ΔΙΑΠΟΛΙΤΙΣΜΙΚΟ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ

ΑΘΗΝΑΣ

ȘCOALA GIMNAZIALĂ INTERCULTURALĂ A ATENEI

Ας μελετήσουμε Μαθηματικά!

Τεύχος Γ΄

Hai să studiem matematica!

Numărul 3

Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας

Liceul Intercultural din Atena

ΣΥΓΓΡΑΦΗ:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

***ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΚΕΙΜΕΝΩΝ*:**

ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ

ΤΕΤΡΑΔΙΟ:

ΝΤΙΜΟ ΑΡΤΕΜΙΣ

***ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗΣ -ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ*:**

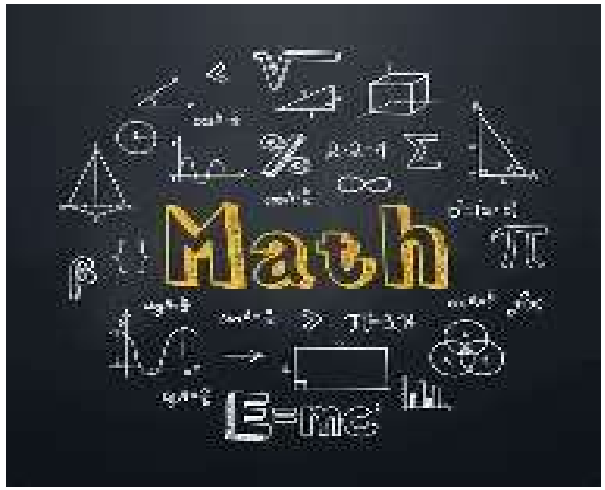
ΚΟΡΝΤΟΥΝΕΑΝΟΥ ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΑ

AUTOR:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΑΚΟΠΟΥΛΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

EDITARE-CORECTURĂ TEXT:

ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ ΕΜΜΑΝΟΥΕΛΑ



CAIET:

ΝΤΙΜΟ ΑΡΤΕΜΙΣ

CORECTARE TRADUCERE - ILUSTRAȚII:

ΚΟΡΝΤΟΥΝΕΑΝΟΥ ΜΑΡΙΑ-ΕΛΕΝΑ

Αντί προλόγου…Ευχαριστούμε πολύ

Την διευθύντρια και του Διαπολιτισμικού Γυμνάσιου Αθήνας Κα Δάφνη Γαβρίλη για την παραχώρηση του εργαστηρίου Πληροφορικής και την άψογη συνεργασία της , τους καθηγητές του σχολείου που με προθυμία μας επανειλημμένα παραχώρησαν τους μαθητές τους, στον συντάκτη του βιβλίου μας Κο Κωνσταντακόπουλο Βασίλη με την άψογη διατύπωση των κανόνων του σε απλά ελληνικά , καθώς και όλους τους μαθητές και μαθήτριες- των οποίων τα ονόματα αναγράφονται στην πρώτη σελίδα- που με μεγάλη προθυμία, εντατική δουλειά και ανιδιοτέλεια αφιέρωσαν τον πολύτιμο χρόνο τους στη συγγραφή και διόρθωση των κειμένων.

Ευχόμαστε αρχικά αυτό το βιβλίο να βοηθήσει τους μαθητές μας να μελετήσουν με μεγαλύτερη ευκολία τα μαθηματικά μαζί με τις οικογένειες τους
στη συνέχεια να διευκολύνει τα παιδιά να προοδεύσουν στα μαθήματά τους, Γλώσσα και Μαθηματικά,
και τέλος να γίνει βοηθός τους, πρακτικός και συναισθηματικός, στο άνοιγμα νέων δρόμων προς την καλλιέργειά τους καθώς και στη μετέπειτα επαγγελματική τους αποκατάσταση.

Οφείλουμε να αναφέρουμε πως μέσα στις παρακάτω σελίδες υπάρχουν αρκετές γλωσσικές και συντακτικές καθώς και επιστημονικές ατέλειες τις οποίες ευελπιστούμε να διορθώσουμε σε επόμενες χρονικές περιόδους. Προφανώς είμαστε ανοιχτοί σε καλοπροαίρετα σχόλια και πιθανές διορθώσεις των κειμένων.

Προβλέπουμε συγγραφή του βιβλίου σε άλλες γλώσσες καθώς και συγγραφή βιβλίων της Α΄ και Β΄ Γυμνασίου καθώς και των τάξεων του Λυκείου σε επόμενες σχολικές χρονιές για να βοηθηθούν τα παιδιά και οι οικογένειες τόσο του σχολείου μας όσο και των υπόλοιπων ελληνικών σχολείων με μαθητές με πολυπολιτισμικό υπόβαθρο.

Ευχή μας είναι η προσπάθεια αυτή να είναι ένα μικρό λιθαράκι για να μην αφήνουν πίσω τα παιδιά αυτά τα όνειρό τους για καλλιέργεια και καλύτερη ζωή.

Η επιμελήτρια της έκδοσης:

Παπαϊωάννου Εμμανουέλα

În loc de prefață… Vă mulțumim foarte mult

Doamnei director a Gimnaziului Intercultural din Atena, doamna Dafni Gavrili, pentru punerea la dispoziție a laboratorului de informatică și pentru colaborarea sa ireproșabilă, profesorilor școlii care ne-au pus cu bunăvoință, în mod repetat, elevii lor la dispoziție, autorului cărții noastre, domnul Konstadakopoulos Vasilis, pentru formularea perfectă a regulilor în greacă simplă, precum și tuturor elevilor care - ale căror nume sunt menționate pe prima pagină - au dedicat cu mare bunăvoință, muncă intensă și altruism timpul lor prețios la scrierea și corectarea textelor.

Ne dorim, în primul rând, ca această carte să ajute elevii noștri să studieze mai ușor matematica împreună cu familiile lor,
în continuare să faciliteze copiilor progresul la materiile lor, Limba și Matematica,
și în final să devină ajutorul lor, practic și emoțional, în deschiderea de noi căi către cultivarea lor, precum și în următoarea lor integrare profesională.

Trebuie să menționăm că în paginile următoare există destule imperfecțiuni lingvistice și sintactice, precum și științifice, pe care sperăm să le corectăm în perioadele viitoare. Evident, suntem deschiși la comentarii binevoitoare și eventuale corecturi ale textelor.

Prevedem scrierea cărții în alte limbi, precum și redactarea cărților pentru clasele I și a II-a de Gimnaziu, precum și pentru clasele de Liceu în anii școlari viitori, pentru a ajuta copiii și familiile atât ai școlii noastre, cât și ai celorlalte școli grecești cu elevi cu fundal multicultural.

Dorim ca acest efort să fie o mică piatră de temelie pentru ca acești copii să nu își lase în urmă visul de a se cultiva și de a avea o viață mai bună.

Îngrijitoarea ediției:

Παπαϊωάννου Εμμανουέλα

ΜΕΡΟΣ Α΄ΑΛΓΕΒΡΑ

Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς(επανάληψη)

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Ν)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6….

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Ζ)

….-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4…….

ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(Q)

Ένας αριθμός q είναι ρητός όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή α = $\frac{\kappa}{\lambda}$,όπου οι αριθμοί κ, λ είναι ακέραιοι αριθμοί και ο αριθμός λ δεν είναι μηδέν(δηλαδή είναι διαφορετικός του μηδενός , λ≠0)

Παραδείγματα:

7 = $\frac{7}{1}$:Ρητός αριθμός

-3 =$-\frac{3}{1}$:Ρητός αριθμός

$\frac{2}{5}$:Ρητός αριθμός

0,3 =$\frac{3}{10}$

-1,37=-$\frac{137}{100}$ Ρητός αριθμός

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ(R)

Στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών υπάρχουν όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί(δηλαδή φυσικοί αριθμοί, ακέραιοι αριθμοί, ρητοί αριθμοί κ.λ.π

Παραδείγματα:

0, -3, 19,2, $-\frac{4}{5}$

ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Είναι οι πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι ρητοί

Παραδείγματα:

$\sqrt{2}$, π, -$\sqrt{8}$

ΠΡΟΣΗΜΑ

+(συν)

-(μείον)

PARTEA A ALGEBRĂ

Operații cu numere reale (repetiție)

NUMERE NATURALE(N)

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6….

NUMERE ÎNTREGI(Z)

….-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4…….

NUMERE RAȚIONALE(Q)

Un număr q este rațional atunci când poate fi scris sub forma α = κ/λ, unde numerele κ, λ sunt numere întregi, iar numărul λ nu este zero (adică este diferit de zero, λ≠0)

Exemple:

7 = $\frac{7}{1}$: Număr rațional

−3 =$-\frac{3}{1}$: Număr rațional

$\frac{2}{5}$: Număr rațional

0,3 = $\frac{3}{10}$:Număr rațional

-1,37 =-$\frac{137}{100}$

NUMERE REALE(R)

În mulțimea R a numerelor reale se află toate numerele noastre cunoscute (adică numere naturale, întregi, numere raționale etc.).

Exemple:

0, -3, 19.2, -4/5

NUMERE REALE

Acestea sunt numerele reale care nu sunt raționale.

Exemple:

$\sqrt{2}$, π, -$\sqrt{8}$

SEMN

+(plus)

-(minus)

ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο

Παραδείγματα

+23, +17 : ομόσημοι αριθμοί

-17, -150: ομόσημοι αριθμοί

9, +15: ομόσημοι αριθμοί , δηλαδή +9, +15

12, 18: ομόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, +18

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο

Παραδείγματα

+25, -17 : ετερόσημοι αριθμοί

12, -9: ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή +12, -9

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

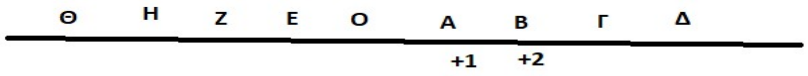
Να χαρακτηρίσετε τα επόμενα ζεύγη αριθμών ως ομόσημους αριθμούς ή ετερόσημους αριθμούς

1) +17, -23 **2)**-9, +11; **3)**-12, -18

4) -21, -32 **5)**7, 14 **6)**-7, 32

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ(ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ)

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού είναι ίση με την απόσταση του σημείου που αντιστοιχεί στον συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό από την αρχή των αξόνων. Συμβολίζεται με $|\alpha|$



Παραδείγματα

$|+2|$ = (OB) = 2 $|-3|$ = (OH) = 3

$|+7|$= 7 $|-5|$= 5 $|-0,7|$ = 0,7

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να υπολογίσετε τις επόμενες απόλυτες τιμές:

$|+3|$ $|-19|$ $|+17|$ $\left|-\frac{2}{7}\right|$ $|43|$

DEFINIȚII DE BAZĂ

Numerele identice sunt numere care au același semn

Exemple

+23, +17: numere similare

-17, -150: numere similare

9, +15: numere similare, adică +9, +15

12, 18: numere similare, adică +12, +18

Numerele odice sunt numere care au semne diferite

Exemple

+25, -17: numere cu semn impar

12, -9: numere cu semn impar, adică +12, -9

EXERCIȚIU

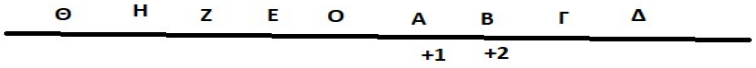
Clasificați următoarele perechi de numere drept numere identice sau numere cu semn impar

1) +17, -23 **2)**-9, +11; **3)**-12, -18

4) -21, -32 **5)**7, 14 **6)**-7, 32

DEFINIȚIE DE BAZĂ (VALOAREA ABSOLUTĂ A UNUI NUMĂR REAL)

Valoarea absolută a unui număr real este egală cu distanța punctului corespunzător numărului real specific față de originea axelor. Se notează cu $|\alpha|$



Exemple

$|+2|$ = (OB) = 2 $|-3|$ = (OH) = 3

$|+7|$= 7 $|-5|$= 5 $|-0,7|$ = 0,7

EXERCIȚIU (SARCINĂ): Calculați următoarele valori absolute:

$|+3|$ $|-19|$ $|+17|$ $\left|-\frac{2}{7}\right|$ $|43|$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1ος ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **προσθέσουμε** δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς **προσθέτουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο άθροισμα που προκύπτει βάζουμε τα πρόσημα που έχουν(**το κοινό τους πρόσημο**)

Παραδείγματα

1) (+7)+(+13) = +20 ή +7+13 = +20

2) (-12)+(-10)= -22 ή -12-10 = -22

3) (-17)+(-19) = -36 ή -17-19 = -36

4) (+23)+(+157) = +180 ή +23+157 = +180

2ος ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **προσθέσουμε** δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς **αφαιρούμε** την μικρότερη από τη μεγαλύτερη **απόλυτη τιμή** τους και στη διαφορά που προκύπτει βάζουμε το **πρόσημο του ρητού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.**

Παραδείγματα

1) (-7)+(+13) = +6 ή -7+13 = +6

2) (-12)+(+10)= -2 ή -12+10 = -2

3) (+17)+(-19) = -2 ή +17-19 = -2

4) (+23)+(-15) = +8 ή +23-15 = +8

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

1) (+7) + (+3) =…

2) (15) + (+12) =…

3) (-7) + (+5) =

4) (+16) + (-8) …

5)(-5) + (-10) = …

6)(-6) + (-9) = …

7)(-6) + (+3) = …

8) (+9) + (-5) = ..

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να προσθέσουμε πολλούς ρητούς αριθμούς, συνήθως προσθέτουμε πρώτα τους ομόσημους

Παράδειγμα:

(-3)+(-4)+ (+2)+(-6) +(-2)+(+7) =(+2)+(+7)+ (-3)+(-4) +(-2)+(-6) =(+9)+(-17) = -8

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να υπολογίσετε τα παρακάτω αθροίσματα

1) (-3)+(-4)+ (+2)+(-6) +(-2)+(+7) =

2) (-1)+(+4)+ (+10)+(-5) +(-12)+(+32) +(-11) =

3) $(-\frac{2}{7})+(+\frac{4}{7})+(+\frac{5}{7})+(-\frac{3}{7})+(-\frac{2}{7})=$

ADUNAREA NUMERELOR RAȚIONALE

REGULA 1: Pentru a aduna două numere raționale de același semn, se adună valorile lor absolute și la suma rezultată se adună semnele pe care le au (semnul lor comun).

Exemple

1) (+7)+(+13) = +20 sau +7+13 = +20

2) (-12)+(-10)= -22 sau -12-10 = -22

3) (-17)+(-19) = -36 sau -17-19 = -36

4) (+23)+(+157) = +180 sau +23+157 = +180

REGULA 2: Pentru a aduna două numere raționale de același semn, se scade valoarea mai mică din valoarea absolută mai mare și la diferența rezultată se adaugă semnul raționalului cu valoarea absolută mai mare.

Exemple

1) (-7)+(+13) = +6 sau -7+13 = +6

2) (-12)+(+10)= -2 sau -12+10 = -2

3) (+17)+(-19) = -2 sau +17-19 = -2

4) (+23)+(-15) = +8 sau +23-15 = +8

EXERCIȚIU (SARCINĂ): Calculați sumele:

1) (+7) + (+3) =…

2) (15) + (+12) =…

3) (-7) + (+5) =

4) (+16) + (-8) …

5)(-5) + (-10) = …

6)(-6) + (-9) = …

7)(-6) + (+3) = …

8) (+9) + (-5) = ..

ADUNAREA MAI MULTE NUMERE

Pentru a aduna mai multe numere raționale, de obicei adunăm numerele similare mai întâi

Exemplu:

(-3)+(-4)+ (+2)+(-6) +(-2)+(+7) =(+2)+(+7)+ (-3)+(-4) +(-2)+(-6) =(+9)+(-17) = -8

EXERCIȚIU(SARCINĂ): Calculați următoarele sume

Example**:**

(-3)+(-4)+ (+2)+(-6) +(-2)+(+7) =(+2)+(+7)+ (-3)+(-4) +(-2)+(-6) =(+9)+(-17) = -8

EXERCIȚIU(SARCINĂ): Calculați următoarele sume

1) (-3)+(-4)+ (+2)+(-6) +(-2)+(+7) =

2) (-1)+(+4)+ (+10)+(-5) +(-12)+(+32) +(-11) =

3) $(-\frac{2}{7})+(+\frac{4}{7})+(+\frac{5}{7})+(-\frac{3}{7})+(-\frac{2}{7})=$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1ος ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο +

Δηλαδή : **+ · + = +** **- · - = +**

Παραδείγματα

1) (+7) · (+4) =+28
2) (-3) · (-12) = +36
3) (+0,3)(+100) =+ 30
4) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{3}{10}$

2ος ΚΑΝΟΝΑΣ: Για να **πολλαπλασιάσουμε** δύο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς **πολλαπλασιάζουμε** τις **απόλυτες τιμές** τους και στο γινόμενο(αποτέλεσμα) που προκύπτει βάζουμε το πρόσημο -

Δηλαδή : **+ · - = -** **- · += -**

Παραδείγματα

1) (-5) · (+4) =-20
2) (+3) · (-14) = -42
3) (+0,5)(-100) =-50
4) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{14}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

1) (+3) · (+2) = …
2) (+40) · (+1,5) = …
3) (-2) · (-1)= …
4) (-25) (-10) = …
5) (-5) · (+10)
6) (+15) · (-6) …
7) (+100) · (-0,2)
8) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{2}{7}\right)$ =

ÎNMULȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE

REGULA 1: Pentru a înmulți două numere raționale de același semn, înmulțiți valorile lor absolute și adăugați semnul + la produsul rezultat (rezultat).

Adică: : **+ · + = +** **- · - = +**

Exemple

1) (+7) · (+4) =+28
2) (-3) · (-12) = +36
3) (+0,3)(+100) =+ 30
4) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{3}{10}$

REGULA 2: Pentru a înmulți două numere raționale de același semn, înmulțiți valorile lor absolute și adăugați semnul - la produsul rezultat (rezultat).

Adică: **+ · - = -** **- · += -**

Exemple

1) (-5) · (+4) =-20
2) (+3) · (-14) = -42
3) (+0,5)(-100) =-50
4) $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{14}$

EXERCIȚIU(SARCINĂ): Calculați produsele:

1) (+3) · (+2) = …
2) (+40) · (+1,5) = …
3) (-2) · (-1)= …
4) (-25) (-10) = …
5) (-5) · (+10)
6) (+15) · (-6) …
7) (+100) · (-0,2)
8) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{2}{7}\right)$ =

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν λέγονται **αντίθετοι αριθμοί**.
Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια απόλυτη τιμή αλλά διαφορετικό πρόσημο.

Παραδείγματα αντίθετων αριθμών

- Οι αριθμοί +5 και -5 είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί (+5)+(-5) = 0 ή +5-5 = 0
- Οι αριθμοί $\left(-\frac{1}{2}\right)$ και $\left(+\frac{1}{2}\right)$ είναι αντίθετοι αριθμοί γιατί $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=0$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίθετο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ		ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-17			19	
+1			-32	
$-\frac{1}{4}$			$-\frac{2}{7}$	
$+\frac{3}{5}$			0,8	

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ: Δυο αριθμοί που έχουν γινόμενο(αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού)τη μονάδα(1)λέγονται **αντίστροφοι αριθμοί.**

Παραδείγματα αντίστροφων αριθμών:

- Οι αριθμοί $\frac{4}{5}$ και $\frac{5}{4}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=\frac{20}{20}=1$
- Οι αριθμοί -7 και $-\frac{1}{7}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί γιατί $(-7)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=\frac{7}{7}=1$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι αριθμοί
- Μόνο ο αριθμός μηδέν(0) δεν έχει αντίστροφο αριθμό

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Στον επόμενο πίνακα να γράψετε τον αντίστροφο αριθμό των αριθμών που δίνονται:

ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ		ΑΡΙΘΜΟΣ	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
-18			0	
+1			-17	
$+\frac{1}{3}$			$-\frac{2}{3}$	

DEFINIȚIE DE BAZĂ

Două numere care au suma zero se numesc numere opuse.

Numerele opuse au aceeași valoare absolută, dar semne diferite.

Exemple de numere opuse

- Numerele +5 și -5 sunt numere opuse deoarece (+5)+(-5) = 0 sau +5-5 = 0
- Numerele (-1/2) și (+1/2) sunt numere opuse deoarece $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right)=0$

EXERCIȚIU (LUCRARE)

În tabelul următor, scrieți numărul opus al numerelor date:

număr	număr opus		număr	număr opus
-17			19	
+1			-32	
$-\frac{1}{4}$			$-\frac{2}{7}$	
$+\frac{3}{5}$			0,8	

DEFINIȚIE DE BAZĂ: Două numere care au produsul (rezultatul înmulțirii) egal cu unitatea (1) se numesc numere opuse.

Exemple de numere reciproce:

- Numerele 4/5 și 5/4 sunt numere reciproce deoarece $4/5\cdot 5/4 = 20/20 = 1$
- Numerele -7 și - 1/7 sunt numere reciproce deoarece $(-7)\cdot(-1/7) = 7/7 = 1$

OBSERVAȚII DE BAZĂ

- Numerele reciproce sunt numere identice
- Doar numărul zero(0) nu are un număr reciproc

EXERCIȚIU (SARCINĂ): În tabelul următor, scrieți reciproca numerelor date:

număr	ANTIȘTROFOS ARIȚMOS		număr	ANTIȘTROFOS ARIȚMOS
-18			0	
+1			-17	
$+\frac{1}{3}$			$-\frac{2}{3}$	

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με το μηδέν(0), τότε τουλάχιστον ένας όρος του γινομένου θα είναι ίσος με το μηδέν (0)

Δηλαδή**: Αν α·β = 0 τότε α = 0 ή β = 0**

Παραδείγματα: 0·5 = 0 (-7) ·0 = 0 0 ·0 = 0

2. Αν ένα γινόμενο δύο αριθμών είναι διάφορο του μηδενός , τότε και οι δύο όροι του γινομένου θα είναι διάφοροι του μηδενός

Δηλαδή**: Αν α·β ≠ 0 τότε α ≠ 0 και β ≠ 0**

Παράδειγμα :(-3)(+5) = -15, γινόμενο διάφορο του μηδενός και κανένας όρος δεν είναι μηδέν.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει: α-β = α+(-β)

Παραδείγματα:

1) (+5)-(-7) = (+5)+(+7) = +12
2) (-13)-(+8) = (-13)+(-8) =-21
3) (-14)-(-22) = (-14)+(+22) = +8
4) (+25)-(+17) =(+25)+(-17) = +8

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ)

Να κάνετε τις αφαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τις διαφορές)

1) (-12)-(-28) = **5)**(+32)-(-17) =
2) (+19)-(-11) = **6)** (-29)-(+15) =
3) (-23)- (-17) = 7) (-12)-(-65) =
4) (-25)-(-18)= 8) (+17)-(+65) =

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ισχύει $\alpha:\beta = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ):Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλίκα)

1) (-27):(+3) = -9
2) (-120):(-10) = +12
3) (-63): (+9) = -7

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):Να κάνετε τις διαιρέσεις(ή να υπολογίσετε τα πηλίκα)

1) (-30):(+6) = **5)** (-72):(+8) =
2) (-12):(+4) = **6)** (-200):(-50) =
3) (-16):(-4) = **7)** (+144):(-12) =
4) (-20):(+4) = **8)** (+1200):(-10) =

OBSERVAȚII DE BAZĂ

1. Dacă un produs a două numere este egal cu zero (0), atunci cel puțin un termen al produsului va fi egal cu zero (0)

Adică: Dacă α·β = 0 atunci α = 0 sau β = 0

Exemple: 0·5 = 0 (-7) ·0 = 0 0 ·0 = 0

2. Dacă un produs a două numere este diferit de zero, atunci ambii termeni ai produsului vor fi diferiți de zero

Adică: Dacă α·β ≠ 0 atunci α ≠ 0 și β ≠ 0

Exemplu: :(-3)(+5) = -15, produs diferit de zero și niciun termen nu este zero.

SCĂDEREA NUMERELOR

Valid: a-b = a+(-b)

Exemple:

1) (+5)-(-7) = (+5)+(+7) = +12
2) (-13)-(+8) = (-13)+(-8) =-21
3) (-14)-(-22) = (-14)+(+22) = +8
4) (+25)-(+17) =(+25)+(-17) = +8

EXERCIȚIU (LUCRARE)

Efectuați scăderile (sau calculați diferențele)

1)(-12)-(-28) = 5)(+32)-(-17) =
2) (+19)-(-11) = 6) (-29)-(+15) =
3) (-23)-(-17) = 7) (-12)-(-65) =
4) (-25)-(-18)= 8) (+17)-(+65) =

ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR

Valid $\alpha:\beta = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}$

EXERCIȚIU (EXEMPLU): Faceți împărțirile (sau calculați coerenții)

1) (-27):(+3) = -9
2) (-120):(-10) = +12
3) (-63): (+9) = -7

EXERCIȚIU (SARCINĂ): Faceți împărțirile (sau calculați coerenții)

1) (-30):(+6) = **5)** (-72):(+8) =
2) (-12):(+4) = **6)** (-200):(-50) =
3) (-16):(-4) = **7)** (+144):(-12) =
4) (-20):(+4) = **8)** (+1200):(-10) =

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

1^{Ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις
2^{Ο} ΒΗΜΑ: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις
3^{Ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις
4^{ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1) 6+6·4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34
2) 2+3·(4-11):(-5+2) = 2+3·(-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):βιβλίου

ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

1^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο +ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε)την παρένθεση και το πρόσημο + (αν υπάρχει) και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με τα πρόσημα που είχαν.

2^{ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: Όταν μπροστά από μία παρένθεση υπάρχει το πρόσημο - ή δε υπάρχει πρόσημο, τότε απαλείφουμε (διώχνουμε)την παρένθεση και το πρόσημο - και γράφουμε τους όρους που ήταν μέσα στην παρένθεση με αντίθετα πρόσημα.

Παραδείγματα:

1) +(7-12+1-6) = 7-12+1-6
2) (5-7+13) = 5-7+13
3) -(4-8-3+12) = -4+8+3-12
4) $\frac{2}{3}-(-\frac{1}{4})+(-\frac{1}{2})-(+\frac{1}{12})=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=$

$\frac{8}{12}+\frac{3}{12}-\frac{6}{12}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}-\frac{7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

3	**4**	**12**	**2**	**2**
1	**3**	**2**	**6**	**2**
1	**3**	**1**	**3**	**3**
1	**1**	**1**	**1**	

Άρα **ΕΚΠ(2,3,4,12) = 2·2·3 = 12**

PRIORITATEA OPERAȚIILOR

PASUL 1: Efectuăm operațiile din paranteze

PASUL 2: Calculăm puterile

PASUL 3: Efectuăm înmulțiri și împărțiri

PASUL 4: Efectuăm adunări și scăderi

EXEMPLE:

1) 6+6·4-12:(-4)+3 = 6+24+3+1 = 34
2) 2+3·(4-11):(-5+2) = 2+3·(-7):(-3) = 2-21:(-3) = 2+7 = 9

EXERCIȚIU (SARCINĂ):din carte

ELIMINAREA PARANTEZELOR

REGULA 1: Când există un semn + în fața unei paranteze sau nu există niciun semn, atunci ștergem (eliminăm) parantezele și semnul + (dacă există) și scriem termenii care erau în paranteze cu semnele pe care le aveau.

A DOUA REGULĂ: Când există un semn - în fața unei paranteze sau nu există niciun semn, atunci ștergem (eliminăm) parantezele și semnul - și scriem termenii care erau în paranteze cu semne opuse.

EXEMPLE:

1) +(7-12+1-6) = 7-12+1-6
2) (5-7+13) = 5-7+13
3) -(4-8-3+12) = -4+8+3-12
4) $\frac{2}{3}-(-\frac{1}{4})+(-\frac{1}{2})-(+\frac{1}{12})=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=$

$\frac{8}{12}+\frac{3}{12}-\frac{6}{12}-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}-\frac{7}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

OBSERVARE:

3	**4**	**12**	**2**	**2**
1	**3**	**2**	**6**	**2**
1	**3**	**1**	**3**	**3**
1	**1**	**1**	**1**	

ΕΚΠ(2,3,4,12) = 2·2·3 = 12

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: α^{ν} δύναμη

Βάση της δύναμης

Εκθέτης της δύναμης

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ: $\alpha^{\nu} = \alpha \cdot \alpha \ldots . \alpha$

ν φορές (ν παράγοντες)

Παραδείγματα:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9 = 9$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1. $\alpha^{1} = \alpha$

Παραδείγματα:

$5^{1} = 5$ $\quad (-7)^{1} = -7$ $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{1} = -\frac{3}{2}$

2. $\alpha^{0} = 1$ **με** $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα:

$15^{0} = 1$ $\quad (-3)^{0} = 1$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$

3. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ **με** $\alpha \neq 0$

Παραδείγματα:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $\quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$

4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Παραδείγματα:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$ $\quad \left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{4}\right)^{3}$

PUTERI ALE NUMERELOR REALE

SIMBOLISM α^{ν} **PUTERE**

Baza puterii

Exponentul puterii

CALCUL : α^{ν} **= a·a….a**

de ν ori (ν factori)

Exemple:

$2^3 = 2 \bullet 2 \bullet 2 = 8$, $(-3)^2 = (-3) \bullet (-3) = +9 = 9$

PROPRIETĂȚI DE BAZĂ ALE FORȚELOR

1. $\alpha^{1} = \alpha$

Exemple:

$5^{1} = 5$ $\quad (-7)^{1} = -7$ $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{1} = -\frac{3}{2}$

2. $\alpha^{0} = 1$ **με** $\alpha \neq 0$

Exemple:

$15^{0} = 1$ $\quad (-3)^{0} = 1$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$

3. $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu}}$ **με** $\alpha \neq 0$

Examples:

$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ $\quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3}$

4. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Examples:

$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2}$ $\quad \left(-\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(-\frac{7}{4}\right)^{3}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ):Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

I. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

II. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

III. $(-5)^1 = -5$

IV. $(-21)^0 = 1$

V. $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

VI. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{2} = \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = +\frac{25}{9}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

1) 2^3

2) 5^3

3) $(-8)^0$

4) $(-7)^2$

5) $\left(-\frac{4}{5}\right)^1$

6) $(-7)^{-3}$

7) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$

8) 3^4

9) $(-4)^2$

10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

11) $(-6)^3$

12) $\left(-\frac{3}{10}\right)^0$

13) $(-9)^2$

EXERCIȚIU(EXEMPLU): Calculați următoarele puteri

I. $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

I. $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

II. $(-5)^1 = -5$

III. $(-21)^0 = 1$

IV. $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

V. $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^{2} = \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = +\frac{25}{9}$

EXERCIȚIU(SARCINĂ): Calculați următoarele puteri

1) 2^3

2) 5^3

3) $(-8)^0$

4) $(-7)^2$

5) $\left(-\frac{4}{5}\right)^1$

6) $(-7)^{-3}$

7) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$

8) 3^4

9) $(-4)^2$

10) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

11) $(-6)^3$

12) $\left(-\frac{3}{10}\right)^0$

13) $(-9)^2$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΔΥΝΑΜΗΣ

1^{Ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός

Παραδείγματα:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 > 0$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 > 0$

2^{Ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο(ζυγό)αριθμό είναι θετικός αριθμός

Παρατήρηση: Άρτιοι(ζυγοί)αριθμοί: 0, 2, 4, 6, 8, ….

Παραδείγματα:

$(-2)^4 > 0$ (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)

αφού $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 > 0$

$(-8)^2 > 0$ (αρνητική βάση και άρτιος εκθέτης)

αφού $(-8)^2 = (-8) \cdot (-8) = +64$

3^{Ος} ΚΑΝΟΝΑΣ: δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό(μονό)αριθμό είναι αρνητικός αριθμός

Παρατήρηση: Περιττοί(μονοί)αριθμοί: 1, 3, 5, 7, 9, ….

Παραδείγματα:

$(-2)^3 < 0$ (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)

αφού $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 < 0$

$(-3)^5 > 0$ (αρνητική βάση και περιττός εκθέτης)

αφού $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243 < 0$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να βρείτε το πρόσημο των επόμενων δυνάμεων και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε:

$(-4)^2$ $(-5)^3$

$(-7)^2$ 2^5

$(-2)^{10}$ $(-2)^5$

SEMN DE PUTERE

REGULA 1: o putere bazată pe un număr pozitiv este un număr pozitiv

Exemple:

$2^3 = 2 \bullet 2 \bullet 2 = 8 > 0$

$5^2 = 5 \bullet 5 = 25 > 0$

REGULA 2: o putere bazată pe un număr negativ și un număr par ca exponent este un număr pozitiv

Notă: Numere pare: 0, 2, 4, 6, 8, ….

Exemple:

$(-2)^4 > 0$ (bază negativă și exponent par)

deoarece $(-2)4 = (-2) \bullet (-2) \bullet (-2) = 16 > 0$

$(-8)^2 > 0$ (bază negativă și exponent par)

deoarece $(-8)^2 = (-8) \bullet (-8) = +64$

REGULA 3: o putere cu bază negativă și exponent impar este un număr negativ

Notă: Numere impare: 1, 3, 5, 7, 9, ….

Exemple:

$(-2)^3 < 0$ (bază negativă și exponent impar)

deoarece $(-2)3 = (-2) \bullet (-2) \bullet (-2) = -8 < 0$

$(-3)^5 < 0$ (bază negativă și exponent impar)

deoarece $(-3)^5 = (-3) \bullet (-3) \bullet (-3) \bullet (-3) = -243 < 0$

EXERCIȚIU (SARCINĂ): Găsiți semnul următoarelor puteri și apoi calculați-le:

$(-4)^2$ $(-5)^3$

$(-7)^2$ 2^5

$(-2)^{10}$ $(-2)^5$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1.Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και προσθέτουμε τους εκθέτες, δηλαδή $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Παραδείγματα:

$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

$7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$

$4^{-6} \cdot 4^3 = 4^{(-6)+3} = 4^{-3}$

$(-2)^{-7} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να γράψετε σαν μια δύναμη τα επόμενα γινόμενα:

$5^3 \cdot 5^4 =$ $(-7)^3 \cdot (-7)^2 =$

$9^4 \cdot 9^{-5} =$ $10^{-3} \cdot 10^{-4} =$

$(-8)^5 \cdot (-8)^{-7} =$ $12^3 \cdot 12^2 =$

$(-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} =$ $(-2)^7 \cdot (-2)^{-2} =$

2.Για να διαιρέσουμε δυνάμεις που έχουν την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και αφαιρούμε τους εκθέτες(εκθέτης διαιρετέου- εκθέτης διαιρέτη), δηλαδή $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

Παραδείγματα:

$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$

$(-7)^{12} : (-7)^8 = (-7)^{12-8} = (-7)^4$

$5^{-6} \cdot 5^3 = 5^{-6-3} = 5^{-9}$

$(-9)^5 \cdot (-9)^{-2} = (-9)^{5-(-2)} = (-9)^{5+2} = (-9)^7$

$8^{-12} : 8^{-4} = 8^{-12-(-4)} = 8^{-8}$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ):

Να γράψετε σαν μια δύναμη τις επόμενες δυνάμεις (ή τα επόμενα πηλίκα):

$15^3 : 15^2 =$ $(-7)^{13} : (-7)^{10} =$

$7^5 : 7^{-3} =$ $6^{-6} : 6^4 =$

$(-8)^{-5} : (-8)^{-7} =$ $(-4)^{-6} \cdot (-4)^2 =$

PROPRIETĂȚILE FORȚELOR

1. Pentru a înmulți puteri cu aceeași bază, lăsăm aceeași bază și adunăm exponenții, adică $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Exemple:

$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

$7^5 \cdot 7^{-2} = 7^{5+(-2)} = 7^3$

$4^{-6} \cdot 4^3 = 4^{(-6)+3} = 4^{-3}$

$(-2)^{-7} \cdot (-2)^2 = (-2)^{-7+2} = (-2)^{-5}$

EXERCIȚIU (SARCINĂ): Scrieți următoarele produse ca o putere:

$5^3 \cdot 5^4 =$ $(-7)^3 \cdot (-7)^2 =$

$9^4 \cdot 9^{-5} =$ $10^{-3} \cdot 10^{-4} =$

$(-8)^5 \cdot (-8)^{-7} =$ $12^3 \cdot 12^2 =$

$(-4)^{-6} \cdot (-4)^{-2} =$ $(-2)^7 \cdot (-2)^{-2} =$

2. Pentru a împărți puteri care au aceeași bază, lăsăm aceeași bază și scădem exponenții (exponentul împărțitorului - exponentul împărțitorului), adică $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

Exemple:

$8^5 : 8^3 = 8^{5-3} = 8^2$

$(-7)^{12} : (-7)^8 = (-7)^{12-8} = (-7)^4$

$5^{-6} \cdot 5^3 = 5^{-6-3} = 5^{-9}$

$(-9)^5 \cdot (-9)^{-2} = (-9)^{5-(-2)} = (-9)^{5+2} = (-9)^7$

$8^{-12} : 8^{-4} = 8^{-12-(-4)} = 8^{-8}$

EXERCIȚIU:

Scrieți următoarele puteri (sau coeficienți) ca o singură putere:

$15^3 : 15^2 =$ $(-7)^{13} : (-7)^{10} =$

$7^5 : 7^{-3} =$ $6^{-6} : 6^4 =$

$(-8)^{-5} : (-8)^{-7} =$ $(-4)^{-6} \cdot (-4)^2 =$

3.Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε έναν εκθέτη υψώνουμε κάθε έναν από τους όρους του γινόμενου στον εκθέτη αυτόν, δηλαδή

$(\alpha\cdot\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$

Παραδείγματα:

$(3\cdot 2)^4 = 3^4\cdot 2^4$

$((-7)\cdot 4)^5 = (-7)^5\cdot 4^5$

$(-2)^{10}\cdot 5^{10} = (-2\cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$

$(-0,5)^{-3}\cdot(-2)^{-3} = ((-0,5\cdot(-2))^{-3} = (+1)^{-3}$

4.Για να υψώσουμε ενα πηλίκο σε έναν εκθετη υψώνουμε κάθε ορο του πηλίκου στον εκθέτη αυτόν, δηλαδή $(\alpha:\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} : \beta^{\nu}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Να γράψετε σαν κλάσμα δυνάμεων τις επόμενες δυνάμεις

$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$

$\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$

2. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις

$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$

$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5\cdot5\cdot5 = 125$

$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81$

5.Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών, δηλαδή $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

ΑΣΚΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να υπολογίσετε τις επόμενες δυνάμεις

$(2^4)^2 = 2^{4\cdot2} = 2^8 = 256$

$(3^2)^2 = 3^{2\cdot2} = 3^4 = 81$

$(4^2)^3 = 4^{2\cdot3} = 4^6 = 4096$

3. Pentru a ridica un produs la un exponent, ridicăm fiecare dintre termenii produsului la acel exponent, adică

$(\alpha\cdot\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$

Exemple:

$(3\cdot 2)^4 = 3^4\cdot 2^4$

$((-7)\cdot 4)^5 = (-7)^5\cdot 4^5$

$(-2)^{10}\cdot 5^{10} = (-2\cdot 5)^{10} = (-10)^{10}$

$(-0,5)^{-3}\cdot(-2)^{-3} = ((-0,5\cdot(-2))^{-3} = (+1)^{-3}$

4. Pentru a ridica un cotient la un exponent, ridicăm fiecare termen al cotientului la acel exponent, adică $(\alpha:\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} : \beta^{\nu}$

EXEMPLE DE EXERCIȚII:

1. Scrieți următoarele ca o fracție de putere puteri

$\left(\frac{8}{3}\right)^4 = \frac{8^4}{3^4}$

$\left(-\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{(-7)^3}{2^3}$

2. Calculați puterile

$\frac{8^5}{4^5} = \left(\frac{8}{4}\right)^5 = 2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$

$\frac{30^3}{6^3} = \left(\frac{30}{6}\right)^3 = 5^3 = 5\cdot5\cdot5 = 125$

$\frac{15^4}{(-5)^4} = \left(\frac{15}{-5}\right)^4 = (-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81$

5. Pentru a ridica o putere la un exponent, ridicăm baza puterii la produsul exponenților, adică $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

EXEMPLU DE EXERCIȚIU: Calculați următoarele puteri

$((2^4)^2 = 2^{4\cdot2} = 2^8 = 256$

$(3^2)^2 = 3^{2\cdot2} = 3^4 = 81$

$(4^2)^3 = 4^{2\cdot3} = 4^6 = 4096$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΡΓΑΣΙΑ:

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $2^4 = \ldots$
(β) $2^3 = \ldots$
(γ) $(-2)^4 = \ldots$
(δ) $(-2)^3 = \ldots$

$(-3)^2 = \ldots$
$(-3)^3 = \ldots$
$-3^2 = \ldots$
$5^3 = \ldots$
$(-1)^9 = \ldots$
$(-1)^{10} = \ldots$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $4^{-2} = \ldots$
(β) $(-4)^{-2} = \ldots$
(γ) $4^{-3} = \ldots$
(δ) $(-4)^{-3} = \ldots$
(ε) $-4^{-2} = \ldots$
(ς) $4^0 = \ldots$
(ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \ldots$

3. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $6^{-21} \cdot 6^{19} = \ldots$
(β) $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \ldots$
(γ) $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \ldots$
(δ) $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \ldots$

4. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \ldots$
(β) $2^6 \cdot 5^6 = \ldots$
(γ) $\frac{(-14)^5}{7^5} = \ldots$
(δ) $\frac{(-63)^3}{21^3} = \ldots$

5. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \ldots$
(β) $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \ldots$
(γ) $\frac{9^5}{3^{10}} = \ldots$
(δ) $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \ldots$
(ε) $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \ldots$
(ς) $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \ldots$

