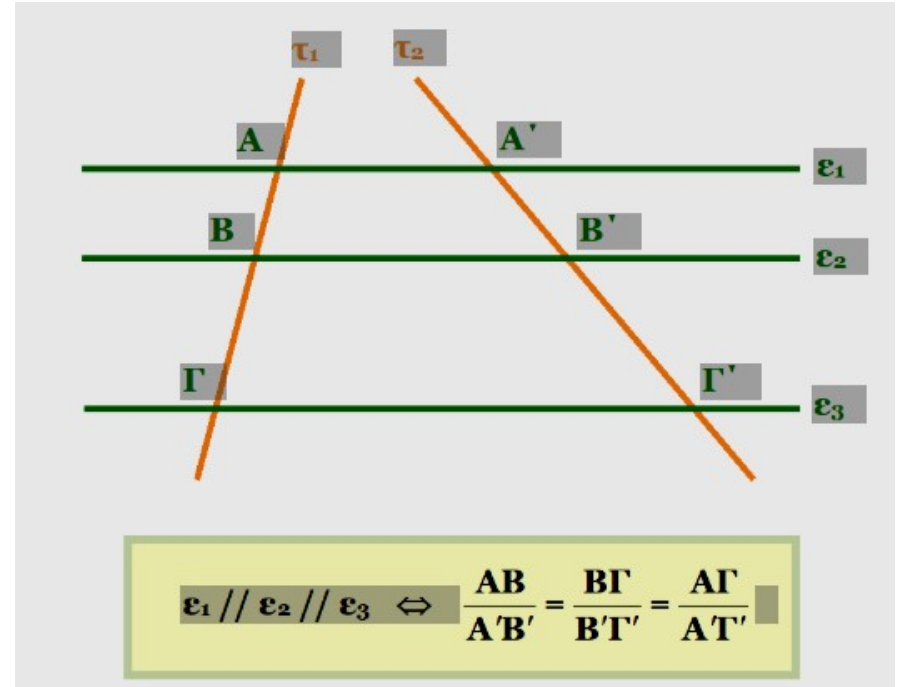
**Παράδειγμα:** Στο παρακάτω σχήμα, βρείτε τα κλάσματα:



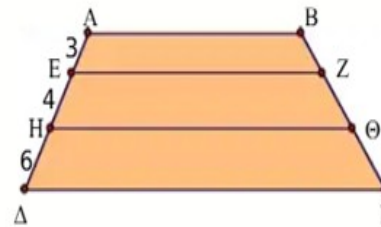
- α)  $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- β)  $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
- γ)  $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13}$

**THALES' THEOREM**

If three or more parallel lines intersect two other lines, then the segments defined on one are proportional to the corresponding segments defined on the other. That is:



**Example:** In the following shape, calculate the fractions:



- α)  $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- β)  $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
- γ)  $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13}$

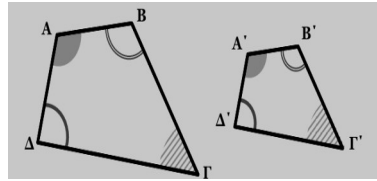
## ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

**Βασικός ορισμός:** Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \lambda$$

και

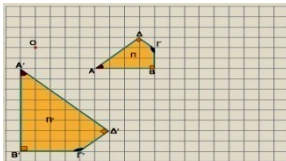
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}' \\ \hat{\Delta} &= \hat{\Delta}' \end{aligned}$$



### Παρατηρήσεις:

- Με απλά λόγια, τα όμοια σχήματα έχουν την ίδια μορφή, αλλά διαφορετικό μέγεθος! Είναι, δηλαδή, το ένα σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου. Ο λόγος ομοιότητας είναι, σα να λέμε, κάτι σαν την κλίμακα ενός χάρτη.
- Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων.
- Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 3.000.000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι  $\lambda = 1:3.000.000$  οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 30 km στην πραγματικότητα.
- Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο, γι αυτό λέγονται ομόλογες και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας**.
- Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

### παράδειγμα



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

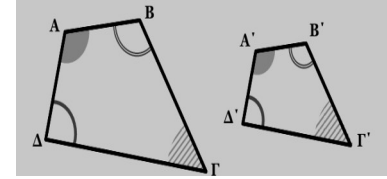
τα πολύγωνα(τετράπλευρα) ABCD, A'B'C'D' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2.

