

Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό και εκθέτη ακέραιο

1) Δύναμη με βάση το ρητό αριθμό α και εκθέτη το φυσικό αριθμό ν,

($v > 1$) ονομάζεται το γινόμενο από ν παράγοντες ίσους με α.

Η δύναμη με **βάση** το ρητό αριθμό α και **εκθέτη** το φυσικό αριθμό ν,

($v > 1$) συμβολίζεται με a^v . Δηλαδή:

$$a^v = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{v \text{ παράγοντες}}$$

εκθέτης
3⁵ = 3 · 3 · 3 · 3 · 3
↑
βάση



Το σύμβολο a^v ονομάζεται και νιοστή δύναμη του α ή λέμε ότι υψώνουμε το α στην νιοστή. Την 2^η δύναμη του α (a^2) την λέμε και α στο τετράγωνο. Την 3^η δύναμη του α (a^3) την λέμε και α στον κύβο.

2) Για $v = 1$, γράφουμε $a^1 = a$

3) Για $v = 0$, γράφουμε $a^0 = 1$ με $a \neq 0$

4) Αν $a > 0$, τότε $a^v > 0$

5) Αν $a < 0$ και ν άρτιος, τότε $a^v > 0$

6) Αν $a < 0$ και ν περιττός, τότε $a^v < 0$

7) $a^{-1} = \frac{1}{a}$ με $a \neq 0$

Προσοχή!

☐ Να μη μπερδεύουμε το a^v με το $a \cdot v$. Για παράδειγμα είναι $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 343$ και όχι $3 \cdot 5 = 15$.

☐ Άλλο πράγμα είναι το $(-5)^2$ και άλλο το -5^2 . Στην περίπτωση $(-5)^2$ ο αριθμός -5 υψώνεται στο τετράγωνο, συνεπώς $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$. Στην περίπτωση -5^2 το $-$ συμβολίζει τον αντίθετο του 5^2 και δεν υψώνεται στη δύναμη, συνεπώς $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$.

Ιδιότητες δυνάμεων

1)	$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$
2)	$a^u : a^v = a^{u-v}$
3)	$(a \cdot \beta)^v = a^v \cdot \beta^v$
4)	$(a : \beta)^v = a^v : \beta^v$
5)	$(a^v)^u = a^{v \cdot u}$

π.χ $(-2)^3 \cdot (-2)^5 = (-2)^{3+5} = (-2)^8 = 2^8 = 256$

π.χ $(-3)^5 : (-3)^2 = (-3)^{5-3} = (-3)^2 = 3^2 = 9$

π.χ $(-3)^3 \cdot 2^3 = [(-3) \cdot 2]^3 = (-6)^3 = -216$

π.χ $(-12)^5 : 6^5 = [(-12) : 6]^5 = (-2)^5 = -32$

π.χ $[(-2)^3]^2 = (-2)^6 = 2^6 = 64$

$$6) \quad a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

$$7) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-v} = \left(\frac{b}{a}\right)^v$$

$$\text{π.χ} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-2^5} = -\frac{1}{2^5} = -\frac{1}{32}$$

$$\text{π.χ} \quad \left(\frac{3}{12}\right)^{-3} = \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 4^3 = 64$$

Λυμένες ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$(\alpha) \quad -4^4 \quad (\beta) \quad (-4)^4 \quad (\gamma) \quad -4^3 \quad (\delta) \quad (-4)^3$$

Λύση:

$$(\alpha) \quad -4^4 = -4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -256$$

$$(\beta) \quad (-4)^4 = 4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

$$(\gamma) \quad -4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$$

$$(\delta) \quad (-4)^3 = -4^3 = -4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$$

2) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = (-3)^2 \cdot 2 - 2^3 + (-3)^3 : 9 + [-3 - (-1)^{2019} \cdot 7]$$