TEMĂ

Calculați, pe cât posibil, mai bine folosind proprietățile

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $2^4 = \ldots$
(β) $2^3 = \ldots$
(γ) $(-2)^4 = \ldots$
(δ) $(-2)^3 = \ldots$

$(-3)^2 = \ldots$
$(-3)^3 = \ldots$
$-3^2 = \ldots$
$5^3 = \ldots$
$(-1)^9 = \ldots$
$(-1)^{10} = \ldots$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $4^{-2} = \ldots$
(β) $(-4)^{-2} = \ldots$
(γ) $4^{-3} = \ldots$
(δ) $(-4)^{-3} = \ldots$
(ε) $-4^{-2} = \ldots$
(ς) $4^0 = \ldots$
(ζ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \ldots$

3. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $6^{-21} \cdot 6^{19} = \ldots$
(β) $(-9)^{11} \cdot (-9)^{-9} = \ldots$
(γ) $\frac{7^{62}}{7^{63}} = \ldots$
(δ) $\frac{5^{100}}{(-5)^{98}} = \ldots$

4. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(-0,2)^9 \cdot 5^9 = \ldots$
(β) $2^6 \cdot 5^6 = \ldots$
(γ) $\frac{(-14)^5}{7^5} = \ldots$
(δ) $\frac{(-63)^3}{21^3} = \ldots$

5. Να υπολογίσετε, με την βοήθεια των ιδιοτήτων, την τιμή των παραστάσεων:

(α) $(7^3)^5 \cdot (7^2)^{-7} = \ldots$
(β) $\frac{(2^3)^6}{(2^5)^4} = \ldots$
(γ) $\frac{9^5}{3^{10}} = \ldots$
(δ) $(0,01)^3 \cdot 10^5 = \ldots$
(ε) $\frac{3^9 \cdot (5^2)^3}{(5 \cdot 3^2)^5} = \ldots$
(ς) $\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^{-1}} = \ldots$

ΠΡΟΤΕΡΑΙΟΤΗΤΑ ΠΡΑΞΕΩΝ

1^{Ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις

2^{Ο} ΒΗΜΑ: Υπολογίζουμε τις δυνάμεις

3^{Ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις

4^{ο} ΒΗΜΑ: Κάνουμε προσθέσεις και αφαιρέσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

Α. $3\cdot6+6\cdot(-4)-8^2=3\cdot6+6\cdot(-4)-64=18-24-64=18-88=-70$

Β. $(-2)^3-(-5)^2+7\cdot3=(-8)-(+25)+21=-8-25+21=-33+21=-12$

ΑΣΚΗΣΗ(ΕΡΓΑΣΙΑ): Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

Α = $2\cdot5+3\cdot7-6\cdot10$

Β = $(-3)\cdot(-5)+(-6)\cdot(-4)+19$

Γ = $(-2)^3-(-5)^2+8\cdot(-2)-15$

Δ = $(2^3-5\cdot2)+7^2-6\cdot4$

Ε = $(8^2-5\cdot3)+(-4)^3$

$\Omega = 3\cdot5-5\cdot2+2\cdot3+4\cdot9-8:2-6:3$ $\quad$ $\psi = 4\cdot(12-9)+3\cdot(8-6):(5+1)$

$\Phi = 2^3:4+4^2:8+3\cdot(5^2-4\cdot6)$ $\quad$ $\gamma = 3^2-2^3+4^2-3\cdot(10-3\cdot3)+5^2$

$\Gamma = 4^3-5\cdot(3^3-2^3\cdot3)+2^4:8$ $\quad$ $\Sigma = 3^4:(2^3+1)+4^2:(5\cdot3-7)$

$\Pi = 3\cdot(5^2-2^2\cdot3):(5\cdot2+3)-(10^5-10^4)^0$

$\Pi = 2\cdot10^3+4^2-5^3:5^2+2$ $\quad$ $\Xi = (4^3:2^3+2)^3\cdot(17-3\cdot5)+2^3\cdot2-2$

PRIORITATEA OPERAȚIILOR

PASUL 1: Efectuăm operațiile din paranteze

PASUL 2: Calculăm puterile

PASUL 3: Efectuăm înmulțiri și împărțiri

PASUL 4: Efectuăm adunări și scăderi

EXERCIȚII-EXEMPLE: Calculați valorile expresiilor:

A. $3\cdot6+6\cdot(-4)-8^2=3\cdot6+6\cdot(-4)-64=18-24-64=18-88=-70$

B. $(-2)^3-(-5)^2+7\cdot3=(-8)-(+25)+21=-8-25+21=-33+21=-12$

EXERCIȚIU(SARCINĂ): Calculați valorile expresiilor

A = $2\cdot5+3\cdot7-6\cdot10$

B = $(-3)\cdot(-5)+(-6)\cdot(-4)+19$

Γ = $(-2)^3-(-5)^2+8\cdot(-2)-15$

Δ = $(2^3-5\cdot2)+7^2-6\cdot4$

E = $(8^2-5\cdot3)+(-4)^3$

$\Omega = 3\cdot5-5\cdot2+2\cdot3+4\cdot9-8:2-6:3$ $\quad$ $\psi = 4\cdot(12-9)+3\cdot(8-6):(5+1)$

$\Phi = 2^3:4+4^2:8+3\cdot(5^2-4\cdot6)$ $\quad$ $\gamma = 3^2-2^3+4^2-3\cdot(10-3\cdot3)+5^2$

$\Gamma = 4^3-5\cdot(3^3-2^3\cdot3)+2^4:8$ $\quad$ $\Sigma = 3^4:(2^3+1)+4^2:(5\cdot3-7)$

$\Pi = 3\cdot(5^2-2^2\cdot3):(5\cdot2+3)-(10^5-10^4)^0$

$\Pi = 2\cdot10^3+4^2-5^3:5^2+2$ $\quad$ $\Xi = (4^3:2^3+2)^3\cdot(17-3\cdot5)+2^3\cdot2-2$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ:Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$και είναι ο θετικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό

ΒΑΣΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ορίζουμε να είναι$\sqrt{0}$ = 0

Παραδείγματα

$\sqrt{25}$ = 5 γιατί 5² = 5·5 = 25, $\sqrt{49}$ = 7 γιατί 7² = 7·7 = 49

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{576}=24$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{625}=25$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{400}=20$	$\sqrt{676}=26$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{441}=21$	$\sqrt{729}=27$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{484}=22$	$\sqrt{784}=28$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{529}=23$	$\sqrt{841}=29$

Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών

1. για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει $\sqrt{x^2}=|x|$

παραδείγματα

$\sqrt{5^2}=|5|=5$ $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$ $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

2. Αν x ≥0, τότε $(\sqrt{x})^2=x$

παραδείγματα

$(\sqrt{8})^2=8$, $(\sqrt{15})^2=15$ $(\sqrt{11})^2=11$

Εργασία

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{16}$, $\sqrt{1600}$, $\sqrt{0,16}$ β) $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{100}{81}}$, $\sqrt{\frac{144}{169}}$
2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{16}$ β) $\sqrt{8+8}$ γ) $\sqrt{8\cdot 8}$ δ) $(\sqrt{8})^2$
3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:
   $A=\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$ $B=\sqrt{96+\sqrt{25+\sqrt{121}}}$
4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{1089}$ β) $\sqrt{484}$ γ) $\sqrt{11025}$

RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR REAL

DEFINIȚIE DE BAZĂ: Rădăcina pătrată a unui număr pozitiv x este notat √x și este numărul pozitiv care, atunci când este ridicat la pătrat, ne d numărul

DEFINIȚIE DE BAZĂ îl definim ca fiind $\sqrt{0}$ = 0

Exemple

$\sqrt{25}$ = 5 deoarece 5² = 5•5 = 25, $\sqrt{49}$ = 7 deoarece 7² = 7•7 = 49

$\sqrt{0}=0$	$\sqrt{36}=6$	$\sqrt{144}=12$	$\sqrt{324}=18$	$\sqrt{576}$
$\sqrt{1}=1$	$\sqrt{49}=7$	$\sqrt{169}=13$	$\sqrt{361}=19$	$\sqrt{625}$
$\sqrt{4}=2$	$\sqrt{64}=8$	$\sqrt{196}=14$	$\sqrt{400}=20$	$\sqrt{676}$
$\sqrt{9}=3$	$\sqrt{81}=9$	$\sqrt{225}=15$	$\sqrt{441}=21$	$\sqrt{729}$
$\sqrt{16}=4$	$\sqrt{100}=10$	$\sqrt{256}=16$	$\sqrt{484}=22$	$\sqrt{784}$
$\sqrt{25}=5$	$\sqrt{121}=11$	$\sqrt{289}=17$	$\sqrt{529}=23$	$\sqrt{841}$

RĂDĂCINI PĂTRATE DE BAZĂ

Proprietățile rădăcinilor pătrate

1. pentru fiecare număr real este adevărat √x²=|x|

exemple

$\sqrt{5^2}=|5|=5$ $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$ $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\left|-\frac{1}{4}\right|$

2.Dacă x ≥0, atunci $(\sqrt{x})^2=x$

exemple

$(\sqrt{8})^2=8$, $(\sqrt{15})^2=15$ $(\sqrt{11})^2=11$

Lucru: calculați rădăcinile pătrate

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{16}$, $\sqrt{1600}$, $\sqrt{0,16}$ β) $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{100}{81}}$, $\sqrt{\frac{144}{169}}$
2. Να υπολογίσετε τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{16}$ β) $\sqrt{8+8}$ γ) $\sqrt{8\cdot 8}$ δ) $(\sqrt{8})^2$
3. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:
   $A=\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$ $B=\sqrt{96+\sqrt{25+\sqrt{121}}}$
4. Να υπολογίσετε, κάνοντας δοκιμές τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:
   α) $\sqrt{1089}$ β) $\sqrt{484}$ γ) $\sqrt{11025}$

2. $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, α≥0, β≥0

δηλαδή το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών είναι ίσον με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους

παραδείγματα

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{3\cdot 9}=\sqrt{27}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}=\sqrt{5\cdot 125}=\sqrt{625}=25$

3. το πηλίκο το τετραγωνικών ριζών είναι ίσο με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου δηλαδή $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

παραδείγματα

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$

Σημαντική παρατήρηση:

Αν α,β είναι δύο θετικοί αριθμοί τότε $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$

παραδείγματα :

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ ενώ $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Σημαντική παρατήρηση(Ρητοποίηση παρανομαστών)

Άσκηση: παράδειγμα

Να μετατραπούν τα επόμενα κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρανομαστή:

$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}\cdot}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

Ασκήσεις:

Βιβλίο..και

2. $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, α≥0, β≥0

adică produsul rădăcinilor pătrate este egal cu rădăcina pătrată a produsului lor

exemple

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}=\sqrt{3\cdot 9}=\sqrt{27}$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}=\sqrt{5\cdot 125}=\sqrt{625}=25$

3. cotientul rădăcinilor pătrate este egal cu rădăcina pătrată a cotientului, adică $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

exemple

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{36}{9}}=\sqrt{4}=2$

Observație importantă:

Dacă α,β sunt două numere pozitive, atunci $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$

exemple:

$\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ în timp ce $\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

Observație importantă (Raționalizarea numitorilor)

Exercițiu: exemplu

Convertiți următoarele fracții în fracții echivalente cu numitori raționali:

$\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}\cdot}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}=\frac{7\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

Exerciții:

Carte..și

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, β) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, γ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, δ) $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, ε) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$ **β.** $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

γ. $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$ **δ.** $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

ε. $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ **στ.** $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{200}+\sqrt{288}$

β) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$

γ) $\sqrt{20}-\sqrt{210}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$ **β.** $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$

γ. $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$ **δ.** $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$

ε. $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ **στ.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

ζ. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ **η.** $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

θ. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **ι.** $\sqrt{\frac{\alpha}{7}}\cdot\sqrt{14\alpha}$

Conform regulilor de mai sus, calculați sau simplificați cât mai mult posibil următoarele

1. Να γίνουν οι ρητοποιήσεις στα παρακάτω κλάσματα:

α) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, β) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, γ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$, δ) $\frac{1-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$, ε) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $\sqrt{7}+2\sqrt{3}+5\sqrt{7}-2\sqrt{3}$ **β.** $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt{2}$

γ. $7\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{3}+12\sqrt{5}$ **δ.** $4\sqrt{2}-5\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

ε. $3\sqrt{5}-5\sqrt{7}-\sqrt{5}-4\sqrt{7}$ **στ.** $\sqrt{5}+2\sqrt{3}-4\sqrt{5}+\sqrt{3}$

3. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{200}+\sqrt{288}$

β) $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{175}$

γ) $\sqrt{20}-\sqrt{210}-\sqrt{45}+\sqrt{80}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$ **β.** $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$

γ. $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$ **δ.** $2\sqrt{50}-3\sqrt{18}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}$

ε. $3\sqrt{12}-2\sqrt{27}+\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ **στ.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

ζ. $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ **η.** $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

θ. $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **ι.** $\sqrt{\frac{\alpha}{7}}\cdot\sqrt{14\alpha}$

Μονώνυμα -Πράξεις με μονώνυμα

Βασικός ορισμός :Αριθμητικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν μόνο αριθμούς και πράξεις.

παραδείγματα :

$A = 2^3+5\cdot2-4$ $B =(2^3+5\cdot2)-7\cdot4$ $\Gamma = [(2^3+5\cdot2)-7^2-4\cdot5]+7\cdot4$

Βασικός ορισμός :Αλγεβρικές παραστάσεις λέγονται οι παραστάσεις που περιέχουν αριθμούς, πράξεις και μεταβλητές.

παραδείγματα :

$A = 2^4+3\cdot2-7^2+6x+12$ $B = x^2-5x+6$ $\Gamma = x^3-5x^2+4x-10$

Βασικός ορισμός :Ακέραια αλγεβρική παράσταση λέγεται μία παράσταση όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι θετικοί ακέραιοι (δηλαδή φυσικοί αριθμοί).

Παραδείγματα

$A = 5x^2+6x$ $B = 5x^3+2x$

Βασικός ορισμός: αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις τότε το αποτέλεσμα που θα προκύψει ονομάζεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή της αλγεβρικής παράστασης.

Άσκηση- παράδειγμα: βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

$A =3x^2+2x$ για $x = 4$

$B = 6x+12$,για $x = -2$

$\Gamma = x^2+5x+12$, για $x = -3$

Λύση

$A =3x^2+2x$ $3\cdot4^2+2\cdot4= 3\cdot16+2\cdot4= 48+8 = 56$ άρα $A = 56$

$B = 6x+12 =6\cdot(-2)+12 = -12+12 = 0$, άρα $B = 0$

$\Gamma =x^2+5x+12 = (-3)^2+5\cdot(-3)+12= 9+5(-3)+12 = 9-15+12 = 21-15 =6$, άρα $\Gamma = 6$

άσκηση-εργασία: να υπολογίσετε την τιμή των αλγεβρικών παραστάσεων:

$A =5x+2$ για $x = 7$

$B = x^2-5x+2,$ για $x = -2$

$\Gamma = x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, για $x = -1$

Βασικός ορισμός: Μονώνυμα ονομάζονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις στις οποίες μεταξύ του αριθμητικού παράγοντα και των μεταβλητών σημειώνεται (γράφεται) μόνο οι πράξη του πολλαπλασιασμού

Παραδείγματα: $5x^3$,- $6x$, $2x^2y^3\omega^5$, $-3xy^3$, $-\frac{3}{7}x^3y$

Mononimele - Operații cu monoame

Definiție de bază: Expresiile aritmetice sunt expresii care conțin doar numere și operații.

exemple:

$A = 2^3+5\bullet2-4$ $B =(2^3+5\bullet2)-7\bullet4$ $C = [(2^3+5\bullet2)-72-4\bullet5]+7\bullet4$

Definiție de bază: Expresiile algebrice sunt expresii care conțin numere, operații și variabile.

exemple:

$A = 24+3\bullet2-7^2+6x+12$ $B = x^2-5x+6$ $C = x^3-5x^2+4x-10$

Definiție de bază: O expresie se numește expresie algebrică întreagă atunci când printre variabilele sale sunt notate doar operațiile de adunare și înmulțire, iar exponenții variabilelor sunt numere întregi pozitive (adică numere naturale).

Exemple

$A = 5x^2+6x$ $B = 5x^3+2x$

Definiție de bază: dacă într-o expresie algebrică înlocuim variabilele cu numere și efectuăm operațiile, atunci rezultatul se numește valoare numerică sau, pur și simplu, valoarea expresiei algebrice.

Exercițiu - exemplu: găsiți valoarea numerică a expresiilor

$A = 3x^2+2x$ pentru $x = 4$

$B = 6x+12$, pentru $x = -2$

$C = x^2+5x+12$, pentru $x = -3$

Soluție

$A = 3x^2+2x$ $3\bullet4^2+2\bullet4= 3\bullet16+2\bullet4= 48+8 = 56$ deci $A = 56$

$B = 6x+12 = 6\bullet(-2)+12 = -12+12 = 0$, deci $B = 0$

$C = x^2+5x+12 =(-3)^2+5\bullet(-3)+12= 9+5(-3)+12 = 9-15+12 = 21-15 =6$ deci $C = 6$

Exercițiu - sarcină: calculați valoarea expresiilor algebrice:

$A = 5x+2$ pentru $x = 7$

$B = x^2-5x+2$, pentru $x = -2$

$C = x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, pentru $x = -1$

Definiție de bază: Mononimele sunt numite expresii algebrice întregi în care doar operația de înmulțire este notată (scrisă) între factorul numeric și variabilă

Exemple:

$5x^3$,- $6x$, $2x^2y^3\omega^5$, $-3xy^3$, $-\frac{3}{7}x^3y$

Βασικός ορισμός(Συντελεστής μονωνύμου):Σε κάθε μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται συντελεστής του μονώνυμου

Παραδείγματα:

- Στο μονώνυμο $5x^3$ ο συντελεστής είναι 5
- Στο μονώνυμο $-3xy^3$ ο συντελεστής είναι -3

βασικός ορισμός (Κύριο μέρος):

Σε κάθε μονώνυμο το γινόμενο όλων των μεταβλητών του υψωμένο στους αντίστοιχους εκθέτες λέγεται κύριο μέρος του μονωνύμου

παραδείγματα

- Στο μονώνυμο $5x^3$το κύριο μέρος είναι x^3
- Στο μονώνυμο $-\frac{3}{7}x^3y$ το κύριο μέρος είναι x^3y

Άσκηση παράδειγμα : Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
$13x^5y^3$	13	x^5y^3
$-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$	$-\frac{1}{2}$	$x^3y^6\omega^2$

Άσκηση εργασία : Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα

ΜΟΝΩΝΥΜΟ	ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΚΥΡΙΟ ΜΕΡΟΣ
$-13x^5y^2\omega$		
$14x^2y^3\omega^6$		
$-\frac{2}{3}x$		
$-2x^3$		

Βασικός ορισμός(Βαθμός μονωνύμου)

Βαθμός ενός μονωνύμου ως μία μεταβλητή ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Βαθμός ενός μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του ονομάζεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του

Παραδείγματα

Α) το μονώνυμο $8x^3y^4$ έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό, ως προς ψ 4, βαθμό προς x και ψ το μονώνυμο έχει βαθμό 3+4 = 7

Β) το μονώνυμο $-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$ έχει βαθμό ως προς x 3, βαθμό ως προς ψ 6, βαθμό ως προς ω 2, βαθμό προς x και ψ και ω 3+6+2 = 11

Άσκηση εργασία: να βρείτε το βαθμό του μονωνύμου $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$ ως προς χ , ως προς ψ, ως προς ω ως προς x και ψ και ω

Definiție de bază (Coeficientul unui monom): În fiecare monom, factorul aritmetic se numește coeficientul monomului

Exemple:

- În monomul $5x^3$, coeficientul este 5
- În monomul $-3xy^3$, coeficientul este -3

Definiție de bază (Partea principală):

În fiecare monom, produsul tuturor variabilelor sale ridicat la exponenții corespunzători se numește partea principală a monomului

exemple

- În monomul $5x^3$, partea principală este x^3
- În monomul $-\frac{3}{7}x^3y$, partea principală este x^3y

Exercițiu exemplu: Completați tabelul următor.

monomul	**Coeficientul**	**Partea principală):**
$13x^5y^3$	13	x^5y^3
$-\frac{1}{2}x^3y^6\omega^2$	$-\frac{1}{2}$	$x^3y^6\omega^2$

Exercițiu: Completați tabelul următor.

monomul	**Coeficientul**	**Partea principală**
$-13x^5y^2\omega$		
$14x^2y^3\omega^6$		
$-\frac{2}{3}x$		
$-2x^3$		

Definiție de bază (Gradul unui monom)

Gradul unui monom în raport cu o variabilă se numește exponentul acelei variabile. Gradul unui monom în raport cu toate variabilele sale se numește suma exponenților variabilelor sale.

Exemple

A) monomul $8x^3y4$ are grad față de x^3, grad, în raport cu ψ^4, grad față de x și ψ. Monomul are gradul 3+4 = 7.

B) monomul $-\frac{1}{2}x^3y6\omega^2$ are grad față de x^3, grad în raport cu ψ^4, grad față de ω^2, grad față de x și ψ și ω 3+6+2 = 11.

Exercițiu: găsiți gradul monomului $3/2x\ 5y^3\omega^2$ în raport cu χ, în raport cu ψ, în raport cu ω în raport cu x și ψ și ω.

Βασικός ορισμός (**όμοια μονώνυμα**)

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται όμοια.

παραδείγματα

τα μονώνυμα $2x^2y^3$ και $-5x^2y^3$ είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

τα μονώνυμα $2xy^3\omega^2$, $\frac{3}{2}x\,y^3\omega^2$ είναι όμοια γιατί έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

Άσκηση εργασία :Να εξετάσετε αν τα επόμενα μονώνυμα είναι όμοια:

a) $2x^2y^3$, $-5x^2y^3$, $7x^2y^3$

b) $8xy$, $-17xy$

c) $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$, $x^5y^3\omega^2$

Βασικός ορισμός(ίσα μονώνυμα)

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται ίσα μονώνυμα.

Βασικός ορισμός (αντίθετα μονώνυμα)

Τα όμοια μονώνυμα με αντίθετους συντελεστές λέγονται αντίθετα μονώνυμα :

παραδείγματα

A)τα μονώνυμα $-5x^2y^3$, $5x^2y^3$ είναι αντίθετα μονώνυμα

B) τα μονώνυμα $8xy$, $-8xy$, είναι αντίθετα μονώνυμα

Βασικός ορισμός: οι αριθμοί θεωρούνται μονώνυμα και ονομάζεται σταθερά μονώνυμα.

Παραδείγματα:

α) 17 σταθερό μονώνυμο

β) -23 σταθερό μονώνυμο

γ) 0 σταθερό μονώνυμο

Βασική παρατήρηση

Κάθε σταθερό μονώνυμο($\neq 0$) έχει βαθμό μηδέν.

Βασικός ορισμός:

Το σταθερό μονώνυμο 0 ονομάζεται μηδενικό μονώνυμο και δεν έχει βαθμό.

Άσκηση εργασία

α)ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 12 και μεταβλητές x, ψ να προσδιορίσετε το μονώνυμο, αν ο βαθμός ω προς ς x είναι 4 και ως προς x και ψ είναι 7.

β) ένα μονώνυμο έχει συντελεστή 5 και μεταβλητές α, β, γ να προσδιορίσετε το μονώνυμο αν ο βαθμός προς α είναι 2, ο βαθμός ως β είναι 3, ο βαθμός ως προς α, β και γ είναι 9.

Definiție de bază (monoame similare)

Monoamele care au aceeași parte principală se numesc similar.

exemple

monoamele $2x^2y^3$ și $-5x^2y^3$ sunt similare deoarece au aceeași parte principal.

monoamele $2xy^3\omega^2$, $3/2x\,y^3\omega^2$ sunt similare deoarece au aceeași parte principal.

Exerciţiu pentru a examina dacă următoarele monoame sunt similar:

a) $2x^2y^3$, $-5x^2y^3$, $7x^2y^3$

b) $8xy$, $-17xy$

c) $\frac{3}{2}x^5y^3\omega^2$, $x^5y^3\omega^2$

Definiție de bază (monoame similare)

Monoamele identice care au același coeficient se numesc monoame similare

Definiție de bază (monoame opuse)

Monoamele identice care au coeficienți opuși se numesc monoame opuse

exemple

A) monoamele $-5x^2y^3$, $5x^2y^3$ sunt monoame opuse

B) monomiile $8xy$, $-8xy$, sunt monomii opuse

Definiție de bază: numerele sunt considerate monomii și se numesc monomii constante

exemple

a) Monom constant 17

b) Monom constant -23

c) Monom constant 0

Observație de bază

Fiecare monom constant ($\neq 0$) are gradul zero

Definiție de bază:

Monomul constant 0 se numește monom zero și nu are grad

Exerciţiu

a) un monom are un coeficient de 12, iar variabilele x, ψ determină monomul, dacă gradul ω față de ς x este 4 și față de x și ψ este 7

b) un monom are un coeficient de 5, iar variabilele α, β, γ determină monomul dacă gradul față de α este 2, gradul față de β este 3, nota pentru a, b și c este 9

Πράξεις με μονώνυμα (πρόσθεση μονωνύμων)

βασικός κανόνας: το άθροισμα όμοιων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους

παρατήρηση δηλαδή για να προσθέσουμε όμοια μονώνυμα πρέπει να κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

παραδείγματα

A. $2x^3+5x^3 = 7x^3$ **C.** $9x^2y+5x^2y = 14x^2y$

B. $7x^2-2x^2 = 5x^2$ **D.** $8a^4+5a^4-2a^4 = 11a^4$

άσκηση εργασία

να βρείτε τα αθροίσματα ή να κάνετε τις προσθέσεις

A. $+4\chi+5\chi$ = ….

B. $10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2$ = …..

C. $-x^2-3x^2$ = ….

D. $-19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega$

E. $-2\chi^3-7\chi^3$ = ….

F. $2\chi^8- 3\chi^8$ = ….

πολλαπλασιασμός μονωνύμων(βασικός κανόνας)

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της

παρατήρηση για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμα πολλαπλασιάζουμε αριθμούς με αριθμούς και μεταβλητές με μεταβλητές δηλαδή γράμματα με γράμματα

παρατήρηση πρέπει να θυμάμαι ότι $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

παραδείγματα

A. $+4\chi^2\cdot3\chi^3 = +12\chi^5$ **C.** $-4\omega^2\cdot(-3\omega^4) = 12\omega^6$

B. $12x^3y\cdot(-3x^5\,y^2)= -36x^7\,y^3$

άσκηση εργασία

A. $x^3\cdot x^2$ = = ….

B. $-2x^3\cdot(-5x)$ = …

C. $x\cdot2x^2\cdot x^3\cdot0.5x^4$

D. $-3xy^2\cdot3x^2y\cdot\frac{1}{9}x^3y$

E. $\frac{1}{3}x^3cv^2\cdot(-3x^2c^3v)$ = ….

F. $\sqrt{3}\psi^4\cdot\sqrt{012}\psi^3$

Operații cu monoame (adunarea monoamelor)

regulă de bază: suma monoamelor similare este un monom similar cu acestea și are coeficientul suma coeficienților lor

observație, adică pentru a aduna monoamele similare trebuie să reducem termenii similari

exemple

A. $2x^3+5x^3 = 7x^3$ **C**. $9x^2y+5x^2y = 14x^2y$

B. $7x^2-2x^2 = 5x^2$ **D**. 8a4+5a4-2a4 = 11a4

sarcină exercițiu

găsiți sumele sau faceți adunările

A. +4χ+5χ = ….

B. $10\alpha\beta^2-7\alpha\beta^2$ = …..

C. $-x^2-3x^2$ = ….

D. $-19x^2y^3\omega+21x^2y^3\omega-x^2y^3\omega$

E. $-2\chi^3-7\chi^3$ = ….

F. 2χ8- 3χ8 = ….

Înmulțirea monoamelor (regulă de bază)

Produsul monoamelor este un monom care are un coeficient, produsul coeficienților lor, și o parte principală, produsul tuturor variabilelor lor, cu un exponent al fiecărei variabile, suma exponenților săi.

Observație: pentru a înmulți monoamele, înmulțim numere cu numere și variabile cu variabile, adică litere cu litere.

Observație: trebuie să-mi amintesc că $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa+\lambda}$

Exemple:

A. $+4\chi^2\bullet3\chi^3 = +12\chi5$ C. $-4\omega^2\bullet(-3\omega^4) = 12\omega^6$

B. $12x^3y\bullet(-3x^5\,y^2)= -36x^7\,y^3$

Exercițiu:

A. $x^3\cdot x^2$ = = ….

B. $-2x^3\cdot(-5x)$ = …

C. $x\cdot2x^2\cdot x^3\cdot0.5x^4$

D. $-3xy^2\cdot3x^2y\cdot\frac{1}{9}x^3y$

E. $\frac{1}{3}x^3cv^2\cdot(-3x^2c^3v)$ = ….

F. $\sqrt{3}\psi^4\cdot\sqrt{012}\psi^3$

Διαίρεση μονωνύμων(βασικός κανόνας)

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα διαιρούμε τους συντελεστές και τις μεταβλητές χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των δυνάμεων

$\alpha^{\kappa}:\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$

άσκηση παράδειγμα να γίνουν οι επόμενες διαιρέσεις

A. $+12\chi^3:(3\chi^2) = +4\chi$ **C.** $-4\omega^3:(-2\omega) = 2\omega^2$

B. $10\alpha^3:(-5\alpha^3) = -2$ **D.** $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

βασική παρατήρηση το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι απαραίτητα μονώνυμο, μπορεί να είναι άλλα σε κάποιες περιπτώσεις δεν είναι μονώνυμο

άσκηση εργασία να κάνετε τις πράξεις

I. $20\chi^3: 10\chi^2 = \ldots$
II. $-25\zeta^2: (-5\zeta) = \ldots$
III. $\frac{1}{3}x^2: (-\frac{1}{6}x) = \ldots$
IV. $0{,}5\alpha^3: 0{,}5\alpha^4 = \ldots$

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2,$ β) $12\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3 + 3\beta^3\alpha$

γ) $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3,$ δ) $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\left(2x^5y^2\right)\cdot\left(-3x^4y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{6}x^2y\omega^2\right),$ β) $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2\cdot(2xy\omega)^3$

γ) $5x^2y\cdot\left(-2xy^2\right)\cdot\left(\frac{1}{10}xy\right),$ δ) $-4\alpha^2\beta\cdot 3\alpha\beta^2\gamma^3\cdot\frac{1}{6}\alpha\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\left(\frac{1}{3}x^2y^4\right):\left(-\frac{1}{6}xy^2\right),$ β) $\left(-2x^4y^3\omega^2\right):\left(-3x^2y^3\omega\right),$ γ) $\left(-6x^5y^2\right)^2:\left(-12x^8y^3\right)$

Împărțirea monoamelor (regulă de bază)

Pentru a împărți două monoame, împărțim coeficienții și variabilele folosind proprietatea puterii

$\alpha^{\kappa}:\alpha^{\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$

exemplu de exercițiu pentru a face următoarele împărțiri

A. $+12\chi^3:(3\chi^2) = +4\chi$ **C.** $-4\omega^3:(-2\omega) = 2\omega^2$

B. $10\alpha^3:(-5\alpha^3) = -2$ **D.** $-20\gamma\beta^3 : (+5\gamma\beta^4) = -4\gamma\beta^{-1}$

observație de bază: cotientul a două monoame nu este neapărat un monom, poate fi altul, în unele cazuri nu este un monom

exercițiu temă: faceți operațiile

I. $20\chi^3: 10\chi^2 = \ldots$
II. $-25\zeta^2: (-5\zeta) = \ldots$
III. $\frac{1}{3}x^2: (-\frac{1}{6}x) = \ldots$
IV. $0{,}5\alpha^3: 0{,}5\alpha^4 = \ldots$

REPETAȚI MONONIMUL: faceți operațiile

1. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $-6x^3y^2 - 3x^3y^2 + x^3y^2,$ β) $12\alpha\beta^3 - 6\alpha\beta^3 + 3\beta^3\alpha$

γ) $\frac{4}{5}x^2y\omega^3 - x^2y\omega^3 + \frac{1}{10}x^2y\omega^3,$ δ) $3\sqrt{3}x^4y - 2\sqrt{3}yx^4 + 4\sqrt{3}x^4y$

2. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $\left(2x^5y^2\right)\cdot\left(-3x^4y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{6}x^2y\omega^2\right),$ β) $\frac{1}{4}x^3y^2\omega^2\cdot(2xy\omega)^3$

γ) $5x^2y\cdot\left(-2xy^2\right)\cdot\left(\frac{1}{10}xy\right),$ δ) $-4\alpha^2\beta\cdot 3\alpha\beta^2\gamma^3\cdot\frac{1}{6}\alpha\beta^2\gamma$

3. Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $\left(\frac{1}{3}x^2y^4\right):\left(-\frac{1}{6}xy^2\right),$ β) $\left(-2x^4y^3\omega^2\right):\left(-3x^2y^3\omega\right),$ γ) $\left(-6x^5y^2\right)^2:\left(-12x^8y^3\right)$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Βασικός ορισμός: το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια μονώνυμα είναι μία αλγεβρική παράσταση που ονομάζεται **πολυώνυμο.**

Παραδείγματα:

Α. $2x^3+6x$ **C.** $3xy+6x^3y+8xy^2$

Β. x^2+5x+6 **D**. $8x^3+7x^2-6x+5$

Βασική παρατήρηση: αν το πολυώνυμο έχει

- δύο όρους ονομάζεται διώνυμο
- τρεις όρους ονομάζεται τριώνυμο

βασικός ορισμός: κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο ονομάζεται όρος του πολυωνύμου.

Για παράδειγμα στο πολυώνυμο $8x^3+7x^2-6x+5$, οι όροι είναι τα μονώνυμα $8x^3$, $7x^2$, $-6x$, 5,

άσκηση εργασία: Να γράψετε τους όρους στα επόμενα πολυώνυμα:

α) $4x^2-35x+6$ **β**) $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ **γ)** $3xy+6x^3y+8xy^2$

Βασικός ορισμός: Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

Παραδείγματα

Α) το πολυώνυμο $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ είναι τρίτου βαθμούς προς x

Β) το πολυώνυμο $8x^4+4x^2-6x^3+5x^5$ είναι 5ου βαθμούς προς x

Βασικός ορισμός: Βαθμός ενός πολυωνύμου είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του (δηλαδή το μεγαλύτερο άθροισμα εκθετών στις μεταβλητές του)

παραδείγματα

Α) Το πολυώνυμο $6x^2y+2xy^3-4x^4y^2$ είναι

- $4^{ου}$ βαθμού ως προς x,
- $3^{ου}$ βαθμού προς y
- $6^{ου}$ βαθμού ως προς x και ψ.

Β) το πολυώνυμο $3x^5 y^2+7x^2y^6-4x^3y^3$ είναι

- $5^{ου}$ βαθμού ως προς x
- $6^{ου}$ βαθμού ως προς y
- $8^{ου}$ βαθμού ως προς x και y

POLIONIME

Definiție de bază: suma monoamelor care nu sunt monoamuri identice este o expresie algebrică numită polinom.

Exemple:

A. $2x^3+6x$ C. $3xy+6x^3y+8xy^2$

B. x^2+5x+6 D. $8x^3+7x^2-6x+5$

Observație de bază: dacă polinomul are

- doi termeni se numește binom
- trei termeni se numește trinom

Definiție de bază: fiecare monom conținut într-un polinom se numește termen al polinomului. De exemplu

în polinomul $8x^3+7x^2-6x+5$, termenii sunt monoamele $8x^3$, $7x^2$, $-6x$, 5,

Exercițiu pentru a casă: Scrieți termenii din următoarele polinoame:

α) $4x^2-35x+6$ **β**) $2x^3+6x^2-7x+\frac{3}{4}$ **γ)** $3xy+6x^3y+8xy^2$

Definiție de bază: Gradul unui polinom în raport cu una dintre variabilele sale este cel mai mare exponent al acelei variabile.

Exemple

A) polinomul $2x^3+6x^2-7x+3/4$ este de gradul al treilea în x

B) polinomul $8x4+4x^2-6x^3+5x5$ este de gradul al cincilea în x

Definiție de bază: Gradul unui polinom este cel mai mare dintre gradele termenilor săi (adică cea mai mare sumă de exponenți din variabilele sale)

exemple

A) Polinomul $6x^2y+2xy^3-4x4y^2$ este de

- gradul al 4-lea în x,
- gradul al 3-lea în y
- gradul al 6-lea în x și ψ.

B) polinomul $3x5\ y^2+7x^2y6-4x3y^3$ este de

- gradul al 5-lea în x
- gradul al 6-lea în y
- gradul al 8-lea în x și y

Άσκηση εργασία: στα επόμενα πολυώνυμα να βρείτε

1. $3xy+2x^3y+5xy^4$ **2.** $5x^2y+9xy+12x^6y^2$ **3.-** $\frac{3}{4}x^2y^3+2xy^3-4x^5y^2$

α) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς x
β) το βαθμό των πολυωνύμων ως προς y
γ) του βαθμό των πολυωνύμων ως προς x και y

Βασικός ορισμός: κάθε αριθμός ονομάζεται σταθερό πολυώνυμο.

Βασικός ορισμός: ο αριθμός μηδέν (0) λέγεται μηδενικό πολυώνυμο

Βασική παρατήρηση: όλα τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν (0).Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Βασική παρατήρηση: Όταν γράφουμε ένα πολυώνυμο κατά τέτοιον τρόπο ώστε ο βαθμός του προηγούμενου όρου να είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του επόμενου όρου τότε λέμε ότι έχουμε το πολυώνυμο κατά φθίνουσες δυνάμεις του x.

παραδείγματα

$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$ $B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$

Άσκηση εργασία: να γράψετε τα επόμενα πολυώνυμα κατά φθίνουσες δυνάμεις του x:

$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$ $B(x) = x^2+3x^5-14x^3-35x+6x^7$

$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+5x^6$

Βασικός ορισμός:

Αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο έναν αριθμό.

Άσκηση παράδειγμα:

Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

A. $P(x) =4x^2-5x+7$, για $x = 1$

Λύση

$P(1) = 4\cdot1^2-5\cdot1+7$ άρα $P(1) = 4-5+7$, $P(1) = 6$

B. $Q(x) =2x^2-4x+3$, για $x = -2$

Λύση

$Q(-2) = 2(-2)^2-4(-2)+3$ άρα $Q(-2) = 8+8+3$, $Q(-2) = 19$

άσκηση εργασία: να βρείτε την αριθμητική τιμή των πολυωνύμων

$A(x) = 3x+12$, για $x = 2$ $B(x) = x^2+3x-5$, για $x = 2$

$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+1$, για $x = -1$

Temă pentru acasă: în următoarele polinoame, găsiți

1. $3xy+2x^3y+5xy^4$ 2. $5x^2y+9xy+12x^6y^2$ 3. $-3/4x^2y^3+2xy^3-4x^6y^2$

a) gradul polinoamelor în raport cu x
b) gradul polinoamelor în raport cu y
c) gradul polinoamelor în raport cu x și y

Definiție de bază: fiecare număr se numește polinom constant.

Definiție de bază: numărul zero (0) se numește polinom zero

Observație de bază: toate polinoamele constante au gradul zero (0). Nu există un grad definit pentru polinomul zero.

Observație de bază: când scriem un polinom în așa fel încât gradul termenului precedent este mai mare decât gradul termenului următor, atunci spunem că avem polinomul în puteri descrescătoare ale lui x

exemple

$A(x) = x^3+5x^2-7x+12$ $B(x) = x^6+4x^4-14x^2-35x+6$

exerciţiu pentru acasă: scrieți următoarele polinoame în puteri descrescătoare ale lui x:

$A(x) = x^2+5x^3-7x+12$ $B(x) = x^2+3x^4-14x^3-35x+6x^7$

$\Gamma(x) = 8x^4+4x^2-6x^3+5x^6$

Definiție de bază: valoarea numerică a unui polinom este rezultatul care rezultă dacă înlocuim un număr în polinom.