## SIMILAR RECTILINEAR FIGURES

**Basic definition:** If two polygons have their sides proportional and their corresponding angles equal, then they are similar.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta A}{\Delta'A'} = \lambda$$

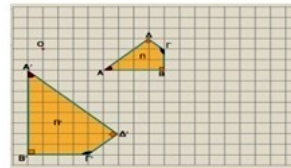
$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ \hat{B} &= \hat{B}' \\ \hat{\Gamma} &= \hat{\Gamma}' \\ \hat{\Delta} &= \hat{\Delta}' \end{aligned}$$



### Notes:

- Simply put, similar figures have the same shape, but different size! That is, one is a reduction or enlargement of the other. The similarity ratio is, you could say, something like the scale of a map.
- The scale is the ratio of the distance on the map to the corresponding real distance, meaning it is the similarity ratio of the two figures.
- For example, a scale of 1 : 3,000,000 means that the similarity ratio of the figure on the map to the real one is  $\lambda = 1:3,000,000$ , so 1 cm on the map is 30 km in reality.
- Any two corresponding sides of similar polygons have the same ratio, therefore they are called homologous and their ratio is called the similarity ratio.
- If two polygons are similar, then their corresponding sides are proportional and their corresponding angles are equal.
- The ratio of the perimeters of two similar polygonal shapes is equal to their similarity ratio.

### example



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta'A'}{\Delta A} = 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}, \hat{\Delta}' = \hat{\Delta} \quad (2)$$

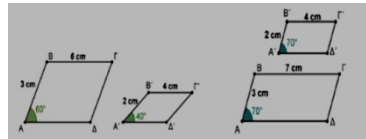
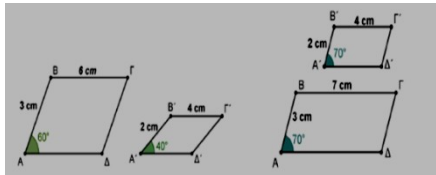
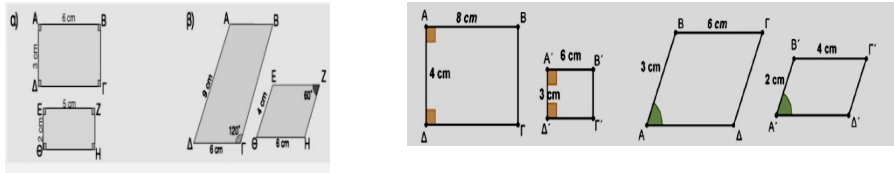
The polygons (quadrilaterals) ABCD, A'B'C'D' are similar with a similarity ratio of 2.

**Ασκήσεις:**

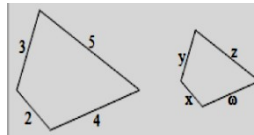
1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια
- β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια
- γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια
- δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια
- ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια
- στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια

2. ποια από τα παρακάτω ζευγάρια είναι όμοια;

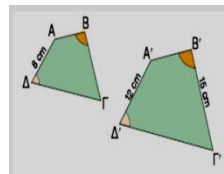


3. Τα τετράπλευρα στο διπλανό σχήμα είναι όμοια. Η περίμετρος του "μικρού" είναι  $P=7$ , να βρείτε τα  $x, y, z, \omega$ .



4. Στο διπλανό σχήμα

- α) Ο λόγος ομοιότητας του  $AB\Gamma\Delta$  προς το  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι .....
- β) Ο λόγος ομοιότητας του  $A'B'\Gamma'\Delta'$  προς το  $AB\Gamma\Delta$  είναι .....
- γ) Αν η γωνία B είναι 110 μοίρες, τότε και η γωνία ..... είναι  $110^\circ$ .
- δ) Ο λόγος των περιμέτρων του  $AB\Gamma\Delta$  ως προς το  $A'B'\Gamma'\Delta'$  είναι ίσος με.....



