Παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση ονομάζουμε τη διαδικασία μετατροπής της πράξης της πρόσθεσης (ή της αφαίρεσης) σε πολλαπλασιασμό.

Είδη παραγοντοποίησης:

1) Κοινός Παράγοντας

Θέλω να μετατρέψω σε πολλαπλασιασμό την πρόσθεση :

$$5\cdot x + 35\cdot y^2 = 5\cdot x + 5\cdot 7\cdot y^2$$

κοινός παράγοντας

Γράφω τον κοινό παράγοντα, μετά επί και μετά ανοίγω παρένθεση.

$$5\cdot(x + 7\cdot y^2)$$

Μέσα στην παρένθεση μένει ότι είχα πριν αν δε γράψω τον κοινό παράγοντα.

Πριν είχα $5\cdot x$, μέσα στην παρένθεση αν δε γράψω τον κοινό παράγοντα 5, θα μένει x.

Πριν είχα $35\cdot y^2 = 5\cdot 7\cdot y^2$, αν βγάλω τον κοινό παράγοντα 5 μένει $7\cdot y^2$. Γι' αυτό γράφω $7\cdot y^2$ εντός της παρένθεσης.

Άλλα παραδείγματα κοινού παράγοντα:

(i) $5\cdot \omega^3\cdot y - 7\cdot \omega\cdot x = \omega\cdot(5\omega^2 y - 7x)$

(ii) $x^2 - 5\cdot x = x\cdot(x-5)$

(iii) $\alpha\beta^2\gamma^3 + \alpha^3\beta^2\gamma + \alpha^2\beta^2\gamma^2 = \alpha\beta\gamma\cdot(\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta + \alpha\beta\gamma)$

(iv) $\sqrt{x}\cdot(x+5)^2 - \sqrt{x}\cdot(x+5) = \sqrt{x}\cdot(x+5)\cdot[(x+5)-1]$

(v) $(\alpha+\beta)^3 - (\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2\cdot[(\alpha+\beta)-1]$

(vi) $2y^2 - 8\cdot y = 2\cdot y\cdot(y-4)$

(vii) $\frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x^3 = \frac{1}{3}\cdot x^2\cdot(1-2\cdot x)$

2) Ομαδοποίηση

Πολλές φορές για να παραγοντοποιήσω πλήρως μια παράσταση, τη "σπάω" σε ομάδες και βγάζω κοινό παράγοντα, ανάμεσα στους όρους κάθε ομάδας. Μετά επαναλαμβάνω τη διαδικασία όσες φορές

Χρειάζεται ώσπου να είναι πλήρως παραγοντοποιημένη η παράσταση.

π.χ. $x^3 - x^2 + 3 \cdot x - 3$

Δε γίνεται να βγεί κοινός παράγοντας και από τους 4 όρους της παράστασης. Τον σπάω σε δύο ομάδες.

$$\underbrace{(x^3 - x^2)}_{\substack{\text{στην } 1^{\eta} \text{ ομάδα} \\ \text{κοινός παράγοντας} \\ \text{το } x^2}} + \underbrace{(3x - 3)}_{\substack{\text{στη } 2^{\eta} \text{ ομάδα} \\ \text{κοινός παράγοντας} \\ \text{το } 3}}$$

$$= x^2 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-1)$$

Ανάμεσα στους 2 όρους που εμφανίζονται βγαίνει κοινός παράγοντας το $(x-1)$

$$= (x-1) \cdot (x^2 + 3)$$

3) Ταυτότητες

Οι ταυτότητες είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για να εκτελώ παραγοντοποίηση.

(sos) **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ** (ως παραγοντοποίηση)

- $\alpha^2 + 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2$ (Τετράγωνο του αθροίσματος)

  SOS

- $\alpha^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2$ (Τετράγωνο της διαφοράς)

  SOS

- $\alpha^3 + 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3$ (Κύβος του αθροίσματος)

  ΟΧΙ SOS

- $\alpha^3 - 3\cdot\alpha^2\cdot\beta + 3\cdot\alpha\cdot\beta^2 - \beta^3 = (\alpha-\beta)^3$ (Κύβος της διαφοράς)

  ΟΧΙ SOS

- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha+\beta)$ (Διαφορά Τετραγώνων)

  Super SOS

- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ (Διαφορά κύβων)

  SOS

- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ (Άθροισμα κύβων)

  SOS

Παραδείγματα:

(i) $$x^2 - 2\cdot x + 1 = \overbrace{(x)^2 - 2\cdot x\cdot 1 + (1)^2}^{a^2 - 2\cdot a\cdot \beta + \beta^2}$$

$$= (x-1)^2$$

(ii) $$x^2 - 25 = \underbrace{x^2 - 5^2}_{a^2 - \beta^2} = \underbrace{(x-5)(x+5)}_{(a-\beta)(a+\beta)}$$