Exemplu de exerciţiu:

Găsiți valoarea numerică a polinomului

1. **$P(x) = 4x^2-5x+7$, pentru $x = 1$**

Soluție

$P(1) = 4\bullet1^2-5\bullet1+7$ deci $P(1) = 4-5+7$, $P(1) = 6$

2. **$Q(x) = 2x^2-4x+3$, pentru $x = -2$**

Soluție

$Q(-2) = 2(-2)^2-4(-2)+3$ deci $Q(-2) = 8+8+3$, $Q(-2) = 19$

Exerciţiu: găsiți valoarea numerică a polinoamelor

$A(x) = 3x+12$, pentru $x = 2$ $B(x) = x^2+3x-5$, pentru $x = 2$

$\Gamma(x) = 8x^5+4x^2-6x^3+1$, pentru $x = -1$

Βασικός ορισμός: αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν μονώνυμα που είναι όμοια τότε τα αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο με το άθροισμά τους. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων

παραδείγματα να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στο επόμενο πολυώνυμο

A. $P(x) = x^3+2x+3x^2+5x+6x^2+8$ άρα $P(x) = x^3+9x^2+7x+8$

B. $Q(x) = 2x^3+2x^2+3x^3+5x^2+6-8x^3$ άρα $Q(x) = -3x^3+7x^2+6$

άσκηση εργασία: να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στα επόμενα πολυώνυμα

A. $P(x) = 2x^3+6x-4x^2+3x+2x^2-5$

B. $P(x) = 2x^3+2x^2+3x^3+5x^2+6-8x^3$

C. $R(x) = x^4+9x^2+7x^4+8x^2-x^3+4x^2+x^3$

D. $S(x) = -x^3+7x^2+6x^3-2x^2-4x+3x^2-3x^2+3$

Πράξεις με πολυώνυμα

α) Πρόσθεση πολυωνύμων: χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

Άσκηση παράδειγμα:

- Να προσθέσετε τα πολυώνυμα $P(x) =4x^2-5x+7$, $Q(x) =x^2+6x+3$

Λύση:

- $P(x)+Q(x) = (4x^2-5x+7)+(x^2+6x+3) = 4x^2-5x+7+x^2+6x+3= 5x^2+x+10$

- Να προσθέσετε τα πολυώνυμα $A(x) =4x^3+3\chi^2-5x+2$, $B(x) =-3x^3-x^2+6x-3$

Λύση:

$A(x) + B(x) =(4x^3+3\chi^2-5x+2)+(-3x^3-x^2+6x-3) = 4x^3+3x^2-5x+2-3x^3-x^2+6x-3= x^3+2x^2+x-1$

Άσκηση εργασία: να κάνετε τις προσθέσεις των επόμενων πολυώνυμων

I. $A(x) =4x^3+3\chi^2-5x+2$, $B(x) =-3x^3-x^2+6x-3$

II. $G(x) =2x^2-2x+6$ $E(x) = 2x^3+4\chi^2-3x-1$

III. $S(x) = x^3-\chi^2-2$ $H(x) = 5x^2-x+1$

β) Αφαίρεση πολυώνυμων: χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών

άσκηση παράδειγμα: να βρείτε τη διαφορά $A(x) – B(x)$ όταν $A(x) =4\chi^2-3x+2$, $B(x) =-5x^2+6x-3$

λύση

$A(x) - B(x) =(4\chi^2-3x+2)-(-5x^2+6x-3) = 4\chi^2-3x+2+5x^2-6x+3 = 9x^2-9x+5$

ασκήσεις σχολικού βιβλίου και να γίνουν οι πράξεις:

I. $(2\chi^3+3\chi^2-5\chi-5)+(4\chi^3-5\chi^2+7\chi+3)-(3\chi^3+4\chi^2-6\chi-4)+8\chi^2-5 =$

II. $(2\alpha^4-3\alpha^3+5\alpha^2-7)-(3\alpha^4+4\alpha^3-5\alpha^2+2)+(\alpha^4-3\alpha^2+5)-(2\alpha^3-3\alpha^2+6)=$

III. $2\omega^2-(2\omega^3+3\omega^2-4\omega-9)+(2\omega^3+4\omega^2-4\omega+3)-5\omega^2+3\omega=$

Definiție de bază: dacă într-un polinom există monoame identice, atunci le înlocuim în polinom cu suma lor. Acest proces se numește reducere a termenilor similari

exemple de reducere a termenilor similari la următorul polinom

A. $P(x) = x^3+2x+3x^2+5x+6x^2+8$ deci $P(x) = x^3+9x^2+7x+8$

B. $Q(x) = 2x^3+2x^2+3x^3+5x^2+6-8x^3$ deci $Q(x) = -3x^3+7x^2+6$

exercițiu pentru acasă: reducerea termenilor similari la următoarele polinoame

A. $P(x) = 2x^3+6x-4x^2+3x+2x^2-5$ C. $R(x) = x4+9x^2+7x4+8x^2-x^3+4x^2+x^3$

B. $P(x) = 2x^3+2x^2+3x^3+5x^2+6-8x^3$ D. $S(x) = -x^3+7x^2+6x^3-2x^2-4x+3x^2-3x^2+3$

Operații cu polinoame

a) Adunarea polinoamelor: folosim proprietățile numerelor reale

Exemplu de exercițiu:

1. Adunați polinoamele $P(x) =4x^2-5x+7$, $Q(x) =x^2+6x+3$

Soluție:

$P(x)+Q(x) = (4x^2-5x+7)+(x^2+6x+3) = 4x^2-5x+7+x^2+6x+3= 5x^2+x+10$

2. Adunați polinoamele $A(x) =4x^3+3\chi^2-5x+2$, $B(x) =-3x^3-x^2+6x-3$

Soluție:

$A(x) + B(x) =(4x^3+3\chi^2-5x+2)+(-3x^3-x^2+6x-3) = 4x^3+3x^2-5x+2-3x^3-x^2+6x-3= x^3+2x^2+x-1$

Exercițiu: efectuați adunările următoarelor polinoame

I. $A(x) =4x^3+3\chi^2-5x+2$, $B(x) =-3x^3-x^2+6x-3$

II. $G(x) =2x^2-2x+6$ $E(x) = 2x^3+4\chi^2-3x-1$

III. $S(x) = x^3-\chi^2-2$ $H(x) = 5x^2-x+1$

b) Scăderea polinoamelor: folosim proprietățile numerelor reale

exemplu de exercițiu: găsiți diferența $A(x) – B(x)$ când $A(x) =4\chi^2-3x+2$, $B(x) =-5x^2+6x-3$

soluție

$A(x) - B(x) =(4\chi^2-3x+2)-(-5x^2+6x-3) = 4\chi^2-3x+2+5x^2-6x+3 = 9x^2-9x+5$

exerciții din manual și efectuați operațiile:

I. $(2\chi^3+3\chi^2-5\chi-5)+(4\chi^3-5\chi^2+7\chi+3)-(3\chi^3+4\chi^2-6\chi-4)+8\chi^2-5 =$

II. $(2\alpha^4-3\alpha^3+5\alpha^2-7)-(3\alpha^4+4\alpha^3-5\alpha^2+2)+(\alpha^4-3\alpha^2+5)-(2\alpha^3-3\alpha^2+6)=$

III. $2\omega^2-(2\omega^3+3\omega^2-4\omega-9)+(2\omega^3+4\omega^2-4\omega+3)-5\omega^2+3\omega=$

γ)Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Βασικός κανόνας: Για να **πολλαπλασιάσουμε** ένα **μονώνυμο** με ένα **πολυώνυμο**, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Άσκηση παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

A. $2x\cdot(x^2-5x+7) =2x\cdot x^2-2x\cdot 5x+2x\cdot 7= 2x^3-10x^2+14x$

B. $-3x\cdot(x^3-6x+12)=-3x\cdot x^3+3x\cdot 6x-3x\cdot 12=-3x^4+12x^2-36x$

C. $5x^2\cdot(2x^2-6x+3) = 5x^2\cdot 2x^2-5x^2 6x+5x^2\cdot 3=10x^4-30x^3+15x^2$

'Ασκηση εργασία: Να κάνετε τις πράξεις:

A. $3x\cdot(4x^2-2x+3)$

B. $2x^3\cdot(x^2+3x-2)$

C. $-2x^4\cdot(4x^3-2x^2+6)$

D. $-3x^2\cdot(4x^3-5x^2+x-3)$

E. $4x\cdot(3x^2-6x+9)$

F. $-3x^3\cdot(2x^3-x^2+x+5)$

G. $4xy(3x^2+2xy^2-4x^2y)$

H. $5x^3y^2(x^2y^3+2x^3y^2-4x^2y)$

Βασικός κανόνας: Για να **πολλαπλασιάσουμε** ένα **πολυώνυμο με** ένα **πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του πρώτου πολυωνύμου με κάθε όρο του δεύτερου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Άσκηση παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις

A. $(3x^2+4)\cdot(2x-7) =$
$3x^2\cdot 2x-3x\cdot 7+4\cdot 2x-4\cdot 7 =$
$6x^3-21x+8x-28 =$
$6x^3-13x-28$

B. $(4x^2-5x+7)\cdot(x^2+6x+3) =$
$4x^2\cdot x^2+4x^2\cdot 6x+4x^2\cdot 3-5x\cdot x^2-5x\cdot 6x-5x\cdot 3+7x^2+7\cdot 6x+7\cdot 3=$
$4x^4+24x^3+12x^2-5x^3-30x^2-15x+7x^2+42x+21=$
$4x^4+19x^3-11x^2+27x+21$

Ασκηση Εργασία: Να κάνετε τις πράξεις:

1. $(x+3)(x-5) =$
2. $(x+7)(x-2) =$
3. $(3x+10)\,(x-4) =$
4. $(2-x)\,(-4x-3) =$
5. $(-5x^2+1)\,(4x+3) =$
6. $(2a+3b)(2a-3b) =$
7. $(5x-6y)(5x+6y) =$
8. $(10x-5y)(10x-5y) =$
9. $(2x-7y)(2x-7y) =$
10. $(3y+x)(x+3y) =$
11. $(5+3x)(5+3x) =$

Înmulțirea polinoamelor

Regula de bază: Pentru a înmulți un monom cu un polinom, înmulțim monomul cu fiecare termen al polinomului și adunăm produsele rezu

Exemplu de exercițiu: Efectuați operațiile:

A. $2x\cdot(x^2-5x+7) =2x\cdot x^2-2x\cdot 5x+2x\cdot 7= 2x^3-10x^2+14x$

B. $-3x\cdot(x^3-6x+12)=-3x\cdot x^3+3x\cdot 6x-3x\cdot 12=-3x^4+12x^2-36x$

C. $5x^2\cdot(2x^2-6x+3) = 5x^2\cdot 2x^2-5x^2 6x+5x^2\cdot 3=10x^4-30x^3+15x^2$

Exercițiu practic: Efectuați operațiile:

A. $3x\bullet(4x^2-2x+3)$

B. $2x^3\bullet(x^2+3x-2)$

C. $-2x4\bullet(4x^3-2x^2+6)$

D. $-3x^2\bullet(4x^3-5x^2+x-3)$

E. $4x\bullet(3x^2-6x+9)$

F. $-3x^3\bullet(2x^3-x^2+x+5)$

G. $4xy(3x^2+2xy^2-4x^2y)$

H. $5x^3y^2(x^2y^3+2x^3y^2-4x^2y)$

Regula de bază: Pentru a înmulți un polinom cu un polinom, înmulțim fiecare termen al primului polinom cu fiecare termen al celui de-al do polinom și adunăm produsele rezultate.

Exemplu de exercițiu: Efectuați operațiile

A. $(3x^2+4)\cdot(2x-7) =$
$3x^2\cdot 2x-3x\cdot 7+4\cdot 2x-4\cdot 7 =$
$6x^3-21x+8x-28 =$
$6x^3-13x-28$

B. $(4x^2-5x+7)\cdot(x^2+6x+3) =$
$4x^2\cdot x^2+4x^2\cdot 6x+4x^2\cdot 3-5x\cdot x^2-5x\cdot 6x-5x\cdot 3+7x^2+7\cdot 6x+7\cdot 3=$
$4x^4+24x^3+12x^2-5x^3-30x^2-15x+7x^2+42x+21=$
$4x^4+19x^3-11x^2+27x+21$

Exercițiu: Efectuați operațiile:

1. $(x+3)(x-5) =$
2. $(x+7)(x-2) =$
3. $(3x+10)\,(x-4) =$
4. $(2-x)\,(-4x-3) =$
5. $(-5x^2+1)\,(4x+3) =$
6. $(2a+3b)(2a-3b) =$
7. $(5x-6y)(5x+6y) =$
8. $(10x-5y)(10x-5y) =$
9. $(2x-7y)(2x-7y) =$
10. $(3y+x)(x+3y) =$
11. $(5+3x)(5+3x) =$

Βασική παρατήρηση: Ισότητα πολυωνύμων

Δύο πολυώνυμα A(x) και B(x) είναι ίσα όταν είναι του ίδιου βαθμού και οι συντελεστές των αντίστοιχων όρων είναι ίσοι.

Παράδειγμα:

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα, όπου $P(x) = 3x\cdot(-2x+4)\cdot(x-1)$, $Q(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Λύση:

$P(x) = 3x\cdot(-2x+4)\cdot(x-1) = (-3x\cdot 2x+3x\cdot 4)\cdot(x-1) = (-6x^2+12x)\cdot(x-1) =$
$-6x^2\cdot x+6x^2\cdot 1+12x\cdot x-12x\cdot 1= -6x^3+6x^2+12x^2-12x$,
Άρα $P(x) = -6x^3+18x^2-12x$.

Θέλω $P(x) = Q(x)$, δηλαδή: $-6x^3+18x^2-12x = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

Πρέπει: $\alpha = -6$, $\beta = 18$, $\gamma = -12$, $\delta = 0$

Άσκηση Εργασία:

Βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα:
$P(x) = 2\cdot(-4x+1)\cdot(x+3)$, $Q(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες:

Βασικός Ορισμός: Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει (δηλαδή ισχύει) για όλες τις τιμές των μεταβλητών.

Παραδείγματα:

Η ισότητα $\alpha^2\cdot\alpha = \alpha^3$ είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής α.
Η ισότητα $0\cdot x = 0$ είναι ταυτότητα γιατί ισχύει για όλες τις τιμές της μεταβλητής x.
Η ισότητα $x+y = 0$ δεν είναι ταυτότητα γιατί δεν ισχύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών x, y (γιατί πχ για $x = 5$ και $y = 3$ $x+y = 0$, $5+3 = 0$, $8=0$ δεν ισχύει)

1.Τετράγωνο αθροίσματος: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Απόδειξη:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Άσκηση παράδειγμα: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

I. $(x+3)^2 = x^2+2x\cdot 3+3^2 = x^2+6x+9$
II. $(y+5)^2 = y^2+2y\cdot 5+5^2 = y^2+10y+25$
III. $(\omega+4)^2 = \omega^2+2\omega\cdot 4+4^2 = \omega^2+8\omega+16$
IV. $(2x+3)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2 = 4x^2+12x+9$
V. $(3x+2y)^2 = (3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2 = 9x^2+12xy+4y^2$
VI. $(x+x^3)^2 = x^2+2x\cdot x^3+(x^3)^2 = x^2+2x^4+x^6$

Observație de bază: Egalitatea polinoamelor

Două polinoame A(x) și B(x) sunt egale dacă au același grad și coeficienții termenilor corespunzători sunt egali.

Exemplu:

Găsiți valorile lui α, β, γ, δ astfel încât polinoamele P(x) și Q(x) să fie egale, unde $P(x) = 3x\bullet(-2x+4)\bullet(x-1)$, $Q(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Soluție:

$P(x) = 3x\bullet(-2x+4)\bullet(x-1) = (-3x\bullet 2x+3x\bullet 4)\bullet(x-1) = (-6x^2+12x)\bullet(x-1) =$
$-6x^2\bullet x+6x^2\bullet 1+12x\bullet x-12x\bullet 1= -6x^3+6x^2+12x^2-12x$,
Deci $P(x) = -6x^3+18x^2-12x$. Vreau ca $P(x) = Q(x)$, adică: $-6x^3+18x^2-12x = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$
Trebuie să: $\alpha = -6$, $\beta = 18$, $\gamma = -12$, $\delta = 0$

Exercițiu:

Găsiți valorile lui α, β, γ, δ astfel încât polinoamele P(x) și Q(x) să fie egale:
$P(x) = 2\bullet(-4x+1)\bullet(x+3)$, $Q(x) = \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$.

Identități notabile:

Definiție de bază: O identitate este orice egalitate care conține variabile și este adevărată (adică validă) pentru toate valorile variabilelor.

Exemple:

- Egalitatea $\alpha^2\bullet\alpha = \alpha^3$ este o identitate deoarece este validă pentru toate valorile variabilei α.
- Egalitatea $0\bullet x = 0$ este o identitate deoarece este valabilă pentru toate valorile variabilei x.
- Egalitatea $x+y = 0$ nu este o identitate deoarece nu este valabilă pentru toate valorile variabilelor x, y (deoarece, de exemplu, pentru $x = 5$ și $y = 3$ $x+y = 0$, $5+3 = 0$, $8=0$ nu este valid)

1. Suma pătratică: $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Demonstrație:

$$(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\bullet(\alpha+\beta) = \alpha^2+\alpha\bullet\beta+\beta\bullet\alpha+\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

Exercițiu exemplu: Găsiți expansiunile:

I. $(x+3)^2 = x^2+2x\cdot 3+3^2 = x^2+6x+9$
II. $(y+5)^2 = y^2+2y\cdot 5+5^2 = y^2+10y+25$
III. $(\omega+4)^2 = \omega^2+2\omega\cdot 4+4^2 = \omega^2+8\omega+16$
IV. $(2x+3)^2 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2 = 4x^2+12x+9$
V. $(3x+2y)^2 = (3x)^2+2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2 = 9x^2+12xy+4y^2$
VI. $(x+x^3)^2 = x^2+2x\cdot x^3+(x^3)^2 = x^2+2x^4+x^6$

Άσκηση εργασία: να βρείτε τα αναπτύγματα

A. $(x+2)^2$ **E.** $(y+4)^2$

B. $(\omega+3)^2$ **F.** $(3x+1)^2$

C. $(2x+5y)^2$ **G.** $(x+\frac{1}{2})^2$

D. $(2+y^3)^2$ **H.** $(x^3+x^2)^2$

2.Τετράγωνο διαφοράς: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Απόδειξη:

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\cdot\beta-\beta\cdot\alpha+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Άσκηση παράδειγμα: Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

$(x-3)^2 = x^2-2x\cdot3+3^2 = x^2-6x+9$

$(y-6)^2 = y^2-2y\cdot6+6^2 = y^2-12y+36$

$(2y-3)^2 = (2y)^2-2\cdot2y\cdot3+3^2 = 4y^2-12y+9$

$(4x-3y)^2 = (4x)^2-2\cdot4x\cdot3y+(3y)^2 = 16x^2-24xy+9y^2$

$(x-\frac{1}{2})^2 = x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2 = x^2-x+\frac{1}{4}$

$(2x-x^3)^2 = (2x)^2-2\cdot2x\cdot x^3+(x^3)^2 = 4x^2-4x^4+x^6$

Άσκηση εργασία: Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

A. $(x-4)^2$ **E.** $(4-2x)^2$

B. $(x^2-2)^2$ **F.** $(6x-5)^2$

C. $(3x-4y)^2$ **G.** $(2x^2-7x)^2$

D. $(x^3-2x^2)^2$ **H.** $(\sqrt{x}-3)^2$

A. Κύβος αθροίσματος :$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Απόδειξη:

$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) =$
$\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta\cdot\beta+\beta^3=$
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

3Β. Κύβος διαφοράς : $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (χωρίς απόδειξη)

Exerciţiu: găsiţi expansiunile

A. $(x+2)^2$ **E.** $(y+4)^2$

B. $(\omega+3)^2$ **F.** $(3x+1)^2$

C. $(2x+5y)^2$ **G.** $(x+\frac{1}{2})^2$

D. $(2+y^3)^2$ **H.** $(x^3+x^2)^2$

2. Diferenţa pătrată: $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Dovada:

$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\bullet(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\bullet\beta-\beta\bullet\alpha+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Exemplu de exerciţiu: Găsiţi următoarele expansiuni:

$(x-3)^2 = x^2-2x\cdot3+3^2 = x^2-6x+9$

$(y-6)^2 = y^2-2y\cdot6+6^2 = y^2-12y+36$

$(2y-3)^2 = (2y)^2-2\cdot2y\cdot3+3^2 = 4y^2-12y+9$

$(4x-3y)^2 = (4x)^2-2\cdot4x\cdot3y+(3y)^2 = 16x^2-24xy+9y^2$

$(x-\frac{1}{2})^2 = x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2 = x^2-x+\frac{1}{4}$

$(2x-x^3)^2 = (2x)^2-2\cdot2x\cdot x^3+(x^3)^2 = 4x^2-4x^4+x^6$

Exerciţiu: Găsiţi următoarele expansiuni:

A. $(x-4)^2$ **E.** $(4-2x)^2$

B. $(x^2-2)^2$ **F.** $(6x-5)^2$

C. $(3x-4y)^2$ **G.** $(2x^2-7x)^2$

D. $(x^3-2x^2)^2$ **H.** $(\sqrt{x}-3)^2$

A. Cub al sumei :$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

Dovada:

$(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)\bullet(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2) =$
$\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta\bullet\beta+\beta^3=$
$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

3B. Cubul diferenţei: $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (fara dovada)

άσκηση παράδειγμα Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

I. $(x + 1)^3 = x^3+3x^2\cdot1+3x\cdot1^2+1^3 = x^3+3x^2+3x+1$

II. $(x – 2)^3 = = x^3-3x^2\cdot2+3x\cdot2^2-2^3 = x^3-6x^2+12x-8$

III. $(2x+1)^3 = =(2x)^3+3(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2+1^3 = x^3+12x^2+6x+1$

IV. $(2x-3y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2-(3y)^3 = 8x^3-36x^2+54x-8y^3$

άσκηση εργασία Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

A. $(x + 2)^3$ **C.** $(2x^2+3x)^3$

B. $(y – 1)^3$ **D.** $(2y-1)^3$

1. Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά: $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$

Απόδειξη:

$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\cdot\beta-\beta\cdot\alpha-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$

Άσκηση παράδειγμα: να βρείτε τα αναπτύγματα

I. $(x+3)\cdot(x-3) = x^2-3^2 =x^2-9$

II. $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2-2^2 = \omega^2-9$

III. $(\chi+4)(4-\chi) = (4+\chi)(4-\chi) = 4^2-\chi^2 = 16-\chi^2$

IV. $(\sqrt{x}-5)\ (\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2-5^2 = x-25$

V. $(x^2 -2)\ (x^2 +2) = (x^2)^2-4 = x^4-4$

VI. $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2-2^2 = 36\omega^2-4$

Άσκηση εργασία: Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(\chi + 3)(\chi -3)$	ii) $(\chi – 1)(\chi + 1)$
iii) $(2\chi - 5)(2\chi +5)$	iv) $(1 – 3\chi)(1 + 3\chi)$
v) $(2\chi + 5\psi)(2\chi – 5\psi)$	vi) $(3\kappa – 2\lambda)(3\kappa + 2\lambda)$
vii) $(\chi^2 + 1)(\chi^2 – 1)$	viii) $(\chi^3 – 2)(\chi^3 + 2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5}+\frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5}-\frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi+\frac{3}{4}\psi\right)$

exemplu de exercițiu Găsiți următoarele expansiuni:

I. $(x + 1)^3 = x^3+3x^2\cdot1+3x\cdot1^2+1^3 = x^3+3x^2+3x+1$

II. $(x – 2)^3 = = x^3-3x^2\cdot2+3x\cdot2^2-2^3 = x^3-6x^2+12x-8$

III. $(2x+1)^3 = =(2x)^3+3(2x)^2\cdot1+3\cdot2x\cdot1^2+1^3 = x^3+12x^2+6x+1$

IV. $(2x-3y)^3 = (2x)^3-3(2x)^2\cdot3y+3\cdot2x\cdot(3y)^2-(3y)^3 = 8x^3-36x^2+54x$

exercițiu temă Găsiți următoarele expansiuni:

A. $(x + 2)^3$ **C.** $(2x^2+3x)^3$

B. $(y – 1)^3$ **D.** $(2y-1)^3$

3. Produsul diferenței de sumă în timp: $(\alpha+\beta)\bullet(\alpha-\beta) = \alpha^2$

Dovada:

$(\alpha+\beta)\bullet(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\bullet\beta-\beta\bullet\alpha-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$

Exemplu de exercițiu: găsiți expansiunile

I. $(x+3)\cdot(x-3) = x^2-3^2 =x^2-9$

II. $(\omega+2)(\omega-2) = \omega^2-2^2 = \omega^2-9$

III. $(\chi+4)(4-\chi) = (4+\chi)(4-\chi) = 4^2-\chi^2 = 16-\chi^2$

IV. $(\sqrt{x}-5)\ (\sqrt{x}+5) = (\sqrt{x})^2-5^2 = x-25$

V. $(x^2 -2)\ (x^2 +2) = (x^2)^2-4 = x^4-4$

VI. $(6\omega+2)(6\omega-2) = (6\omega)^2-2^2 = 36\omega^2-4$

Exercițiu: Găsiți expansiunil

i) $(\chi + 3)(\chi -3)$	ii) $(\chi – 1)(\chi + 1)$
iii) $(2\chi - 5)(2\chi +5)$	iv) $(1 – 3\chi)(1 + 3\chi)$
v) $(2\chi + 5\psi)(2\chi – 5\psi)$	vi) $(3\kappa – 2\lambda)(3\kappa + 2\lambda)$
vii) $(\chi^2 + 1)(\chi^2 – 1)$	viii) $(\chi^3 – 2)(\chi^3 + 2)$
ix) $\left(\frac{x^5}{5}+\frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5}-\frac{\psi^3}{3}\right)$	x) $\left(\frac{2}{3}\chi-\frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi+\frac{3}{4}\psi\right)$

REVIZUIREA IDENTITĂȚILOR

:1. Găsiți expansiunile

α) $(x + 5)^2$ =

β) $(3α - β)^2$ =

γ) $(5x + 4)(5x - 4)$ =

δ) $(ψ + 2)^3$ =

ε) $(2x - 3)^3$ =

η) $(3α^2 - β^3)(β^3 + 3α^2)$ =

1. Completați spațiile libere astfel încât identitățile să fie valide.

α. (..... + ...) ^{2} = $9x^2 + 12x$ + ...

β. (..... – .....) ^{2} = $25x^2$ – ..... + $4y^2$

γ. (..... + ...) ^{2} = $x^2 + 3x$ + ...

δ. (..... –) ^{2} = $16x^4 – 4x$ + ...

ε. (2β – .....) ^{2} = ... – ..... + $36γ^2$

στ. (+ .....) ^{2} = ... – ..... + $9x^2y^4$

ζ. (5 + ...)(5 – .....) = ... – $16x^2$

η. (2α + ...) ^{3} = ... + 3... + 3... + 27

θ. x^2 + ... + $16y^2$ = (..... + ...) 2

ι. ..... + 6αβ + $β^2$ = (..... + ...) ^{2}

ια. ..... – 12xy + $9y^2$ = (..... – .....) ^{2}

ιβ. $α^2x^4$ + ... + ... = (..... + βy) ^{2}

ιγ. $x^{2ν} + y^{2ν}$ + ... = (..... + ...)

1. Ar trebui întreprinse următoarele acțiuni:

α. $(1 – α)(1 + α) + α^2$

β. $(x^2 – 1)^2 – 1$

γ. $(4α – 3β)^2 – 16α^2 – 9β^2 + 24αβ$

δ. $2(x – 5)(x + 5) – (3 – x)^2$

ε. $2(κ + 4)^2 – 3(κ + 2)(κ – 2)$

στ. $2(2 – β)^2 – 3(β – 2)^2$

ζ. $– 9α\,2 + (3α + 4β)^2 – 24αβ$

η. $(4x + 5y)^2 + (x + 9y)(x – 9y)$

ια. $2x^3 – (x^2 + 1)(x – 2) + (x – 1)^3$

ιβ. $(x + 2)^2 – 2(x – 1)^2 – 4(x + 1)^2 + 5x^2$

ιγ. $(α – 2β)^2 – 3(α – 3β)^2 – (2α + 3β)(2α – 3β)$

Παραγοντοποίησηαλγεβρικώνπαραστάσεων

Βασικός ορισμός: Η διαδικασία με την οποία μία αλγεβρική παράσταση μετατρέπεται από άθροισμα ή διαφορά σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται παραγοντοποίηση

Παραδείγματα:

a. 3x+3y = 3(x+y)

b. 5α-5β = 5(α-β)

Βασικοί τρόποι παραγοντοποίησης:

1ος τρόπος: κοινός παράγοντας

Για να παραγοντοποιήσουμε μία αλγεβρική παράσταση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κοινού παράγοντα λαμβάνουμε υπόψη τους κανόνες:

1ος κανόνας: Από τους συντελεστές (αριθμούς) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των όρων (δηλαδή των αριθμών).

2ος κανόνας: Από τις μεταβλητές (γράμματα) των όρων της παράστασης βγάζουμε κοινό παράγοντα μόνο την κοινή (ίδια) μεταβλητή (γράμμα) στο μικρότερο εκθέτη.

Παραδείγματα:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

a. $4x^2+6x^3 = 2x^2 (2+3x)$

b. $4x^2y+8x = 4x(xy+2)$

Ασκήσεις:

Σχολικού βιβλίου και…

1. $kx-2x$ $kx+2x$ $-kx+2x$ $-kx-2x$ $2x+8xy$ $5xy-10y$ $3x-3$ x^4+x^3 x^3-x^2+x

2. $5x^2-10x+5xy$ $2x^2+4y+10$ $x^2y+x^2y^2-xy^2$ $\kappa(x+y)+\lambda(x+y)$ $\kappa(x+y)-\lambda(x+y)$

3. $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$ $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$ $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

2ος τρόπος (κοινός παράγοντας κατά ομάδες-ομαδοποίηση)

Παραδείγματα

a) αχ+αψ+2χ+2ψ = α(χ+ψ)+2(χ+ψ) = (χ+ψ)(α+2)

β) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

c) αβ - 3α - 3β + 9 = α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)

Factorizarea expresiilor algebrice

Definiție de bază: Procesul prin care o expresie algebrică se transformă dintr-o sumă sau diferență într-un produs de factori se numește factorizare

Exemple:

a. 3x + 3y = 3(x + y)

b. 5α - 5β = 5(α - β)

Moduri de factorizare de bază:

Prima metodă: factorul comun

Pentru a factoriza o expresie algebrică folosind metoda factorului comun, ținem cont de următoarele reguli:

Regula 1: Din coeficienții (numerele) termenilor expresiei, scoatem ca factor comun cel mai mare divizor comun al termenilor (adică al numerelor).

Regula 2: Din variabilele (literele) termenilor expresiei scoatem ca factor comun doar variabila comună (literă) cu cel mai mic exponent.

Exemple:

Să factorizați expresiile:

a. $4x^2+6x^3 = 2x^2 (2+3x)$

b. $4x^2y+8x = 4x(xy+2)$

Exerciții:

Din manual și…

1. $kx-2x$ $kx+2x$ $-kx+2x$ $-kx-2x$ $2x+8xy$ $5xy-10y$ $3x-3$ x^4+x^3 x^3-x^2+x

2. $5x^2-10x+5xy$ $2x^2+4y+10$ $x^2y+x^2y^2-xy^2$ $\kappa(x+y)+\lambda(x+y)$ $\kappa(x+y)-\lambda(x+y)$

3. $(\alpha-1)(x-y)-\alpha^3(x-y)$ $(\alpha+1)(x-y)+2\alpha^2(-x+y)$ $(\alpha-3)(x-y)-2\alpha^2(-x+y)$

A doua metodă (factor comun pe grupuri - grupare)

Exemple

a) αχ+αψ+2χ+2ψ = α(χ+ψ)+2(χ+ψ) = (χ+ψ)(α+2)

β) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

c) αβ - 3α - 3β + 9 = α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)

Άσκηση- εργασία:
Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες αλγεβρικές παραστάσεις:

1) $14x+14y+kx+ky$ $xy+3yz+5x+15z$ $\alpha x-\beta y-\beta x+\alpha y$ $10x+x^2-120y-12xy$

2) $3x^2-3y^2-9xy+xy$ $1+x^2+xy+x^3y$ $15x^2y-20x^2z-18y\omega^3+24z\omega^3$

3) $8xy^3-24y^3-7axy+21a$ $\beta^3-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta+6\alpha^2$ $|\alpha+\beta|^2-\alpha\gamma-\beta\gamma$ $\beta^3-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta+6\alpha^2$

Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων με διαφορά τετραγώνων
Ισχύει:
$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ ή **$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$**

Άσκηση-παράδειγμα:
Να παραγοντοποιήστε τις επόμενες παραστάσεις:

a) $X^2-4^2=(X-4)(X+4)$

b) $\omega^2-7^2=(\omega-7)(\omega+7)$

c) $X^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=(X-\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2})$

d) $X^2-36=X^2-6^2=(X-6)(X+6)$

e) $\omega^2-100=\omega^2-10^2=(\omega-10)(\omega+10)$

f) $9\chi^2-25=(3\chi)^2-5^2=(3\chi-5)(3\chi+5)$

Άσκηση επανάληψης:
Να παραγοντοποιήστε τις παραστάσεις

$\alpha^2-\gamma^2$ x^2-1 x^2-4 x^2-9 x^2-64 $1-4x^2$ $4x^2-9y^2$ $\alpha^2\beta^2-9$ $81\alpha^2-49\beta^2$

$16\alpha^2-x^2y^2\omega^2$ $(x-2y)^2-4y^2$ x^4-y^4 $16-x^4$ x^6-y^6 $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$

Exerciţiu - temă:
Să factorizaţi următoarele expresii algebrice:

1) $14x+14y+kx+ky$ $xy+3yz+5x+15z$ $\alpha x-\beta y-\beta x+\alpha y$ $10x+x^2-120y-12xy$

2) $3x^2-3y^2-9xy+xy$ $1+x^2+xy+x^3y$ $15x^2y-20x^2z-18y\omega^3+24z\omega^3$

3) $8xy^3-24y^3-7axy+21a$ $\beta^3-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta+6\alpha^2$ $|\alpha+\beta|^2-\alpha\gamma-\beta\gamma$ $\beta^3-3\alpha\beta^2-2\alpha\beta+6\alpha^2$

Factorizarea expresiilor algebrice prin diferenţa pătratelor
Se aplică:
$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ *sau* **$\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$**

Exerciţiu-exemplu:
Factorizaţi următoarele expresii::

a) $X^2-4^2=(X-4)(X+4)$

b) $\omega^2-7^2=(\omega-7)(\omega+7)$

c) $X^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=(X-\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2})$

d) $X^2-36=X^2-6^2=(X-6)(X+6)$

e) $\omega-100=\omega^2-10^2=(\omega-10)(\omega+10)$

f) $9\chi^2-25=(3\chi)^2-5^2=(3\chi-5)(3\chi+5)$

Exerciţiu de recapitulare:
Să factorizaţi expresiile

$\alpha^2-\gamma^2$ x^2-1 x^2-4 x^2-9 x^2-64 $1-4x^2$ $4x^2-9y^2$ $\alpha^2\beta^2-9$ $81\alpha^2-49\beta^2$

$16\alpha^2-x^2y^2\omega^2$ $(x-2y)^2-4y^2$ x^4-y^4 $16-x^4$ x^6-y^6 $3\alpha^3\beta-27\alpha\beta^3$

Ανάπτυγμα τετραγώνου

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$

Άσκηση – Παράδειγμα:

a) $\chi^2-2\chi+1 = \chi^2-2\cdot\chi\cdot1+1^2 = (\chi-1)^2$

b) $y^2+4y+4 = y^2+2\cdot y\cdot2+2^2 = (y+2)^2$

c) $4y^2-12y+9 = (2y)^2-2\cdot2y\cdot3+3^2 = (2y-3)^2$

d) $9\alpha^2-24\alpha\beta+16\beta^2 = (3\alpha)^2-2\cdot3\alpha\cdot4\beta+(4\beta)^2 = (3\alpha-4\beta)^2$

Άσκηση εργασία:

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α. x^2+2x+1 **β.** x^2-4x-4

γ. $-4x^2-4x-1$ **δ.** $\kappa^2-2\kappa\lambda+\lambda^2$

ε. $4\alpha^2+12\alpha+9$ **στ.** $25\alpha^2-20\alpha\beta+4\beta^2$

ζ. $16x^2+40xy+25y^2$ **η.** $-25x^2+40xy-16y^2$

θ. $49\alpha^2-14\alpha\beta+\beta^2$ **ι.** $25\kappa^2-60\kappa\lambda+36\lambda^2$

2. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις :

α. $81\chi^4-36\chi^2+4$ **β.** $81x^4-36x^2+4$

γ. $x^4-4x^2y^2+4y^4$ **δ.** $x^4-2x^2y^3+y^6$

ε. x^6-2x^3+1 **στ.** $100x^4y^6-40x^2\psi^3$

ζ. $x^2+x+\frac{1}{4}$ **η.** $25x^2y^2-20xy+4$

ι. $\frac{\alpha^2}{16}+\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\beta^2}{4}$ **ια.** $\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{9}$

Dezvoltarea unui pătratul

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ și $\alpha2-2\alpha\beta+\beta2 = (\alpha-\beta)^2$

Exercițiu – Exemplu:

a) $\chi^2-2\chi+1 = \chi^2-2\cdot\chi\cdot1+1^2 = (\chi-1)^2$

b) $y^2+4y+4 = y^2+2\cdot y\cdot2+2^2 = (y+2)^2$

c) $4y^2-12y+9 = (2y)^2-2\cdot2y\cdot3+3^2 = (2y-3)^2$

d) $9\alpha^2-24\alpha\beta+16\beta^2 = (3\alpha)^2-2\cdot3\alpha\cdot4\beta+(4\beta)^2 = (3\alpha-4\beta)^2$

Exercițiu de lucru:

1. Factorizați expresiile:

α. x^2+2x+1 **β.** x^2-4x-4

γ. $-4x^2-4x-1$ **δ.** $\kappa^2-2\kappa\lambda+\lambda^2$

ε. $4\alpha^2+12\alpha+9$ **στ.** $25\alpha^2-20\alpha\beta+4\beta^2$

ζ. $16x^2+40xy+25y^2$ **η.** $-25x^2+40xy-16y^2$

θ. $49\alpha^2-14\alpha\beta+\beta^2$ **ι.** $25\kappa^2-60\kappa\lambda+36\lambda^2$

2. Să se transforme expresiile în produse de factori:

1. $81\chi^4-36\chi^2+4$ **β.** $81x^4-36x^2+4$

2. **γ.** $x^4-4x^2y^2+4y^4$ **δ.** $x^4-2x^2y^3+y^6$

3. **ε.** x^6-2x^3+1 **στ.** $100x^4y^6-40x^2\psi^3$

4. **ζ.** $x^2+x+\frac{1}{4}$ **η.** $25x^2y^2-20xy+4$

5. **ι.** $\frac{\alpha^2}{16}+\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\beta^2}{4}$ **ια.** $\alpha^2-\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{9}$

Σημαντικές Παρατηρήσεις

Α. Η παραγοντοποίηση συνεχίζεται πάντα μέχρι να φτάσουμε σε «*γινόμενοπρώτων παραγόντων*».

Άσκηση-Παράδειγμα:

1. $\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2-\gamma^2) = \alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$
2. $6\chi-^2 24 = 6(\chi^2-4) = 6(\chi-2)(\chi+2)$
3. $2\chi^2-8\chi+8 = 2(\chi^2-4\chi+4) = 2(\chi-2)^2$
4. $\chi^5-\chi = \chi(\chi^4-1) = \chi(\chi^2-1)(\chi^2+1) = \chi(\chi-1)(\chi+1)(\chi^2+1)$

Άσκηση – Εργασία:

α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ **β.** $6x^2 - 24$

γ. $15x^2 - 15$ **δ.** $x^4 - 64x^2y^2$

ε. $\kappa^5 - \kappa$ **στ.** $16\alpha^5 - \alpha$

ζ. $x^7 - x^3$ **η.** $6x^2 - 96$

Β. Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και με **άλλους τρόπους**, όπως

- **η διάσπαση:**

1. $2\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2 = 2\alpha^2+2\alpha\beta+3\alpha\beta+3\beta^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)+3\beta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(2\alpha+3\beta)$
2. $\chi^4+\chi^2+1 = \chi^4+2\chi^2+1-\chi^2 = (\chi^2+1)^2-\chi^2 = (\chi^2+1-\chi)(\chi^2+1+\chi)$

- Οι **ομάδες** της ομαδοποίησης μπορεί να **περιέχουν 3-1 προσθετέους**:

$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2-2x+1)-y^2 = (\chi-1)^2-y^2 = (x-1-y)(x-1+y)$

Ασκήσεις:

1. $x^2+2x+1-a^2 =$
2. $x^2-2ax+a^2-16 =$
3. $1-x^2+2ax-a^2 =$
4. $9a^2-4x^2-4x-1 =$
5. $25x^4+10x^2+1-9x^6 =$
6. $x^2+\frac{1}{x^2}+1 =$

Observații importante

A. Factorizarea continuă întotdeauna până când ajungem la „produsul factorilor primi”

Exerciții-Exemplu:

1. $\alpha\beta^2-\alpha\gamma^2 = \alpha(\beta^2-\gamma^2) = \alpha(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)$
2. $6\chi-^2 24 = 6(\chi^2-4) = 6(\chi-2)(\chi+2)$
3. $2\chi^2-8\chi+8 = 2(\chi^2-4\chi+4) = 2(\chi-2)^2$
4. $\chi^5-\chi = \chi(\chi^4-1) = \chi(\chi^2-1)(\chi^2+1) = \chi(\chi-1)(\chi+1)(\chi^2+1)$

Exercițiu – Temă:

α. $\kappa\beta^2 - \kappa\gamma^2$ **β.** $6x^2 - 24$

γ. $15x^2 - 15$ **δ.** $x^4 - 64x^2y^2$

ε. $\kappa^5 - \kappa$ **στ.** $16\alpha^5 - \alpha$

ζ. $x^7 - x^3$ **η.** $6x^2 - 96$

B. Factorizarea poate fi realizată și prin **alte metode**, cum ar fi

- **Descompunerea:**

1. $2\alpha^2+5\alpha\beta+3\beta^2 = 2\alpha^2+2\alpha\beta+3\alpha\beta+3\beta^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)+3\beta(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(2\alpha+3\beta)$
2. $\chi^4+\chi^2+1 = \chi^4+2\chi^2+1-\chi^2 = (\chi^2+1)^2-\chi^2 = (\chi^2+1-\chi)(\chi^2+1+\chi)$

- **Grupurile** din grupare pot **conține 3-1 termeni:**

$x^2 - 2x - y^2 + 1 = (x^2-2x+1)-y^2 = (\chi-1)^2-y^2 = (x-1-y)(x-1+y)$

Exercițiu:

1. $x^2+2x+1-a^2 =$
2. $x^2-2ax+a^2-16 =$
3. $1-x^2+2ax-a^2 =$
4. $9a^2-4x^2-4x-1 =$
5. $25x^4+10x^2+1-9x^6 =$
6. $x^2+\frac{1}{x^2}+1 =$

Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και μέγιστος κοινός διαιρέτης ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

1ος κανόνας: Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών και μη κοινό παραγόντων τους με εκθέτη καθενός στο μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

2ος κανόνας: Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ή περισσότερο αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός τον μικρότερο από τους εκθέτες του.