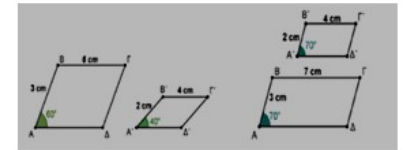
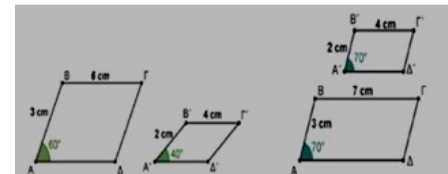
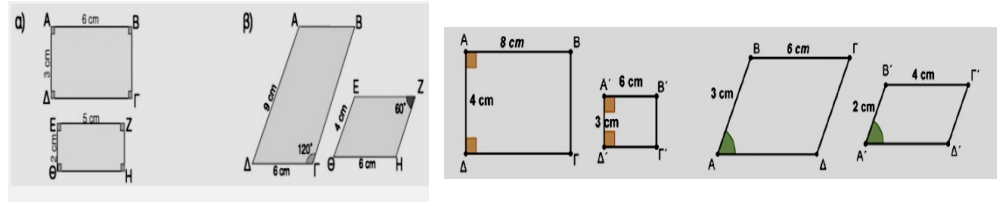
ε) Η πλευρά BΓ είναι ίση με .....

**Exercises:**

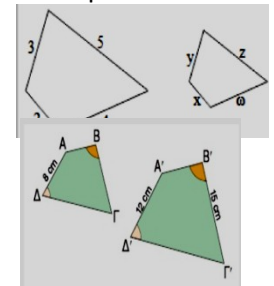
1. Mark the following sentences with (T) if they are true and with (F) if they are false

- a) Two squares are always similar
- b) Two rectangles are similar
- c) If two polygons have proportional sides, they are similar
- d) Two rhombuses are similar figures
- e) If two polygons are equal, then they are similar
- f) Two regular polygons are similar

2. Which of the following pairs are similar?



3. The quadrilaterals in the adjacent figure are similar. The perimeter of the "small" one is  $P = 7$ ; find  $x, y, z, \omega$ .



4. In the adjacent figure

- a) The similarity ratio of  $AB\Gamma\Delta$  to  $A'B'\Gamma'\Delta'$  is ...
- b) The similarity ratio of  $A'B'\Gamma'\Delta'$  to  $AB\Gamma\Delta$  is ...
- c) If angle B is 110 degrees, then angle ..... is also  $110^\circ$ .
- d) The ratio of the perimeters of  $AB\Gamma\Delta$  to  $A'B'\Gamma'\Delta'$  is equal to .....
- e) The side BΓ is equal to .....

**ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ**

**Κριτήριο για όμοια τρίγωνα:** Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε θα είναι όμοια, και θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

**Παρατηρήσεις:**

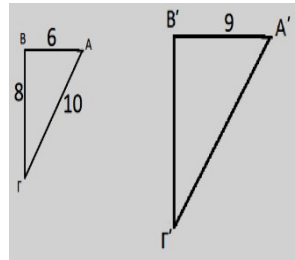
- Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν μία οξεία γωνία ίση.
- Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους!
- Πάντα σημειώνουμε ποιες γωνίες είναι ίσες για να βρούμε τις σωστές "απέναντι" πλευρές στην αναλογία.
- Ο **λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων(και πολυγώνων)** ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας ( $\lambda^2$ ).

**Παράδειγμα-Άσκηση 1:**

Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$ .

Αν  $AB = 6$ ,  $B\Gamma = 8$  και  $A\Gamma = 10$ ,  
και  $A'B' = 9$ ,

να βρείτε τις υπόλοιπες πλευρές του  $A'B'\Gamma'$ .

**Λύση:**

Εφόσον τα τρίγωνα είναι όμοια οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

**Βρίσκουμε τον λόγο ομοιότητας  $\lambda$ :**

$$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\text{ή } \frac{9}{6} = \frac{3}{2})$$

**Υπολογίζουμε την  $B'\Gamma'$ :**

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{B'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot B'\Gamma' = 8 \cdot 9 \rightarrow 6B'\Gamma' = 72 \rightarrow B'\Gamma' = 72:6 \rightarrow B'\Gamma' = 12$$

**Υπολογίζουμε την  $A'\Gamma'$ :**

$$\frac{6}{9} = \frac{10}{A'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot A'\Gamma' = 10 \cdot 9 \rightarrow 6A'\Gamma' = 90 \rightarrow A'\Gamma' = 90:6 \rightarrow A'\Gamma' = 15$$

**SIMILAR TRIANGLES**

**Criterion for similar triangles:** If two triangles have two of their angles equal, one to one, then they will be similar, and their sides will be proportional.