Λύση:

$$\Pi = (-3)^2 \cdot 2 - 2^3 + (-3)^3 : 9 + [-3 - (-1)^{2019} \cdot 7] =$$

$$= 9 \cdot 2 - 8 + (-27) : 9 + [-3 - (-1) \cdot 7] =$$

$$= 18 - 8 - 3 + (-3 + 7) =$$

$$= 18 - 8 - 3 + 4 =$$

$$= -11 + 22 =$$

$$= 11$$

3) Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$B = (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4$$

Λύση:

$$A = (-4)^1 + (-4)^2 + (-4)^3 + (-4)^4 = -4 + 16 - 64 + 256 = -68 + 272 = 204$$

4) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $(-2)^3 (-2)^4 (-2)^2$ (β) $\frac{(-3)^4}{3^2}$ (γ) $((-2)^3)^2 \cdot (2^4)^2$ (δ) $2^3 \cdot 4^3 \cdot (-2)^3$

Λύση:

(α) $(-2)^3 (-2)^4 (-2)^2 = (-2)^9 = -2^9 = -512$

(β) $\frac{(-3)^4}{3^2} = \frac{81}{9} = 9$

(γ) $((-2)^3)^2 \cdot (2^4)^2 = (-2)^6 \cdot 2^8 = 2^6 \cdot 2^8 = 2^{14} = 16.384$

(δ) $2^3 \cdot 4^3 \cdot (-2)^3 = [2 \cdot 4 \cdot (-2)]^3 = (-16)^3 = -16^3 = -4.096$

Ασκήσεις για λύση

1) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $(-3)^2$ (β) $(-3)^3$ (γ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ (δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ (ε) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^2$

2) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

(α) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$ (β) $(-2)^6 - 2^6$ (γ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

3) Να υπολογιστούν τα γινόμενα:

(α) $(-1)^{2019} \cdot (-1)^{400} \cdot 7^5 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5$ (β) $\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$ (γ) $(1,5)^6 \cdot (-2)^6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^6$

4) Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:

i. $(-12)^2$ ii. $(+10)^3$ iii. $(-2)^5$
iv. $-(-3)^3$ v. $(-5)^2$ vi. $-(-1)^6$
vii. $(0,001)^2$ viii. $(+3,2)^2$ ix. $(-7)^2$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $(-2)^3 - (+3)^3$ ii. $(-5)^1 + (-2)^4$

$(+1)^3 + (-3)^2 - (-5)^2$

$(-1)^5 - (-2)^4 - (-3)^3$

iii.

iv.

6) Να κάνετε τις πράξεις:

i. $2^3 \cdot 3^2$ ii. $(-5)^2 \cdot (-1)^5$
iii. $(-10)^3 \cdot (-1)^5$ iv. $(-2)^2 \cdot (-3)^2$



7) **Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:**

- i. $3^2 - 4(-2)^2(-1)$ ii. $2(-3)^2(-1)^4 + 3(-5)^2 2^3$
 iii. $3(-4)^2 + (-5)(-1)^4 - 6(-2)^4$ iv. $6^2 - 3 \cdot 2^3(-3)^2 - 2019^0$

8) **Να κάνετε τις πράξεις:**

- i. $(-2)^2 \cdot (-2^2)$ ii. $2^3 \cdot 2^2$
 iii. $2^2 \cdot 3^2$ iv. $3^{-2} \cdot 3^0 \cdot 3^2$
 v. $12^2(-2)^2$ vi. $\frac{2^4}{2^3}$
 vii. $\frac{(-2)^3}{2^2}$ viii. $\frac{24^3}{6^3}$
 ix. $((-2)^4)^2$ x. $((-2)^3)^{-2}$

9) **Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις:**

- (α) 4^{-1} (β) $(-3)^{-3}$ (γ) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ (δ) $\left(-\frac{7}{2}\right)^{-3}$ (ε) $(-2017)^0$