Παραδείγματα:

1. **ΕΚΠ($12x^3y^2\omega$, $18x^2y\omega^3$, $24xy\omega^2$) = $72x^3y^2\omega^3$**

γιατί

12	18	24	2	ΕΚΠ(12,18,24) = $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^2 = 8\cdot9 = 72$
6	9	12	2	
3	9	6	2	
3	9	3	3	
1	3	1	3	
1	1	1		

ΜΚΔ($12x^3y^2\omega$, $18x^2y\omega^3$, $24xy\omega^2$) = $6xy\omega$

γιατί

12	2	18	2	24	2	ΜΚΔ(12,18,24) = $2\cdot3 = 6$
6	2	9	3	12	2	
3	3	3	3	6	2	
1		1		3	3	
				1		

2. **Να βρείτε το ΕΚΠ που και τον ΜΚΔ των παραστάσεων $6(x^2-y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$**

Λύση:

$6(x^2-y^2) = 2\cdot3(x-y)\cdot(x+y)$

$4(x-y)^2 = 2^2\cdot(x-y)^2$

$12(x-y)^3 = 2^2\cdot3\cdot(x-y)^3$

Οπότε ΕΚΠ = $12\cdot(x-y)^3\cdot(x+y)$ καιΜΚΔ =$2(x-y)$

Ασκήσεις:Βιβλίου

Cel mai mic multiplu comun și cel mai mare divizor comun al expresiilor algebrice întregi

Regula 1: Cel mai mic multiplu comun al două sau mai multe expresii algebrice, care au fost dezvoltate în factori, se numește produsul factorilor comuni și necomuni, luând pentru fiecare exponentul cel mai mare dintre exponenți.

Regula 2: Cel mai mare divizor comun al două sau mai multe expresii algebrice, care au fost dezvoltate în factori, se numește produsul factorilor comuni, luând pentru fiecare exponentul cel mai mic dintre exponenți.

Exemple:

1.ΕΚΠ($12x^3y^2\omega$, $18x^2y\omega^3$, $24xy\omega^2$) = $72x^3y^2\omega^3$

pentru că

12	18	24	2	ΕΚΠ(12,18,24) = $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 = 2^3\cdot3^2 = 8\cdot9 = 72$
6	9	12	2	
3	9	6	2	
3	9	3	3	
1	3	1	3	
1	1	1		

ΜΚΔ($12x^3y^2\omega$, $18x^2y\omega^3$, $24xy\omega^2$) = $6xy\omega$

pentru că

12	2	18	2	24	2	ΜΚΔ(12,18,24) = $2\cdot3 = 6$
6	2	9	3	12	2	
3	3	3	3	6	2	
1		1		3	3	
				1		

2. Găsiți ΕΚΠ și ΜΚΔ-ul expresiilor : $6(x^2-y^2)$, $4(x-y)^2$, $12(x-y)^3$

Soluție:

$6(x^2-y^2) = 2\cdot3(x-y)\cdot(x+y)$

$4(x-y)^2 = 2^2\cdot(x-y)^2$

$12(x-y)^3 = 2^2\cdot3\cdot(x-y)^3$

ΕΚΠ = $12\cdot(x-y)^3\cdot(x+y)$ ΜΚΔ =$2(x-y)$

Exerciții: Carte

Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

Βασικός ορισμός: Μία αλγεβρική παράσταση στην οποία και ο αριθμητής και ο παρανομαστής είναι πολυώνυμα ονομάζεται **ρητή αλγεβρική παράσταση.**

Υπενθύμιση:

μονώνυμα: $3x^2y$, $-\frac{1}{2}x^4$

πολυώνυμα: $x^2 + 2x + 1$

$-3x+5$

$7x^5+6x^2-4x + 3$

Παραδείγματα ρητών αλγεβρικών παραστάσεων

$$\frac{x^2+1}{x+2}\ ,\ \frac{3}{x-5}\ ,\ \frac{\alpha^2}{\alpha}$$

Βασικές υπενθυμίσεις-παρατηρήσεις:

- Το κλάσμα $\frac{5}{0}$ δεν ορίζεται γιατί η διαίρεση 5:0 δεν γίνεται
- Μία ρητή αλγεβρική παράσταση ορίζεται όταν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν(0)
- Ο συμβολισμός α≠β σημαίνει ότι ο αριθμός α δεν είναι ίσος με τον αριθμό β.

Παραδείγματα :

Για ποιες τιμές του x ορίζονται τα κλάσματα:

a) $\frac{1}{x}$ πρέπει x≠0

b) $\frac{2\chi}{\chi-4}$ πρέπει χ-4≠0 οπότε χ≠4

c) $\frac{2x+5}{3x-6}$ πρέπει 3x-6≠0 3x≠6 οπότε x≠2

Expresii algebrice raționale

Definiție de bază: O expresie algebrică în care atât numărătorul, cât și numitorul sunt polinoame se numește **expresie algebrică rațională.**

Reamintire:

monom: $3x^2y$, $-\frac{1}{2}x^4$

polinoame: $x^2 + 2x + 1$

$-3x+5$

$7x^5+6x^2-4x + 3$

Exemple de expresii algebrice raționale

$$\frac{x^2+1}{x+2}\ ,\ \frac{3}{x-5}\ ,\ \frac{\alpha^2-}{\alpha+}$$

Reamintiri-observații de bază:

→ Fracția $\frac{5}{0}$ nu este definită deoarece împărțirea 5:0 nu se poate sa safaca

→ O expresie algebrică rațională este definită când numitorul nu este zero

→ Simbolul a≠b înseamnă că numărul a nu este egal cu numărul b.

Exemple:

Pentru ce valori ale lui x sunt definite fracțiile:

α) $\frac{1}{x}$ trebuiecax≠0

b) $\frac{2\lambda}{\chi-}$ trebuiecax-4≠0, decix≠4

c) $\frac{2x+}{3x-}$ trebuieca 3x-6≠0, 3x≠6, decix≠2

Απλοποίηση ρητών αλγεβρικών παραστάσεων:

Για να απλοποιήσουμε μία ρητή αλγεβρική παράσταση κάνουμε τα εξής:
1ο βήμα: παραγοντοποιούμε και τους δύο όρους αριθμητή και παρονομαστή της αλγεβρικής παράστασης.
2ο βήμα: διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες που εμφανίζονται σε αριθμητή και παρανομαστή. $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$

Άσκηση- παράδειγμα:
Να απλοποιήστε τις επόμενες ρητές αλγεβρικές παραστάσεις:

a) $\frac{2a^2x^3}{6a^3x^2}=\frac{2\cdot aaxxx}{2\cdot 3\cdot aaaxx}=\frac{x}{3a}$

b) $\frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3}=\frac{36\cdot y\omega}{25}$

c) $\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x(x+1)}{x+2}$

d) $\frac{2x-10}{x^2-25}=\frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{2}{x+5}$

Άσκηση-εργασία: Ασκήσεις βιβλίου και….
Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρανομαστές να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6\alpha}{8\alpha}$ β) $\frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3}$ γ) $\frac{\chi-1}{1-\chi}$ δ) $\frac{2\chi-4}{\chi^2-2\chi}$

ε) $\frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6}$ στ) $\frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4}$ ζ) $\frac{(2\chi+3)^2-2(2\chi+3)+1}{(2\chi+3)^2-1}$

Simplificarea expresiilor algebrice raționale

Pentru a simplifica o expresie algebrică rațio
Pasul 1: factorizăm ambii termeni, atât num
expresiei algebrice.
Pasul 2: ștergem factorii comuni care apar în

$\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha\cdot\gamma}=\frac{\beta}{\gamma}$

Exercițiu - exemplu:
Simplificați următoarele expresii algebrice r

a) $\frac{2a^2x^3}{6a^3x^2}=\frac{2\cdot aaxxx}{2\cdot 3\cdot aaaxx}=\frac{x}{3a}$

b) $\frac{72y^4x^3\omega}{50y^3x^3}=\frac{36\cdot y\omega}{25}$

c) $\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{x(x+1)}{x+2}$

d) $\frac{2x-10}{x^2-25}=\frac{2(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{2}{x+5}$

Exercițiu-sarcină:Exerciții din carte și….
Găsiți valorile variabilelor pentru care sunt
simplifica expresiile.

α) $\frac{6\alpha}{8\alpha}$ β) $\frac{4\chi^2\psi\omega}{6\chi\psi^3}$ γ) $\frac{\chi-}{1-}$

ε) $\frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-5\chi+6}$ στ) $\frac{3\chi^2-2\chi}{9\chi^2-4}$ ζ

Πράξεις ρητών παραστάσεων

Α) Πολλαπλασιασμός ρητών παραστάσεων

1ος κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον ακέραιο αριθμό με τον αριθμητή του κλάσματος και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο δηλαδή:

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{}$$

Παραδείγματα:

a) $3 \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$

b) $\frac{4x^3}{x^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12}{x^5+}$

2ος βασικός κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε μία ακέραιη αλγεβρική παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή, δηλαδή:

$$\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\gamma}{\delta} =$$

Παράδειγμα:

$$3x \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{1}{}$$

3ος βασικός κανόνας: για να πολλαπλασιάσουμε μία ρητή παράσταση με μία ρητή παράσταση πολλαπλασιάζουμε αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρανομαστή, δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$

Παραδείγματα

Α) $\frac{2\alpha^2x^3}{6a^3x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3x} = \frac{2\alpha^2x^3 \cdot 3\alpha x^4}{6a^3x^3 \cdot 4a^3x} = \frac{6\alpha^3x^7}{24 \cdot a^6x^4} = \frac{x^3}{4a^3}$

Β) $\frac{x(x-1)}{(x+2)} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$

Operaţiunicu expres iiraţionale

A) Înmulţireaexpresiilorraţionale

1 regula: pentrua înmulţiunnumăr întregcuofracţie, înmulţimnumărul întregcunumărătorulfracţiei şilăsămacelaşinumitor, adică:

$$\alpha \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{}$$

Exemple

a) $3 \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{3x}{x+2}$

b) $\frac{4x^3}{x^5+2} \cdot (-3) = \frac{-12}{x^5+}$

A doua regulă de bază: pentru a înmulţi o expresie algebrică întreagă cu o expresie raţională, înmulţim numărătorul cu numărătorul şi numitorul cu numitorul, adică $\alpha \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\gamma}{\delta} =$

Exemplu:

$$3x \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{4x}{x+2} = \frac{1}{}$$

***A treia regulă de bază*:** pentru a înmulţi o expresie raţională cu o expresie raţională, înmulţim numărătorul cu numărătorul şi numitorul cu numitorul, adică: $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} =$

Exemple

A) $\frac{2\alpha^2x^3}{6a^3x^3} \cdot \frac{3\alpha x}{4a^3x} = \frac{2\alpha^2x^3 \cdot 3\alpha x^4}{6a^3x^3 \cdot 4a^3x} = \frac{6\alpha^3x^7}{24 \cdot a^6x}$

B) $\frac{x(x-1)}{} \cdot \frac{x+1}{} = \frac{x(x-1)(x+1)}{} = \frac{x}{}$

Β)Διαίρεση ρητών παραστάσεων

Για να διαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ρητή παράσταση(διαιρετέο)με την αντίστροφη παράσταση της δεύτερης ρητής παράστασης (διαιρέτης), δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

Παραδείγματα

Α) $\frac{24\alpha x}{5\alpha x^3}:\frac{3x^3}{4\alpha^4 x}=\frac{24\alpha x}{5\alpha x^3}\cdot\frac{4\alpha^4 x}{3x^3}=\frac{24\alpha x\cdot 3x^3}{5\alpha x^3\cdot 4\alpha^4 x}=\frac{4\cdot 6\cdot 3\alpha x^4}{4\cdot 5\cdot a^5 x^4}=\frac{18}{5\alpha^4}$

Β) $\frac{3x-3}{x-2}:\frac{x^2-1}{4x^2-16}=\frac{3x-3}{x-2}\cdot\frac{4x^2-16}{x^2-1}=\frac{(3x-3)\cdot(4x^2-16)}{(x-2)(x^2-1)}=$

$=\frac{3(x-1)\cdot 4(x^2-4)}{(x-2)(x-1)(x+1)}=\frac{3(x-1)\cdot 4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)(x+1)}=\frac{3\cdot 4(x-2)}{(x+1)}=\frac{12(x-2)}{x+1}$

Βασική παρατήρηση- μνημονικός κανόνας:

Μετατροπή σύνθετου κλάσματος σε απλό

$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

Παραδείγματα:

Α) $\frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}}=\frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}}=\frac{x^5}{y}:\frac{x}{y^4}=\frac{x^5}{y}\cdot\frac{y^4}{x}=\frac{x^5\cdot y^4}{y\cdot x}=x^4\cdot y^3$

Β) $\frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}=\frac{x(x+1)}{x^2-1}:\frac{2x}{1}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot 2x}$

$=\frac{1}{2(x-1)}$

Β)Împărțirea expresiilor raționale

Pentru a împărți două expresii raționale, înmulțim prima expresie rațională (de împărțit) cu expresia inversă a celei de-a doua expresii raționale (de împărțit), adică $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

Exemple

A) $\frac{24\alpha x}{5\alpha x^3}:\frac{3x^3}{4\alpha^4 x}=\frac{24\alpha x}{5\alpha x^3}\cdot\frac{4\alpha^4 x}{3x^3}=\frac{24\alpha x\cdot 3x^3}{5\alpha x^3\cdot 4\alpha^4 x}=\frac{4\cdot 6\cdot 3\alpha x^4}{4\cdot 5\cdot a^5 x^4}=$

B) $\frac{3x-3}{x-2}:\frac{x^2-1}{4x^2-16}=\frac{3x-3}{x-2}\cdot\frac{4x^2-16}{x^2-1}=\frac{(3x-3)\cdot(4x^2-}{(x-2)(x^2-1}$

$3(x-1)\cdot 4(x^2-4)\quad 3(x-1)\cdot 4(x-2)(x+2)\quad 3\cdot 4(x-$

Observație de bază - regulă mnemotehnică:

Transformarea unei fracții compuse în una simplă

$\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}=\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\cdot\delta}{\beta\cdot\gamma}$

Exemple

A) $\frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}}=\frac{\frac{x^5}{y}}{\frac{x}{y^4}}=\frac{x^5}{y}:\frac{x}{y^4}=\frac{x^5}{y}\cdot\frac{y^4}{x}=\frac{x^5\cdot y^4}{y\cdot x}=x^4\cdot y^3$

B) $\frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}=\frac{x(x+1)}{x^2-1}:\frac{2x}{1}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot 2x}$

$=\frac{1}{2(x-1)}$

Άσκηση-εργασία: Σχολικό βιβλίο και …να κάνετε τις παρακάτω πράξεις:

I)

(α) $\frac{8}{\beta}\cdot\frac{a}{4\beta}\cdot\frac{3\beta^2}{a^2}$ (β) $\left(-\frac{7a^2}{16a}\right)\cdot\frac{8\beta}{a}$ $\cdot\frac{x+\beta}{49-x^2}$

(γ) $\frac{10}{a^3}\cdot\frac{a^3}{2\omega^3}$ (δ) $-\frac{4a}{xy\omega}\cdot\frac{x}{y^2}\cdot\left(\frac{y}{2a}\right)^2$ $:\frac{x^3+x^2+x}{3}$

(ε) $\frac{7}{(x-3)^2}\cdot\frac{x-3}{14x}\cdot(3-x)$

II)

(α) $\frac{3a^2}{\beta}:\frac{\beta^2}{6a}$ (β) $\frac{a^5}{\beta^5}:\left(\frac{a}{\beta}\right)^6$ (γ) $\frac{x+7}{\beta^2-x^2}:\frac{x+\beta}{49-x^2}$

(δ) $\frac{x}{x-2}:\frac{x^2-2x}{x^2}$ (ε) $\frac{6}{x+y}:\frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$ (στ) $\frac{x^3}{x^3-1}:\frac{x^3+x^2+x}{3}$

III)

(α) $\frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}$ (β) $\frac{\frac{xy-xy^3}{6}}{\frac{xy-x^3y}{12-12x}}$ (γ) $\frac{\omega}{\frac{\omega^2+2\omega}{\omega^2-4}}$

(δ) $\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x}{x+2}}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$ (ε) $\frac{\frac{2(x-2)}{x+2}}{(x+2)^2}$

Exercițiu-activitate: Carte școlară și …realizați următoarele operații:

I)

(α) $\frac{8}{\beta}\cdot\frac{a}{4\beta}\cdot\frac{3\beta^2}{a^2}$ (β) $\left(-\frac{7a^2}{16a}\right)\cdot\frac{8\beta}{a}$ $\cdot\frac{x+\beta}{49-x^2}$

(γ) $\frac{10}{a^3}\cdot\frac{a^3}{2\omega^3}$ (δ) $-\frac{4a}{xy\omega}\cdot\frac{x}{y^2}\cdot\left(\frac{y}{2a}\right)^2$ $:\frac{x^3+x^2+x}{3}$

(ε) $\frac{7}{(x-3)^2}\cdot\frac{x-3}{14x}\cdot(3-x)$

II)

(α) $\frac{3a^2}{\beta}:\frac{\beta^2}{6a}$ (β) $\frac{a^5}{\beta^5}:\left(\frac{a}{\beta}\right)^6$ (γ) $\frac{x+7}{\beta^2-x^2}:\frac{x+\beta}{49-x^2}$

(δ) $\frac{x}{x-2}:\frac{x^2-2x}{x^2}$ (ε) $\frac{6}{x+y}:\frac{3x-9y}{x^2-2xy-3y^2}$ (στ) $\frac{x^3}{x^3-1}:\frac{x^3+x^2+x}{3}$

III)

(α) $\frac{\frac{x(x+1)}{x^2-1}}{2x}$ (β) $\frac{\frac{xy-xy^3}{6}}{\frac{xy-x^3y}{12-12x}}$ (γ) $\frac{\omega}{\frac{\omega^2+2\omega}{\omega^2-4}}$

(δ) $\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x}{x+2}}:\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}$ (ε) $\frac{\frac{2(x-2)}{x+2}}{(x+2)^2}$

Γ)Πρόσθεση- Αφαίρεσηρητώνπαραστάσεων:

1η περίπτωση: για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις που έχουν **ίδιους παρονομαστές**, χρησιμοποιούμε τον κανόνα πρόσθεσης-αφαίρεσης ομωνύμων κλασμάτων, δηλαδή:

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Άσκηση- παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha)\ \frac{x+3}{y+2}+\frac{x-2}{y+2}=\frac{x+3+x-2}{y+2}=\frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta)\ \frac{x+3}{y+2}-\frac{x-2}{y+2}=\frac{x+3-x+2}{y+2}=\frac{x+5}{y+2}$$

2η περίπτωση: Για να προσθέσουμε είναι αφαιρέσουμε δύο ρητές παραστάσεις που έχουν διαφορετικούς παρονομαστές κάνουμε τα εξής:

1ο βήμα: Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές

2ο βήμα: Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρανομαστών.

3ο βήμα: Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

4ο βήμα: Κάνουμε τις προσθέσεις-αφαιρέσεις που ζητούνται.

5ο βήμα: κάνουμε τις απλοποιήσεις που ενδεχομένως υπάρχουν

Άσκηση- παράδειγμα: Να κάνετε τις πράξεις:

$$(\alpha)\ \overset{2x}{\overset{\cdot}{1}}+\frac{\overset{2}{\overset{\cdot}{1}}}{x}-\frac{3}{2x}=\frac{2x}{2x}+\frac{2}{2x}-\frac{3}{2x}=\frac{2x+2-3}{2x}=\frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta)\ \frac{\overset{x+1}{\overset{\cdot}{3}}}{x}+\frac{\overset{x}{\overset{\cdot}{2}}}{x+1}=\frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)}=\frac{3x+3+2x}{x(x+1)}=\frac{5x+3}{x(x+1)}$$

C) Adunarea și scăderea expresiilor raționale:

1ª situație: pentru a aduna sau a scădea două expresii raționale care au același numitor, folosim regula adunării și scăderii fracțiilor cu același numitor, adică:

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \qquad \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$$

Exercițiu - exemplu: Efectuați operațiile:

$$(\alpha)\ \frac{x+3}{y+2}+\frac{x-2}{y+2}=\frac{x+3+x-2}{y+2}=\frac{2x+1}{y+2}$$

$$(\beta)\ \frac{x+3}{y+2}-\frac{x-2}{y+2}=\frac{x+3-x+2}{y+2}=\frac{x+5}{y+2}$$

2ª situație: Pentru a aduna sau a scădea două expresii raționale care au numitori diferiți, procedăm astfel:

Pasul 1: Factorizăm numitorii

Pasul 2: Găsim CMMDC-ul numitorilor.

Pasul 3: Transformăm fracțiile în fracții cu același numitor.

Pasul 4: Efectuăm adunările și scăderile cerute.

Pasul 5: Simplificăm eventualele fracții.

Exercițiu - exemplu: Efectuați operațiile:

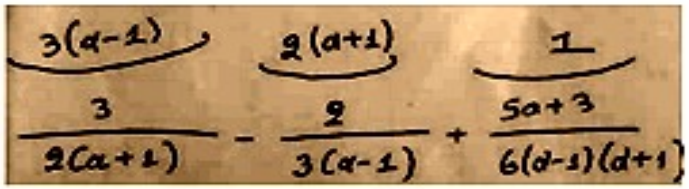
$$(\alpha)\ \overset{2x}{\overset{\cdot}{1}}+\frac{\overset{2}{\overset{\cdot}{1}}}{x}-\frac{3}{2x}=\frac{2x}{2x}+\frac{2}{2x}-\frac{3}{2x}=\frac{2x+2-3}{2x}=\frac{2x-1}{2x}$$

$$(\beta)\ \frac{\overset{x+1}{\overset{\cdot}{3}}}{x}+\frac{\overset{x}{\overset{\cdot}{2}}}{x+1}=\frac{3(x+1)+2x}{x(x+1)}=\frac{3x+3+2x}{x(x+1)}=\frac{5x+3}{x(x+1)}$$

γ) $\frac{3}{2\alpha+2}-\frac{2}{3\alpha-3}+\frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6}=$

$$\frac{3}{2(\alpha+1)}-\frac{2}{3(\alpha-1)}+\frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)}=$$

$$\left.\begin{matrix}2(\alpha+1)\\3(\alpha-1)\\2\cdot3(\alpha-1)(\alpha+1)\end{matrix}\right\}\quad \text{EKΠ}=2\cdot3(\alpha-1)(\alpha+1)$$



$$=\frac{3\cdot3(\alpha-1)}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)}-\frac{2\cdot2(\alpha+1)}{3(\alpha-1)2(\alpha+1)}+\frac{5\alpha+3}{6(\alpha-1)(\alpha+1)}=$$

$$=\frac{9\cdot(\alpha-1)-4\cdot(\alpha+1)+5\alpha+3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)}=$$

$$=\frac{9\alpha-9-4\alpha-4+5\alpha+3}{2(\alpha+1)3(\alpha-1)}=\frac{10\alpha-10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)}=$$

$$=\frac{10\alpha-10}{6(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{10(\alpha-1)}{6(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{5}{3(\alpha+1)}.$$

Άσκηση-Exercițiu

1. $\frac{x}{x+3}+\frac{3}{x+3}=$ .....

2. $\frac{x}{x+2}-\frac{3+x}{x+2}=$ .....

3. $\frac{3x}{x-1}+\frac{3}{1-x}=$ .....

4. $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{2-x}=$ .....

5. $1+\frac{2}{x}=$ .....

6. $\frac{3x}{3x-12}-\frac{4}{x-4}=$ .....

7. $\frac{4}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x^2+3x}=$ .....

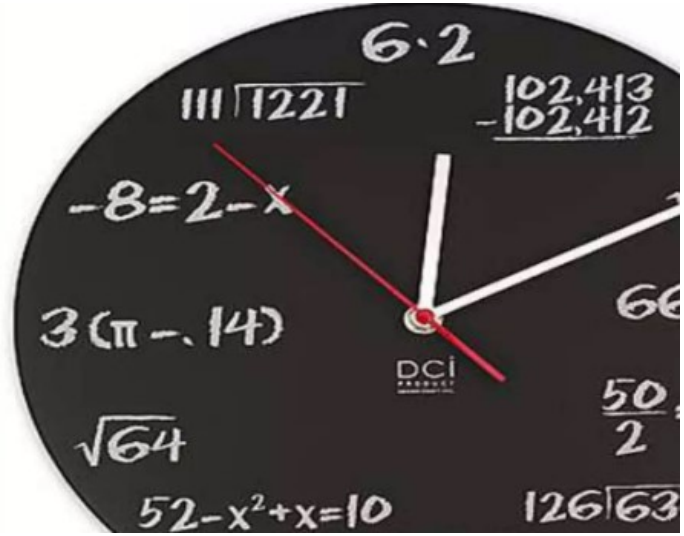
8. $\frac{\frac{1}{y^2}+\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}}=$ .....

9. $\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot\left(\frac{x}{x-y}-1\right)=$ .....

10. $\left(2-\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right):\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)=$ .....

De ce urăsc plantele matematica?

Le dă rădăcini pătrate.



Ce obții când întâlnești un profesor de matematică și un ceas? Aritmetică-tic-tac!

Εξισώσεις ανισώσεις

Α. Η εξίσωση αx+ β = 0

1. Άσκηση(παράδειγμα):

Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης:

Α) $2x = 6$

$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$

$\boxed{x = 3}$ η εξίσωση έχει μία μόνο μία μόνο(μοναδική) λύση 1

Β) **0x = 0**η εξίσωση έχει**άπειρες** (πάρα πολλές) λύσεις και ονομάζεται **ταυτότητα** ή **αόριστη**(είναι σωστή για οποιαδήποτε τιμή του αριθμούx)

Γ) **0x = -7** καμία λύση (**αδύνατη,** είναι λάθος για οποιαδήποτε τιμή του αριθμού x)

Β. Μεθοδολογία-Παράδειγμα:

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x+1}{2} - 14 = \frac{5-x}{4} - \frac{x+2}{3}$$

1.Αν έχει κλάσματα, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ΕΚΠτωνπαρονομαστών

Η εξίσωση έχει παρονομαστές τους αριθμούς 2, 3 και 4. Το ΕΚΠ(2,3,4)=12. Θα πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το 12. Οι όροι (κομμάτια) μιας εξίσωσης "διαχωρίζονται" μεταξύ τους από τα πρόσημα + και – . Η δική μας εξίσωση έχει 4 όρους τους $\frac{x+1}{2}$, -14 , $\frac{5-x}{4}$ και $-\frac{x+2}{3}$. Οπότε θα έχουμε

$$12\frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12\frac{5-x}{4} - 12\frac{x+2}{3}$$

Τώρα απλοποιούμε τους παρονομαστές (γι' αυτό το λόγω βάλαμε παντού το 12) κάνοντας διαίρεση το 12 με κάθε παρονομαστή.

$$6\ \not{12}\frac{x+1}{\not{2}} - 12 \cdot 14 = 3\ \not{12}\frac{5-x}{\not{4}} - 4\ \not{12}\frac{x+2}{\not{3}}$$

Ecuații inecuații

A. Ecuația αx + β = 0

1. Exercițiu (exemplu):

Găsiți numărul de soluții ale ecuației:

A) $2x = 6$

$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$

$\boxed{x = 3}$ ecuațiaareosingură soluție (unică)

B) **0x = 0**ecuațiaaresoluții**infinite** (foartemulte) șisenumește**identitate**sau**nedeterminată** (estecorectă pentruoricevaloareanumăruluix)

C) **0x = -7**nuaresoluții (**imposibilă**, estegreșită pentruoricevaloareanumăruluix)

B. Metodologie-Exemplu:

Rezolvați ecuația

$$\frac{x+1}{2} - 14 = \frac{5-x}{4} - \frac{x+2}{3}$$

1. Dacă are fracții, înmulțim fiecare termen al ecuației cu ECП al numitorilor.

Ecuația are ca numitori numerele 2, 3 și 4. ECП(2,3,4)=12. Vom înmulți toți termenii ecuației cu 12. Termenii (bucățile) unei ecuații sunt „separați" între ei de semnele + și –. Ecuația noastră are 4 termeni.

$\frac{x+1}{2}$, -14 , $\frac{5-x}{4}$, $-\frac{x+2}{3}$.

$$12\frac{x+1}{2} - 12 \cdot 14 = 12\frac{5-x}{4} - 12\frac{x+2}{3}$$

Deci vom avea

Acum simplificăm numitorii (din acest motiv am pus peste tot 12) împărțind 12 la fiecare numitor.

$$6\ \not{12}\frac{x+1}{\not{2}} - 12 \cdot 14 = 3\ \not{12}\frac{5-x}{\not{4}} - 4\ \not{12}\frac{x+2}{\not{3}}$$

Καθαρογράφουμε ότι απέμεινε έχοντας στο μυαλό μας το εξής: Όποιοςαριθμητήςαποτελείταιαπόδύοκομμάτιαθαμπειυποχρεωτικάσε παρένθεση.

$$6(x+1)-168=3(5-x)-4(x+2)$$

2.Διώχνουμε τις παρενθέσεις από την εξίσωση εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό που βρίσκεται έξω από την παρένθεση και με τους δύο όρους που βρίσκονται μέσα στην παρένθεση:

$$6(x+1)-168=3(5-x)-4(x+2)$$

Οπότε προκύπτει

$$6\cdot x+6\cdot 1-168=3\cdot 5-3\cdot x-4\cdot x-4\cdot 2$$

δηλαδή

$$6x+6-168=15-3x-4x-8$$

3. Χωρίζουμε γνωστούς – άγνωστους: Εδώ θα πρέπει να θυμόμαστε ότι: "Οποιοςόρος αλλάξει μέλος θα πρέπει να αλλάξει και το πρόσημό του.

$$6x+6-168=15-3x-4x-8$$
$$6x+3x+4x=-6+168+15-8$$

4."Συμμαζεύουμε" δηλαδή κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη. (Αναγωγή Όμοιων Όρων)

$$6x+3x+4x=-6+168+15-8$$
$$13x=169$$

5.Πρέπει το x να μείνει μόνο του, άρα πρέπει να φύγει από δίπλα του ο αριθμός 13 (Συντελεστής λέγεται). Για το λόγο αυτό "Διαιρώ με τον Συντελεστή του άγνωστου" και τα δύο μέλη απαραίτητα.

$$\frac{13x}{13}=\frac{169}{13}\ \text{ή αλλιώς}\ x=13$$

6.Αν έχουμε **0x = 0**η εξίσωσή είναι **αόριστη** και αν έχουμε **0x = 169**(κάποιον αριθμό διαφορετικό του 0)η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

Ασκήσεις-Εργασία: Απότοβιβλίο

Transcriem ceea ce a rămas având în minte următoarele: Orice numărător format din două părți trebuie să fie obligatoriu între paranteze.

$$6(x+1)-168=3(5-x)-4(x+2)$$

2. Eliminăm parantezele din ecuație aplicând proprietatea distributivă, adică multiplicând numărul aflat în exteriorul parantezei cu ambele termene aflate în interiorul parantezei:

$$6(x+1)-168=3(5-x)-4(x+2)$$

Rezultă astfel

$$6\cdot x+6\cdot 1-168=3\cdot 5-3\cdot x-4\cdot x-4\cdot 2$$

adică

$$6x+6-168=15-3x-4x-8$$

3. Separăm cunoscut – necunoscut: Aici trebuie să ne amintim că: „Orice termen care se mută de pe o parte pe cealaltă trebuie să-și schimbe semnul"

$$6x+6-168=15-3x-4x-8$$
$$6x+3x+4x=-6+168+15-8$$

4. „Strângem lucrurile", adică efectuăm operații în ambele părți. (Reduceți Termenii Asemănători)

$$6x+3x+4x=-6+168+15-8$$
$$13x=169$$

5. Trebuie ca x să rămână singur, $\frac{13x}{13}=\frac{169}{13}\rightarrow$ **x = 13**

așadar trebuie eliminat numărul 13 de lângă el (Se numește coeficient). Din acest motiv „Împărțim la Coeficientul necunoscutului" în ambele părți obligatoriu.

6. Dacă avem **0x = 0,** ecuația este **nedeterminată**și dacă avem **0x = 169** (sau un alt număr diferit de 0), ecuația este **imposibilă**.

Exerciții-Temă: Dincarte

Εξισώσεις 2ουβαθμού

Βασικός ορισμός: Κάθε εξίσωση της μορφής$\alpha x^2+ \beta x+ \gamma = 0, \alpha \neq 0$ (α διαφορετικό του μηδενός) λέγεται εξίσωση δεύτερου βαθμού με έναν άγνωστο (δευτεροβάθμια εξίσωση).

Βασικός ορισμός: οι αριθμοί α, β, γ στη δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2+ \beta x+ \gamma = 0$ ονομάζονται **συντελεστές** της εξίσωσης ειδικά ο αριθμός γ (δηλαδή ο συντελεστής γ) ονομάζεται **σταθερόςόρος** της εξίσωσης.

Άσκηση παράδειγμα: Στις επόμενες εξισώσεις να προσδιορίσετε τους συντελεστές α, β, γ των δευτεροβάθμιων εξισώσεων:

a) $3x^2+ 5x+ 2 = 0$ οπότε $\alpha = 3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$

b) $2x^2+ 6x+ 9 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 9$

c) $5x^2+-6x+ 7 = 0$ οπότε $\alpha = 5$ $\beta = -6$ $\gamma = 7$

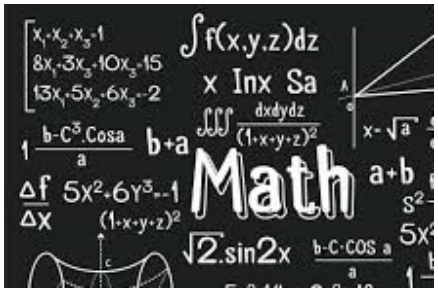
d) $-3x^2+ 6x+ -9 = 0$ οπότε $\alpha = -3$ $\beta = 6$ $\gamma = -9$

e) $x^2-5x- 2 = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = -5$ $\gamma = -2$

f) $x^2+ 4x = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = 4$ $\gamma = 0$

g) $-x^2+ 4 = 0$ οπότε $\alpha = -1$ $\beta = 0$ $\gamma = 4$

h) $\frac{3}{4}x^2+ 5x+ \frac{1}{4}= 0$ οπότε $\alpha =\frac{3}{4}$ $\beta = 5$ $\gamma = \frac{1}{4}$



Ecuații de gradul doi

Definiție de bază: Fiecare ecuație de forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ (α diferit de zero) se numește ecuație de gradul doi cu o necunoscută (ecuație quadratică).

Definiție de bază: numerele α, β, γ în ecuația de gradul doi $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ se numesc **coeficienții** ecuației, iar numărul γ (adică coeficientul γ) se numește **termenconstant** al ecuației.

Exercițiu exemplu: În următoarele ecuații să determinați coeficienții α, β, γ ai ecuațiilor de gradul doi:

a) $3x^2+ 5x+ 2 = 0$ deci $\alpha = 3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$

b) $2x^2+ 6x+ 9 = 0$ deci $\alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 9$

c) $5x^2+-6x+ 7 = 0$ deci $\alpha = 5$ $\beta = -6$ $\gamma = 7$

d) $-3x^2+ 6x+ -9 = 0$ deci $\alpha = -3$ $\beta = 6$ $\gamma = -9$

e) $x^2-5x- 2 = 0$ deci $\alpha = 1$ $\beta = -5$ $\gamma = -2$

f) $x^2+ 4x = 0$ deci $\alpha = 1$ $\beta = 4$ $\gamma = 0$

g) $-x^2+ 4 = 0$ deci $\alpha = -1$ $\beta = 0$ $\gamma = 4$

h) $\frac{3}{4}x^2+ 5x+ \frac{1}{4}= 0$ deci $\alpha =\frac{3}{4}$ $\beta = 5$ $\gamma = \frac{1}{4}$

Επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων

1η περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2 + βx = 0$

Μέθοδος επίλυσης: παραγοντοποίηση.
(παρατήρηση $α \cdot β = 0$ τότε $α=0$ ή $β = 0$)

Άσκηση- παράδειγμα: να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

a) $χ^2 - 6χ = 0$ οπότε

$χ(χ-6) = 0$

$χ = 0$ ή $χ-6 = 0$

$χ = 0$ ή $χ = 6$

b) $2x^2+12x = 0$ οπότε

$2x(x+6) = 0$

$2x = 0$ ή $x+6 = 0$

$x =0$ ή $x = -6$

c) $-4x^2+6x = 0$ οπότε

$2x(-2x+3) = 0$

$2x = 0$ ή $-2x+3= 0$

$x =0$ ή $-2x =-3$

$x =0$ ή $x = \frac{3}{2}$

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2+8x = 0$

c) $3x^2-15x = 0$

d) $-3x^2+12x = 0$

e) $4x^2+x = 0$

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea

Cazul 1: Ecuații de forma $ax^2 + βx = 0$

Metoda de rezolvare: factorizare.

(observație $α \cdot β = 0$ atunci $α = 0$ sau $β = 0$)

Exercițiu - exemplu: să rezolvați următoarele ecuații:

a) $x^2 - 6x = 0$ deci

$x(x - 6) = 0$

$x = 0$ sau $x - 6 = 0$

$x = 0$ sau $x = 6$

b) $2x^2 + 12x = 0$ deci

$2x(x + 6) = 0$

$2x = 0$ sau $x + 6 = 0$

$x = 0$ sau $x = -6$

c) $-4x^2 + 6x = 0$ deci

$2x(-2x + 3) = 0$

$2x = 0$ sau $-2x + 3 = 0$

$x = 0$ sau $-2x = -3$

$x = 0$ sau $x = 3/2$

Exercițiu de lucru: Să rezolvați următoarele ecuații

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $x^2 + 8x = 0$

c) $3x^2 - 15x = 0$

d) $-3x^2 + 12x = 0$

e) $4x^2 + x = 0$

Επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης

2η περίπτωση: Εξισώσεις της μορφής $ax^2+γ=0$-Μέθοδος:

1ος τρόπος: παραγοντοποιούμε την εξίσωση και καταλήγουμε σε γινόμενο παραγόντων ίσο με μηδέν

2ος τρόπος: χρησιμοποιούμε τον ορισμό τετραγωνικής ρίζας.
Προσοχή: το τετράγωνο ενός πραγματικού αριθμού δεν είναι αρνητικός αριθμός!!

Άσκηση παράδειγμα :Να λύσετε την εξίσωση:

A)$x^2 - 16 = 0$

1ος τρόπος
$x^2 - 16 = 0$
$(x-4)\cdot(x+4) = 0$
$x-4 = 0$ ή $x+4 = 0$, οπότε $x = 4$ή$x = -4$

2ος τρόπος
$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$, οπότε $x = +4$ ή $x = -4$

B) $4x^2 - 100 = 0$
1ος τρόπος
$4x^2 - 100 = 0$
$(2x-10)\cdot(2x+10) = 0$
$2x-10 = 0$ ή $2x+10 = 0$
$2x = 10$ ή $2x = -10$, οπότε $x = 5$ ή$x = -5$
2ος τρόπος
$4x^2 - 100 = 0$
$4x^2 = 100$
$2x = \pm\sqrt{100}$, άρα $2x = +10$ ή $2x = -10$, οπότε $x = 5$ ή $x = -5$

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις (όσες γίνεται με δύο τρόπους):
A) $x^2 - 9 = 0$ B) $x^2 - 64 = 0$ Γ) $x^2 = 144$ Δ) $x^2 - 256 = 0$
E) $9x^2 - 16 = 0$ Z) $x^2 = -36$ H) $x^2 + 4 = 0$ Θ) $4x^2 + 100 = 0$
I) $3\cdot(\chi+2)^2 = 12$

Rezolvarea unei ecuații secundare

Al doilea caz: Ecuații de forma $ax^2+γ=0$-Metodă:

Prima variantă: factorizăm ecuația și ajungem la un produs al factorilor egal cu zero
A doua variantă: folosim definiția rădăcinii pătrate.

Atenție: pătratul unui număr real nu este un număr negativ!!