**Observations:**

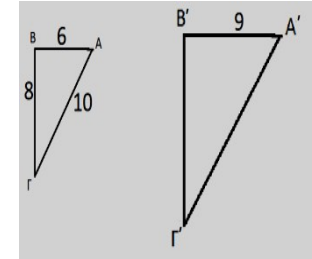
- Two right triangles are similar if they have one acute angle equal.
- All equilateral triangles are similar to each other!
- We always mark which angles are equal in order to find the correct "opposite" sides in the proportion.
- **The ratio of the areas of two similar triangles** (and polygons) equals the square of the similarity ratio ( $\lambda^2$ ).

**Example-Exercise 1:**

Two similar triangles  $AB\Gamma$ ,  $A'B'\Gamma'$  are given.

If  $AB = 6$ ,  $B\Gamma = 8$ , and  $A\Gamma = 10$ ,  
and  $A'B' = 9$ ,

find the remaining sides of  $A'B'\Gamma'$ .

**Solution:**

Since the triangles are similar, their sides are proportional:

**We find the similarity ratio  $\lambda$ :**

$$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (\text{or } \frac{9}{6} = \frac{3}{2})$$

**We calculate  $B'\Gamma'$ :**

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{B'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot B'\Gamma' = 8 \cdot 9 \rightarrow 6B'\Gamma' = 72 \rightarrow B'\Gamma' = 72:6 \rightarrow B'\Gamma' = 12$$

**We calculate  $A'\Gamma'$ :**

$$\frac{6}{9} = \frac{10}{A'\Gamma'} \rightarrow 6 \cdot A'\Gamma' = 10 \cdot 9 \rightarrow 6A'\Gamma' = 90 \rightarrow A'\Gamma' = 90:6 \rightarrow A'\Gamma' = 15$$

**Παράδειγμα-Άσκηση 2:**

Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ , παίρνουμε ένα σημείο  $\Delta$  στην πλευρά  $AB$  και ένα σημείο  $E$  στην πλευρά  $A\Gamma$ , ώστε  $DE \parallel B\Gamma$ . Αν  $A\Delta = 4$ ,  $\Delta B = 2$  και  $B\Gamma = 9$ , να βρείτε το μήκος του τμήματος  $DE$ .

**Λύση:**

Επειδή  $DE \parallel B\Gamma$ , τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια (έχουν τη γωνία  $\hat{A}$  κοινή και τις γωνίες  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{B}$  ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά).

**Υπολογίζουμε την πλευρά  $AB$ :**

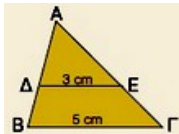
$$AB = A\Delta + \Delta B = 4 + 2 = 6.$$

**Γράφουμε την αναλογία:**

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

**Αντικαθιστούμε και λύνουμε:**

$$\frac{4}{6} = \frac{\Delta E}{9} \rightarrow 6 \cdot \Delta E = 36 \rightarrow \Delta E = 6$$

**Παράδειγμα-Άσκηση 3:**

Στο διπλανό σχήμα είναι  $DE \parallel B\Gamma$ . Αν το τρίγωνο  $A\Delta E$  έχει εμβαδόν  $18 \text{ cm}^2$ , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

**Λύση:**

Επειδή  $DE \parallel B\Gamma$ , τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια (έχουν τη γωνία  $\hat{A}$  κοινή και τις γωνίες  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{B}$  ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά

**Γράφουμε την αναλογία:**

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{3}{5} = \lambda$$

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων (και πολυγώνων) ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας ( $\lambda^2$ ), άρα:

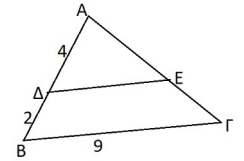
$$\frac{\text{Εμβαδόν } A\Delta E}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{18}{\text{Εμβαδόν } AB\Gamma} = \frac{9}{25} \rightarrow$$

$$9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 18 \cdot 25 \rightarrow 9 \cdot \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 450 \rightarrow \text{Εμβαδόν } AB\Gamma = 50.$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίζουμε τις επιφάνειες σπιτιών, οικοπέδων κλπ όταν είναι σχεδιασμένα σε κλίμακα.