10) **Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:**

$$A = -(-4)^1 + (-4)^2 - (-4)^3 - (-4)^4$$

11) **Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:**

- (α) $(-2)^5 \cdot (-2)^6$ (β) $(-3)^{-3} : (-3)^{-4}$ (γ) $\left[(-2)^3\right]^{-4}$ (δ) $(-3)^3 \cdot 2^{-3}$ (ε) $16^{-4} : (-8)^{-4}$

12) **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

- (α) $10^{-2}x = 10^4$ (β) $(10^{-3})^2 \cdot 10^8 \cdot \dots = 3$ (γ) $3^{12}x = 3^9$

13) **Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:**

$$A = (-1)^{2017} - (-1)^{2018} + (-1)^{2019} - (-1)^{2020}$$

$$B = -3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 4^1$$

$$\Gamma = -\frac{(-12)^5}{4^5} - \frac{15^4}{(-5)^4} + \frac{21^3}{(-7)^3}$$

14) **Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:**

$$A = (-3)^{-2} - (-3)^{-1} + (-3)^0 - (-3)^1 + (-3)^2$$

$$B = \frac{(-4)^{-3}}{12^{-3}} + \frac{(-5)^{-2}}{(-15)^{-2}} - \frac{(-6)^{-4}}{(-18)^{-4}}$$



7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών

- 1) **Τυποποιημένη μορφή ενός ρητού αριθμού** είναι η μορφή με την οποία μπορούμε να γράψουμε τον αριθμό, ως γινόμενο ενός αριθμού από το 1 μέχρι το 10 επί κατάλληλη δύναμη του 10.
- 2) Τους **πολύ μεγάλους αριθμούς** (κατά απόλυτη τιμή) μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή: $a \cdot 10^n$, με $1 \leq |a| < 10$ και n φυσικός.

π.χ.

- $40.000 = 4 \cdot 10^4$
- $12.000.000 = 1,2 \cdot 10^7$
- $-29.000 = -2,9 \cdot 10^4$

3) Τους **πολύ μικρούς αριθμούς** (κατά απόλυτη τιμή) μπορούμε να τους γράψουμε στη μορφή:

$\alpha \cdot 10^{-\nu}$, με $1 \leq |\alpha| < 10$ και ν φυσικός.

π.χ.

- $0,000785 = 7,85 \cdot 10^{-4}$
- $-0,00029 = -2,9 \cdot 10^{-4}$

4) Από τους θετικούς αριθμούς με τυποποιημένη μορφή, μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει το μεγαλύτερο εκθέτη στο 10.

π.χ.

- $9,23 \cdot 10^6 < 6,78 \cdot 10^8 < 3,1 \cdot 10^{10}$

Ασκήσεις για λύση

1) Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι σε τυποποιημένη μορφή;

(α) $8,3 \cdot 10^{-4}$ (β) $-2,9 \cdot 10^8$ (γ) $41,7 \cdot 10^{-2}$ (δ) $0,7 \cdot 10^{12}$

2) Να γράψετε στην τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

35.010.000 0,0000007 0,00000000701

3) Να γράψετε στην τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

2.700.000 32,57 0,00000101

4) Να γράψετε στην τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

-320.000.000 -12.345 -0,000000000123

5) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = 3,6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^5 - 3,2 \cdot 10^4$ $B = 1,5 \cdot 10^{-3} + 3,6 \cdot 10^{-2} - 3,6 \cdot 10^{-4}$

6) Το φως κινείται με ταχύτητα $300.000.000 \text{ m}$ το δευτερόλεπτο.

(α) Να γράψετε τον αριθμό αυτό στην τυποποιημένη μορφή.

(β) Πόσο χρόνο χρειάζεται το φως για να διανύσει απόσταση $1,692 \cdot 10^9 \text{ km}$;

7) Να διατάξετε σε μια σειρά από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$2,1 \cdot 10^{-3}$, $5,4 \cdot 10^2$, $7,09 \cdot 10^4$, , $5,4 \cdot 10^{-2}$