Exempludeexercițiu: Rezolvă ecuația:

A) $x^2 - 16 = 0$

Primacale
$x^2 - 16 = 0$
$(x-4)\cdot(x+4) = 0$
$x-4 = 0$ sau$x+4 = 0$, deci$x = 4$sau$x = -4$

Adouacale
$x^2 - 16 = 0$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$deci$x = +4$sau$x = -4$

B) $4x^2 - 100 = 0$
Primacale
$4x^2 - 100 = 0$
$(2x-10)\cdot(2x+10) = 0$
$2x-10 = 0$ sau $2x+10 = 0$
$2x = 10$ sau $2x = -10$, decix = 5 saux = -5

Adouacale
$4x^2 - 100 = 0$
$4x^2 = 100$
$2x = \pm\sqrt{100}$, deci $2x = +10$ sau $2x = -10$, decix = 5 saux = -5

Sarcina de exercițiu: Rezolvă următoarele ecuații (care se fac în două moduri):
A) $x^2 - 9 = 0$ B) $x^2 - 64 = 0$ Γ) $x^2 = 144$ Δ) $x^2 - 256 = 0$
E) $9x^2 - 16 = 0$ Z) $x^2 = -36$ H) $x^2 + 4 = 0$ Θ) $4x^2 + 100 = 0$
I) $3\cdot(\chi+2)^2 = 12$

Επίλυση εξισώσεων δεύτερου βαθμού με χρήση τύπου

Εξίσωση 2^{ου} βαθμού:$\alpha x^2+ \beta x+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

Άσκηση παράδειγμα: Να προσδιορίσετε τους συντελεστές α, β, γ στις επόμενες εξισώσεις:

A. $2x^2+ 5x+6 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 5$ $\gamma = 6$

B. $x^2-4x+3 = 0$ οπότε $\alpha = 1$ $\beta = -4$ $\gamma = 3$

C. $2x^2-50 = 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 0$ $\gamma = -50$

Βασική παρατήρηση:

Στην επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2+ \beta x+\gamma = 0$ μας βοηθάει η **Διακρίνουσα** τις εξίσωσης, η οποία υπολογίζεται από τον τύπο: **$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$**

Άσκηση-παράδειγμα: Να υπολογίστε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

A. $2x^2+ 6x+4= 0$ οπότε $\alpha = 2$ $\beta = 6$ $\gamma = 4$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 6^2-4\cdot2\cdot4= 36-32 = 4$

B. $-3x^2+ 5x+2= 0$ οπότε $\alpha =-3$ $\beta = 5$ $\gamma = 2$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 5^2-4\cdot(-3)\cdot2= 25+24 = 49$

C. $x^2+ 2x+1= 0$ οπότε $\alpha =1$ $\beta = 2$ $\gamma = 1$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = 2^2-4\cdot1\cdot1= 4-4 = 0$

D. $-x^2+ x-3= 0$ οπότε $\alpha =-1$ $\beta = 1$ $\gamma = -3$

$\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma = \mathbf{1}^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)= 1-12 = -12$

Άσκηση εργασία: Να υπολογίστε τη διακρίνουσα στις επόμενες εξισώσεις:

A. $3x^2+ 12x+1= 0$

B. $x^2-2x+3= 0$

C. $3x^2 - 12x= 0$

D. $9x^2 - 16 = 0$

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea folosind formula

Ecuație de gradul al doilea: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ cu $\alpha \neq 0$

Exercițiu exemplu: Să determinați coeficienții α, β, γ în următoarele ecuații:

A. $2x^2 + 5x + 6 = 0$ deci $\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = 6$

B. $x^2 - 4x + 3 = 0$ deci $\alpha = 1, \beta = -4, \gamma = 3$

C. $2x^2 - 50 = 0$ deci $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = -50$

Observație de bază:

La rezolvarea ecuației de gradul al doilea de forma $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ne ajută **Discriminantul** ecuației, care se calculează prin formula: **$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$**

Exercițiu exemplu: Să calculați discriminantul în următoarele ecuații:

A. $2x^2 + 6x + 4 = 0$ deci $\alpha = 2, \beta = 6, \gamma = 4$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4\cdot2\cdot4 = 36 - 32 = 4$

B.$-3x^2 + 5x + 2 = 0$ deci $\alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 2$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4\cdot(-3)\cdot2 = 25 + 24 = 49$

C.$x^2 + 2x + 1 = 0$ deci $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4\cdot1\cdot1 = 4 - 4 = 0$

D.$-x^2 + x - 3 = 0$ deci $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = -3$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-3) = 1 - 12 = -12$

Exercițiu de lucru: Să calculați discriminantul în următoarele ecuații:

A.$3x^2 + 12x + 1 = 0$

B. $x^2 - 2x + 3 = 0$

C. $3x^2 - 12x = 0$

D. $9x^2 - 16 = 0$

Βασική παρατήρηση:

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$,

- αν $\Delta > 0$ τότε η **εξίσωση** έχει **δύο άνισεςλύσεις** $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη εξίσωση)

Παράδειγμα Λύσης

Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις

A) $\mathbf{2x^2+5x-3=0}$

1. **Βρίσκουμε τους Συντελεστές:**

$\alpha=2 \quad \beta=5 \quad \gamma=-3$

2. **Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)**

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = 5^2-4\cdot2\cdot(-3) = 25-(-24) = 25-(-24)=25+24=49$

Επειδή $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

3. **Εύρεση Ριζών** ($x_{1,2}$)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2\cdot2} = \frac{-5\pm7}{4}$$

4. **Υπολογισμός των δύο λύσεων:**

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

5. **Απάντηση:** Οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -3$$

Observațiedebază:

Ecuația $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ cu $\alpha \neq 0$,

→dacă $\Delta > 0$ atunciecuațiaare**douăsoluțiidiferite** $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

→Dacă $\Delta = 0$, ecuațiaareo**soluțiedublă** $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$

→Dacă $\Delta < 0$, ecuațianuaresoluție (ecuație**imposibilă**)

Exempluderezolvare

Să rezolvămurmătoareleecuații:

A) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

1. Găsimcoeficienții:

$a = 2,\ \beta = 5,\ \gamma = -3$

2.Calcululdiscriminantului (Δ)

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 5^2 - 4\cdot2\cdot(-3) = 25 - (-24) = 25 + 24 = 49$

Deoarece$\Delta > 0$, ecuațiaaredouă rădăcinireale șidiferite.

3.Găsirea rădăcinilor ($x_{1,2}$)

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2\cdot2} = \frac{-5\pm7}{4}$$

4.Calculul celor două soluții:

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3$$

5.Răspuns: Soluțiile ecuației sunt

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -3$$

Β) $x^2-6x+9=0$

1. Προσδιορισμός Συντελεστών:

α=1 β=-6 γ=9

2. Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = (-6)^2-4\cdot 1\cdot 9 = 36-36 =0$

Επειδή Δ= 0 , η εξίσωση έχει μία (διπλή) ρίζα.

3. Εύρεση Ρίζας (x)

$x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

4. Απάντηση:Ηδιπλή λύση (ρίζα) της εξίσωσης είναι

x = 3

Γ) $x^2-x+2=0$

1. Προσδιορισμός Συντελεστών:

α=1 β=-1 γ=2

2. Υπολογισμός Διακρίνουσας (Δ)

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = (-1)^2-4\cdot 1\cdot 2 =1-8 = -7$

Επειδή Δ< 0 , η εξίσωση δεν έχει λύση(αδύνατη εξίσωση).

Άσκηση εργασία: Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

1. $2x^2-5x+2=0$ **2.** $x^2+5x-6=0$

3. $x^2-4x+4=0$ **4.** $-3x^2+5x-8=0$

5. $x^2+5x+7=0$ **6.** $x^2+x-1=0$

7. $x^2 = 7x + 3$ **8.** $-10x + 1 + 25x^2 = 0$

9. $(x + 2)^2 + 5 = 0$ **10.** $(3x - 1)^2 = 9$

11. $(x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$ **12.** $(x + 4)^2 – (x + 6)^2 = – 8$

13. $(x – 1)^2 = – x$ **14.** $(x – 2)(x – 1) = 2x^2 + 4$

15. $2(9 – x^2) – 4x = 3x(1 – x) + 1$ **16.** $(x – 2)^2 + 2x(x + 2) = 2(3x + 10)$

B) $x^2-6x+9=0$

1. Determinareacoeficienților:

a=1 β=-6 γ=9

2.Calculareadiscriminantului (Δ)

$\Delta=\beta^2-4a\gamma = (-6)^2-4\cdot 1\cdot 9 = 36-36 =0$

Deoarece Δ= 0, ecuația are o rădăcină dublă.

3.Găsirea rădăcinii (x)

$x = =\frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{-(-6)}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$

4.Răspuns: Rădăcina dublă a ecuației este

x = 3

Γ) $x^2-x+2=0$

1. Determinarea coeficienților:

a=1 β=-1 γ=2

2.Calcularea discriminantului (Δ)

$\Delta=\beta^2-4a\gamma = (-1)^2-4\cdot 1\cdot 2 =1-8 = -7$

Deoarece Δ< 0, ecuația nu are soluție (ecuație imposibilă).

Exerciții: Să rezolvați următoarele ecuații:

1. $2x^2-5x+2=0$ **2.** $x^2+5x-6=0$

3. $x^2-4x+4=0$ **4.** $-3x^2+5x-8=0$

5. $x^2+5x+7=0$ **6.** $x^2+x-1=0$

7. $x^2 = 7x + 3$ **8.** $-10x + 1 + 25x^2 = 0$

9. $(x + 2)^2 + 5 = 0$ **10.** $(3x - 1)^2 = 9$

11. $(x + 2)^2 + (x - 7)^2 = 0$ **12.** $(x + 4)^2 – (x + 6)^2 = –8$

13. $(x – 1)^2 = –x$ **14.** $(x – 2)(x – 1) = 2x^2 + 4$

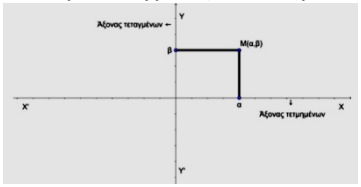
15. $2(9 – x^2) – 4x = 3x(1 – x) + 1$ **16.** $(x – 2)^2 + 2x(x + 2) = 2(3x + 10)$

Άλγεβρα - Μέρος τρίτο: Συστήματα για τις εξετάσεις…..και γραφικές παραστάσεις για το Λύκειο!!

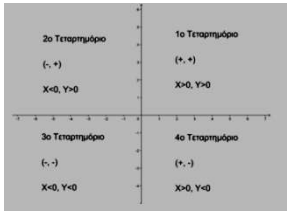
Συντεταγμένες- Εισαγωγή σε συναρτήσεις

Τι σημαίνει η έκφραση σημείο Μ(α, β) ;

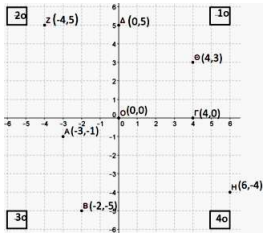
Οι αριθμοί α, β λέγονται συντεταγμένες του Μ. Ο α λέγεται τετμημένη και ο β τεταγμένη του σημείου Μ. Το σημείο Μ συμβολίζεται με Μ(α,β).



Τι σημαίνει η έκφραση τεταρτημόρια;



Παράδειγμα συντεταγμένων:

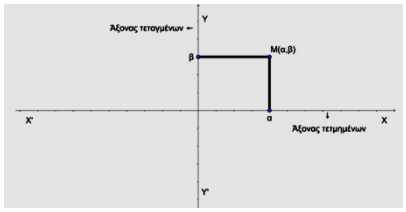


Algebră - Partea a treia: Sisteme pentru examene….. și grafice pentru Liceu!!

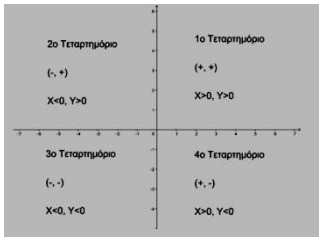
Coordonate - Introducere în funcții

Ce înseamnă expresia punct M(a, β)?

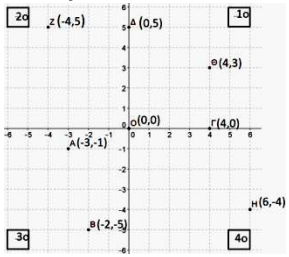
Numerele a și β se numesc coordonatele punctului M. a se numește abscisă și b ordonata punctului M. Punctul M se notează cu M(a,β).



Ce înseamnă expresia cadrane?



Exemplu de coordonate:



Συναρτήσεις-Γραφικές Παραστάσεις και άλλα…

Χρήση:**Χ**ρησιμοποιούνται για την παρουσίαση πειραματικών αποτελεσμάτ ων και θεωρητικών μοντέλων. Σε Στατιστική, Φυσική, Ιατρική, Βιολογία, Οικονομία, Περιβαλλοντολογία, μέσω της εικόνας δίνουν απλά και γρήγορα εκτίμηση για τέτοιου είδους μοντέλα.

Στα Μαθηματικά όταν λέμε ότι ένα μέγεθος είναι συνάρτηση ενός άλλου εννοούμε ότι εξαρτάται το ένα από το άλλο.

Βασικός ορισμός:Συνάρτηση ονομάζουμε μια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y, με την οποία κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y.

Βασική Παρατήρηση: Το να βρούμε το **πώς ακριβώς εξαρτάται ένα μέγεθος από ένα άλλο συχνά δεν είναι εύκολη διαδικασία**. Οι βοηθοί μας σε αυτό είναι ο τύπος της συνάρτησης, ο πίνακας τιμών της και η γραφική της παράσταση.

- Ο **τύπος** της συνάρτησης είναι η αλγεβρική σχέση που συνδέει τις μεταβλητές x,y.
- Ο **πίνακαςτιμών** της συνάρτησης συμπληρώνεται βάση πειραμάτων ή κάνοντας πράξεις
- Η **γραφικήπαράσταση** της συνάρτησης είναι σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους κάνουν αληθή την εξίσωση της συνάρτησης .

Funcții - Reprezentări Grafice și altele…

Utilizare: Sunt folosite pentru prezentarea rezultatelor experimentale și a modelelor teoretice. În Statistică, Fizică, Medicină, Biologie, Economie, Știința mediului, prin imagine oferă o estimare simplă și rapidă pentru astfel de modele.

În Matematică, când spunem că o mărime este funcție a altei mărimi, înseamnă că una depinde de cealaltă.

Definiție de bază: Funcție numim o relație între două variabile x și y, prin care fiecărei valori a variabilei x îi corespunde o singură valoare a variabilei y.

Observație de bază: A afla cum depinde exact o mărime de alta nu este adesea un proces ușor. Ajutoarele noastre în acest sens sunt formula funcției, tabelul său de valori și reprezentarea sa grafică.

- **Formafuncției** este relația algebrică care leagă variabilele x și y.
- **Tabelulvalorilor** funcției se completează pe baza experimentelor sau efectuând calcule.
- **Reprezentareagrafică** a funcției este mulțimea tuturor punctelor din plan ale căror coordonate satisfac ecuația funcției..

Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση y = α·x ;

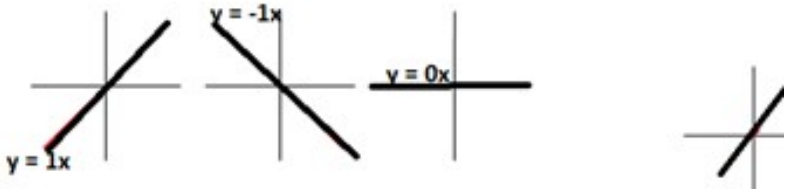
· Αντιστοιχεί σε **ανάλογα ποσά**(όταν η τιμή του ενός πολλαπλασιάζεται με έναν αριθμό, τότε και η αντίστοιχη τιμή του άλλου πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο αριθμό, παράδειγμα πόσα κιλά ψωμί αγοράζουμε από ένα φούρνο και πόσα χρήματα πληρώνουμεγια αυτά).

· Έχει **γραφική παράσταση** μία **ευθεία** γραμμή που **περνάει** από την **αρχή** των **αξόνων**(σημείο Ο(0,0)).

· Το α ονομάζεται **κλίση** της ευθείας και **α =** $\frac{y}{x}$.

· Αν το α είναι θετικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο, ενώ αν είναι αρνητικός αριθμός βρίσκεται στο 2ο και 4οτεταρτημόριο.

παραδείγματα

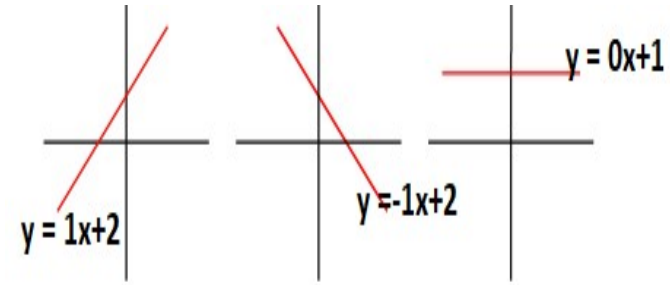


Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση y = α·x + β (β≠0) ;

· Έχει γραφική παράσταση ευθεία γραμμή.

· Είναι παράλληλη στην ευθεία y = α·x , και περνάει απ' το σημείο (0, β) του άξονα y΄y.

παραδείγματα



Ce știm despre funcția y = α·x?

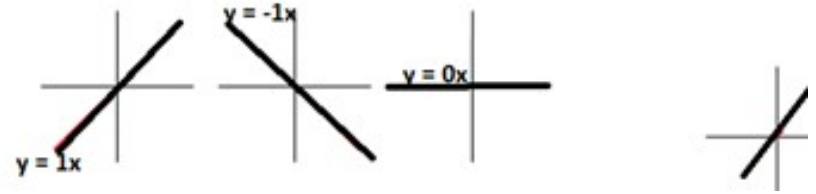
• Corespunde **unor cantități proporționale** (când valoarea uneia se înmulțește cu un număr, și valoarea corespunzătoare a celeilalte se înmulțește cu același număr, de exemplu câte kilograme de pâine cumpărăm de la o brutărie și cât plătim pentru ele).

• Are **reprezentareagrafică** o **linie** dreaptă care trece prin **origineaaxelor** (punctul O(0,0)).

• α se numește **panta** dreptei și **α =** $\frac{y}{x}$ ..

• Dacă α este un număr pozitiv, atunci dreapta se află în primul și al treilea cadran, în timp ce dacă este un număr negativ, se află în al doilea și al patrulea cadran.

Exemple

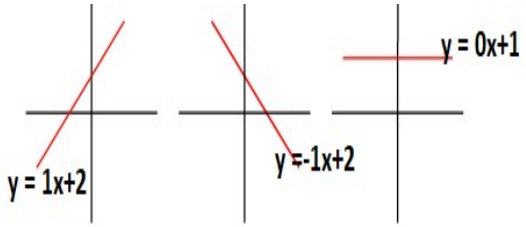


Ce știm despre funcția y = α·x + β (β≠0) ?

• Are reprezentare grafică o linie dreaptă.

• Este paralelă cu linia y = α·x și trece prin punctul (0, β) al axei y.

Exemple

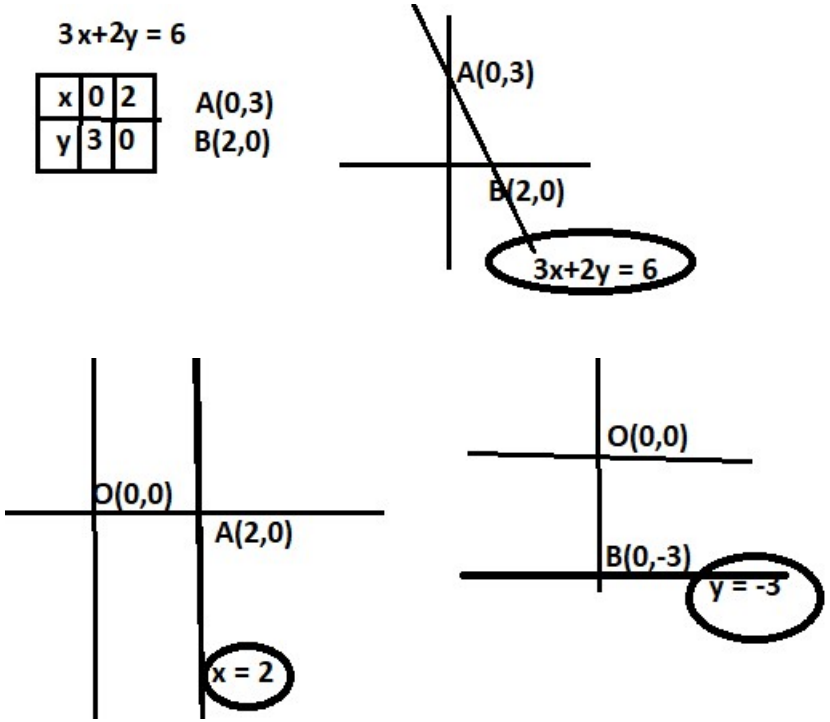


Εξίσωση μορφής αx + βy = γ ,α≠0 ή β ≠0είναι πάντα ευθεία.

Βασική παρατήρηση: Για να σχεδιάσουμε μία ευθεία είναι αρκετά δύο σημεία της ευθείας αυτής.

Η εξίσωση x =α παριστάνει μία κατακόρυφη ευθεία και η εξίσωση ψ=β παριστάνει μία οριζόντια.

παραδείγματα

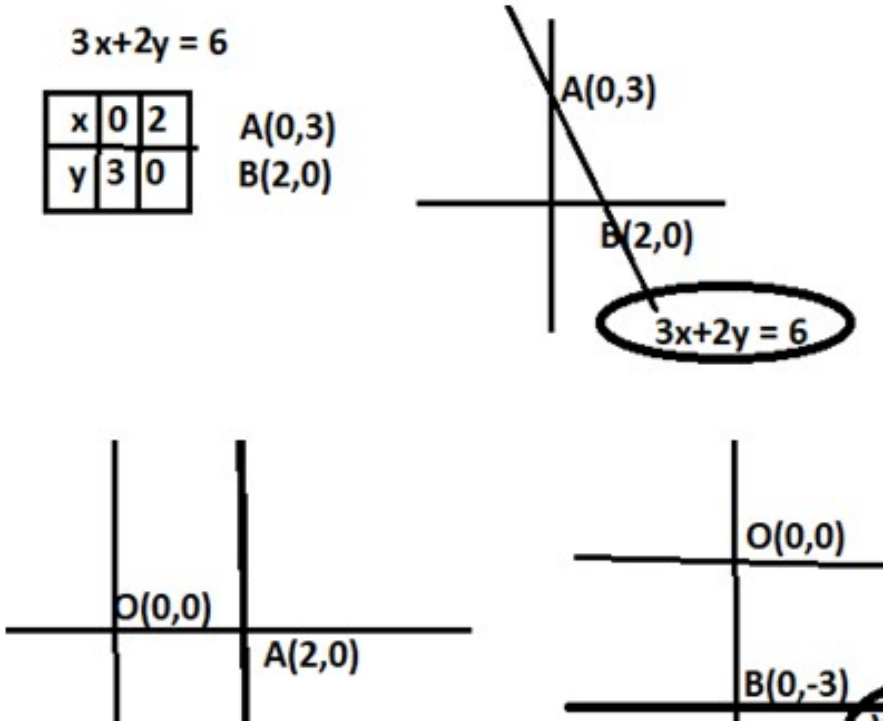


Ecuația de forma αx + βy = γ, α≠0 sau β≠0 este întotdeauna o dreaptă.

Observație de bază: Pentru a trasa o dreaptă sunt suficiente două puncte ale acelei drepte.

Ecuația x = α reprezintă o dreaptă verticală, iar ecuația y = β reprezintă o dreaptă orizontală.

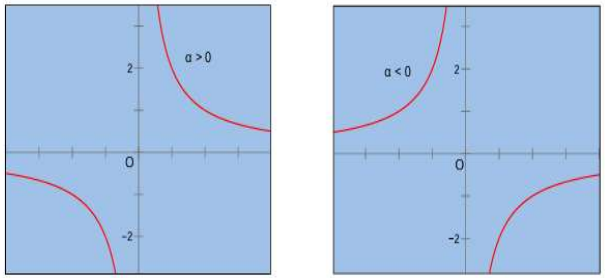
Exemple



Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$;

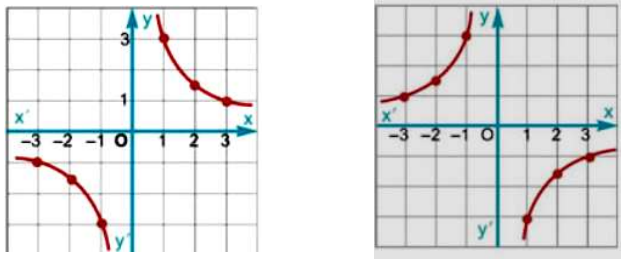
- Αντιστοιχεί σε αντιστρόφως ανάλογα ποσά.
- Έχει γραφική παράσταση καμπύλη, που ονομάζεται υπερβολή.
- Η υπερβολή αποτελείται από δύο κλάδους, οι οποίοι πλησιάζουν ασταμάτητα τους άξονες χωρίς ποτέ να τους τέμνουν(λέμε πως οι άξονες είναι ασύμπτωτες της υπερβολής).
- Αν το α είναι θετικός αριθμός, τότε οι δύο κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο. Αν το α είναι αρνητικός αριθμός τότε οι κλάδοι βρίσκονται στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο.
- Έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες y=x, y = -x

$y = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$



Παραδείγματα

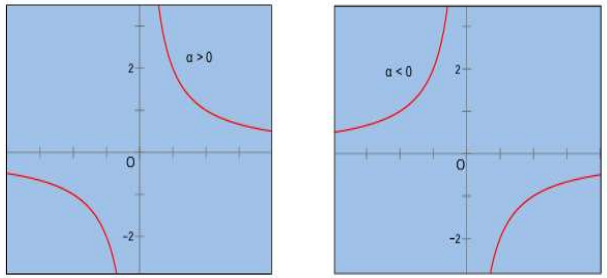
$y = \frac{3}{x}$ $y = -\frac{3}{x}$



Ce știm despre funcția $y = \frac{a}{x}$?

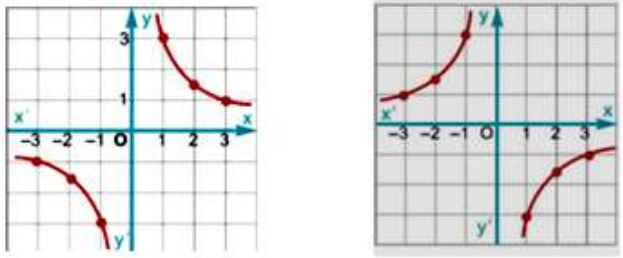
- Este corespunzătoare unor mărimi invers proporționale.
  - Are o reprezentare grafică curbată, numită hiperbolă.
  - Hiperbola este alcătuită din două ramuri, care se apropie neîncetat de axe fără a le intersecta niciodată (spunem că axele sunt asimptotele hiperbolei).
  - Dacă a este un număr pozitiv, atunci cele două ramuri ale hiperbolei se află în primul și al treilea cadran. Dacă a este un număr negativ, atunci ramurile se află în al doilea și al patrulea cadran.
  - Are un centru de simetrie în originea axelor și axe de simetrie în bisectoarele axelor, adică dreptele y = x, y = -x.

$y = \frac{\alpha}{x}, \alpha \neq 0$



Exemple

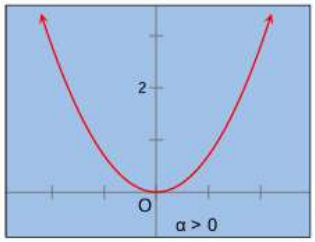
$y = \frac{3}{x}$ $y = -\frac{3}{x}$

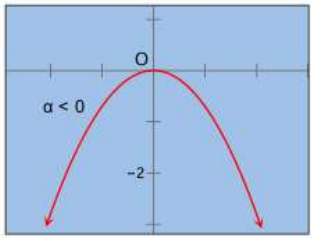


Τι γνωρίζουμε για τη συνάρτηση ψ = αx²

- έχει γραφική παράσταση παραβολή
- βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx΄ αν α>0
- κάτω από τον άξονα xx΄ αν α<0.
- έχει άξονα συμμετρίας (δηλαδή κόβεται στη μέση από) τον άξονα yy΄.

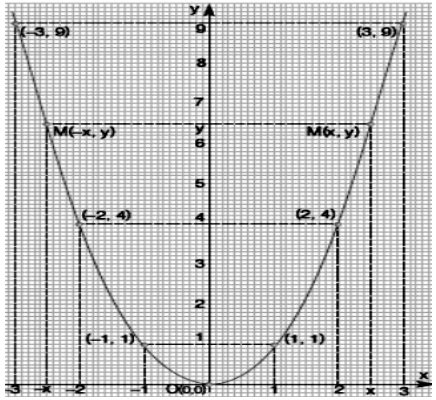
$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



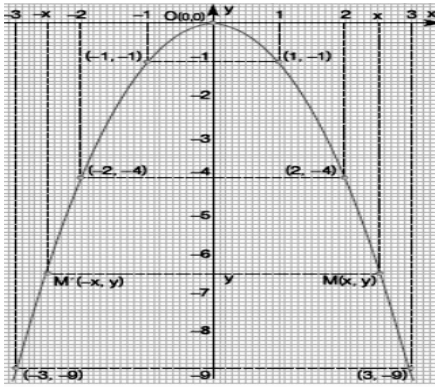


Παράδειγματα

$y = x^2$



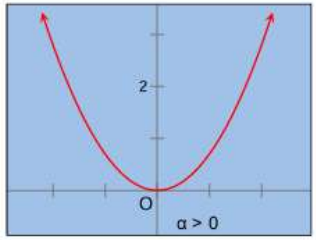
$y = -x^2$

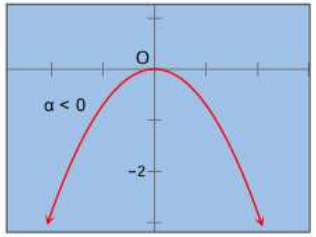


Ce știm despre funcția ψ = αx²

- are o reprezentare grafică de parabolă
- se află deasupra axei xx΄ dacă α>0
- sub axa xx΄ dacă α<0
- are axa de simetrie (adică este tăiată la mijloc de) axa yy΄.

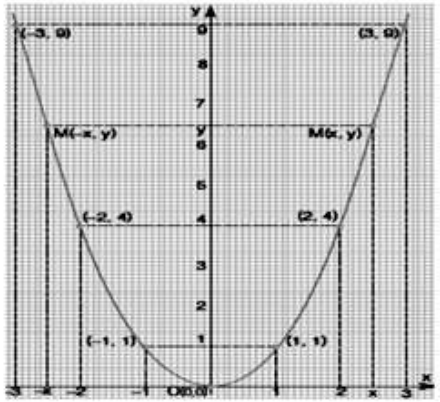
$y = \alpha x^2, \alpha \neq 0$



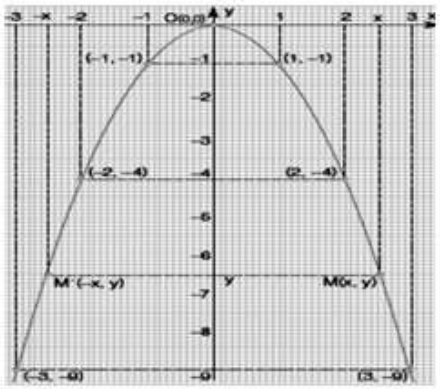


Exemple

$y = x^2$



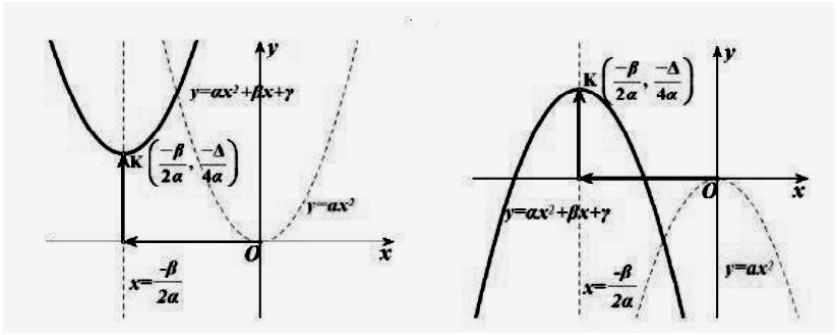
$y = -x^2$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y= \alpha x^2+\beta x+ \gamma$ με $\alpha \neq 0$

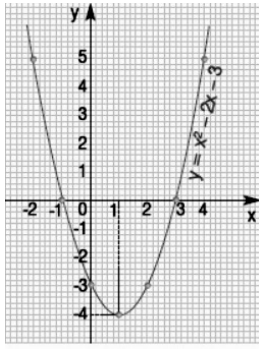
- είναι **παραβολή**με **κ**ορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$,, όπου $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$
- η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχειεξίσωση $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$είναι άξονας συμμετρίας της(δηλαδή τη χωρίζει στη μέση)

- Αν α είναι θετικός αριθμός τότε «κοιτάει προς τα πάνω» και αν το α είναι αρνητικός «κοιτάει προς τα κάτω»

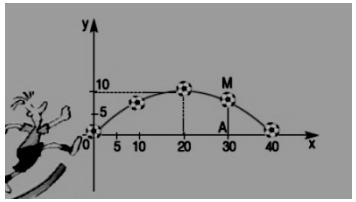


Παραδείγματα-εφαρμογές

$Y = x^2-2x-3$



$y = -\frac{1}{40}x^2+x$, $0 \leq x \leq 40$

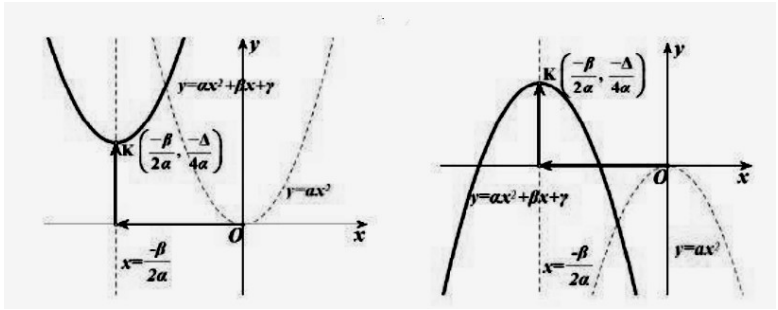


Graficul funcției $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, cu $\alpha \neq 0$

- este o **parabolă** cu vârful în punctul $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$, unde $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

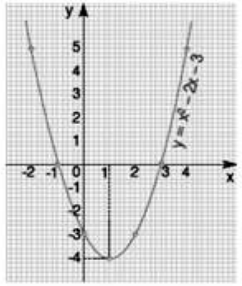
• Dreapta verticală care trece prin vârful K și are ecuația $x = =-\frac{\beta}{2\alpha}$ este axa de simetrie a parabolei (adică o împarte în jumătate).

- Dacă α este un număr pozitiv, parabola „se uită în sus”, iar dacă α este negativă, „se uită în jos”.

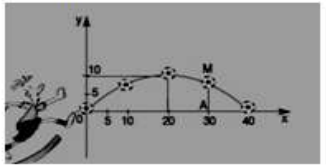


Exemple-aplicații:

$Y = x^2-2x-3$



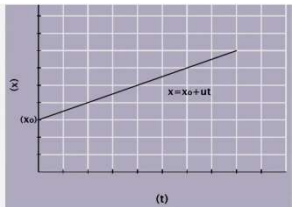
$y = -\frac{1}{40}x^2+x$, $0 \leq x \leq 40$



Σε Φυσική(: Ο χρόνος δεν μπορεί να είναι αρνητικός !!!!)

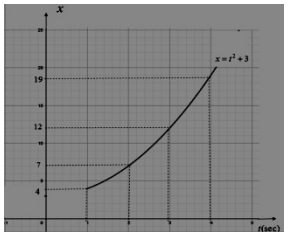
1.**θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή ταχύτητα u**

Τύπος Φυσικής: $x = x_0 + ut.$



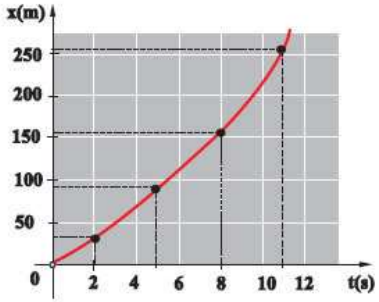
2.**θέση σώματος σε κίνηση με σταθερή επιτάχυνση**

Τύπος Φυσικής $x = t^2+3$



3. **Μετατόπισησε(ομαλά)επιταχυνόμενη κίνηση**

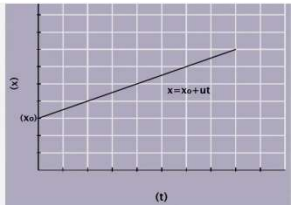
Τύπος: $x = \upsilon_0 t + 1/2\alpha t^2$



În fizică (: Timpul nu poate fi negativ !!!!)

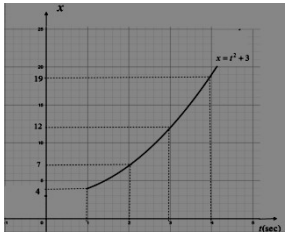
1. Poziția unui corp în mișcare cu viteză constantă u

Formula fizică: $x = x_0 + u\,t.$



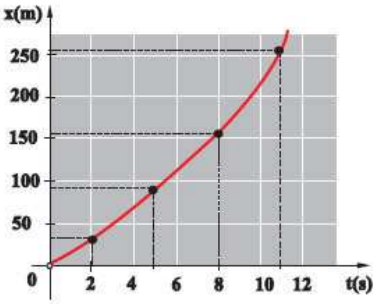
2. Poziția unui corp în mișcare cu accelerație constantă

Formula fizică: $x = t^2 + 3$



3. Deplasarea în mișcare (uniform) accelerată

Formula: $x = \upsilon_0 t + 1/2\alpha t^2$



Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης.
Βασικός ορισμός:Κάθε εξίσωση της μορφής αx+βy =γ ονομάζεται εξίσωση πρώτου βαθμού με αγνώστους x, y, ή γραμμική εξίσωση με αγνώστους x, ψ.

Παραδείγματα:

2x+3ψ =17

-3x+4ψ =11

$\frac{1}{2}$x - $\frac{3}{5}$ψ = - $\frac{7}{12}$

Βασικός ορισμός: Κάθε ζεύγος της μορφής (x,ψ) που επαληθεύει(δηλαδή κάνει σωστή) τη γραμμική εξίσωση αx+βy =γ ονομάζεται **λύση της εξίσωσης**.

Ασκήσεις-παραδείγματα :

Α. Το ζεύγος αριθμών (x,y) = (2,3) είναι λύση της εξίσωσης4x+2y = 14 ;

Είναι (x,y) =(2,3) οπότε x = 2, y = 3

4x+2y = 14

4·2+2·3 = 14

8+6 = 14

14= 14 σωστό

Άρα το ζεύγος (x,y) = (2,3) είναι λύση της εξίσωσης

Β. Το ζεύγος αριθμών (x,y) = (-2,5) είναι λύση της εξίσωσης3x+y = 4 ;

Είναι (x,y) =(-2,5) οπότε x = -2, y = 5

3x+y = 4

3·(-2)+5 = 4

-6+5 = 4

-1= 4 λάθος

Άρα το ζεύγος (x,y) = (-2,5) δεν είναι λύση της εξίσωσης

Άσκηση- εργασία: Να εξετάσετε αν τα επόμενα ζεύγη αριθμών είναι λύση των εξισώσεων που δίνονται :

(x,y) =(2,7)της εξίσωσης4x+y = 15 .

(x,y) =(3,-1)της εξίσωσης 2x-y = 7 .

(x,y) =(-4,2)της εξίσωσηςx+y = 2 .

(x,y) =(-3,-5)της εξίσωσης 2x+y = -11 .

Sisteme de ecuații liniare

Conceptul de ecuație liniară.
Definiție de bază: Fiecare ecuație de forma αx+βy = γ se numește ecuație de gradul întâi cu necunoscutele x, y, sau ecuație liniară cu necunoscutele x, y.

Exemple:

2x+3y =17

-3x+4y =11

$\frac{1}{2}$x - $\frac{3}{5}$ψ = - $\frac{7}{12}$

Definiție de bază: Fiecare pereche de forma (x,y) care verifică (adică face corectă) ecuația liniară αx+βy = γ se numește **soluția ecuației.**

Exerciții-exemple:

A. Perechea de numere (x,y) = (2,3) este soluția ecuației 4x+2y = 14?

(x,y) este (2,3), deci x = 2, y = 3

4x+2y = 14

4·2+2·3 = 14

8+6 = 14

14=14 corect

Deci perechea (x,y) = (2,3) este soluția ecuației

B. Perechea de numere (x,y) = (-2,5) este soluție a ecuației 3x+y = 4?

Este (x,y) = (-2,5), deci x = -2, y = 5

3x+y = 4

3·(-2)+5 = 4

-6+5 = 4

-1 = 4 greșit

Prin urmare, perechea (x,y) = (-2,5) nu este soluție a ecuației

Exercițiu - sarcină: Verificați dacă următoarele perechi de numere sunt soluție a ecuațiilor date:

(x,y) = (2,7) a ecuației 4x+y = 15.

(x,y) = (3,-1) a ecuației 2x-y = 7.

(x,y) = (-4,2) a ecuației x+y = 2.

(x,y) = (-3,-5) a ecuației 2x+y = -11.

Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικήςεξίσωσης.

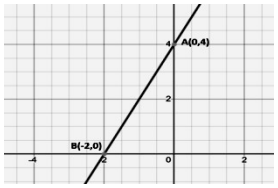
Γεωμετρικά η γραμμική εξίσωση αx+βψ =γ αντιστοιχεί σε μία ευθεία

Παράδειγμα: η εξίσωση -2x+y = 4 αντιστοιχεί στην επόμενη ευθεία.

X	0	-2
y	4	0

A(0,4)

B(-2,0)



Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του.

Βασικός ορισμός:Κάθε ζεύγος δύο γραμμικών εξισώσεων δηλαδή εξισώσεων της μορφής αx+βy =γ και α΄x+β΄y =γ΄ λέμε ότι αποτελεί ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y.