**Example-Exercise 2:**

In a triangle  $AB\Gamma$ , the point  $\Delta$  is on side  $AB$  and a point  $E$  on side  $A\Gamma$ , such that  $DE \parallel B\Gamma$ . If  $A\Delta = 4$ ,  $\Delta B = 2$  and  $B\Gamma = 9$ , find the length of segment  $DE$ .

**Solution:**

Since  $DE \parallel B\Gamma$ , triangles  $A\Delta E$  and  $AB\Gamma$  are similar (they have angle  $\hat{A}$  in common and angles  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{B}$  equal as alternate interior angles).

**We calculate side  $AB$ :**

$$AB = A\Delta + \Delta B = 4 + 2 = 6.$$

**We write the proportion:**

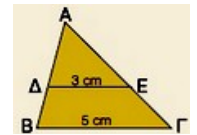
$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma}$$

**We substitute and solve:**

$$\frac{4}{6} = \frac{\Delta E}{9} \rightarrow 6 \cdot \Delta E = 36 \rightarrow \Delta E = 6$$

**Example-Exercise 3:**

In the adjacent figure  $DE \parallel B\Gamma$ . If triangle  $A\Delta E$  has an area of  $18 \text{ cm}^2$ , then calculate the area of triangle  $AB\Gamma$ .

**Solution:**

Since  $DE \parallel B\Gamma$ , triangles  $A\Delta E$  and  $AB\Gamma$  are similar (they have angle  $A$  in common and angles  $\Delta$  and  $B$  equal as alternate interior angles).

**We write the proportion:**

$$\frac{A\Delta}{AB} = \frac{\Delta E}{B\Gamma} = \frac{3}{5} = \lambda$$

The ratio of the areas of two similar triangles (and polygons) is equal to the square of the similarity ratio ( $\lambda^2$ ), so:

$$\frac{\text{area } A\Delta E}{\text{area } AB\Gamma} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{18}{\text{area } AB\Gamma} = \frac{9}{25} \rightarrow$$

$$9 \cdot \text{area } AB\Gamma = 18 \cdot 25 \rightarrow 9 \cdot \text{area } AB\Gamma = 450 \rightarrow \text{area } AB\Gamma = 50.$$

This way we can calculate the areas of houses, plots, etc. when they are drawn to scale.

**Άσκηση 1: Ορθογώνια Τρίγωνα & Ύψος**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$   $\widehat{A} = 90^\circ$  και  $AD$  το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABD$  και  $A\Delta\Gamma$  είναι όμοια.
- Αν  $BD = 4\text{cm}$  και  $\Delta\Gamma = 9\text{cm}$ , να βρείτε το μήκος του ύψους  $AD$ .

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε τις συμπληρωματικές οξείες γωνίες (που έχουν άθροισμα  $90^\circ$ ).

**Άσκηση 2:**

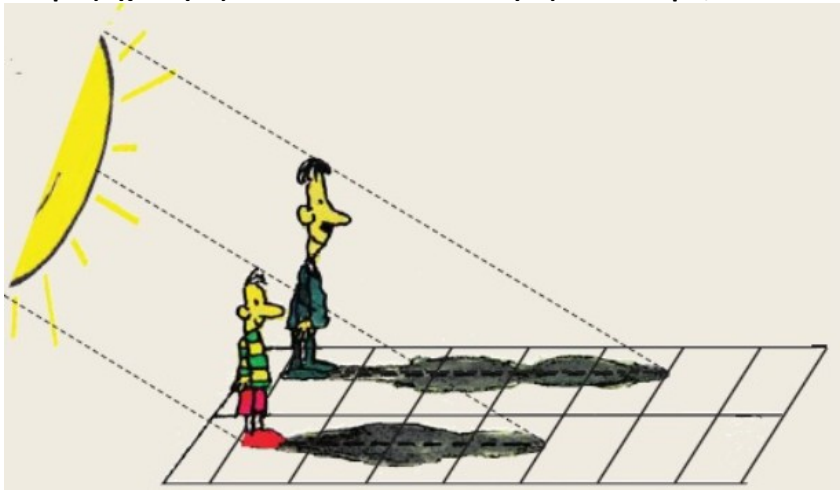
Σε ένα τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , οι διαγώνιοί του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  τέμνονται στο σημείο  $O$ .