(Διαφορά Τετραγώνων

(iii) $$x^6 - 16 = (x^3)^2 - 4^2 = (x^3-4)(x^3+4)$$

(iv) $$x^2 - 2xy + y^2 - a^2 - 2a\beta - \beta^2$$

$$= (x^2 - 2xy + y^2) - (a^2 + 2a\beta + \beta^2)$$

$$= (x-y)^2 - (a+\beta)^2$$

$$= [(x-y) - (a+\beta)]\cdot[(x-y) + (a+\beta)]$$

(v) $$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \underbrace{x^3 - 3\cdot x^2\cdot 1 + 3\cdot x\cdot 1^2 - 1^3}_{a^3 - 3\cdot a^2\cdot \beta + 3\cdot a\cdot \beta^2 - \beta^3}$$

$$= (x-1)^3$$

4) Παραγοντοποίηση του τριωνύμου

Ένα τριώνυμο $(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma)$, $\alpha \neq 0$ παραγοντοποιείται μέσω του τύπου

$$\boxed{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = \alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου (αν υπάρχουν)

Παραδείγματα:

(i) $x^2 - 5 \cdot x + 6$

$\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$

Ρίζες: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

(Τις βρήκα με ΓΡΗΓΟΡΟ ΤΡΟΠΟ)

Άρα χρησιμοποιώντας τον τύπο βρίσκω

$$x^2 - 5 \cdot x + 6 = \underbrace{1 \cdot (x-2) \cdot (x-3)}_{\alpha \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)} = (x-2)(x-3)$$

ii) $9x^2 - 12 \cdot x + 4$

$\alpha = 9$, $\beta = -12$, $\gamma = 4$

$$\begin{aligned} \Delta &= \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma \\ &= (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 \\ &= 144 - 36 \cdot 4 \\ &= 144 - 144 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Delta = 0$

Άρα το τριώνυμο έχει μια λύση (ρίζα) πραγματική και διπλή που δίνεται απ' τον τύπο:

$$X = -\frac{\beta}{2\cdot\alpha} = -\frac{-12}{2\cdot 9} = +\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ (διπλή)}$$

Άρα η παραγοντοποίηση του τριωνύμου γίνεται μέσω του τύπου:

$$9x^2 - 12x + 4 = 9\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$= 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot 3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$= (3\cdot x-2)\cdot(3x-2)$$

$$= (3x-2)^2$$

Ένας άλλος (πιο εύκολος) τρόπος για να παραγοντοποιήσω το τριώνυμο $(9x^2-12\cdot x+4)$ είναι να παρατηρήσω ότι το τριώνυμο είναι ανάπτυγμα ταυτότητας:

$$(9x^2-12\cdot x+4) = 3^2\cdot x^2 - 2\cdot 6\cdot x + 2^2$$

$$= (3\cdot x)^2 - 2\cdot(3\cdot 2\cdot x) + 2^2$$

$$= \underbrace{(3\cdot x)^2 - 2\cdot(3\cdot x)\cdot 2 + 2^2}_{a^2 - 2\cdot a\cdot\beta + \beta^2}$$

$$= (3x-2)^2$$

* Παρατήρηση : Όλα τα τριώνυμα των οποίων η διακρίνουσα είναι ίση με το 0 είναι ανα-πτύγματα τετραγώνου. Δηλ. είτε τετράγωνα αθροίσματος, είτε τετράγωνα διαφοράς.

5) Horner

Μια σπάνια περίπτωση Παραγοντοποίησης είναι να έχω Πολυώνυμα 3ου, 4ου, 5ου κ.ο.κ. βαθμού και να θέλω να τα παραγοντοποιήσω

π.χ. Θέλω να παραγοντοποιήσω το πολυώνυμο 3ου βαθμού ($x^3 - 8 \cdot x + 8$)

Τότε ούτε κοινό παράγοντα μπορώ να βγάλω και απ' τους 3 όρους.

Ούτε ομαδοποίηση μπορώ να κάνω

Ούτε το ανάπτυγμα κάποιας ταυτότητας είναι ούτε τριώνυμο είναι για να χρησιμοποιήσω τον τύπο

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Horner

- Βρίσκω το σταθερό όρο (είναι το $+8$)
- Βρίσκω όλους τους ακέραιους διαιρέτες του σταθερού όρου : $1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8$

• Για κάθε έναν απ' τους σταθερούς όρους κάνω σχήμα Horner, ώσπου να πετύχω κάποιο σχήμα Horner, του οποίου το υπόλοιπο είναι 0.