Παραδείγματα γραμμικού συστήματος:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=6 \\ -3x+7y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x+8y=14 \\ -6x+\frac{1}{4}y=\frac{3}{7} \end{cases}$$

Βασικός ορισμός:Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, ψ λέγεται κάθε ζεύγος (x,y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

Παράδειγμα: το ζεύγος(x,y) =(1,2) είναι λύση για το σύστημα;

$$\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x-5y=-9 \end{cases}$$

2·1+4·2 = 10 1-5·2 = -9

2+8 = 10 1-10 = -9

10 = 10 -9 = -9√

Άρα το ζεύγος(x,y) =(1,2) είναι λύση του συστήματος.

Άσκηση-εργασία: Να εξετάσεις αν καθένα από τα επόμενα ζεύγη είναι λύση του συστήματος που δίνεται.

Α)(x,y) =(1,2) (Σ) $\begin{cases} x+2y=10 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

Β)(x,y) =(-1,4) (Σ) $\begin{cases} x+2y=9 \\ x-4y=-17 \end{cases}$

Γ) (x,y) =(1,2) (Σ) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x+y=-1 \end{cases}$

Interpretarea geometrică a ecuației liniare.

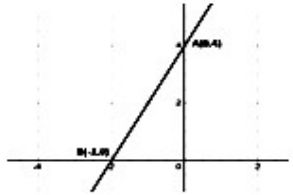
Din punct de vedere geometric, ecuația liniară αx+βy =γ corespunde unei drepte.

Exemplu: ecuația -2x+y = 4 corespunde dreptei următoare.

X	0	-2
y	4	0

A (0,4)

B (-2,0)



Noțiunea de sistem liniar și rezolvarea sa grafică.

Definiție de bază: Fiecare pereche de două ecuații liniare, adică ecuații de forma αx+βy =γ și α'x+β'y =γ', spunem că constituie un sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute x, y.

Exemple de sistem liniar:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=6 \\ -3x+7y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{5}x+8y=14 \\ -6x+\frac{1}{4}y=\frac{3}{7} \end{cases}$$

Definiție de bază: Soluția unui sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute x, y se numește fiecare pereche (x,y) care satisface ecuațiile sale.

Exemplu: Este perechea (x,y) =(1,2) soluție pentru sistemul?

$$\begin{cases} 2x+4y=10 \\ x-5y=-9 \end{cases}$$

2·1+4·2 = 10 1-5·2 = -9

2+8 = 10 1-10 = -9

10 = 10 -9 = -9 √

Deci perechea (x,y) =(1,2) este soluția sistemului.

Exercițiu-sarcină: Verifică dacă fiecare dintre următoarele perechi este soluție a sistemului dat.

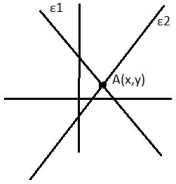
A) (x,y) =(1,2) (Σ) $\begin{cases} x+2y=10 \\ -2x+4y=-2 \end{cases}$

B) (x,y) =(-1,4) (Σ) $\begin{cases} x+2y=9 \\ x-4y=-17 \end{cases}$

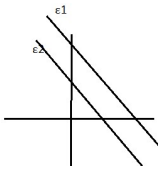
Г) (x,y) =(1,2) (Σ) $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ x+y=-1 \end{cases}$

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος με δύο αγνώστους (γεωμετρικός τρόπος λύσης γραμμικού συστήματος)

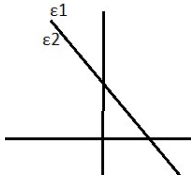
1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει μία **μοναδικήλύση** (x,ψ) τότε οι δύο ευθείες που προκύπτουν **τέμνονται** σε **ένα σημείο** με συντεταγμένες (x,ψ) .



2. Το γραμμικό **σύστημα δεν έχει λύση(αδύνατοσύστημα**) και οι **ευθείες ε$_1$ ε$_2$ είναι παράλληλες** μεταξύ τους.



3. Το γραμμικό σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** (**αόριστο** σύστημα) και οι **ευθείες ε$_1$,ε$_2$ ταυτίζονται(η μία πέφτει πάνω στην άλλη).**



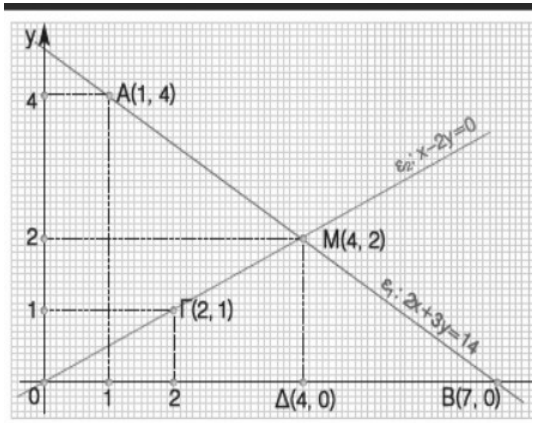
Παραδείγματα

1. Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

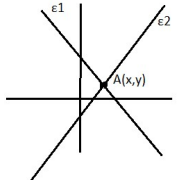
είναι το ζεύγος

(x,y)= (4,2)→x = 4, y = 2

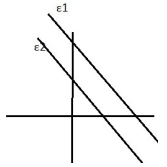


Rezolvare grafică a unui sistem liniar cu două necunoscute (mod geometric de rezolvare a unui sistem liniar)

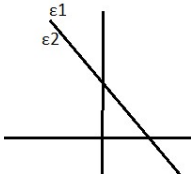
1.Dacă un sistem liniar are o soluție unică (x,y), atunci cele două drepte care rezultă se intersectează într-un punct cu coordonatele (x,y).



2.Sistemul liniar nu are soluție (sistem imposibil) și dreptele e1 și e2 sunt paralele între ele.



3.Sistemul liniar are soluții infinite (sistem nedeterminat) și dreptele e1 și e2 coincid(una cade peste cealaltă)..



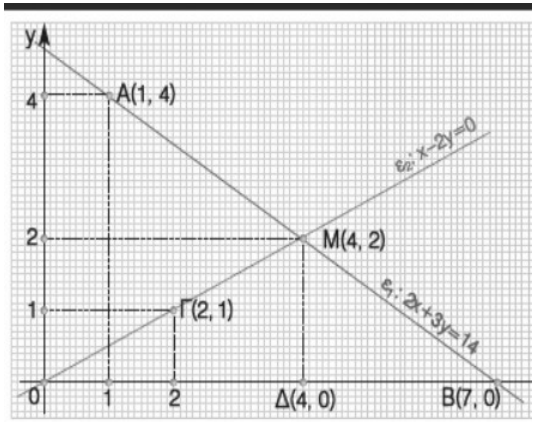
Exemple

1. Soluția sistemului

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + 3y = 14 \end{cases}$$

este perechea

(x,y) = (4,2) → x = 4, y = 2

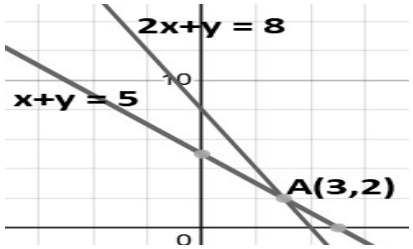


2. Λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

είναι το ζεύγος

(x,y) = (3,2)→x = 3, y = 2

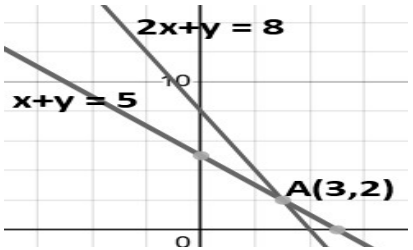


2. Soluția sistemului

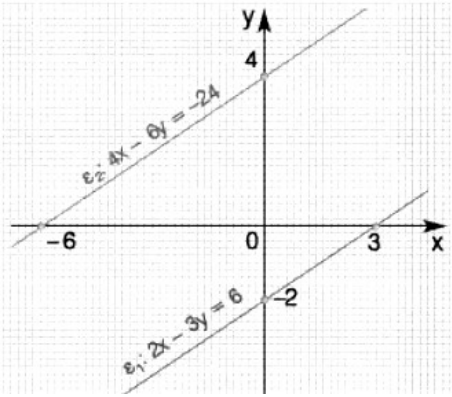
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

este perechea

(x,y) = (3,2)→ x = 3, y = 2



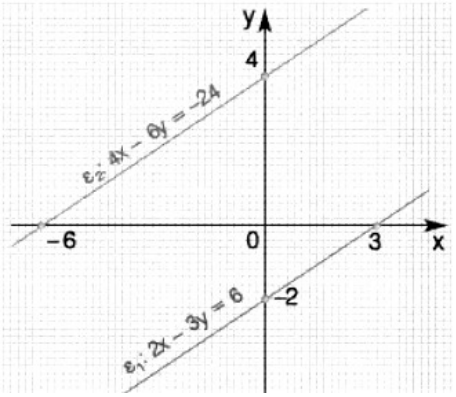
3. το **σύστημα** $\begin{cases} 4x - 6y = -24 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$ **δεν έχει λύση(αδύνατοσύστημα)** και οι **ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες** μεταξύ τους



3. Sistemul

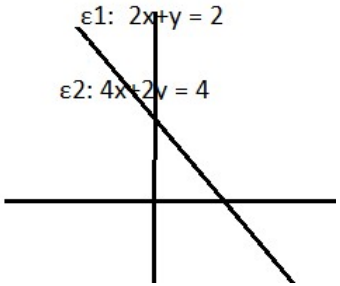
$$\begin{cases} 4x - 6y = -24 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

nu are soluție (sistem imposibil) și dreptele ε_1, ε_2 **paralele între ele**.



sunt

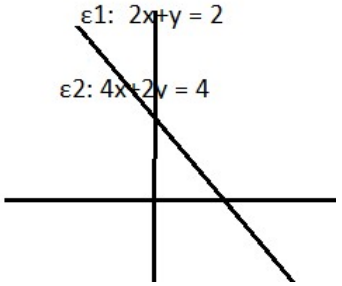
4. το **σύστημα** $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$ έχει **άπειρες λύσεις** και οι **ευθείες ε_1,ε_2 ταυτίζονται.**



4.Sistemul

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$$

are **soluții infinite** și dreptele ε_1, ε_2**coincid**.



Αλγεβρική λύση γραμμικού συστήματος
1^{ος} τρόπος:Μέθοδος αντικατάστασης

1. Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
2. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
3. Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
4. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος

Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

$4(5-3y)+5y = 13$

$20-12y+5y = 13$

$-12y+5y = 13-20$

$-7y = -7$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$y = 1$

$x+3y = 5$

$x+3\cdot 1 = 5$

$x+3 = 5$

Soluție algebrică a unui sistem liniar
Metoda 1: Metoda substituției

1. Rezolvăm una dintre ecuațiile sistemului în funcție de o necunoscută.
2. Înlocuim în cealaltă ecuație a sistemului acea necunoscută cu expresia egală, obținând astfel o ecuație cu o necunoscută, pe care o rezolvăm.
3. Valoarea necunoscutei pe care am găsit-o o înlocuim în ecuația anterioară, astfel aflându-l și pe cealaltă necunoscută.
4. Determinăm soluția sistemului

Exercițiu exemplu 1: Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 4x + 5y = 13 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 5 - 3y \\ 4x + 5y = 13 \end{cases}$$

$4(5-3y)+5y = 13$

$20-12y+5y = 13$

$-12y+5y = 13-20$

$-7y = -7$

$$\frac{-7y}{-7} = \frac{-7}{-7}$$

$y = 1$

$x+3y = 5$

deci soluția sistemului este (x,y) = (2,1)

Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:

$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

5(y-3)+6y= 7

5y-15+6y = 7

5y+6y = 7+15

11y = 22

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

y = 2

x = y-3

x=2-3

x =-1

άρα η λύση του συστήματος είναι:(x,y) = (-1,2)

Exerciţiu exemplu 2: Rezolvaţi sistemul:

$\begin{cases} x - y = -3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x = y - 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$

5(y-3)+6y= 7

5y-15+6y = 7

5y+6y = 7+15

11y = 22

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

y = 2

deci soluţia sistemului este (x,y) = (-1,2)

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα συστήματα:

1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

Exerciţiu-sarcină: Să rezolvaţi sistemele:

1. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} -3x + y = \\ 3x + 4y = \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 4 \end{cases}$

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος –2ος τρόπος:

Μέθοδος αντίθετων συντελεστών

Βήμα 1ο: Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σε έναν άγνωστο.

Βήμα 2ο: Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις. Προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.

Βήμα 3ο: Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε και την τιμή του άλλου αγνώστου. Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

Άσκηση παράδειγμα 1: Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} +$$

-6x+6x-10y+21y =- 2+24

11y =22

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

y = 2

3x+5·2 = 1

3x+10 = 1

3x = 1-10

3x = -9

άρα η λύση του συστήματος είναι:(x,y) = (-3,2)

Rezolvarea algebrică a unui sistem liniar – a 2-a metodă:

Metoda coeficienților opuși

Pasul 1: Înmulțim termenii fiecărei ecuații cu un număr potrivit, astfel încât să apară coeficienți opuși pentru o necunoscută.

Pasul 2: Adunăm termen cu termen cele două ecuații. Rezultă o ecuație cu o singură necunoscută pe care o rezolvăm.

Pasul 3: Înlocuim valoarea necunoscutei găsite într-una dintre ecuațiile sistemului, astfel găsim și valoarea celeilalte necunoscute. Determinăm soluția sistemului.

Exercițiu exemplu 1: Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -6x - 10y = -2 \\ 6x + 21y = 24 \end{cases} +$$

-6x+6x-10y+21y =- 2+24

11y =22

$$\frac{11y}{11} = \frac{22}{11}$$

y = 2

3x+5·2 = 1

3x+10 = 1

3x = 1-10

3x = -9

deci soluția sistemului este (x,y) = (-3,2)

Άσκηση παράδειγμα 2: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} +$$

4x+5x-2y+2y =6+6

9x =12

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$x = \frac{4}{3}$

2x-y = 3

$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$

$\frac{8}{3} - y = 3$

$-y = 3 - \frac{8}{3}$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

$$\frac{-1 \cdot y}{-1} = \frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

$y = -\frac{1}{3}$

X = -3

άρα η λύση του συστήματος είναι:(x,y) = $(-3, -\frac{1}{3})$

Exerciţiu exemplu 2: Rezolvaţi sistemul:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} +$$

4x+5x-2y+2y =6+6

9x =12

$$\frac{9x}{9} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

$x = \frac{4}{3}$

2x-y = 3

$2 \cdot \frac{4}{3} - y = 3$

$\frac{8}{3} - y = 3$

$-y = 3 - \frac{8}{3}$

$$-y = \frac{9}{3} - \frac{8}{3}$$

$$-y = \frac{1}{3}$$

1

deci soluţia sistemului este: (x,y) = $(-3, -\frac{1}{3})$

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:

1. $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + 5y = -4 \\ -7x + 8y = -3 \end{cases}$

Πολύπλοκα συστήματα:

Αν το σύστημα είναι πολύπλοκο τότε για να απλουστευθούν οι εξισώσεις του συστήματος , κάνουμε **απαλοιφή παρονομαστών** και όλες τις απαιτούμενες **πράξεις** . Έπειτα το **τακτοποιούμε** και αποφασίζουμε ποια μέθοδος είναι κατάλληλη για την επίλυσή του .

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \\ \frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2}+14\frac{2y+1}{7}+14\frac{2}{1}=0 \\ 6\frac{x+6}{3}-6\frac{y-6}{2}=6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5)+2(2 \\ 2(x+6)-3(y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-35+4y+2+28=0 \\ 2x+12-3y+18=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\cdot \\ -7\cdot \end{matrix} \begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 7x+4y=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x+4y=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x+4(-4)=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x=21 \end{vmatrix}$$

Άσκηση-εργασία: Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα

1 $\begin{cases} \frac{x-1}{4}-y=1 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=-1 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{3}=3 \\ \frac{x+4}{3}-\frac{y-6}{2}=4 \end{cases}$

Exerciţiu-sarcină: Să rezolvaţi următoarele sisteme folosind metoda coeficienţilor opuşi:

1. $\begin{cases} -3x + y = 7 \\ 3x + 4y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x + 5y = - \\ -7x + 8y = \end{cases}$

Sisteme complexe:

Dacă sistemul este complex, atunci pentru a simplifica ecuatiile sistemului, **eliminămnumitorii** şi efectuăm toate operaţiile necesare. Apoi le **ordonăm** şi decidem care metodă este potrivită pentru rezolvarea lui.

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \\ \frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14\frac{x-5}{2}+14\frac{2y+1}{7}+14\frac{2}{1}=0 \\ 6\frac{x+6}{3}-6\frac{y-6}{2}=6\frac{8}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5)+2(2y \\ 2(x+6)-3(y- \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x-35+4y+2+28=0 \\ 2x+12-3y+18=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\cdot \\ -7\cdot \end{matrix} \begin{cases} 7x+4y=5 \\ 2x-3y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x \\ -14 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 7x+4y=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x+4y=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x+4(-4)=5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7x=21 \end{vmatrix}$$

Exerciţiu-sarcină: Să rezolvaţi următoarele sisteme

1 $\begin{cases} \frac{x-1}{4}-y=1 \\ \frac{x}{}+\frac{y}{}=-1 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} \frac{x-5}{2}+\frac{2y}{} \\ \frac{x+4}{}-\frac{y-}{} \end{cases}$

Παρατηρήσεις στη λύση συστημάτων:

Η γραφική λύση ενός συστήματος δεν βρίσκει πάντα ακριβώς τη λύση του, αφού συχνά οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι ακριβώς, όμως λύνει το σύστημα έστω και με προσέγγιση όταν η άλγεβρα είναι αδύνατο, ή πολύ δύσκολο να το λύσει .

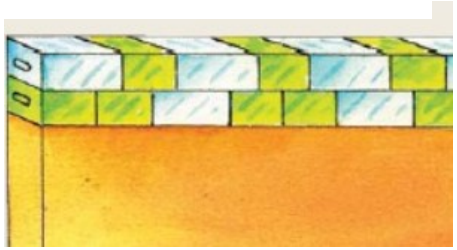
Η αλγεβρική λύση του μας δίνει τη δυνατότητα να προσδιορίζουμε με ακρίβεια τη λύση του (αν υπάρχει) σε οποιαδήποτε περίπτωση.

Το αν **θα διαλέξουμε** τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών, ή αντικατάστασης είναι επιλογή μας(διαλέγουμε όποια μας «βολεύει» περισσότερο, σε κάποια συστήματα όμως εξυπηρετεί να γνωρίζουμε και τις 2.

Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι λύσης συστημάτων ….

Προβλήματα:

1. Στο πάνω μέρος ενός τοίχου μήκους 180 cm έχουν τοποθετηθεί πράσινα και γαλάζια διακοσμητικά τούβλα σε δύο σειρές. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε πράσινου και γαλάζιου τούβλου.



2. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ, αν οι πλευρές έχουν εξισώσεις ΑΒ: 2χ – 3y = 1 , ΑΓ: χ + y = 3 , ΒΓ: x – 3y = 3

3.Σε ένα αγρόκτημα είναι κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 140 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

4. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

5. Να βρεθούν δύο συμπληρωματικές γωνίες, αν η μία από αυτές είναι μεγαλύτερη από το διπλάσιο της άλλης κατά 12º.

Observații asupra soluționării sistemelor:

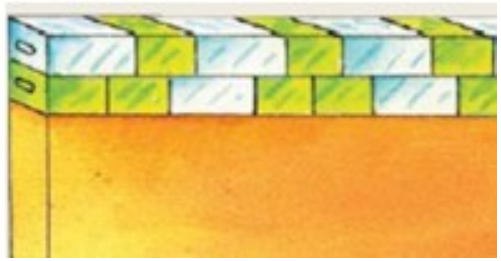
Soluția grafică a unui sistem nu găsește întotdeauna exact soluția sa, deoarece de multe ori coordonatele punctului comun al celor două drepte nu sunt exacte, însă rezolvă sistemul măcar aproximativ atunci când algebra este imposibilă sau foarte dificil de rezolvat.

Soluția algebrică ne oferă posibilitatea de a determina cu exactitate soluția sa (dacă există) în orice situație.
Dacă vom alege metoda coeficienților opuși sau metoda substituției este alegerea noastră (alegem pe cea care ne „convine” mai mult, însă în unele sisteme este util să cunoaștem ambele metode).

Există și alte metode de rezolvare a sistemelor….

Probleme:

1. În partea de sus a unui perete cu lungimea de 180 cm au fost plasate cărămizi de decor verzi și albastre în două rânduri. Calculați lungimea fiecărei cărămizi verzi și albastre.



2. Calculați coordonatele vârfurilor triunghiului ABΓ, dacă laturile au ecuațiile AB: 2x – 3y = 1, AΓ: x + y = 3, BΓ: x – 3y = 3

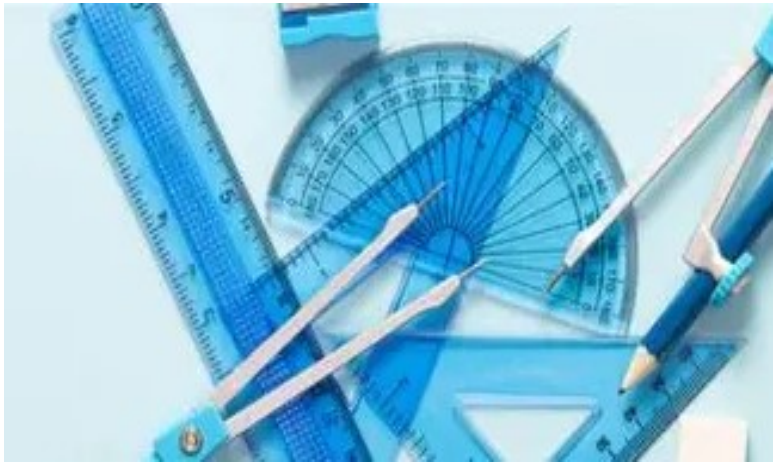
3. Într-o fermă sunt găini și iepuri. Dacă animalele au împreună 50 de capete și 140 de picioare, să se afle câte găini și câți iepuri sunt.

4. Suma cifrelor unui număr format din două cifre este 14. Dacă inversăm cifrele, rezultă un număr cu 36 de unități mai mic. Să se găsească numărul.

5. Să se găsească două unghiuri complementare, dacă unul dintre ele este mai mare decât dublul celuilalt cu 12º.

Ας μελετήσουμε Γεωμετρία!

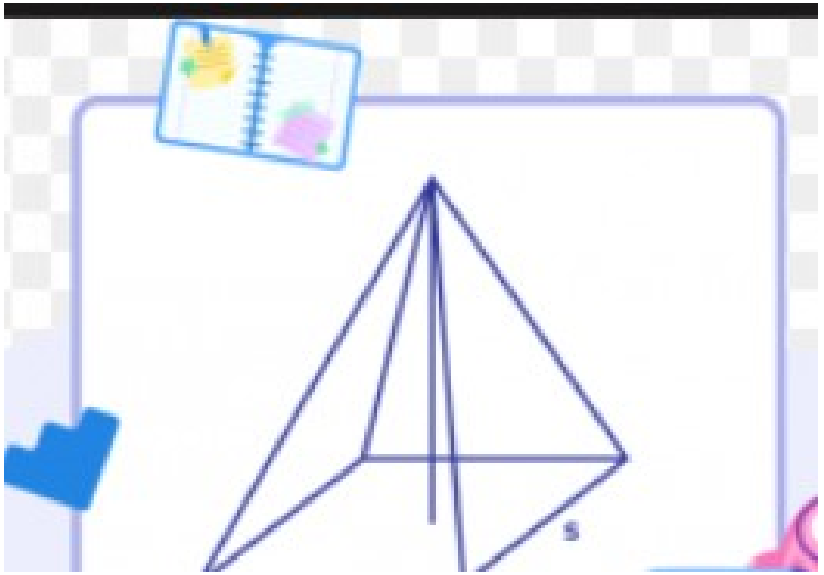
Τεύχος Γ΄



Διαπολιτισμικό Γυμνάσιο Αθήνας

Să studiem geometria!

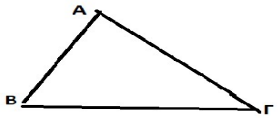
Numărul 3



Liceul Intercultural din Atena

Γεωμετρία

Κύρια και Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Σχήμα: 

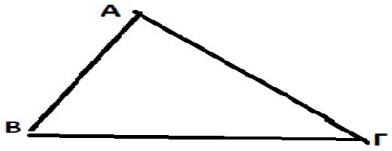
Ονομασία σχήματος :**τρίγωνο ΑΒΓ**

Βασική παρατήρηση: Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις γωνίες και τρεις πλευρές.

Βασικός ορισμός: Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου αποτελούν τα κύρια στοιχεία του.

Πλευρές τριγώνου

Παράδειγμα:



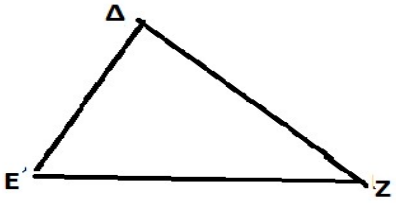
τρίγωνο ΑΒΓ

πλευρές τριγώνου **ΑΒ ή γ**

ΑΓ ή β

ΒΓ ή α

Παράδειγμα



τρίγωνο ΔΕΖ

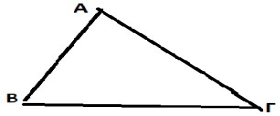
πλευρές τριγώνου **ΔΕ ή ζ**

ΔΖ ή ε

ΕΖ ή δ

Geometrie

Elemente primare și secundare ale unui triunghi

Formă: 

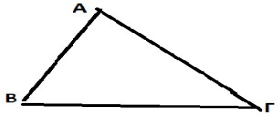
***Numele formei*: triunghiul ABC**

Observație de bază: În fiecare triunghi există trei unghiuri și trei laturi.

Definiție de bază: Laturile și unghiurile unui triunghi constituie elementele sale principale.

Laturile unui triunghi

Exemplu:



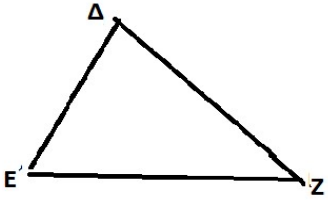
triunghiul ABΓ

laturile triunghiului AB sau γ

AΓ sau β

BΓ sau α

Exemplu



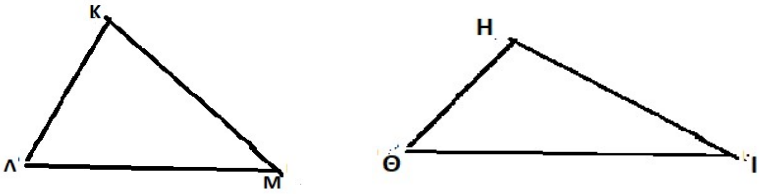
triunghiul DEZ

laturile triunghiului DE sau z

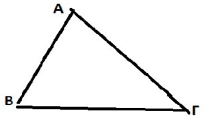
DZ sau e

EZ sau δ

Άσκηση εργασία Να ονομάσετε τα επόμενα τρίγωνα και τις πλευρές τους με δύο τρόπους



Γωνίες τριγώνου:



τρίγωνο ΑΒΓ

γωνίες τριγώνου

$\widehat{A}$ ή Β$\widehat{A\Gamma}$ ή Γ$\widehat{AB}$

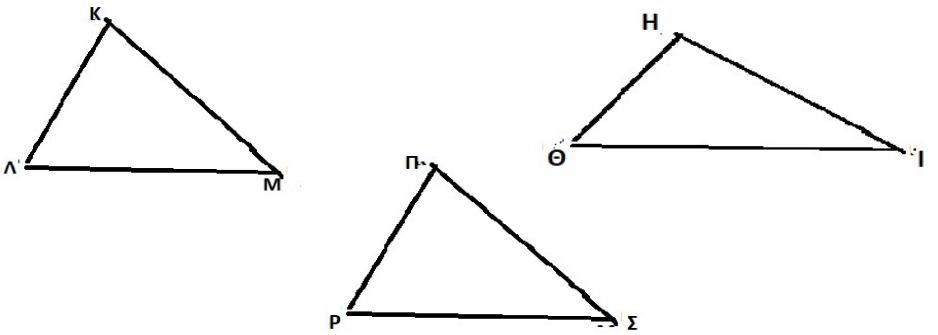
$\widehat{B}$ ή Α$\widehat{B\Gamma}$ ή Γ$\widehat{BA}$

$\widehat{\Gamma}$ ή Α$\widehat{\Gamma B}$ ή Β$\widehat{\Gamma A}$

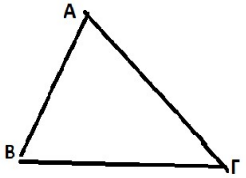
Βασική παρατήρηση: οι Γωνίες μετριούνται σε μοίρες

Άσκηση εργασία 2: να ονομάσετε τις γωνίες των τριγώνων της άσκησης 1 από το σχολικό βιβλίο σελίδα 196

Exercițiu pentru acasă **Denumiți următoarele triunghiuri și laturile lor în două moduri**



Unghiuri triunghi:



triunghi ABC

unghiuri triunghi

$\widehat{A}$ sau B$\widehat{A\Gamma}$ sau Γ$\widehat{AB}$

$\widehat{B}$ sau A$\widehat{B\Gamma sau}$ Γ$\widehat{BA}$

$\widehat{\Gamma}$ sau A$\widehat{\Gamma B}$ sau B$\widehat{\Gamma A}$

Observație de bază: Unghiurile se măsoară în grade

Exercițiu pentru acasă 2: denumiți unghiurile triunghiurilor din exercițiul 1 de la pagina 196 a manualului

Βασική παρατήρηση το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° δηλαδή ισχύει

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

Άσκηση-Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{B}$ στο επόμενο τρίγωνο:

Λύση:

Ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

$70° + \hat{B} + 50° = 180°$

$\hat{B} + 120° = 180°$

$\hat{B} = 180° - 120°$

$\hat{B} = 60°$

Άσκηση-Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η γωνία $\hat{\Gamma}$ στο επόμενο τρίγωνο

Λύση:

Ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

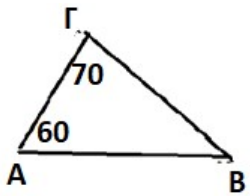
$60° + 40° + \hat{\Gamma} = 180°$

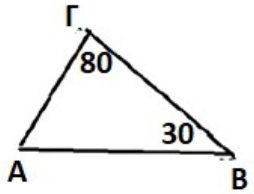
$\hat{\Gamma} + 100° = 180°$

$\hat{\Gamma} = 180° - 100°$

$\hat{\Gamma} = 60°$

Άσκηση-Εργασία: Να υπολογιστούν οι άγνωστες γωνίες στα επόμενα τρίγωνα:



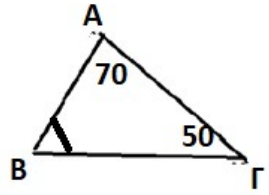


Observație de bază: suma unghiurilor unui triunghi este 180°, adică

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

Exemplu de exercițiu: Calculați unghiul $\hat{B}$ în următorul triunghi:

Soluție:



valabil: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

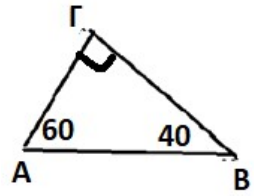
$70° + \hat{B} + 50° = 180°$

$\hat{B} + 120° = 180° \rightarrow \hat{B} = 180° - 120°$

$\hat{B} = 60°$

Exemplu de exercițiu: Calculați unghiul $\hat{\Gamma}$ în următorul triunghi

Soluție:



Valid: : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

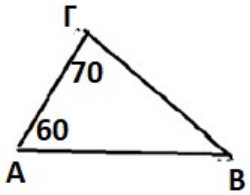
$60° + 40° + \hat{\Gamma} = 180°$

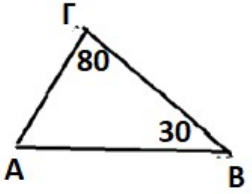
$\hat{\Gamma} + 100° = 180°$

$\hat{\Gamma} = 180° - 100°$

$\hat{\Gamma} = 60°$

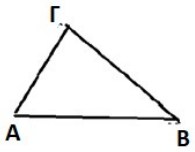
Exercițiu: Calculați unghiurile necunoscute din următoarele triunghiuri:





Βασικός ορισμός: Η γωνία που βρίσκεται ανάμεσα (δηλαδή περιέχεται σε δύο πλευρές ενός τριγώνου) ονομάζεται περιεχόμενη γωνία.

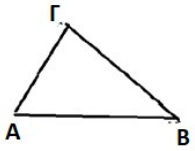
Παράδειγμα:



Πλευρές	περιεχόμενη γωνία
ΑΒ, ΑΓ	$\hat{A}$
ΒΓ, ΒΑ	$\hat{B}$
ΓΑ, ΓΒ	$\hat{\Gamma}$

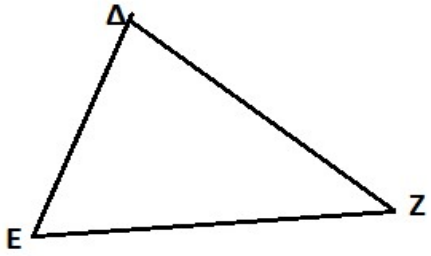
Βασικός ορισμός: Οι γωνίες ενός τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιας πλευράς (δηλαδή ακουμπούν-πρόσκεινται - στην πλευρά αυτή) ονομάζονται προσκείμενες γωνίες.

Παράδειγμα:



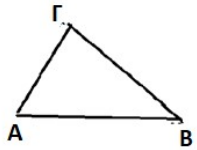
Πλευρά	προσκείμενες γωνίες
ΑΒ	$\hat{A}$, $\hat{B}$
ΒΓ	$\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$
ΓΑ	$\hat{\Gamma}$,$\hat{A}$

Άσκηση-Εργασία: στο τρίγωνο ΔΕΖ να βρείτε
Α) την περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΔΕ, ΔΖ
Β) τις προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΕΖ



Definiție de bază: Unghiul care se află între (adică este conținut în două laturi ale unui triunghi) se numește unghi inclus.

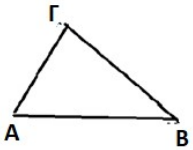
Exemplu:



Unghiul	**laturilor incluse**
ΑΒ, ΑΓ	$\hat{A}$
ΒΓ, ΒΑ	$\hat{B}$
ΓΑ, ΓΒ	$\hat{\Gamma}$

Definiție de bază: Unghiurile unui triunghi care au ca vârfuri capetele unei laturi (adică se apropie de această latură) se numesc unghiuri adiacente.

Exemplu:



Unghiul	**adiacente laturilor**
ΑΒ	$\hat{A}$, $\hat{B}$
ΒΓ	$\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$
ΓΑ	$\hat{\Gamma}$,$\hat{A}$

Unghiuri adiacente laturilor

AB A^, B^

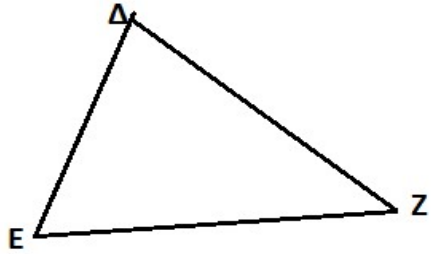
BG B^, C^

CA C^,A^

Exercițiu: în triunghiul DEZ, găsiți

A) unghiul inclus al laturilor DEZ, ΔZ

B) unghiurile adiacente ale laturii EZ

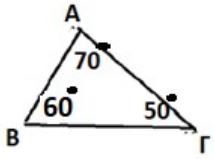


Είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες:

τα τρίγωνα ανάλογα με τις γωνίες τους διακρίνονται σε:

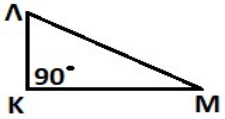
Α)Οξυγώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται οξυγώνιο όταν όλες οι γωνίες του είναι οξείες (δηλαδή λιγότερο από 90°)

Παράδειγμα:

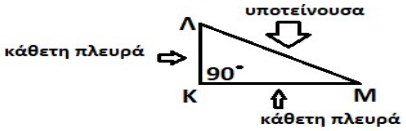


Β) Ορθογώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο τρίγωνο όταν έχει μια ορθή γωνία(δηλαδή μία γωνία ίση με 90°)

Παράδειγμα:

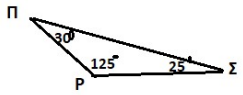


Βασική παρατήρηση(Ονομασία πλευρών): Η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται υποτείνουσα ενώ η πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία ονομάζονται κάθετες πλευρές



Γ) Αμβλυγώνιο τρίγωνο: ένα τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο τρίγωνο όταν έχει μια αμβλεία γωνία(δηλαδή μία γωνία μεγαλύτερη από 90°)

Παράδειγμα:

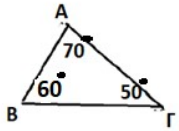


Tipuri de triunghiuri în funcție de unghiuri:

Triunghiurile în funcție de unghiurile lor se disting în:

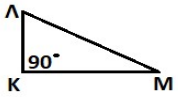
A) Triunghi ascuțit: un triunghi se numește triunghi ascuțit atunci când toate unghiurile sale sunt ascuțite (adică mai mici de 90°)

Exemplu:

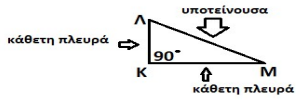


B) Triunghi dreptunghic: un triunghi se numește triunghi dreptunghic atunci când are un unghi drept (adică un unghi egal cu 90°)

Exemplu:

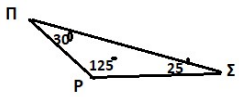


Observație de bază (Denumirea laturilor): Latura opusă unghiului drept se numește ipotenuză, în timp ce laturile care formează unghiul drept se numesc laturi perpendiculare



C) Triunghi obtuz: un triunghi se numește triunghi obtuz atunci când are un unghi obtuz (adică un unghi mai mare de 90°)

Exemplu:



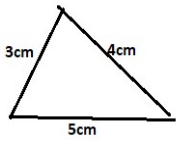
Είδη τριγώνου ως προς τις πλευρές:

Τα τρίγωνα διακρίνονται στις επόμενες κατηγορίες ως προς τις πλευρές

1. Σκαληνό

Ένα τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό όταν όλες οι πλευρές του είναι άνισες μεταξύ τους.

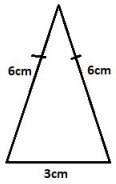
Παράδειγμα



2. Ισοσκελές

Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισοσκελές όταν οι δύο πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

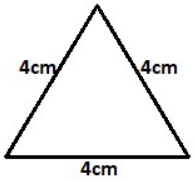
Παράδειγμα



3. Ισόπλευρο

Ένα τρίγωνο ονομάζεται ισόπλευρο όταν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους.

Παράδειγμα



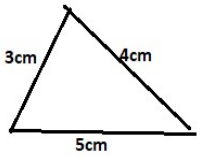
Tipuri de triunghiuri după laturi:

Triunghiurile sunt împărțite în următoarele categorii după laturi

1. Scalen

Un triunghi se numește scalen atunci când toate laturile sale sunt inegale între ele.

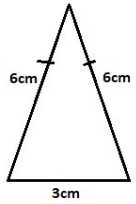
Exemplu



2. Isoscel

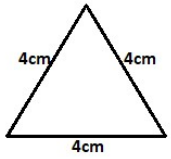
Un triunghi se numește isoscel atunci când două dintre laturile sale sunt egale între ele.

Exemplu



3. Echilateral

Un triunghi se numește echilateral atunci când toate cele trei laturi ale sale sunt egale între ele.

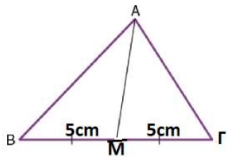


Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος τριγώνου

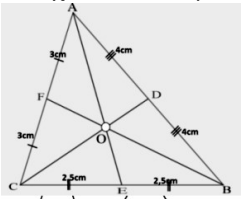
Διάμεσος τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ξεκινάει από την κορυφή του τριγώνου και καταλήγει στο μέσο της απέναντι πλευράς (υπενθύμιση: **μέσο** ενός ευθύγραμμου τμήματος ονομάζεται το σημείο που χωρίζει το ευθύγραμμα τμήμα σε δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα)

Παράδειγμα



Παράδειγμα-άσκηση:

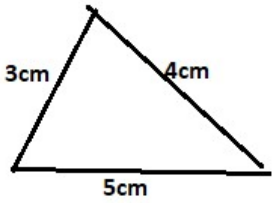
Να σχεδιάσετε τις διαμέσους του τριγώνου

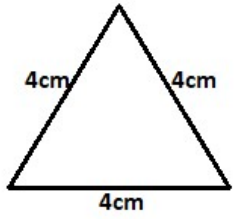


Βασική παρατήρηση: Οι διάμεσοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση-εργασία:

Να σχεδιάσετε τις διαμέσους των τριγώνων:



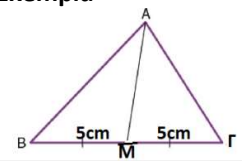


Elementele secundare ale unui triunghi

Mediana unui triunghi

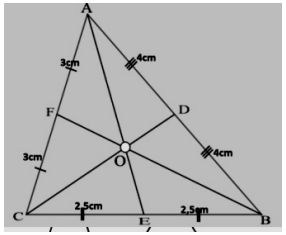
Mediana unui triunghi este segmentul de dreaptă care pornește de la vârful triu
și se termină la mijlocul laturii opuse (reamintire: punctul de mijloc al unui segn
dreaptă este punctul care împarte segmentul de dreaptă în două segmente ega

Exemplu



Exemplu-exercițiu:

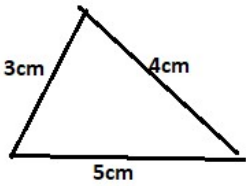
Desenați medianele triunghiului

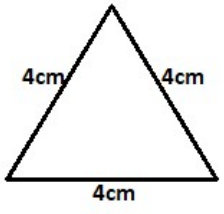


Observație de bază: Medianele ***trec prin același punct.***

Exercițiu-lucrări:

Desenați medianele triunghiurilor:

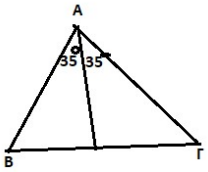




Διχοτόμος τριγώνου

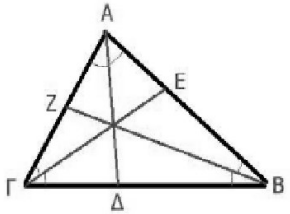
Διχοτόμος τριγώνου είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή μιας γωνίας τριγώνου με την απέναντι πλευρά και χωρίζει τη γωνία αυτή σε δύο ίσα μέρη.