Αν οι βάσεις είναι  $AB = 6\text{cm}$  και  $\Gamma\Delta = 10\text{cm}$ , και το τμήμα  $OA = 3\text{cm}$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $OG$ .

**Υπόδειξη:** Υπάρχουν εντός εναλλάξ γωνίες λόγω των παράλληλων βάσεων.

**Άσκηση 3: Η Σκιά**

Ο γιος έχει ύψος 1.36m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα;

**Exercise 1: Right Triangles & Altitude**

Let  $AB\Gamma$  be a right triangle with  $\widehat{A} = 90^\circ$  and  $AD$  the altitude corresponding to the hypotenuse.

- Prove that triangles  $ABD$  and  $A\Delta\Gamma$  are similar.
- If  $BD = 4\text{ cm}$  and  $\Delta\Gamma = 9\text{ cm}$ , find the length of the altitude  $AD$ .

**Hint:** Use complementary acute angles (which sum to  $90^\circ$ ).

**Exercise 2:**

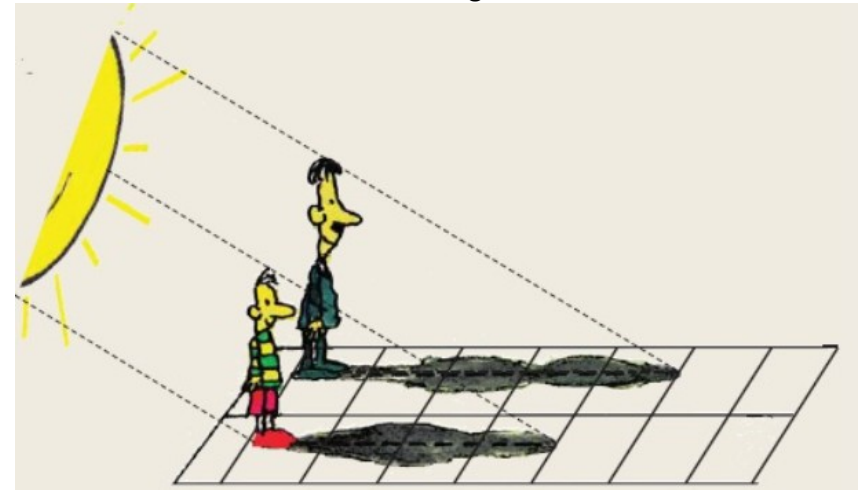
In a trapezoid  $AB\Gamma\Delta$  with bases  $AB$  and  $\Gamma\Delta$ , its diagonals  $A\Gamma$  and  $B\Delta$  intersect at point  $O$ .

If the bases are  $AB = 6\text{ cm}$  and  $\Gamma\Delta = 10\text{ cm}$ , and segment  $OA = 3\text{ cm}$ , calculate the length of segment  $OG$ .

**Hint:** There are alternate interior angles due to the parallel bases.

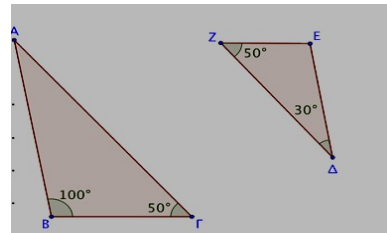
**Exercise 3: The Shadow**

The son is 1.36 m tall. What is the height of the father?



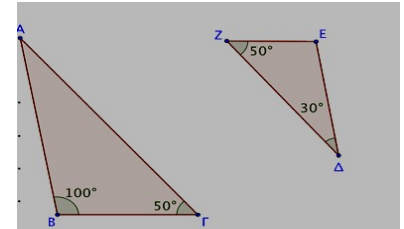
**Άσκηση 4:**

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔEZ είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους



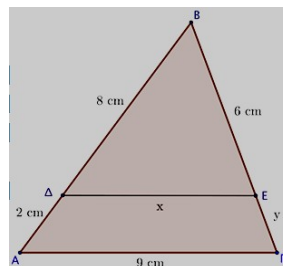
**Exercise 4:**

Prove that the triangles ABΓ and ΔEZ are similar and write the equal ratios.