Το πολυώνυμο είναι $x^3 - 8\cdot x + 8$

$$= 1\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 8\cdot x + 8$$

Σχήμα Horner για το 1

1	0	-8	8	1
	1	1	-7	
1	1	-7	1	Υπόλοιπο

Σχήμα Horner για το −1

1	0	-8	8	-1
	-1	1	7	
1	-1	-7	15	Υπόλοιπο

Σχήμα Horner για το 2

1	0	-8	8	2
	2	4	-8	
1	2	-4	0	Υπόλοιπο
α	β	γ		

Αφού το σχήμα Horner για το 2 έδωσε υπόλοιπο 0, άρα το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου. Άρα το $(x-2)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου x^3-8x+8

Άρα το πολυώνυμο γράφεται :

$$x^3 - 8x + 8 = (x-2)\cdot(a\cdot x^2 + \beta\cdot x + \gamma)$$

όπου τα a, β, γ τα παίρνω απ' την τελευταία γραμμή του επιτυχημένου σχήματος Horner. Δηλ. $a = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -4$. Άρα:

$$x^3 - 8\cdot x + 8 = (x-2)\cdot(x^2 + 2\cdot x - 4)$$

* Παρατήρηση: Στην επόμενη ενότητα όρια. Όπου θα έχω κάποιο όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, όταν θα χρειαστεί να κάνω παραγοντοποίηση Horner, θα πάω και θα εφαρμόσω το σχήμα Horner απευθείας για το x_0 (εκεί που τείνει το x δηλαδή).

** Παρατήρηση: Επαναλαμβάνουμε τις παραγοντοποιήσεις (όλων των ειδών) για κάθε παρένθεση που έχει προκύψει ώσπου να προκύψουν όροι που δεν παραγοντοποιούνται άλλο. Στην επόμενη ενότητα (όρια), όταν έχω κάποιο όριο $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, θα κάνω παραγοντοποιήσεις ώσπου να εμφανιστεί ο παράγοντας $(x - x_0)$ και σε αριθμητή και σε παρονομαστή και μετά τον διαγράφω.

***

Παρατήρηση: Πολλές φορές εφαρμόζω πολλά είδη παραγοντοποίησης συνδυαστικά.

Παραδείγματα:

(i) $2\cdot x^2 - 32 = 2\cdot x^2 - 2\cdot 16$

Κοινός Παράγοντας το 2

$= 2\cdot(x^2-16) = 2\cdot \underbrace{(x^2-4^2)}_{\text{διαφορά Τετραγώνων}}$

$= 2\cdot(x-4)\cdot(x+4)$

(ii) $7\cdot x^2 - 7(1+\sqrt{3})\cdot x + 7\sqrt{3}$

Κοινός Παράγοντας το 7

$= 7\cdot\underbrace{(x^2-(1+\sqrt{3})\cdot x+\sqrt{3})}$

Τριώνυμο, με το ΓΡΗΓΟΡΟ ΤΡΟΠΟ βρίσκω ότι οι ρίζες του είναι:

$x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{3}$. Οπότε θα εφαρμόσω τον τύπο: $ax^2+\beta x+\gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$

$= 7\cdot 1\cdot(x-1)\cdot(x-\sqrt{3}) = 7\cdot(x-1)\cdot(x-\sqrt{3})$

iii) $x\cdot(x-3)-2\cdot\underbrace{(3-x)}_{\substack{\text{βγάζω κοινό} \\ \text{παράγοντα το } -}}$

$= x\cdot(x-3)-2\cdot[-(-3+x)]$

πλήν το πλήν
μου κάνει σύν

$= x\cdot(x-3)+2\cdot(-3+x)$

$= x\cdot(x-3)+2\cdot(x-3)$

Κοινός Παράγοντας
το $(x-3)$

$= (x-3)\cdot(x+2)$

(iv) $2\cdot x^3-2x = 2\cdot x\cdot(x^2-1)$

Κοινος
Παράγοντας
το $2\cdot x$

$= 2\cdot x\cdot\underbrace{(x^2-1^2)}_{\substack{\text{Διαφορά} \\ \text{Τετραγώνων}}} = 2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

(v) $x^3+x^2-4\cdot x-4$

Δε μπορεί να βγεί
κοινός παράγοντας
και απ' τους 4 όρους
Το σπάω σε 2 ομάδες

$= \underbrace{(x^3+x^2)}_{\substack{\text{κοινός παράγοντας} \\ \text{το } x^2}} + \underbrace{(-4x-4)}_{\substack{\text{κοινός παράγοντας} \\ \text{το } (-4)}}$

$$= \underbrace{x^2 \cdot (x+1) - 4 \cdot (x+1)}$$

Κοινός παράγοντας το $(x+1)$

$$= (x+1) \cdot (x^2 - 4)$$

$$= (x+1) \cdot \underbrace{(x^2 - 2^2)}_{\text{διαφορά τετραγώνων}}$$

$$= (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$$