Παράδειγμα



Παράδειγμα-άσκηση:

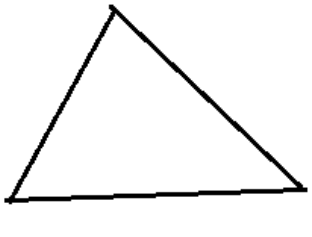
Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους του τριγώνου:

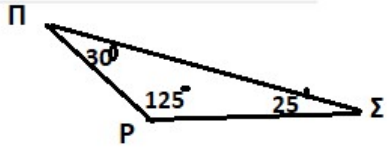


Βασική παρατήρηση: Οι διχοτόμοι περνούν-διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Άσκηση-εργασία:

Να σχεδιάσετε τις διχοτόμους των τριγώνων:

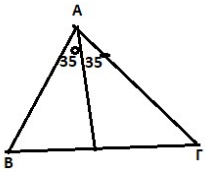




Bisectoarea unui triunghi

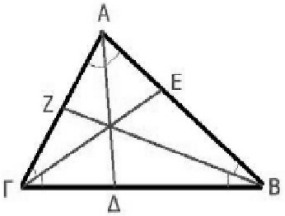
O bisectoare de triunghi este un segment de dreaptă care conectează vârful un
al unui triunghi cu latura opusă și împarte acel unghi în două părți egale.

Exemplu



Exemplu-exercițiu:

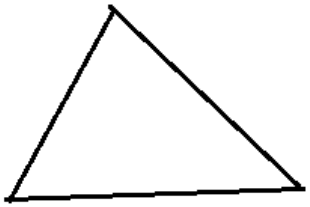
Desenați bisectoarele triunghiului

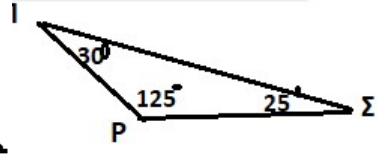


Observație de bază: Bisectoarele trec prin același punct.

Exercițiu-lucru:

Desenați bisectoarele triunghiurilor:

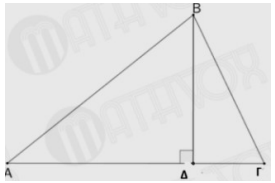




Ύψος ενός τριγώνου

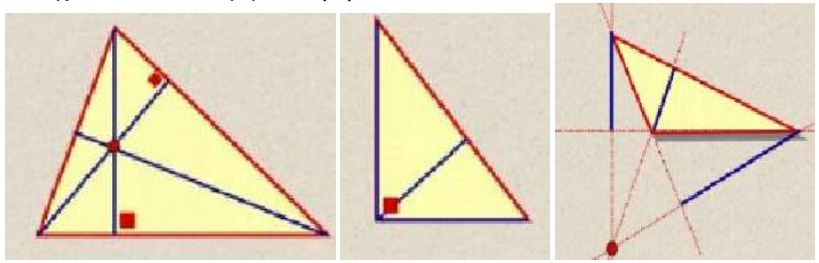
Ύψος ενός τριγώνου είναι το **κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από μία κορυφή προς την απέναντι πλευρά** (ή την προέκτασή της).

Παράδειγμα



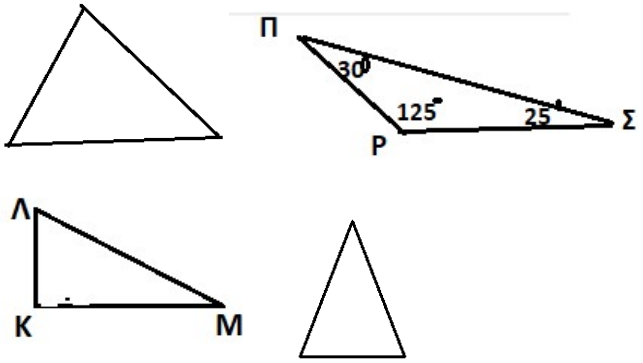
Παράδειγμα-άσκηση:

Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:



Άσκηση-εργασία:

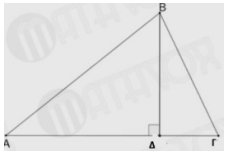
Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων:



Înălțimea unui triunghi

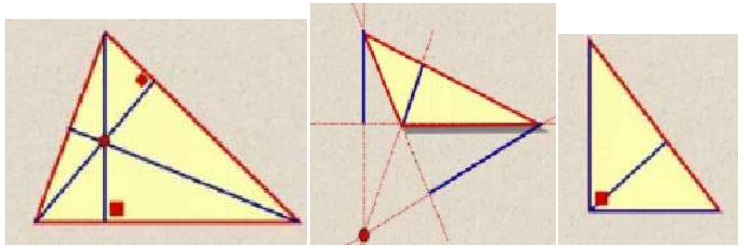
Înălțimea unui triunghi este segmentul de linie perpendicular de la un vârf la pa opusă (sau extensia sa).

Exemplu



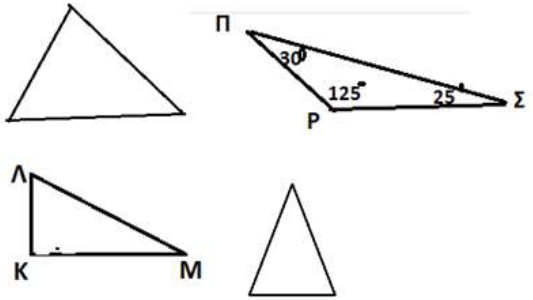
Exemplu-exercițiu:

Desenați înălțimile triunghiurilor:

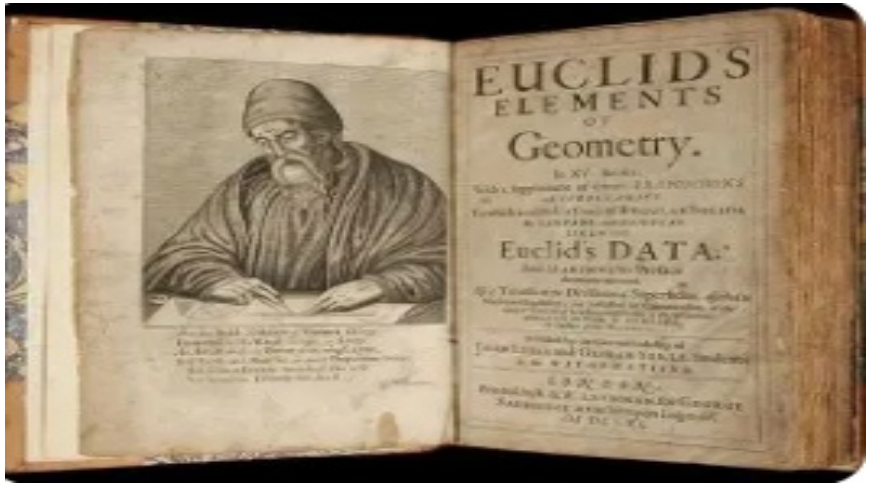


Exercițiu-lucru:

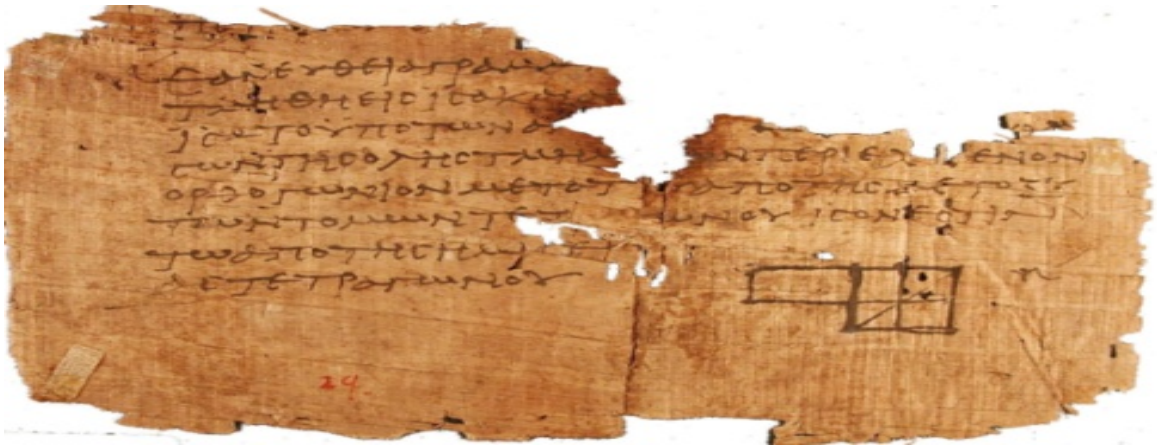
Desenați înălțimile triunghiurilor:



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ



GEOMETRIE
TRIUNGHIURI
ECHILATERALE



ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ-ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΘΑ ΜΑΣ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΓΙΑ

- ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ Γ΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
- ΛΥΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΕΠΟΜΕΝΩΝ ΤΑΞΕΩΝ
- ΤΑ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
- ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΟΠΩΣ ΦΥΣΙΚΗ , ΧΗΜΕΙΑ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ

ΚΑΙ ΤΕΛΟΣ

- **ΚΑΘΗΜΕΡΙΝΑ ΟΠΟΥ ΑΠΟΦΕΥΓΟΥΜΕ ΝΑ ΔΕΧΟΜΑΣΤΕ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗ!!**

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΤΟΡΙΚΑ …

- ✓ ξεκίνησε από τον Θαλή (639-548 π.Χ.)
- ✓ αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους.
- ✓ συστηματοποιήθηκε από τον Πλάτωνα και τον Αριστοτέλη.
- ✓ Τελειοποιήθηκε από τον Ευκλείδη (330-270 π.Χ.)

Πώς αποδεικνύεται μια γεωμετρική πρόταση;

✓ Η Ευκλείδεια απόδειξη ξεκινά με τα **δεδομένα(υπόθεση)** και **τι ζητάμε να αποδειχθεί(ζητούμενα-συμπέρασμα).** Για να είναι σωστό ό,τι γράφουμε σε μια απόδειξη πρέπει να μπορεί να δικαιολογηθεί από δεδομένα, αξιώματα, προηγούμενες αποδεδειγμένες προτάσεις .

- ✓ στηρίζεται στους κανόνες της Λογικής.
- ✓ καθώς βγάζουμε συμπεράσματα σημαντικό ρόλο παίζει η διαίσθηση και η εποπτεία.

.

TRIUNGHIURI ECHILATERALE - INTRODUCERE ÎN DOVEZĂ

METODA DOVEDIRII NE VA FI UTILĂ PENTRU

• GEOMETRIA CLASEI A III-A GIMNAZIU

• REZOLVAREA PROBLEMELOR COMPLEXE LA MATEMATICĂ ÎN CLASELE URMĂTOARE

• MATEMATICA UNIVERSITARĂ

• APLICAREA ÎN ȘTIINȚE CA FIZICA, CHIMIA, ECONOMIA

ȘI ÎN FINAL

• ÎN VIAȚA DE ZI CU ZI CÎND EVITĂM SĂ ACCEPTĂM INFORMAȚII FĂRĂ DOVADĂ!!

DOVEZEA ISTORIC…

→a început cu Thales (639-548 î.Hr.)⎦

→a fostdezvoltată de PitagoraşiPythagoreeni.⎦

→a fostsistematizată de PlatonşiAristotel.⎦

→a fostperfecționată de Euclid (330-270 î.Hr.)⎦

Cum se dovedește o propoziţiegeometrică?

→Dovadaeuclidianăîncepe cu datele (ipoteza) şiceeacedorimsădemonstrăm (ceeace se cere - concluzie). Pentru ca ceeacescriemîntr-o dovadăsă fie corect, trebuiesăpoată fi justificatprin date, axiome, propoziţii demonstrate anterior.⎦

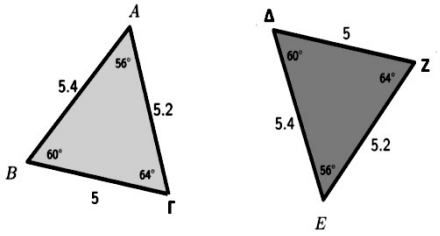
→ se bazeazăperegulilelogicii.⎦

→pemăsurăcetragemconcluzii, un rol important îljoacăintuiţiaşiobservaţia.

Ίσα τρίγωνα

Βασική πρόταση 1: Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Παράδειγμα:Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

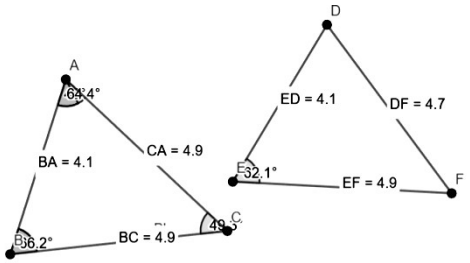


Στα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ παρατηρούμε ότι

ΑΒ = ΔΕ		$\hat{A} = \hat{\Delta}$
ΑΓ = ΔΖ	και	$\hat{B} = \hat{E}$
ΒΓ = ΕΖ		$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

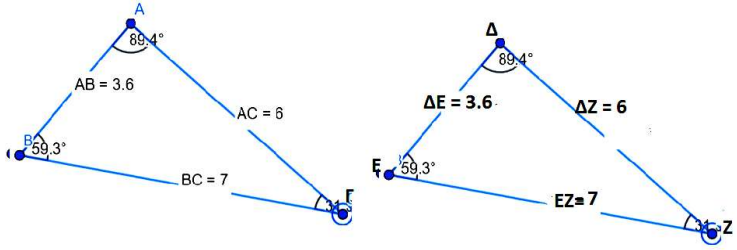
οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα, γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
Συμβολίζουμε:ΑΒΓ = ΔΕΖ.

Ερώτηση κρίσεως:Να εξετάσετε αν τα τρίγωναABC και DEF είναι ίσα.



Στα τρίγωνα ABCκαι DEF παρατηρούμε ότι οι γωνίες B και E δεν είναι ίσες, επίσης οι πλευρές CAκαι DFδεν είναι ίσες,επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δεν είναι ίσα.

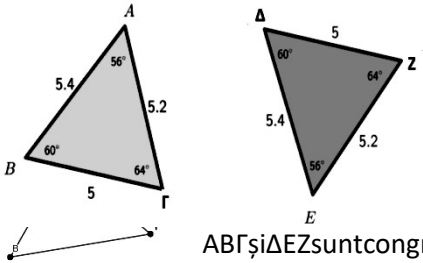
Άσκηση εργασία: Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



Triunghiuricongruente

Propoziție de bază 1: Dacădouătriunghiuri au laturileloregalepereche cu perecheșiunghiurilecorespunzătoareegale, atuncielesuntcongruente.

Exemplu: Verificațidacătriunghiurile ABΓșiΔEZsuntcongruente.

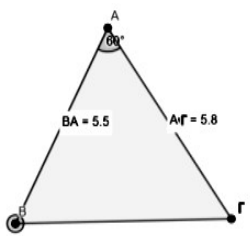


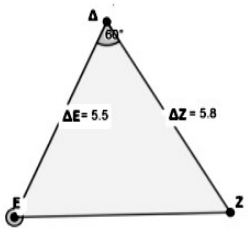
Întriunghiurile ABC și DEZ observămcă

AB = ΔE		$\hat{A} = \hat{\Delta}$
AΓ = ΔZ	și	$\hat{B} = \hat{E}$
BΓ = EZ		$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

prinurmare, triunghiurile ABΓșiΔEZsuntcongruente, deoarece au laturileegalepereche cu perecheșiunghiurilecorespunzătoareegale.
Notăm: **ABC = DEZ.**

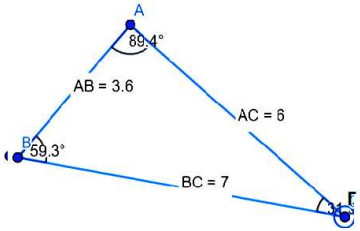
Întrebare de evaluare: Verificațidacătriunghiurile ABC și DEF suntcongruente.

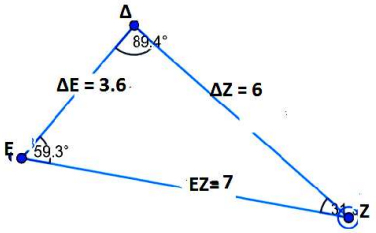




Întriunghiurile ABC și DEF observămcăunghiurile B și E nu suntegale, de asemenealaturile CA și DF nu suntegale, prinurmaretriunghiurile ABC și DEZ nu suntcongruente.

Exercițiu de lucru: Verificațidacătriunghiurile ABC și DEZsuntcongruente.





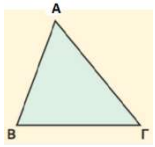
Κριτήρια ισότητας τριγώνων

1^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση τότε είναι ίσα (Π-Γ-Π)

Βασικές επισημάνσεις:

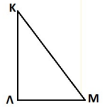
1. η έκφραση ή σε μία προς μία σημαίνει αντίστοιχες πλευρές
2. η έκφραση **περιεχόμενη γωνία** σημαίνει γωνία που περιέχεται ανάμεσα στις ίσες πλευρές

παράδειγμα για επισήμανση2:



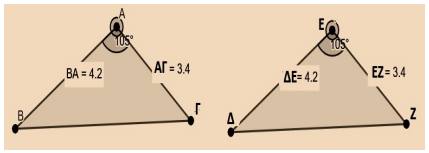
περιεχόμενη γωνία στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ είναι η γωνία $\hat{A}$

Η περιεχόμενη γωνία στις πλευρές ΛΚ και ΛΜ είναι η γωνία $\hat{\Lambda}$.



ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Όταν δυο τρίγωνα είναι ίσα τότε έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα (γωνίες και πλευρές)

Άσκηση παράδειγμα: να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

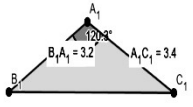


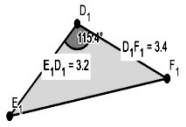
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, αυτά έχουν:

ΑΒ = ΔΕ =5,5cm (Π)
$\hat{A} = \hat{\Delta} = 60^{\circ}$ (Γ)
ΑΓ = ΔΖ= 5,8cm (Π)

Επομένως από πρώτο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.Άρα ΒΓ = ΕΖ, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Άσκηση εργασία: Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $D_1E_1F_1$ που φαίνονται στα παρακάτω σχήματα είναι ίσα.





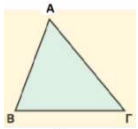
Criterii de egalitate a triunghiurilor

1º criteriu de egalitate a triunghiurilor
Dacădouătriunghiuri au douălaturiegalecâteuna cu câteunașiunghiulcuprinsîntreeleegal, atuncisuntcongruente (Π-Γ-Π)

Observații de bază:

1. Expresia „câteuna cu câteuna” înseamnălaturicorespunzătoare
2. Expresia „unghicuprins” înseamnă un unghisituatîntrelaturileegale

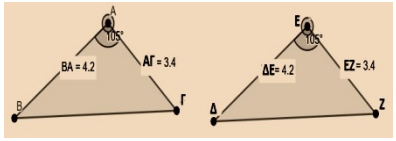
Exemplupentruobservația 2:



Unghiulcuprinsîntrelaturile AB și AΓ esteunghiul Â

UnghiulcuprinsîntrelaturileΛK șiΛM esteunghiulΛ.

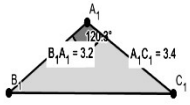
OBSERVAȚIE PRINCIPALĂ: Cânddouătriunghiurisuntegale, atuncișicelelalteelemente ale lorsuntegale (unghiurișilaturi)

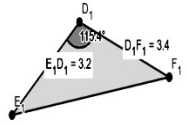


Exercițiuexemplu:
săverificațidacătriunghiurile ABΓșiΔEZsuntegale.

CompartriunghiurileABΓșiΔEZ, acesteaau:
AB = ΔE = 5,5 cm (Π)
Â =$\hat{\Delta}$= 60° (Γ)
AΓ = ΔZ = 5,8 cm (Π)
Prinurmare, dupăprimulcriteriu de egalitate a triunghiurilor (Π-Γ-Π), celedouătriunghiurisuntegale. Deci ΒΓ = ΕΖ, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

Exercițiutemă: Săverificațidacătriunghiuriletrîngwna SăverificațidacătriunghiurileA$_1$B$_1$C$_1$, D$_1$E$_1$F$_1$ care aparînschemele de maijossuntegale.



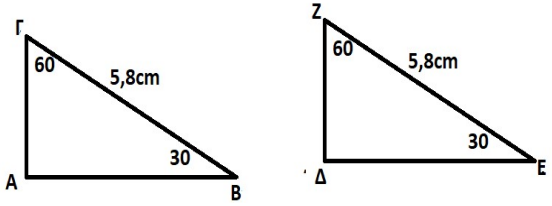


2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.(Γ-Π-Γ)

Άσκηση παράδειγμα:

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, αυτά έχουν:

$\hat{B} = \hat{E} = 30^{\circ}$ (Γ)

ΒΓ = ΕΖ= 5,8cm (Π)

$\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 60^{\circ}$ (Γ)

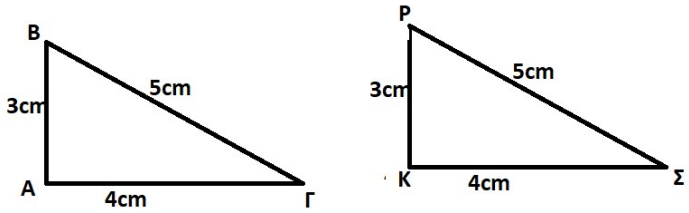
Επομένως από 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.Άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$, ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ

3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.(Π-Π-Π)

Άσκηση παράδειγμα:

Να εξετάσετε αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΡΣ είναι ίσα.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΡΣ, αυτά έχουν:

ΑΒ = ΚΡ = 3cm (Π)

ΒΓ = ΡΣ= 5cm (Π)

ΑΓ = ΚΣ = 4cm (Π)

Επομένως από 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π) τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

Άρα $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

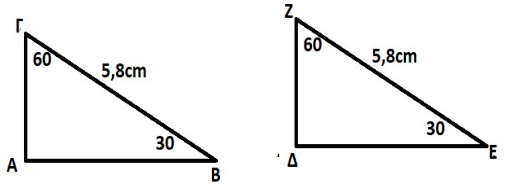
ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ

Al doilea criteriu de congruență a triunghiurilor

Dacă două triunghiuri au o latură egală și unghiurile adiacente acestei laturi sunt egale câte unul cu unul, atunci sunt congruente. (Γ-Π-Γ)

Exercițiuexemplu:

Săseverificedacătriunghiurile ABΓșiΔEZsuntcongruente.



Comparămtriunghiurile ABC și DEF, acestea au:

$\hat{B} = \hat{E} = 30^{\circ}$ (Γ)

ΒΓ = ΕΖ= 5,8cm (Π)

$\hat{\Gamma} = \hat{Z} = 60^{\circ}$ (Γ)

Prinurmare, conform celui de-al doileacriteriu de congruență a triunghiurilor (Γ-Π-Γ) celedouătriunghiurisuntcongruente. Deci

$\hat{A} = \hat{\Delta}$, AB = ΔE, AΓ = ΔZ

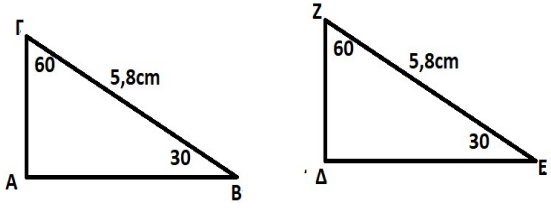
Al treileacriteriu de congruență a triunghiurilor

Dacădouătriunghiuri au laturileegalecâteuna cu una, atuncisuntcongruente. (L-L-L)

Exercițiuexemplu:

Să se verificedacătriunghiurile ABC și KRS suntcongruente.

ComparămtriunghiurileABCșiKRS, acesteaau:



AB = KP = 3 cm (Π)

ΒΓ = PΣ= 5 cm (Π)

AΓ = KΣ = 4 cm (Π)

Prinurmare, conformceluide-altreileacriteriudecongruențăatriunghiurilor (Π-Π-Π) celedouătriunghiurisuntcongruente.

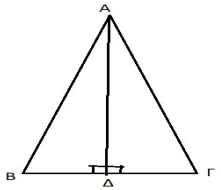
Deci$\hat{A} = \hat{\Delta}$, $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$.

EXERCIȚII - DIN CARTEA ȘCOLARĂ

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων:

1. Δύο **ορθογώνια** τρίγωνα που έχουν **δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες** μία προς μία είναι ίσα. (Π-Π)

Παράδειγμα:
Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ)
φέρνουμε το ύψος ΑΔ προς τη βάση
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι ίσα.



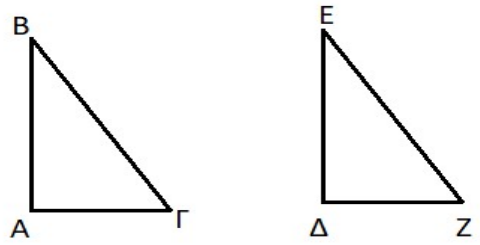
Λύση:

I. $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^{\circ}$(γιατί το ΑΔ είναι ύψος)
II. ΑΒ = ΑΓ (ως πλευρές του ισοσκελούς) (Π)
III. ΑΔ = ΑΔ (κοινή- ίδια κάθετη πλευρά). (Π)

Συμπέρασμα: Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες

2. **Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες μία προς μία είναι ίσα.(Π-Γ)**

Παράδειγμα:
Δίνονται δύο ορθογώνια τρίγωνα
ΑΒΓ($\hat{A}$ =90°) και
ΔΕΖ($\hat{\Delta}$ =90°) .
Αν ΒΓ =10cm ,
ΕΖ = 10cm και
$\hat{B}$ =30° , $\hat{E}$ =30°



να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

Λύση:

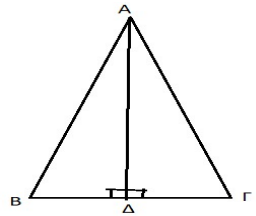
I. **Ορθές γωνίες**: $\hat{A}$ =90°, $\hat{\Delta}$ =90°(από τα δεδομένα)
II. **Υποτείνουσες:** ΒΓ = ΕΖ = 10cm(από τα δεδομένα)
III. **Οξείες γωνίες**: $\hat{B}$ =30° , $\hat{E}$ =30°(από τα δεδομένα)

Συμπέρασμα: Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μία **αντίστοιχη πλευρά και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίσες**

Criterii de congruență a triunghiurilordreptunghice:

1. Două triunghiuri dreptunghice care au două laturi corespunzătoare egale două câte două sunt congruente(Π-Π).

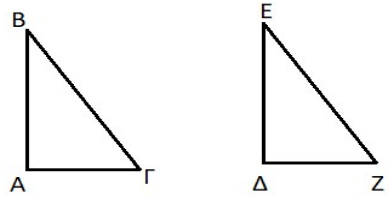
Exemplu:
Într-un triunghiisoscel ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) se duce înălțimea ΑΔ cătrebaza ΒΓ.
Demonstrațicătriunghiurile ΑΒΓ și ΑΓΔ suntcongruente.



Soluție:
$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ = 90° (pentrucă ΑΔesteînălțimea)
ΑΒ = ΑΓ (ca laturi ale triunghiuluiisoscel) (Π)
ΑΔ = ΑΔ (laturacomunășiperpendiculară) (Π)
Concluzie: Triunghiuriledreptunghicesuntcongruentedeoarece au douălaturicorespunzătoareegale.

2. Două triunghiuri dreptunghice care au o latură corespunzătoare și un unghi ascuțit corespunzător egale câte unul sunt congruente. (Π-Γ)

Exemplu:
Se dau două triunghiuri dreptunghiceΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°),
ΔΕΖ($\hat{\Delta}$ =90°)
ΒΓ =10cm , ΕΖ = 10cm,
$\hat{B}$ =30° , $\hat{E}$ =30°
să demonstrați că triunghiurile sunt egale.



Soluție:
I) **Unghiuridrepte**:$\hat{A}$ =90°, $\hat{\Delta}$ =90° (dindate)
II) **Ipoteze**: ΒΓ = ΕΖ = 10 cm (dindate)
III) **Unghiuriascuțite**: $\hat{B}$ =30° , $\hat{E}$ =30° (dindate)

Concluzie: Triunghiurilesuntcongruentedeoarece au o **laturăcorespunzătoareși un unghicorespunzător.**

Ισοσκελές τρίγωνο

Βασικός ορισμός: Ισοσκελές τρίγωνο ονομάζεται το τρίγωνο που έχει δύο ίσες πλευρές.

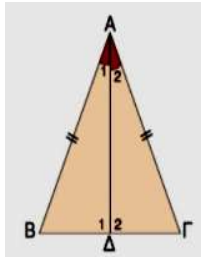
Βασικές παρατηρήσεις-ιδιότητες ισοσκελών τριγώνων:

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που αντιστοιχούν στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

2.Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος από την κορυφή προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου συμπίπτουν(δηλαδή ταυτίζονται- είναι ίδιες)

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Α. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ)
η διχοτόμος ΑΔ προς τη βάση ΒΓ είναι ταυτόχρονα διάμεσος και ύψος, επομένως
διχοτόμος, ύψος και διάμεσος συμπίπτουν .



Β. Ισχύουν τα επόμενα συμπεράσματα:
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ γιατί ΑΔ διχοτόμος ,
$\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$= 90° γιατί ΑΔ ύψος και
$B\Delta = \Delta\Gamma$ γιατί ΑΔ διάμεσος

Αυτό μπορούμε να το **αποδείξουμε συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ** που έχουν**:**

- ΑΔ = ΑΔ, (κοινή πλευρά)
- ΑΒ = ΑΓ (από την υπόθεση, αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές)
- $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ γιατί ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση(Π-Γ- Π).

Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και
αφού είναι $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$ *και* $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2}$= 180°, θα έχουμε $\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$= 90°,
οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.

επίσης
Γ.Αν το ΑΜ είναι ύψος τότε θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος συμπέρασμα

Δ.Στο ισοσκελές τρίγωνο αν ΑΜ είναι διάμεσος ή ύψος ή διχοτόμος τότε θα είναι και τα άλλα δύο σε κάθε περίπτωση

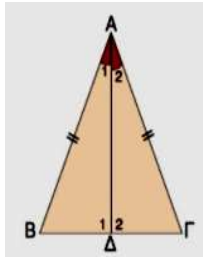
Triunghiisoscel

Definiție de bază: Un triunghiisosceleste triunghiul care are douălaturiegale.

Observațiișiproprietăți de bază ale triunghiurilorisoscele:

1. Înoricetriunghiisoscel, unghiurilecorespunzătoarebazeitriunghiuluiisoscelsuntegale.
2. Bisectoarea, înălțimeașimediana din vârfultriunghiuluicătrebazatriunghiuluiisoscelcoincid (adică se suprapun - suntidentice).

Înfiguraalăturatășisimbolic, cele de maisussunturmătoarele:
În triunghiul isoscel ABΓ (AB = AΓ) bisectoarea AΔ către baza BΓ este în același timp mediană și înălțime, prin urmare bisectoarea, înălțimea și mediana coincid.



B. . *Se aplică următoarele concluzii*:
$(\hat{A}1) = (\hat{A}2)$deoarece AΔ este bisectoare,
$\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$= 90° deoarece AD este înălțime și
$B\Delta = \Delta\Gamma$ deoarece AΔ este mediană.

Putem demonstra acest **lucru comparând triunghiurile ABΔ, AΔΓ** care au:
AΔ = AΔ (laturăcomună),
AB = AC (din ipoteză, deoarecetriunghiul ABC esteisoscel),
$\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$,deoarece AΔestebisectoareaunghiului$\hat{A}$.
Deci triunghiurile sunt egale, deoarece au două laturi egale câte una cu alta și unghiul inclus egal (Π-Γ-Π). Deoarece triunghiurile ABΔ și AΔΓ sunt egale, toate elementele lor corespunzătoare vor fi egale, astfel încât
$\hat{B} = \hat{\Gamma}$, BΔ = ΔΓ și
deoarece$\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$, $\widehat{\Delta_1} + \widehat{\Delta_2}$= = 180°, vomavea$\widehat{\Delta_1} = \widehat{\Delta_2}$= 90°,
așadar bisectoarea AD este și înălțime. Bisectoarea AD este și mediană, deoarece BΔ = ΔΓ.

De asemenea,
Γ. Dacă AM esteînălțime, atunciva fi șimedianășibisectoare,
concluzie
D. Întriunghiulisoscel, dacă AM estemedianăsauînălțimesaubisectoare, atuncișicelelaltedouăvor fi înfiecarecaz

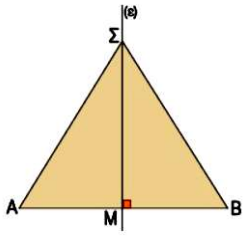
Βασική ιδιότητα μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος

Υπενθύμιση: Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι μία ευθεία που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα για διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος.

Βασική ιδιότηταμεσοκαθέτου:τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Η μεσοκάθετος ε του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ το τέμνει στο σημείο Μ. Αν Σ είναι τυχαίο σημείο της μεσοκαθέτου, θα ισχύει ότι ΣΑ = ΣΒ.



Αυτό μπορούμε να το**αποδείξουμεσυγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΣ, ΒΜΣ**που έχουν:

- ΣΜ = ΣΜ, (κοινή πλευρά)
- ΑΜ = ΜΒ, αφού το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

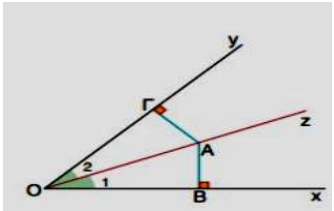
Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΣΑ = ΣΒ.

Βασική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας:

Τα σημεία της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχουν τις πλευρές της γωνίας.

Στο διπλανό σχήμα και συμβολικά τα παραπάνω έχουν ως εξής:

Φέρνουμε τη διχοτόμο Οz της γωνίας xÔy και πάνω σ΄ αυτήν παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Α. Αν ΑΒ, ΑΓ είναι οι αποστάσεις του σημείου Α από τις πλευρές της γωνίας, ισχύει ότι ΑΒ = ΑΓ.



Αυτό μπορούμε να το**αποδείξουμεσυγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ** που έχουν:

- ΟΑ = ΟΑ κοινή πλευρά και
- Ô1 = Ô2, αφού η Οz είναι διχοτόμος της γωνίας xÔy.

Άρα τα ορθογώνια αυτά τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν αντίστοιχα μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση.

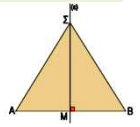
Αφού τα τρίγωνα είναι ίσα, θα έχουν και τα υπόλοιπα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

Proprietateafundamentală a mediatoareiunui segment de dreaptă

Reamintire: Mediatoareaunui segment de dreaptăeste o dreaptă care esteperpendicularăpesegmentul de dreaptășitreceprinmijloculsegmentului de dreaptă.

Proprietateafundamentală a mediatoarei: punctelemediatoareiunui segment de dreaptăsunt la distanțăegală de capetelesegmentului de dreaptă.

Înfiguraalăturatășisimbolic, cele de maisus se exprimăastfel: Mediatoareaε a segmentului de dreaptă AB îlintersectează înpunctul M. Dacă S este un punctaleatoriu al mediatoarei, atunciva fi valabilcă ΣA = ΣB.



Acestlucruîlputem**demonstracomparândtriunghiuriledreptunghice AMΣși BMΣ**, care au:

• SM = SM (laturacomună)

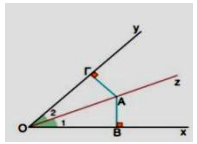
• AM = MB, deoarece M estemijlocullui AB.

Astfel, acestetriunghiuridreptunghicesuntcongruente, deoarece au douălaturicorespunzătoareegalecâteuna cu cealaltă.

Deoarecetriunghiurilesuntcongruente, restulelementelorcorespunzătoaresunt de asemeneaegale, deciΣA = ΣB.

Proprietateafundamentală a bisectoareiunghiului:

Punctelebisectoareiunuiunghisunt la distanțăegală**față de laturileunghiului.**



Înfiguraalăturată, cele de maisussuntsimbolicurmătoarele:

Trasăm bisectoarea Oz a unghiuluixÔy și peaceastaluăm un punctaleatoriu A.

Dacă AB, AΓsuntdistanțelepunctului A față de laturileunghiului, rezultăcă AB = AΓ.

Putem**demonstraaceastacomparândtriunghiuriledreptunghice AOB, AOΓ**care au:

• OA = OA laturăcomună și

• Ô1 = Ô2, deoarece Oz estebisectoareaunghiuluixÔy.

Astfel, acestetriunghiuridreptunghicesuntcongruente, pentrucă au corespunzător o laturăși un unghiascuțitegal.

Deoarecetriunghiurilesuntcongruente, voraveașicelelalteelementecorespunzătoareegale, deci AB = AΓ.

Τα κριτήρια ισότητας τριγώνων μας βοηθούν αποδείξουμε ότι κάποια ευθύγραμμα τμήματα ή γωνίες είναι μεταξύ τους ίσα.Τα παραπάνω μας καθιστούν ικανούς να συγκρίνουμε και εμείς τρίγωνα με τα κριτήρια ισότητας τριγώνων και ισότητας ορθογωνίων τριγώνων όπως βλέπουμε στις προηγούμενες σελίδες.

Επειδή είναι δύσκολο να το βάλουμε σε «καλούπια» όπως την άλγεβρα , δίνουμε κάποιες παρατηρήσεις που ίσως βοηθήσουν στην επίλυση των ασκήσεων

1. Κάνουμε πάντα ένα **καλό σχήμα** που βοηθάει στην επίλυση της άσκησης.

2. Γράφουμε τα **δεδομένα της άσκησης που γράφονται πριν τις λέξεις να αποδείξουμε.**

3. Ελέγχουμε μήπως τα τρίγωνα έχουν **κοινή πλευρά**.

4. Δεν συγκρίνουμε άνισα τρίγωνα δηλαδή τρίγωνα που φαίνονται από τα σχήμα ότι δεν είναι ίσια.

5.Σε **κύκλο** όλες οι **ακτίνες** είναι πάντα **ίσες**.

6. Αποφεύγομε να συγκρίνουμε τρίγωνα αν η άσκηση δεν τους έχει δώσει «όνομα»

7.Κάθε **ισόπλευρο** τρίγωνο έχει ίσες όλες τις πλευρές και η κάθε γωνία του είναι **60º**

8. Αν **δεν υπάρχουν ίσα τρίγωνο στο σχήμα**, φέρνουμε **βοηθητικές ευθείες**

9 .Το **ένα τρίγωνο μπορεί να είναι μέσα στο άλλο**

10.Αν η **άσκηση έχει δύο ή παραπάνω ερωτήματα** όποια τρίγωνα αποδείξουμε στο πρώτο ερώτημα ότι είναι ίσα θεωρείτε δεδομένο ότι είναι ίσα και **θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία ίσα για το επόμενο ερώτημα**

11. Αν έχουμε **ορθογώνια τρίγωνα** ισχύουν κριτήρια Π-Πκαι Π-Γ

12. Φτιάχνουμε το σχήμα βήμα βήμα(με χρήση γεωμετρικών οργάνων)και δεν διαβάζουμε όλη την άσκηση μαζί. Αυτό μπορεί να γίνει σε συνεργασία με συμμαθητή μας ο οποίος θα μας διαβάζει λίγο και εμείς θα κάνουμε μία μία τις γραμμές.

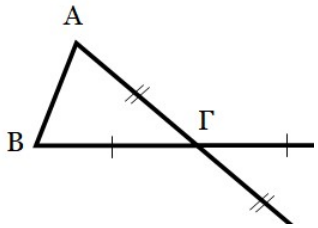
Criteriile de egalitate a triunghiurilor ne ajută să demonstrăm că anumite segmente drepte și unghiurile sunt egale între ele. Cele de mai sus ne permit să comparăm și noi triunghiurile folosind criteriile de egalitate a triunghiurilor și egalitate a triunghiurilor dreptunghice, așa cum vedem în paginile anterioare.