**Άσκηση 5:**

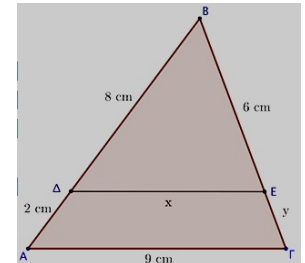
Στο διπλανό σχήμα είναι ΔE // AΓ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ, BΔE είναι όμοια,



**Exercise 5:**

In the adjacent figure, ΔE // AΓ.

Prove that the triangles ABΓ and BΔE are similar.

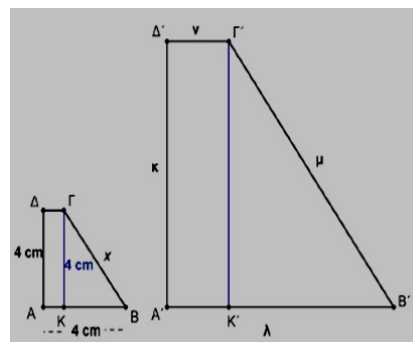


**Άσκηση 6:**

Τα τραπέζια του σχήματος είναι όμοια με λόγο

ομοιότητας  $\frac{1}{3}$ .

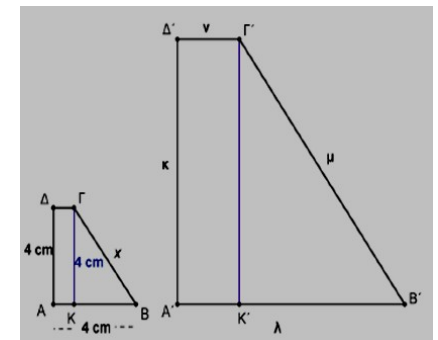
Να υπολογίσετε τα x, κ, λ, μ, ν.



**Exercise 6:**

The trapezoids in the figure are similar with a similarity ratio of  $\frac{1}{3}$

Calculate x, κ, λ, μ, ν.



## Περιεχόμενα

<u>Σελίδα</u>	<u>Ενότητα</u>
<u>4-10</u>	Αριθμοί - πράξεις μεταξύ τους
<u>11-17</u>	Δυνάμεις - ιδιότητες δυνάμεων
<u>18-20</u>	Τετραγωνικές ρίζες και ιδιότητές τους
<u>21-25</u>	Μονώνυμα, ορισμοί και πράξεις
<u>26-30</u>	πολυώνυμα, ορισμοί και πράξεις
<u>30-33</u>	Αξιοσημείωτες ταυτότητες
<u>34-37</u>	Παραγοντοποίηση
<u>38</u>	Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο- Μέγιστος κοινός διαιρέτης αλγεβρικών παραστάσεων
<u>39-45</u>	Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις και πράξεις αυτών
<u>46-47</u>	Εξισώσεις α' βαθμού
<u>48-53</u>	Εξισώσεις β' βαθμού
<u>55-62</u>	Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων
<u>63-72</u>	Συστήματα (γραμμικά) δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους
<u>74-82</u>	Επανάληψη σε βασικές έννοιες γεωμετρίας
<u>84-94</u>	Ίσα τρίγωνα και εφαρμογές αυτών
<u>95-101</u>	Θεώρημα Θαλή και όμοια σχήματα

## Contents

<u>Page</u>	<u>Section</u>
<u>4-10</u>	Numbers -operations among them
<u>11-17</u>	Exponents ...
<u>18-20</u>	Square roots and their properties
<u>21-25</u>	Monomials, definitions and operations
<u>26-30</u>	Polynomials, definitions and operations
<u>30-33</u>	Remarkable identities
<u>34-37</u>	Factorization
<u>38</u>	Least common multiple - Greatest common divisor of algebraic expressions
<u>39-45</u>	Rational algebraic expressions and their operations
<u>46-47</u>	First-degree equations
<u>48-53</u>	second-degree equations
<u>55-62</u>	Function graphs
<u>63-72</u>	Systems (linear) of two equations with two unknown numbers
<u>74-82</u>	Review of basic geometry
<u>84-94</u>	Congruent triangles and their applications
<u>95-101</u>	Thales' theorem and similar figures