Deoarece este dificil să le punem într-un „tipar" precum algebra, oferim câteva observații care ar putea ajuta la rezolvarea exercițiilor:

1. Facem întotdeauna un desen **bun care** ajută la rezolvarea exercițiului.
2. Scriem **datele exercițiuluicare sunt scrise înaintea cuvintelor „să demonstrăm".**
3. Verificăm dacă triunghiurile au **o latură comună**
4. Nu comparăm triunghiuri inegale, adică triunghiuri care, conform desenului, nu sunt egale.
5. Într-un **cerc**, **toate razele sunt întotdeauna egale**
6. Evităm să comparăm triunghiuri dacă exercițiul nu le-a dat „nume".
7. **Fiecare triunghi echilateral** are toate laturile egale și fiecare unghi este de **60º.**
8. Dacă **nu există triunghiuri congruente** în figură, **trasăm linii auxiliare**
9. Un **triunghi poate fi în interiorul altuia**
10. Dacă **exercițiul are două sau mai multe întrebări**, orice triunghi demonstrat ca fiind congruent în prima întrebare se consideră dat că este congruent **și elementele sale vor fi de asemenea congruente pentru următoarea întrebare**
11. Dacă **avem triunghiuri dreptunghice**, se aplică criteriileП-П și П-Г
12. **Construim figura pas cu pas** (folosind instrumente geometrice) și nu citim tot exercițiul deodată. Acest lucru se poate face în colaborare cu un coleg care ne citește puțin, iar noi trasăm rând cu rând.

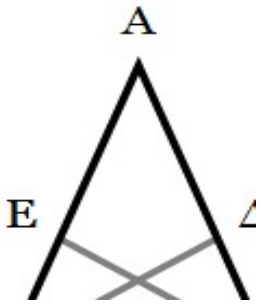
Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων(του βιβλίου και….)

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ίσα:

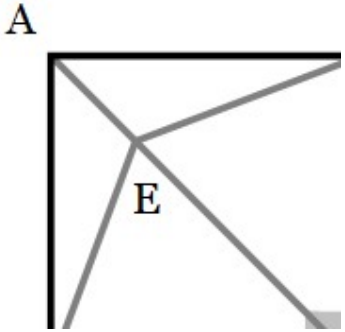


2. Στο διπλανό σχήμα, έχουμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
Φέρνουμε τις διαμέσους ΒΝ και ΓΜ.
Να αποδείξετε ότι
ΒΝ = ΓΜ .

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους ΒΔ, ι ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι
ΒΔ = ΓΕ .

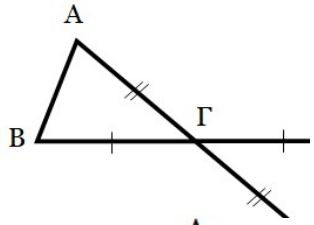


4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και η διαγώνιός του ΑΓ. Αν Ε τυχαίο σημείο της ΑΓ, να δείξετε ότι ΒΕ = ΔΕ .



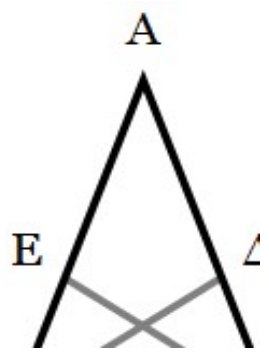
Exerciţiidespreegalitateatriunghiurilor (din carte şi….)

1. 1. Să demonstrați că triunghiurile ABC și GDE sunt congruente:

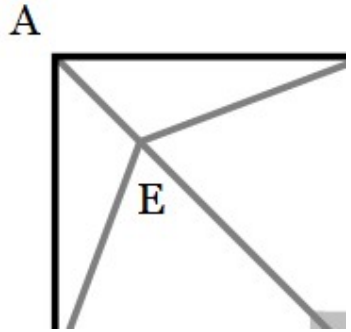


2. În figura alăturată, avem triunghiul isoscel ABC (AB = AΓ). Desenăm medianele BN și ΓM. Demonstrați că
BN = ΓM .

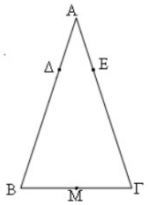
3. Fiind dat triunghiul isoscel ABC (AB = AΓ).
Desenăm bisectoarele BΔ și ΓE.
Demonstrați că
BΔ = ΓE .



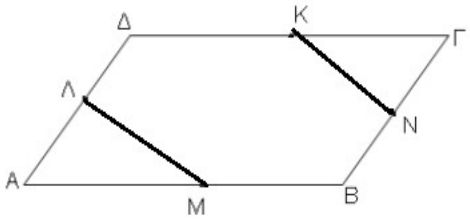
4. Fiind dat pătratul ABCΔ și diagonala lui AΓ. Dacă E este un punct aleator pe AΓ, demonstrați că BE = ΔE .



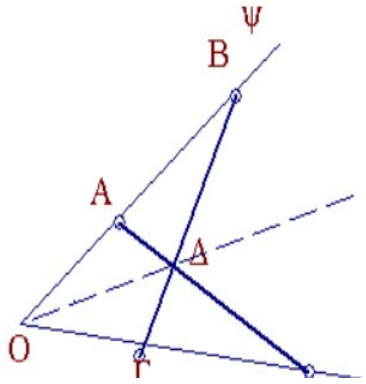
5. Στις πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) παίρνουμε ΑΔ=ΑΕ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ, να συγκριθούν τα ΔΜ και ΕΜ.



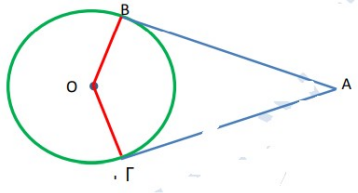
6. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα Κ, Ν των πλευρών ΔΓ και ΓΒ είναι ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα Λ, Μ των ΑΔ και ΑΒ.



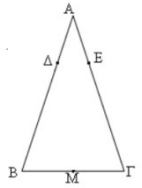
7. Στις πλευρές της γωνίας $x\widehat{O}y$ παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ, και Ε έτσι ώστε ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΕ
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΟΑΕ και ΟΓΒ
β) Αν τα ΑΕ και ΓΒ τέμνονται στο Δ να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΓΔ.
γ) Να αποδείξετε ότι η ΟΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.



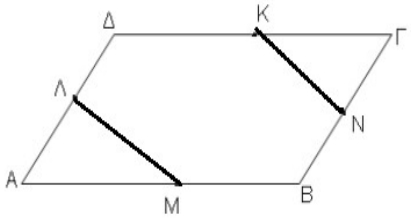
8. Δίνεται ο κύκλος (Ο,ρ) και ένα σημείο Α εξωτερικό του κύκλου. Αν ΑΒ και ΑΓ είναι εφαπτόμενα του κύκλου τμήματα από το σημείο Α δείξτε ότι αυτά είναι ίσα(δηλαδή δείξτε ότι ΑΒ=ΑΓ)



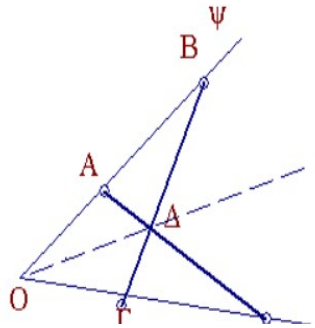
5. Pe laturile triunghiului isoscel ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) obținem ΑΔ=ΑΕ.
Dacă M este punctul de mijloc al triunghiului ΒΓ,comparați ΔΜ și ΕΜ.



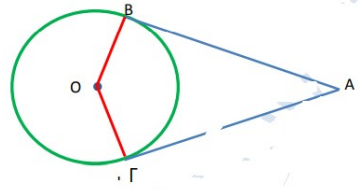
6. În paralelogramul ΑΒΓΔ, demonstrați că segmentul de dreaptă care unește punctele de mijloc K, N ale laturilor ΔΓ și ΓΒ este egal cu segmentul de dreaptă care unește punctele de mijloc Λ, M ale unghiurilor ΑΔ și ΑΒ.



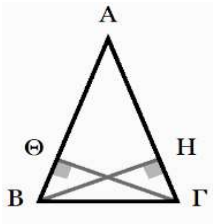
7. Pe părțile unghiului $x\widehat{O}y$ luăm punctele A, B, Γ și E astfel încât OA = OΓ, OB = OE
a) Comparați triunghiurile OAE și OΓB
b) Dacă AE și ΓB se întâlnesc în D, demonstrați că AΔ = ΓΔ.
c) Demonstrați că OΔ este bisectoarea unghiului $x\widehat{O}y$.



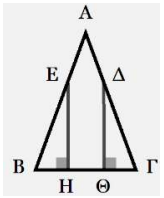
8. Se dăcercul (O,p) și un punct A exterior cercului. Dacă AB și AΓ suntsegmentetangente ale cercului înpunctul A, demonstrațicăacesteasuntegale (adicădemonstrațică AB = AΓ)



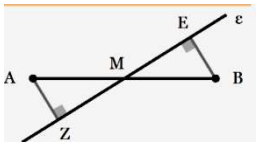
9.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε τα ύψη ΒΗ και ΓΘ. Να αποδείξετε ότι ΒΗ = ΓΘ .



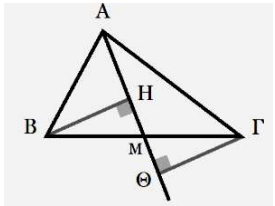
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ε, Δ σημεία στις πλευρές του, έτσι ώστε ΒΕ = ΔΘ. Να δείξετε ότι τα σημεία Ε και Δ ισαπέχουν από τη βάση Β



11. Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το μέσον του Μ και (ε) μια τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το Μ . Να αποδείξετε ότι τα άκρα Α και Β ισαπέχουν από την ευθεία (ε)



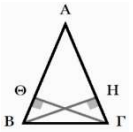
12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ, την οποία και προεκτείνουμε πέραν του σημείου Μ. Να δείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ του τριγώνου ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.



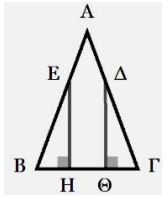
13. Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, για τα οποία ισχύει α = α΄, β = β΄ και υα = υα΄. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

14. Έστω δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, για τα οποία ισχύει α = α΄,$\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$ $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

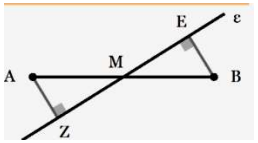
9. Fie dat un triunghi isoscel ABΓ (AB = AΓ). Desenăm înălțimile BH și ΓΘ. Demonstrați că BH = ΓΘ.



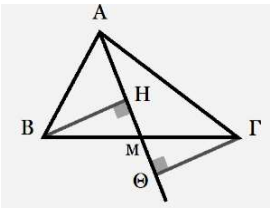
10. Fie dat un triunghi isoscel ABΓ (AB = AΓ) și puncte E, Δ pe laturile sale, astfel încât BE = ΔΘ. Arătați că punctele E și D sunt echidistante de baza B.



11. Fie AB o dreaptă, punctul de mijloc al lui M și (e) o dreaptă arbitrară care trece prin M. Demonstrați că capetele A și B sunt echidistante de dreapta (e).



12. Fie dat un triunghi ABΓ și mediana sa AM, pe care o extindem dincolo de punctul M. Arătați că vârfurile B și Γ ale triunghiului sunt echidistante de mediana AM.

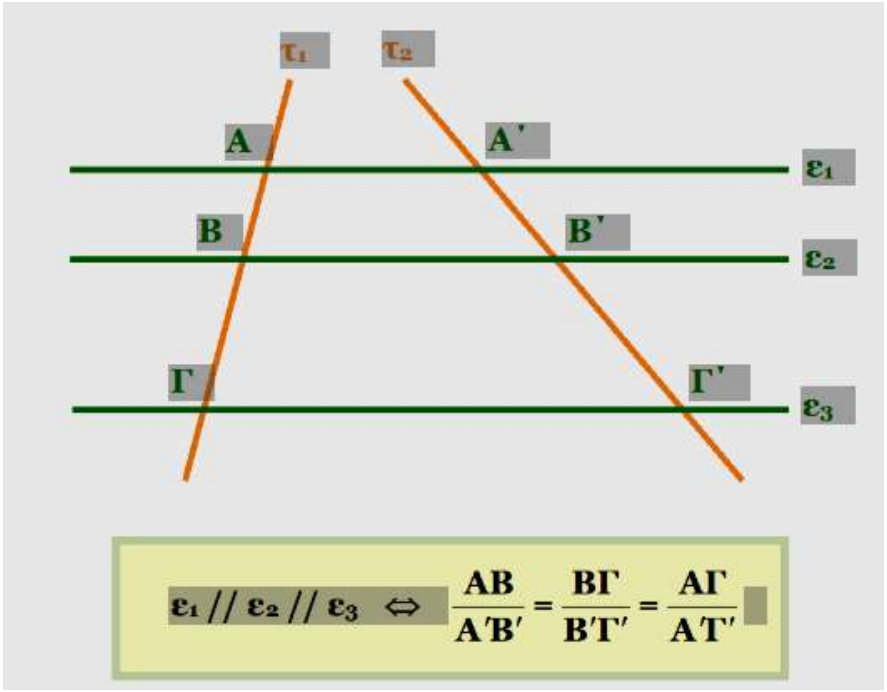


13. Fiedouă triunghiuriABC șiA΄B΄Γ΄, pentrucareα = α΄, β = β΄ șiu$_\alpha$ = u$_{\alpha'}$. Arătațică triunghiurilesuntsimilare.

14. Fie două triunghiuri ABΓ și A΄B΄Γ΄, pentru care α = α΄, $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$ și $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$. Demonstrați că triunghiurile sunt asemenea.

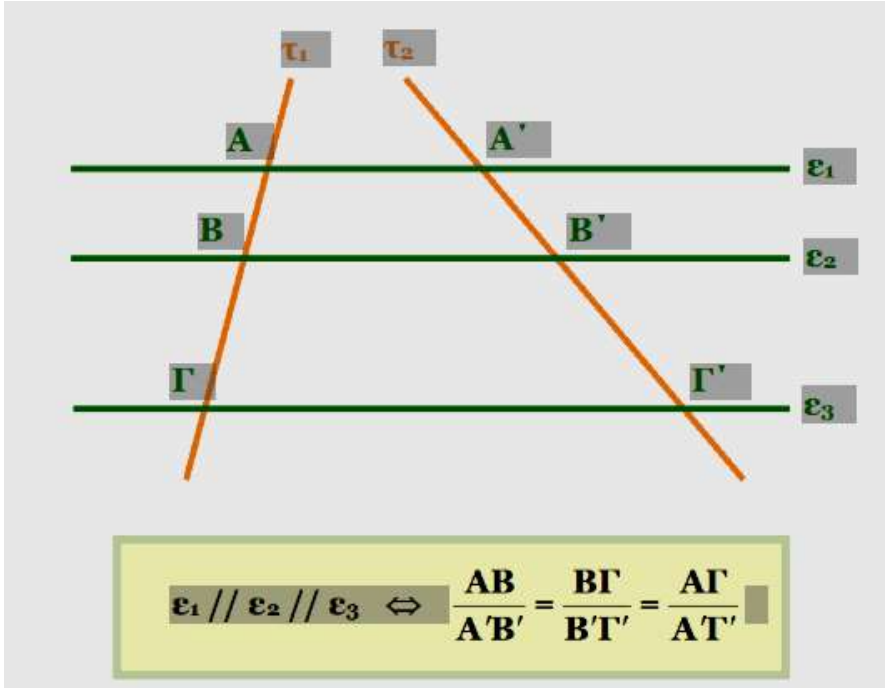
ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

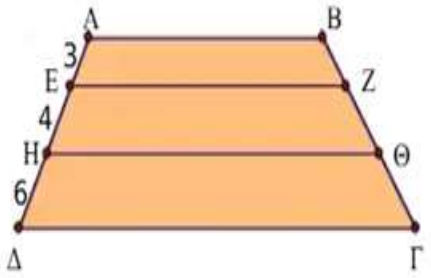


TEOREMA LUI TALE

Dacă trei sau mai multe drepte paralele intersectează alte două drepte, atunci segmentele definite pe una sunt proporționale cu segmentele corespunzătoare definite pe cealaltă. Adică**:**



Παράδειγμα: Στο παρακάτω σχήμα, βρείτε τα κλάσματα:

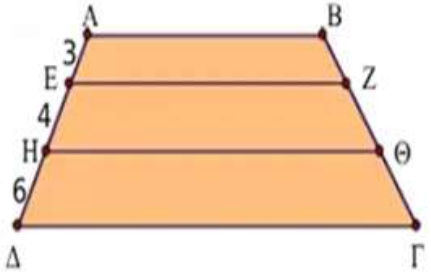


α) $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

γ) $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13}$

Exemplu: În schema de mai jos, găsiți fracțiile:



α) $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} = \frac{AE}{H\Delta} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} = \frac{EH}{E\Delta} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

γ) $\frac{B\Theta}{B\Gamma} = \frac{AH}{A\Delta} = \frac{7}{13}$

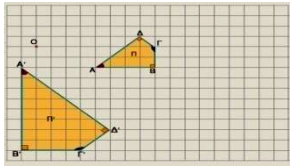
ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Βασικός ορισμός: Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι όμοια.

Παρατηρήσεις:

- Με απλά λόγια, τα όμοια σχήματα έχουν την ίδια μορφή, αλλά διαφορετικό μέγεθος! Είναι, δηλαδή, το ένα σμίκρυνση ή μεγέθυνση του άλλου. Ο λόγος ομοιότητας είναι, σα να λέμε, κάτι σαν την κλίμακα ενός χάρτη.
- Η κλίμακα είναι ο λόγος της απόστασης στο χάρτη προς την αντίστοιχη πραγματική απόσταση, δηλαδή είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο σχημάτων**.**
- Για παράδειγμα κλίμακα 1 : 3.000.000 σημαίνει ότι, ο λόγος ομοιότητας του σχήματος στο χάρτη προς το πραγματικό είναι λ =1:3.000.000 οπότε 1 cm στο χάρτη είναι 30 km στην πραγματικότητα.
- Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο , γι αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας.**
- **Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.**
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

παράδειγμα

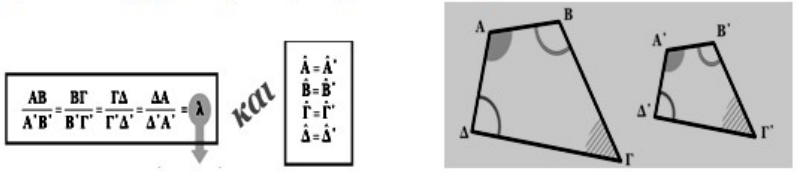


$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'A'}{\Delta A}=2 \ (1) \ \text{και} \ \hat{A}'=\hat{A}, \hat{B}'=\hat{B}, \hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}'=\hat{\Delta} \ (2)$$

τα πολύγωνα(τετράπλευρα)ΑΒΓΔ, ΑΒΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 2.

FIGURI GEOMETRICE SIMILARE

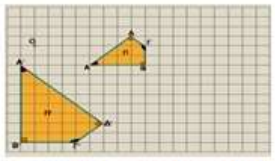
Definiție de bază: Dacă două poligoane au laturile proporționale și unghiurile corespunzătoare egale, atunci ele sunt similare.



Observații:

- Cu alte cuvinte, figurile similare au aceeași formă, dar dimensiuni diferite! Adică, una este o micșorare sau mărire a celeilalte. Raportul de similitudine este, ca să spunem așa, ceva asemănător cu scara unei hărți.
- Scara este raportul dintre distanța de pe hartă și distanța reală corespunzătoare, adică este raportul de similitudine dintre cele două figuri.
- De exemplu, o scară de 1 : 3.000.000 înseamnă că raportul de similitudine dintre figura de pe hartă și cea reală este λ = 1:3.000.000, deci 1 cm pe hartă corespunde la 30 km în realitate.
- Oricare două laturi corespunzătoare ale poligoanelor similare au același raport, de aceea se numesc corespondente, iar raportul lor se numește raport de similitudine.
- Dacă două poligoane sunt similare, atunci laturile lor corespunzătoare sunt proporționale și unghiurile corespunzătoare sunt egale.
- Raportul dintre perimetrele a două figuri plane similare este egal cu raportul lor de similitudine.

Exemplu



$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'A'}{\Delta A}=2 \ (1) \ \text{και} \ \hat{A}'=\hat{A}, \hat{B}'=\hat{B}, \hat{\Gamma}'=\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}'=\hat{\Delta} \ (2)$$

poligoanele (cvadrilateralele) ABCD, ABCD sunt similare cu raport de similitudine 2.

Ασκήσεις:

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια

β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια

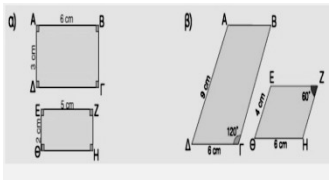
γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια

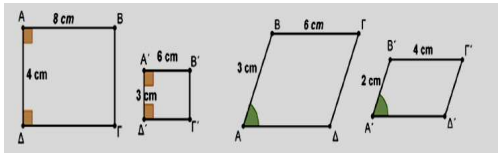
δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια

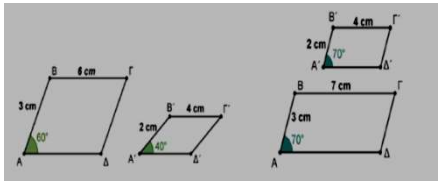
ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια

στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια

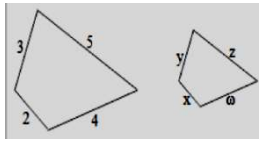
2. ποια από τα παρακάτω ζευγάρια είναι όμοια;







3. Τα τετράπλευρα στο διπλανό σχήμα είναι όμοια. Η περίμετρος του "μικρού" είναι Π=7, να βρείτε τα x, y, z, ω.



4. Στο διπλανό σχήμα

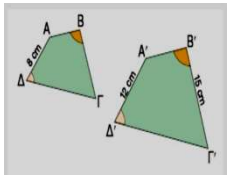
α)Ο λόγος ομοιότητας του ΑΒΓΔ προς το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ……

β) Ο λόγος ομοιότητας του Α΄Β΄Γ΄Δ΄ προς το ΑΒΓΔ είναι …..

γ) Αν η γωνία Β είναι 110 μοίρες, τότε και η γωνία …… …….είναι 110º.

δ) Ο λόγος των περιμέτρων του ΑΒΓΔ ως προς το Α΄Β΄Γ΄Δ΄ είναι ίσος με……

ε) Η πλευρά ΒΓ είναι ίση με ……



Exerciții:

1. Să caracterizați următoarele propoziții cu (A) dacă sunt corecte și cu (I) dacă sunt greșite

a) Două pătrate sunt întotdeauna asemenea

b) Două dreptunghiuri sunt asemenea

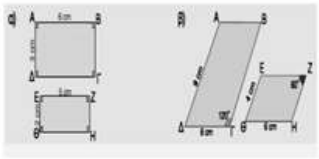
c) Dacă două poligoane au laturile proporționale, ele sunt asemenea

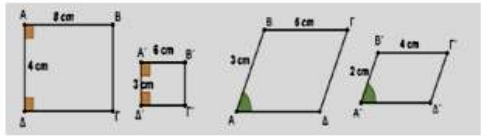
d) Două romburi sunt figuri asemenea

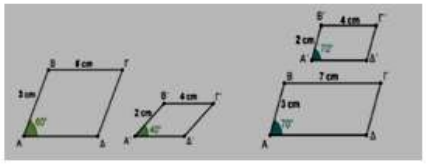
e) Dacă două poligoane sunt egale, atunci ele sunt asemenea

f) Două poligoane regulate sunt asemenea

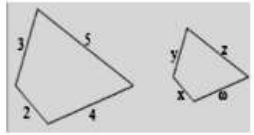
2. Care dintre următoarele perechi sunt asemenea?







3. Patruplurile din figura alăturată sunt asemenea. Perimetrul „mic” este P = 7, să găsiți x, y, z, ω.



4. În figura alăturată

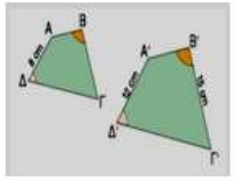
a) Raportul asemănării dintre ABCD și A'B'C'D' este ……

b) Raportul asemănării dintre A'B'C'D' și ABCD este ……

c) Dacă unghiul B este de 110 grade, atunci și unghiul …… …….este 110º.

d) Raportul perimetrelor dintre ABCD și A'B'C'D' este egal cu ……

e) Latura BC este egală cu ……



ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

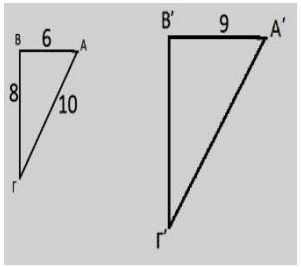
Κριτήριο για όμοια τρίγωνα: Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε θα είναι όμοια, και θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

Παρατηρήσεις:

- Δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια, αν έχουν μία οξεία γωνία ίση.
- Όλα τα ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια μεταξύ τους!
- Πάντα σημειώνουμε ποιες γωνίες είναι ίσες για να βρούμε τις σωστές "απέναντι" πλευρές στην αναλογία.
- Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων(και πολυγώνων) ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας (λ^2).

Παράδειγμα-Άσκηση 1:

Δίνονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ'.
Αν ΑΒ = 6, ΒΓ = 8 και ΑΓ = 10,
και Α'Β'= 9,
να βρείτε τις υπόλοιπες πλευρές του Α'Β'Γ΄.



Λύση:

Εφόσον τα τρίγωνα είναι όμοια οι πλευρές τους είναι ανάλογες:

Βρίσκουμε τον **λόγο ομοιότητας λ:**

$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (ή $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$)

Υπολογίζουμε την Β΄Γ΄:

$\frac{6}{9} = \frac{8}{Β΄Γ΄} \rightarrow$ 6·Β'Γ' =8·9→ 6Β΄Γ΄= 72→Β΄Γ΄= 72:2→Β΄Γ΄= 12

Υπολογίζουμε την Α'Γ΄:

$\frac{6}{9} = \frac{10}{Α΄Γ΄} \rightarrow$ 6·Α'Γ' =10·9→ 6Α΄Γ΄= 90→Α΄Γ΄= 90:6→Α΄Γ΄= 15

TRIUNGHIURI SIMILARE

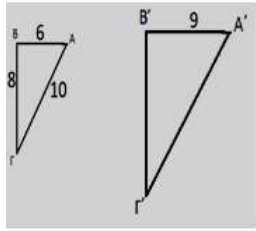
Criteriu pentru triunghiuri similare: Dacă două triunghiuri au două unghiuri egale, câte unul cu câte unul, atunci ele vor fi similare și vor avea laturile proporționale.

Observații:

- Două triunghiuri dreptunghice sunt similare dacă au un unghi ascuțit egal.
- Toate triunghiurile echilaterale sunt similare între ele!
- Întotdeauna notăm care unghiuri sunt egale pentru a găsi laturile "opuse" corecte în raport.
- Raportul ariilor a două triunghiuri similare (și al poligoanelor) este egal cu pătratul raportului de similitudine (λ^2).

Exemplu-Exercițiu 1:

Se dau două triunghiuri similare ΑΒΓ, Α'Β'Γ'.
Dacă ΑΒ = 6, ΒΓ = 8 și ΑΓ = 10,
și Α'Β' = 9,
se cer celelalte laturi ale triunghiului Α'Β'Γ'.



Soluție:

Deoarece triunghiurile sunt similare, laturile lor sunt proporționale:

Găsim raportul de asemănare λ:

$\lambda = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (ή $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$)

Calculăm Β'Γ':

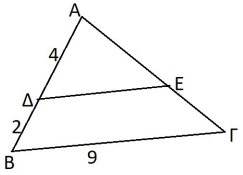
$\frac{6}{9} = \frac{8}{Β΄Γ΄} \rightarrow$ 6·Β'Γ' =8·9→ 6Β΄Γ΄= 72→Β΄Γ΄= 72:2→Β΄Γ΄= 12

Calculăm Α'Γ':

$\frac{6}{9} = \frac{10}{Α΄Γ΄} \rightarrow$ 6·Α'Γ' =10·9→ 6Α΄Γ΄= 90→Α΄Γ΄= 90:6→Α΄Γ΄= 15

Παράδειγμα-Άσκηση 2:

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ,
παίρνουμε ένα σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ και ένα σημείο Ε στην πλευρά ΑΓ,
ώστε ΔΕ //ΒΓ. Αν ΑΔ = 4, ΔΒ = 2 και ΒΓ = 9, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΔΕ.



Λύση:

Επειδή ΔΕ //ΒΓ , τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια (έχουν τη γωνία $\widehat{A}$ κοινή και τις γωνίες $\widehat{\Delta}$, $\widehat{B}$ ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά).

Υπολογίζουμε την πλευρά ΑΒ:

ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 4 + 2 = 6.

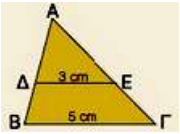
Γράφουμε την αναλογία:

$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}}$

Αντικαθιστούμε και λύνουμε:

$\frac{4}{6} = \frac{\text{ΔΕ}}{9} \rightarrow 6 \cdot \text{ΔΕ} = 36 \rightarrow \text{ΔΕ} = 6$

Παράδειγμα-Άσκηση 3:



Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ. Αν το τρίγωνο ΑΔΕ έχει εμβαδόν 18 cm², να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Λύση:

Επειδή ΔΕ //ΒΓ , τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια (έχουν τη γωνία $\widehat{A}$ κοινή και τις γωνίες $\widehat{\Delta}$, $\widehat{B}$ ίσες ως εντός εκτός και επί τα αυτά)

Γράφουμε την αναλογία:

$\frac{\text{ΑΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{3}{5} = \boldsymbol{\lambda}$

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων(και πολυγώνων) ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας (λ^2), άρα:

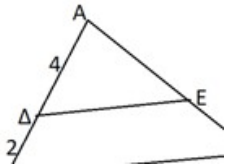
$\frac{\text{Εμβαδόν ΑΔΕ}}{\text{Εμβαδόν ΑΒΓ}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow \frac{18}{\text{Εμβαδόν ΑΒΓ}} = \frac{9}{25} \rightarrow$

$9 \cdot \text{Εμβαδόν ΑΒΓ} = 18 \cdot 25 \rightarrow 9 \cdot \text{Εμβαδόν ΑΒΓ} = 450 \rightarrow \text{Εμβαδόν ΑΒΓ} = 50.$

Έτσι μπορούμε να υπολογίζουμε τις επιφάνειες σπιτιών, οικοπέδων κλπ όταν είναι σχεδιασμένα σε κλίμακα.

Exemplu-Exerciţiu 2:

Într-un triunghi ABΓ, luăm un punct Δ pe latura AB şi un punct E pe latura AΓ,
astfel încât ΔE // BΓ. Dacă AΔ = 4, ΔB = 2 şi BΓ = 9, să se afle lungimea segmentului ΔE.



Soluţie:

Deoarece ΔE // BΓ, triunghiurile AΔE şi ABΓ sunt asemenea (au unghiul A comun şi unghiurile Δ, B egale ca unghiuri corespunzătoare).

Calculăm latura AB:

AB = AΔ + ΔB = 4 + 2 = 6.

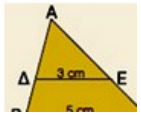
Scriem proporţia:

$\frac{\text{AΔ}}{\text{AB}} = \frac{\text{ΔE}}{\text{BΓ}}$

Înlocuim şi rezolvăm:

$\frac{4}{6} = \frac{\text{ΔE}}{9} \rightarrow 6 \cdot \text{ΔE} = 36 \rightarrow \text{ΔE} = 6$

Exemplu-Exerciţiu 3:



În figura alăturată, ΔE // BΓ. Dacă triunghiul AΔE are aria de 18 cm², atunci calculaţi aria triunghiului ABΓ.

Soluţie:

Având în vedere că ΔE // BΓ, triunghiurile AΔE şi ABΓ sunt asemenea (au unghiul A comun şi unghiurile Δ şi B egale ca unghiuri interne opuse),

Scriem proporţia:

$\frac{\text{AΔ}}{\text{AB}} = \frac{\text{ΔE}}{\text{BΓ}} = \frac{3}{5} = \boldsymbol{\lambda}$

Raportul ariilor a două triunghiuri (şi poligoane) asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (λ^2), aşadar:

(Aria AΔE)/(Aria ABΓ) $= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \rightarrow$ 18/(Aria ABΓ) = 9/25 →

9 × Aria ABΓ = 18 × 25 → 9 × Aria ABΓ = 450 → Aria ABΓ = 50.

Astfel, putem calcula suprafeţele caselor, terenurilor etc. atunci când sunt desenate la scară.

Άσκηση 1: Ορθογώνια Τρίγωνα & Ύψος

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{A}$ = 90°και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια.
- Αν ΒΔ = 4cm και ΔΓ = 9cm, να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις συμπληρωματικές οξείες γωνίες(που έχουν άθροισμα 90°.

Άσκηση 2:

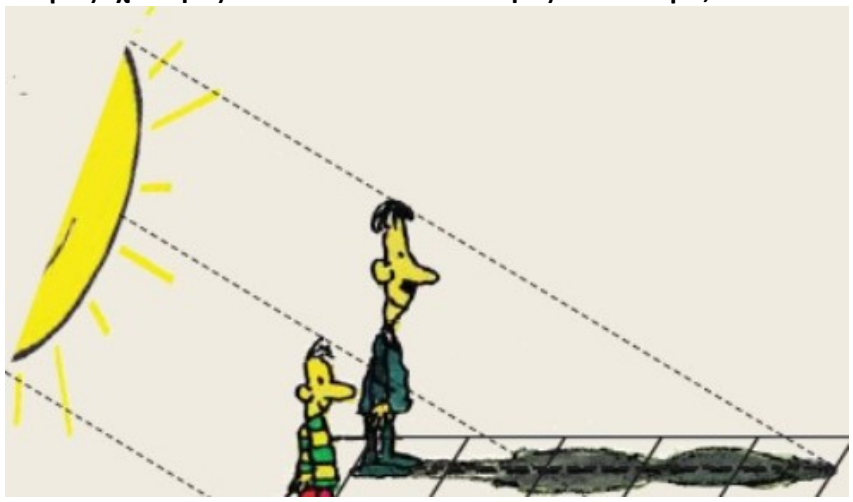
Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ, οι διαγώνιοί του ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο σημείο Ο.

Αν οι βάσεις είναι ΑΒ = 6cm και ΓΔ = 10 cm, και το τμήμα ΟΑ = 3cm, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΟΓ.

Υπόδειξη: Υπάρχουν εντός εναλλάξ γωνίες λόγω των παράλληλων βάσεων.

Άσκηση 3: Η Σκιά

Ο γιος έχει ύψος 1.36m. Ποιο είναι το ύψος του πατέρα;



Exercițiul 1: Triunghiuri dreptunghice și înălțime

Fie triunghiul dreptunghic ABΓ cu unghiul $\hat{A}$= 90° și AΔ înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

- Să demonstrați că triunghiurile ABΔ și AΔΓ sunt asemenea.
- Dacă BΔ = 4 cm și ΔΓ = 9 cm, să găsiți lungimea înălțimii AΔ.

Sugestie: Folosiți unghiurile ascuțite complementare (a căror sumă este 90°).

Exercițiul 2:

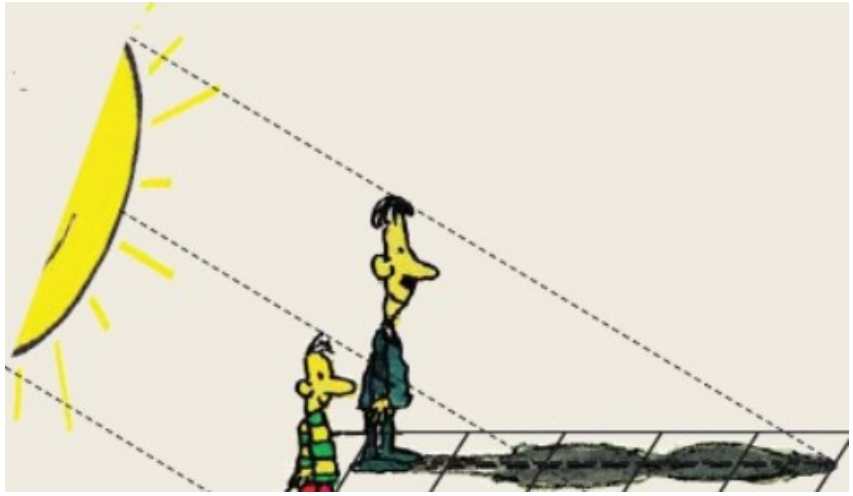
Într-un trapez ABΓΔ cu bazele AB și ΓΔ, diagonalele sale AΓ și BΔ se întâlnesc în punctul O.

Dacă bazele sunt AB = 6 cm și ΓΔ = 10 cm, iar segmentul OA = 3 cm, să calculați lungimea segmentului OΓ.

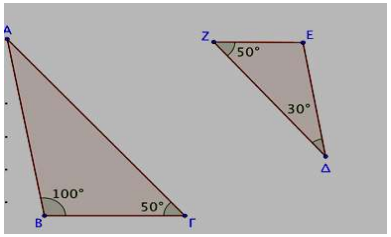
Sugestie: Există unghiuri alternante interne datorită bazelor paralele.

Exercițiul 3: Umbra

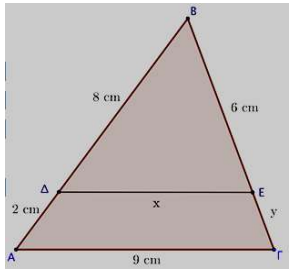
Fiul are înălțimea de 1,36 m. Care este înălțimea tatălui?



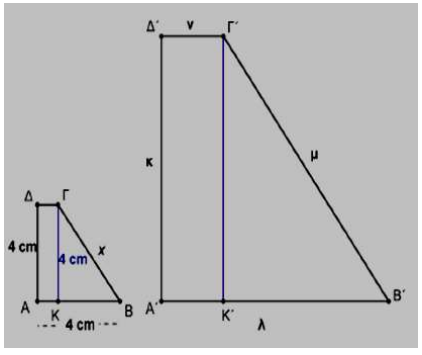
Άσκηση 4:
Να αποδείξετε ότι
τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια
και να γράψετε τους ίσους λόγους



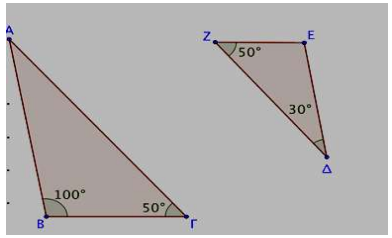
Άσκηση 5:
Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι
τα τρίγωνα ΑΒΓ,ΒΔΕ είναι όμοια.



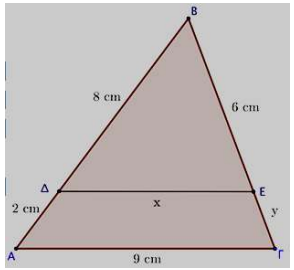
Άσκηση 6:
Τα τραπέζια του σχήματος
είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.
Να υπολογίσετε τα x κ, λ, μ, ν **.**



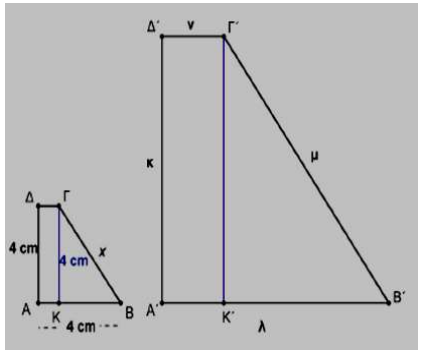
Exerciţiul 4:
Să demonstrați că
triunghiurile ΑΒΓ și ΔΕΖ sunt
asemenea
și să scrieți rapoartele egale



Exerciţiul 5:
În figura alăturată ΔΕ // ΑΓ.
Să demonstrați că
triunghiurile ΑΒΓ și ΒΔΕ sunt asemenea.



Exerciţiul 6:
Trapezele din figură
sunt asemenea cu raportul de asemănare $\frac{1}{3}$.
Să calculați x și k, λ, μ, ν.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίδα	Ενότητα
4-10	*Αριθμοί - πράξεις μεταξύ τους*
11-17	*Δυνάμεις - ιδιότητες δυνάμεων*
18-20	*Τετραγωνικές ρίζες και ιδιότητές τους*
21-25	*Μονώνυμα, ορισμοί και πράξεις*
26-30	*πολυώνυμα, ορισμοί και πράξεις*
30-33	*Αξιοσημείωτες ταυτότητες*
34-37	*Παραγοντοποίηση*
38	*Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο- Μέγιστος κοινός διαιρέτης αλγεβρικών παραστάσεων*
39-45	*Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις και πράξεις αυτών*
46-47	*Εξισώσεις α΄ βαθμού*
48-53	*Εξισώσεις β΄βαθμού*
55-62	*Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων*
63-72	*Συστήματα (γραμμικά)δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους*
74-82	*Επανάληψη σε βασικές έννοιες γεωμετρίας*
84-94	*Ίσα τρίγωνα και εφαρμογές αυτών*
95-101	*Θεώρημα Θαλή και όμοια σχήματα*

CUPRINS

Pagina	Unitatea
4-10	*Numere - operații între ele*
11-17	*Puteri - proprietăți ale puterilor*
18-20	*Rădăcini pătrate și proprietățile lor*
21-25	*Mononimele, definiții și operații*
26-30	*Polinoame, definiții și operații*
30-33	*Identități notabile*
34-37	*Factorizare*
38	*Cel mai mic multiplu comun - Cel mai mare divizor comun al expresiilor algebrice*
39-45	*Expresii algebrice explicite și operațiile lor*
46-47	*Ecuații de gradul întâi*
48-53	*Ecuații de gradul doi*
55-62	*Reprezentări grafice ale funcțiilor*
63-72	*Sisteme de două ecuații (liniare) cu două necunoscute*
74-82	*Recapitularea conceptelor de bază ale geometriei*
84-94	*Triunghiuri isoscel și aplicațiile acestora*
95-101	*Teorema lui Thales și figuri similare*